

Mécanique des Solides et des Matériaux 2

Elasticité-Viscoélasticité Plasticité-Rupture



Prof. Matteo Ciccotti

Contents

1	Introduction (Slides Séminaire)	1
1.1	Mode d'emploi	1
2	Mécanique des Milieux Continus (MMC)	3
2.1	Déformations	3
2.1.1	Variations de distances et de volume	3
2.1.2	Translation, rotation, déformation	5
2.1.3	Repère propre, valeurs propres et invariants	6
2.1.4	Sphérique et déviateur	8
2.1.5	États de déformation simples	9
2.1.6	Continuité et compatibilité des déformations	12
2.2	Contraintes	13
2.2.1	Vecteurs et tenseurs de contraintes	13
2.2.2	Repère propre, contraintes principales et invariants	14
2.2.3	Sphérique et déviateur	15
2.2.4	Cercles de Mohr	16
2.3	La loi fondamentale de la dynamique	18
2.3.1	Dérivation en forme locale	18
2.3.2	Dérivation à partir d'un bilan global	19
2.3.3	Loi d'équilibre statique	20
2.4	Lois de comportement (Slides Séminaire)	21
2.4.1	Le problème général de la mécanique	21
2.4.2	Mesure des lois de comportement	21
2.4.3	Contraintes et déformations nominales et vraies	21
2.4.4	Essais mécaniques typiques (1D)	22
2.4.5	Comportement élastique	22
2.4.6	Comportement visco-élastique (solide)	22
2.4.7	Comportement élasto-plastique	22
2.4.8	Essais mécaniques complémentaires (3D)	22
2.5	Classes de matériaux, micromécanismes de déformation et rupture (Slides Séminaire)	22
2.5.1	Diagrammes de Ashby	22
2.5.2	Matériaux minéraux: céramiques, verres, roches	22
2.5.3	Matériaux métalliques	22
2.5.4	Matériaux organiques: les polymères	22
3	Elasticité	23
3.1	Loi de comportement élastique et potentiel élastique	23
3.1.1	Cas des petites déformations	24
3.1.2	Cas des matériaux isotropes	24
3.1.3	Contraintes résiduelles d'origine thermoélastique	25

3.1.4	Modules de compressibilité de cisaillement	26
3.1.5	Module d'Young et rapport de Poisson	26
3.2	Les problèmes plans	28
3.2.1	La déformation plane (<i>plane strain</i>)	28
3.2.2	La contrainte plane (<i>plane stress</i>)	29
3.2.3	Modules effectifs et fonction de contrainte d'Airy	30
3.3	Approches énergétiques	31
3.3.1	La densité d'énergie élastique (revisited)	31
3.3.2	Théorème de l'énergie potentielle - Principe variationnel	32
3.3.3	Analyse de stabilité	34
3.4	Solution de problèmes simples en loi d'échelle	35
3.4.1	Transfert de charge sur un joint soudé	35
3.4.2	Flexion d'une poutre	36
3.4.3	Flambement	45
3.4.4	Le contact de Hertz	47
3.5	Elastodynamique - Ondes et Vibrations (Slides Séminaire)	50
3.5.1	Equation élasto-dynamique de Lamé-Navier	50
3.5.2	Ondes de volume	51
3.5.3	Ondes de surface et d'interface	51
3.5.4	Ondes de flexion sur plaques et coques	51
3.5.5	Modes propres de vibration d'une structure	51
3.5.6	Couplage élastodynamique et limites du regime quasistatique	51
4	Viscoélasticité	53
4.1	Théorie viscoélastique linéaire (1D)	53
4.1.1	Aspects phénoménologiques	53
4.1.2	Modèles rhéologiques	56
4.1.3	Représentation temporelle	61
4.1.4	Représentation en fréquence et modules élastiques complexes	65
4.1.5	Dissipation d'énergie pendant un test oscillant	69
4.1.6	Principe de correspondance et effets de structure	70
4.1.7	Extension 3D de la viscoélasticité linéaire	70
4.1.8	Ondes et vibrations atténuées	71
4.2	Comportement viscoélastique des polymères (Slides Séminaire)	72
5	Plasticité	73
5.1	Caractéristiques des courbes de charge uniaxiale (1D)	74
5.1.1	Courbe de charge monotone: seuil de plasticité	74
5.1.2	Décharge élastique: partage de la déformation	76
5.1.3	Effet de la plastification sur les propriétés mécaniques	77
5.2	Description mathématique du comportement plastique uniaxial (1D)	78
5.2.1	Fonction d'écrouissage	78
5.2.2	Déformation plastique équivalente	78
5.2.3	Direction de l'écoulement plastique	80
5.2.4	Dissipation d'énergie	81
5.2.5	Modèles simplifiés de comportement plastique	82
5.2.6	Sommaire des lois du comportement plastique 1D	84
5.3	Description mathématique du comportement plastique triaxial (3D)	85
5.3.1	Charge/décharge élastique	85
5.3.2	Déformation plastique équivalente	86

