

EXPÉRIENCE DE STERN ET GERLACH (TPC 2016)

I) Analyse du jet d'atomes d'argent

Q1. La masse molaire M_A est la masse de N_A molécules. La masse d'une molécule est donc :

$$m_{Ag} = \frac{M_{Ag}}{N_A}$$

Pour un GPM, l'énergie interne correspond à l'énergie cinétique microscopique moyenne des atomes :

$$U = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} N m_{Ag} \langle v^2 \rangle \quad \text{où } N \text{ est le nombre d'atomes}$$

$$\text{Or, } U = \frac{3}{2} n R T = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} R T$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 R T}{m_{Ag} N_A}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{3 R T}{M_{Ag}}}$$

$$\text{A.N. } v_0 = 541 \text{ m.s}^{-1}$$

Q2. On associe à toute particule une longueur d'onde de De Broglie :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_{Ag} v} \sim \frac{h}{m_{Ag} v_0} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \times 6,02 \cdot 10^{23}}{108 \cdot 10^{-3} \times 541}$$

$\Rightarrow \lambda_{dB} = 6,80 \text{ pm} \ll b = 1 \text{ mm} \Rightarrow$ on peut négliger le phénomène de diffraction pour les atomes d'Ag traversant la fente.

Q3. Densité volumique de particules :

$$n^* = \frac{N}{V} = \frac{n N_A}{V} = \frac{P}{R T} N_A \quad \Rightarrow \quad n^* = \frac{P}{k_B T}$$

$$\text{A.N. } n^* = \frac{10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 1270} = 5,7 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$$

$$Q4. \quad l^* = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 n^*} = \frac{1}{4\pi \times (160 \cdot 10^{-12})^2 \times 5,7 \cdot 10^{16}}$$

$$l^* = 54,6 \text{ m}$$

$l^* \gg$ dimensions du dispositif $\Rightarrow$ les atomes d'Ag n'interagissent pas entre eux, le modèle du GP convient

II) Analyse de la déflexion magnétique

II.1) Magnéton de Bohr

$$Q5. \quad \vec{f}_e = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R_H^2} \vec{u}_z$$

$$\frac{\|m_e \vec{g}\|}{\|\vec{f}_e\|} = \frac{m_e g \cdot 4\pi\epsilon_0 R_H^2}{e^2} \approx \frac{10^{-30} \times 10 \times 10 \times 10 \cdot 10^{-12} \times (100 \cdot 10^{-12})^2}{(10^{-19})^2}$$

$$\approx 10^{-21}$$

Le poids de l'e⁻ est négligeable devant la force électrique.

Q6. PFD appliqué à l'e⁻ dans R galiléen:

$$m_e \vec{a} = \vec{f}_e$$

$$-m_e R_H \dot{\theta}^2 = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R_H^2} \Rightarrow$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{e}{2\sqrt{\pi m_e \epsilon_0 R_H^3}}$$

$$Q7. \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\sqrt{\pi^3 m_e \epsilon_0 R_H^3}}{e}$$

$$A.N. \quad T = \frac{4 \times [\pi^3 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 8,8 \cdot 10^{-12} \times (160 \cdot 10^{-12})^3]^{1/2}}{1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$T = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

$$Q8. \quad I = \frac{\delta q}{dt} = \frac{-e}{T}$$

$$I = -\frac{e\omega}{2\pi}$$

$$Q9. \quad \vec{m} = I \vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{S} = \pi R_H^2 \vec{e}_\Delta$$

$$\Rightarrow \vec{m} = -\frac{e\omega R_H^2}{2} \vec{e}_\Delta$$

Q10. moment cinétique de l'électron:

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v} = R_H \vec{u}_x \wedge m_e R_H \omega \vec{u}_\theta \\ = m_e \omega R_H^2 \vec{u}_z = m_e \omega R_H^2 \vec{e}_\Delta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = \gamma \vec{L}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\gamma = -\frac{e}{2m_e}}$$