5.3.3	Condition de plastification	87
5.3.4	Codirectionalité - Loi d'écoulement normale	88
5.3.5	Sommaire des lois du comportement plastique	89
5.4	Mécanismes microscopiques de plasticité dans les matériaux (Slides Séminaire)	89
6	Rupture	91
6.1	La résistance à la rupture (et ses limites)	91
6.1.1	Définitions et concepts	91
6.1.2	Résistance théorique à traction et cisaillement	93
6.1.3	Quand les défauts font toute la différence	96
6.1.4	Concentration de contraintes par une cavité elliptique	100
6.2	Théorie de la rupture élastique linéaire (LEFM)	104
6.2.1	Approche en contrainte - K (Irwin)	105
6.2.2	Approche énergétique - G (Griffith)	110
6.2.3	Equivalence K et G	112
6.2.4	Le crack de Griffith - Prototype d'instabilité	114
6.2.5	Clivage d'Obreimof - Prototype de stabilité	116
6.2.6	Situation générale d'un échantillon de test fissuré dans une machine de traction	118
6.3	Extensions de la LEFM (Slides Séminaire)	120

Chapter 1

Introduction (Slides Séminaire)

1.1 Mode d'emploi

Le cours de **Mécanique des Solides et des Matériaux** à l'ESPCI Paris s'organise sur deux années.

Le **module de première année (MSM1, Prof. Pascal Kurowski)** porte sur la définition des concepts de base de la **mécanique des continus** (notions de tenseurs de contrainte et déformation, équilibre statique d'un objet déformable) ainsi que sur le **calcul de structures élastiques en petites déformations** (loi de Hooke, poutres élastiques, calculs de limite élastique pour des objets simples soumis à un chargement donné).

Le **module de deuxième année (MSM2, Prof. Matteo Ciccotti)** porte sur l'extension des calculs de structure à des **situations dynamiques**, à des lois de comportement non élastiques, tel que la **viscoélasticité** ou la **plasticité**, ainsi qu'à l'étude de la **propagation de fissures** dans les structures. En vue de la complexité accrue des phénomènes traités, le cours MSM2 est conçu sur la base d'un **formalisme mathématique simplifié**, visant à la **compréhension des mécanismes de déformation et du couplage** entre les différents types de comportement, ainsi qu'à l'**estimation en ordre de grandeur de la réponse de ces objets à des chargements**.

Le présent document est l'un des supports du module MSM2, correspondant aux méthodes traitées au tableau pendant les amphis. Il est à compléter par les transparents des séminaires qu'il est possible de télécharger sur le site pédagogique <http://cours.espci.fr>, où l'on peut aussi trouver les énoncés des TD et préceptorats.

Pour une pure question de cohérence, ce manuscrit contient aussi deux chapitres introductifs sur les concepts de la mécanique des continus et sur la théorie de l'élasticité linéaire, déjà traités dans le module MSM1. Ceux-ci ne seront traités que brièvement en début du cours magistral, en soulignant les outils les plus importants, nécessaires à la compréhension des nouveaux comportements de la viscoélasticité, plasticité et rupture.

Chapter 2

Mécanique des Milieux Continus (MMC)

2.1 Déformations

2.1.1 Variations de distances et de volume

Pour définir les déformations, on va étudier le déplacement d'un point et de ses voisins (en supposant que la matière est continue) et ceci en tout point, on aura donc un champ. Pour les coordonnées nous utiliserons les indices 1, 2, 3 pour simplifier les notations de somme (dans les cas simples nous utiliserons également x, y, z qui permettent une visualisation plus immédiate). On note \mathcal{F} la **fonction de transformation** entre la configuration initiale (dite de référence) et la configuration finale (dite déformée):

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3) = \vec{\mathcal{F}}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.1)$$

Le **champ de déplacement** (exprimé dans le repère non déformé) sera:

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}' - \vec{x} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{x}) - \vec{x} \quad u_i = x'_i - x_i \quad (2.2)$$

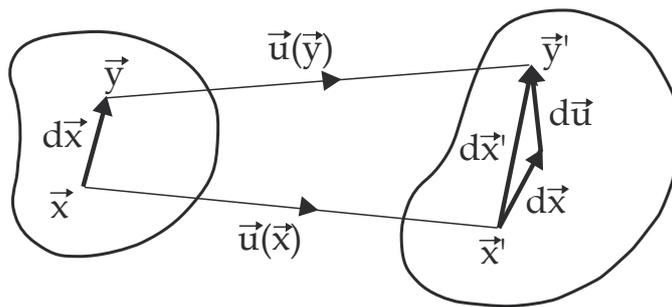


Figure 2.1: Champ de déplacement des points matériels d'un corps déformé.

On considère un deuxième point \vec{y} à une distance $d\vec{x}$ par rapport au premier. L'écart entre les deux points après la déformation sera:

$$dx'_i = dx_i + du_i$$

et bien sur $dx'_i \neq dx_i$ si du_i n'est pas négligeable. Nous allons calculer la **variation de la distance** $d\ell$ entre le couple de points considérés:

$$d\ell^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \rightarrow d\ell'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 = \sum_i (dx_i + du_i)^2$$

Pour des **petites déformations** nous pouvons exprimer:

$$du_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad d\vec{u} = (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u}) d\vec{x} = \overline{\overline{G}} d\vec{x}$$

Nous définissons ici le **tenseur gradient de déplacement** $\overline{\overline{G}}$:

$$G_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \overline{\overline{G}} \equiv \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Dans la suite nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein pour sous entendre une somme sur chaque indice répété (NB: uniquement dans une expression en produit)!

$$d\ell'^2 = \sum_i \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right)^2 = d\ell^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i \quad \left\{ + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \frac{\partial u_i}{\partial x_\ell} dx_\ell \right\}$$

On remarque que le deuxième terme contient une double somme (sur i et sur j), ce qui souligne sa nature tensorielle. Le troisième terme entre accolades contient une triple somme, mais il sera négligé dans la suite parce qu'il contient de termes d'ordre supérieur (en termes de gradient $\partial u_i / \partial u_j \ll 1$) par rapport à l'approximation linéaire que l'on fait ici.

Il convient d'exprimer le deuxième terme de façon plus symétrique en tenant compte de l'identité:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i dx_j$$

NB: $G_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ n'est pas symétrique. C'est uniquement dans la somme de tous les termes que l'on peut permuter les indices (c'est juste un ordre de sommation différent)!

$$d\ell'^2 = d\ell^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j dx_i$$

Nous définissons donc les composantes ε_{ij} du **tenseur de déformation** $\overline{\overline{\varepsilon}}$ par l'expression:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ce qui nous permet d'exprimer les variations de longueur comme:

$$d\ell'^2 = d\ell^2 + 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (2.5)$$

Nous utiliserons la notation de double barre sur le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ pour indiquer que c'est un tenseur de rang 2. Dans ce cours on va se limiter à des tenseurs de rang 2 que l'on traitera comme des matrices et nous transposerons les notions de diagonalisation, valeurs propres et vecteurs propres.

On peut enfin développer l'expression (2.5) pour exprimer la **variation relative de longueur** d'un segment $d\vec{x}$ reliant deux points dans la configuration de référence (c.f. Fig. 2.1):

$$\frac{d\ell'^2 - d\ell^2}{d\ell^2} (d\vec{x}) = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j = \frac{(d\ell' - d\ell)(d\ell' + d\ell)}{d\ell^2} \simeq \frac{(d\ell' - d\ell)2d\ell}{d\ell^2} = 2 \frac{(d\ell' - d\ell)}{d\ell} \quad (2.6)$$

$$\frac{(d\ell' - d\ell)}{d\ell} (d\vec{x}) = \frac{\varepsilon_{ij} dx_i dx_j}{dx_k dx_k} \quad (2.7)$$