Q11. état fondamental $\Rightarrow n=1, \|\vec{L}\| = \hbar$
alors $\|\vec{m}\| = \mu_B = |\gamma| \hbar = \frac{e \hbar}{2m_e}$

$$\boxed{\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e}}$$

$$\text{A.N. } \mu_B = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 6,6 \cdot 10^{-34}}{2 \times 2\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31}}$$

$$\mu_B = 9,2 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

II.2) Cas d'un champ magnétique uniforme

Q12. TMC appliqué à l'e⁻:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

$$\text{or } \vec{L} = \frac{\vec{m}}{\gamma} \Rightarrow \frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Projetons cette relation sur $\vec{e}_z$:

$$\frac{dm_z}{dt} = \gamma (\vec{m} \wedge B \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dm_z}{dt} = 0}$$

En multipliant scalairement le TMC par $\vec{m}$, on a:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \vec{m} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m^2 \right) = \gamma (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{m} = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m^2 \right) = 0}$$

Q13. On en déduit que $\|\vec{m}\| = \text{cte}$ et $m_z = \vec{m} \cdot \vec{e}_z = \text{cte}$
donc l'angle θ entre $\vec{m}$ et $\vec{B}$ reste constant.

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge \vec{B} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{m} = \vec{\Omega} \wedge \vec{m}$$

analogie avec l'expression de la vitesse d'un point M en mouvement circulaire autour de O à la vitesse angulaire Ω :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

$\Rightarrow$ l'extrémité de $\vec{m}$ décrit un cercle d'axe $\vec{e}_z$ à la vitesse angulaire $\boxed{\Omega_L = |\gamma| B = \frac{eB}{2m_e}}$

Q14. $T_L = \frac{2\pi}{\Omega_L} = \frac{4\pi m_e}{eB} = \frac{4\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1} = 7,1 \cdot 10^{-11} \text{ s}$

temps de trajet dans l'entrefer :

$$T \approx \frac{l}{v_0} = \frac{3,5 \cdot 10^{-2}}{541} = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$T \gg T_L \Rightarrow$ sur la durée T , on raisonne sur la valeur moyenne de $\vec{m}$

Alors, $\langle m_x \rangle = \langle m_y \rangle = 0$ (car l'extrémité de $\vec{m}$ décrit un cercle dans un plan $\parallel \vec{a}$ (Oxy))

Q15. $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = +\vec{\text{grad}}(\vec{m} \cdot \vec{B})$
 $= \vec{\text{grad}}(m_z B) = m_z \vec{\text{grad}} B$ car $m_z = \text{cte}$

Cette force est nulle si $\vec{\text{grad}} B = 0 \Rightarrow$ un champ uniforme ne peut dévier les atomes.

II.3) Cas d'un champ magnétique non uniforme

Q16. " $\vec{B}$ est à flux conservatif" $\rightarrow$ le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul

Q17. Les lignes de champ sont plus resserrées au niveau du pôle nord, le champ y est plus intense.

$\Rightarrow \vec{\text{grad}} B_z$ est orienté du pôle sud vers le pôle nord donc selon $-\vec{e}_z$.

Q18. $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = \vec{\text{grad}} \vec{m} \cdot \vec{B} = m_z \vec{\text{grad}} B_z$

$$\boxed{\vec{F} = m_z \frac{dB_z}{dz} \vec{e}_z}$$

$$\|\vec{F}\| \approx \mu_B \frac{dB_z}{dz} = 9 \cdot 10^{-24} \times 500 = \underline{4,5 \cdot 10^{-21} \text{ N}}$$

Q19. En mécanique classique, l'angle entre $\vec{m}$ et $\vec{B}$ est quelconque et peut prendre toutes les valeurs entre 0 et π .