2.1.2 Translation, rotation, déformation

On va maintenant reconsidérer la matrice **gradient de déplacement** G_{ij} , et la décomposer en **partie symétrique et antisymétrique**:

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij} + \Theta_{ij} \quad (2.8)$$

$$\boxed{\overline{\overline{G}} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} = \overline{\overline{\varepsilon}} + \overline{\overline{\Theta}}}$$

$$\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{G}} + {}^t \overline{\overline{G}}) \quad \overline{\overline{\Theta}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{G}} - {}^t \overline{\overline{G}})} \quad (2.9)$$

La partie symétrique s'identifie avec le tenseur de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}$ (partie de la transformation qui change les distances et les angles), alors que la partie antisymétrique $\overline{\overline{\Theta}}$ représente une **rotation infinitésimale** locale (partie de la transformation qui ne change pas les distances ni les angles). Il s'agit d'une matrice antisymétrique **associée à un vecteur axial** $\vec{\theta}$, qui est le rotationnel du champ de déplacement¹:

$$\boxed{\vec{\theta} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \quad \theta_i = \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u})_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}$$

En utilisant la décomposition en déformation et rotation:

$$d\vec{u} = \overline{\overline{G}} d\vec{x} = \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{x} + \overline{\overline{\Theta}} d\vec{x}$$

$$\vec{u}(\vec{y}) = \vec{u}(\vec{x}) + \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{x} + \overline{\overline{\Theta}} d\vec{x}$$

on peut représenter graphiquement le déplacement $d\vec{u}$ comme dans la figure 2.2.

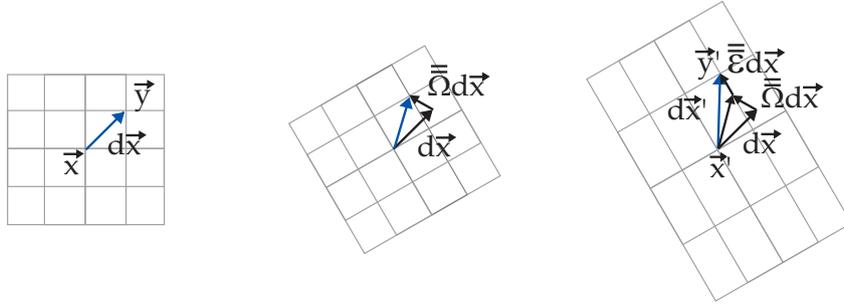


Figure 2.2: Décomposition du déplacement en rotation et déformation.

La nature tensorielle de $\overline{\overline{G}}$, $\overline{\overline{\varepsilon}}$ et $\overline{\overline{\Theta}}$ consiste dans le fait qu'ils représentent une relation linéaire entre deux vecteurs: le vecteur distance $d\vec{x}$ (distance orientée entre deux points) et l'une des contributions au vecteur déplacement $d\vec{u}$ (variation du vecteur $d\vec{x}$). En particulier, pour une rotation nulle tout le déplacement peut être relié à la déformation:

$$\boxed{\overline{\overline{\Theta}} = 0 \quad d\vec{u} = \overline{\overline{\varepsilon}} d\vec{x}} \quad \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Ces vecteurs ont en général une direction différente, sauf quand ils sont orientés selon l'un des trois axes propres comme détaillé dans la section suivante.

¹Dans la mécanique des fluides on a l'équation analogue pour la vitesse de rotation: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$.

2.1.3 Repère propre, valeurs propres et invariants

Dans la suite on va se concentrer sur le tenseur de déformation ε_{ij} , partie symétrique du tenseur gradient de déplacement, parce que c'est celui qui est relié aux variations de distances entre points et par conséquent aux lois de comportement des matériaux. ε_{ij} est **symétrique**, donc il a 6 composantes indépendantes plutôt que 9 et il est donc **diagonalisable**.

Il s'agit de trouver un repère orthonormé dans lequel le tenseur de contrainte prend la forme diagonale:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

ce qui veut dire que pour un couple de points orientés selon l'un des axes propres, le déplacement $d\vec{u}$ sera proportionnel à $d\vec{x}$. Dans le repère propre la déformation peut donc s'écrire comme la somme de trois états d'extension ou contraction pures, associées aux trois valeurs propres ε_i (NB: contrairement aux composantes du tenseur, les valeurs propres ont un seul indice), sans aucune déformation en cisaillement. NB: il ne faut pas oublier qu'il y a un tenseur de déformation différent à chaque point, ce qui donne un repère propre local.