Alors m_z peut prendre toutes les valeurs entre $-\|\vec{m}\|$ et $+\|\vec{m}\|$ et F_z toutes les valeurs entre $-\|\vec{m}\| \frac{dB_z}{dz}$ et $+\|\vec{m}\| \frac{dB_z}{dz} \Rightarrow$ les $\neq$ atomes sont déviés d'un angle α qui peut prendre une valeur quelconque entre 2 valeurs extrêmes (cf figure A3b).

Q20. PFD appliqué à un atome dans l'entrefer de l'électroaimant:

$$m_{Ag} \vec{a} = \vec{F} = m_z \frac{dB_z}{dz} \vec{e}_z = \vec{cte}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{m_z}{m_{Ag}} \frac{dB_z}{dz} t \vec{e}_z + \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{m_z}{m_{Ag}} \frac{dB_z}{dz} \frac{t^2}{2} \vec{e}_z + v_0 t \vec{e}_x$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \rightarrow t = x/v_0 \\ z(t) = \frac{m_z}{m_{Ag}} \frac{dB_z}{dz} \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

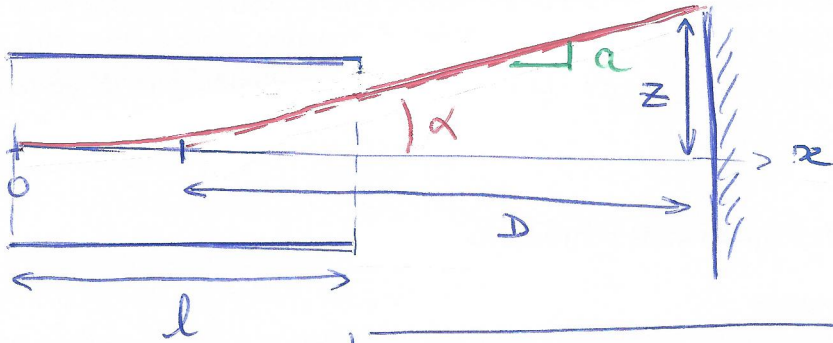
d'où l'équation de la trajectoire:

$$\boxed{z(x) = \frac{m_z}{m_{Ag} 2 v_0^2} \frac{dB_z}{dz} x^2} \rightarrow \text{trajectoire parabolique}$$

Q21. après l'entrefer, les atomes sont isolés (poids négligé) $\Rightarrow$ leur trajectoire est rectiligne uniforme, leur vitesse est celle atteinte en sortie de l'entrefer ($x = l$)

$$\text{pente} \left| a = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{x=l} = \frac{m_z}{m_{Ag} v_0^2} \frac{dB_z}{dz} l \right|$$

Q22.



$$a = \tan \alpha = \frac{z}{D} \Rightarrow \left| z = a D = \frac{m_z}{m_{Ag} v_0^2} \frac{dB_z}{dz} l D \right|$$

$$\text{or } v_0^2 = \frac{3RT}{m_{Ag} N_A} = \frac{3k_B T}{m_{Ag}}$$

$$\Rightarrow \left| z = \frac{m_z}{3k_B T} \frac{dB_z}{dz} l D \right|$$

Q23. D'après A3c), $z = \pm \frac{2}{20} \text{ mm} = \pm 0,1 \text{ mm}$

$$m_z = \frac{z \cdot 3k_B T}{\frac{dB_z}{dz} l D} = \pm \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \times 3 \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 1270}{500 \times 3,5 \cdot 10^{-2} \times 1,8 \cdot 10^{-2}}$$

$$m_z = \pm 2 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \rightarrow \text{valeur proche de celle de } \mu_B$$

Q24. Ag : $[Kr] 4d^{10} 5s^1$

1 seul e- célibataire $\Rightarrow$ moment magnétique similaire à celui de l'hydrogène (μ_B) $\rightarrow$ en accord avec le résultat de la question Q23

Q25. L'expérience met en évidence la quantification du moment cinétique de l'atome (2 tâches au lieu d'une tâche allongée). L'existence des ces 2 tâches est en fait due à l'existence du moment magnétique de spin de l'atome.