Dans le repère propre (représenté par les coordonnées X_i) la variation de volume s'exprime aisément. En considérant deux points alignés selon l'un des axes propres et en utilisant (2.5):

$$d\ell'^2 = dX_i'^2 = (1 + 2\varepsilon_i)dX_i^2$$

$$dX_i' = \sqrt{dX_i'^2} \simeq (1 + \varepsilon_i)dX_i \quad \frac{dX_i' - dX_i}{dX_i} = \varepsilon_i$$

$$dV' = dX_1'dX_2'dX_3' = \prod_i (1 + \varepsilon_i)dX_i \simeq (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)dX_1dX_2dX_3$$

$$\boxed{dV' = (1 + \text{Tr } \bar{\varepsilon})dV} \quad (2.11)$$

où on n'a gardé que les termes d'ordre 1, en cohérence avec l'approximation linéaire. On a aussi introduit la définition de la **trace d'un tenseur**:

$$\boxed{\text{Tr } \bar{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} \quad \text{NB: convention d'Einstein} \quad (2.12)$$

qui est un **invariant** du tenseur (elle ne dépend pas du repère choisi, donc elle équivaut à la somme des valeurs propres). Dans le cas du tenseur déformation l'interprétation physique de cette invariance est simple parce que d'après l'équation (2.11) la trace de la déformation équivaut à la **variation volumique relative**:

$$\boxed{\text{Tr } \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{dV' - dV}{dV}} \quad (2.13)$$

On peut obtenir le même résultat en remarquant que la trace de la déformation est aussi la divergence du champ de déplacement:

$$\text{Tr } \bar{\varepsilon} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{u}$$

Dans les écoulements incompressibles (fluides, élastomères, écoulements plastiques) nous avons donc que:

$$\text{Tr } \bar{\varepsilon} = \text{div } \vec{u} = 0$$

Comme tout tenseur symétrique d'ordre 3 le tenseur de déformation admet **trois invariants indépendants**. Un deuxième jeu d'invariants peut être obtenu en considérant les coefficients de l'équation caractéristique pour la diagonalisation de la matrice ε_{ij} :

$$|\bar{\varepsilon} - \lambda \bar{I}| = \lambda^3 + I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = \prod_i (\lambda - \varepsilon_i) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr } \bar{\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ I_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 \\ I_3 &= \det \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{aligned}} \quad (2.14)$$

On retrouve ainsi l'invariance de la trace I_1 , qui est l'invariant le plus utilisé en général. I_3 et I_2 sont respectivement le déterminant et la somme des déterminants mineurs. On peut construire un troisième jeu d'invariants indépendants par:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1^* &= \text{Tr } (\bar{\varepsilon}) = I_1 \\ I_2^* &= \text{Tr } (\bar{\varepsilon}^2) = I_1^2 - 2I_2 \\ I_3^* &= \text{Tr } (\bar{\varepsilon}^3) = I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3 \end{aligned}} \quad (2.15)$$

En particulier I_2^* est très utilisé (construction de l'énergie élastique, critère de Von Mises, ...) parce qu'il est relié à la **norme d'un tenseur**, qu'on peut définir:

$$\boxed{|\bar{\varepsilon}| \equiv \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} = \sqrt{\sum_{ij} \varepsilon_{ij}^2}} \quad \boxed{I_2^* = \text{Tr } (\bar{\varepsilon}^2) = |\bar{\varepsilon}|^2} \quad (2.16)$$

Il s'agit d'une **norme quadratique**: on somme le carré de tous les éléments et on prend la racine du résultat. Elle est donc très utile pour estimer l'intensité moyenne d'une matrice à trace nulle (voir section suivante).

2.1.4 Sphérique et déviateur

Comme tout tenseur symétrique, $\overline{\overline{\varepsilon}}$ peut être décomposé dans une partie isotrope, dite sphérique $\overline{\overline{S}}_\varepsilon$, et une partie à moyenne nulle, dite déviateur $\overline{\overline{D}}_\varepsilon$:

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{S}}_\varepsilon + \overline{\overline{D}}_\varepsilon \quad (2.17)$$

En définissant la **déformation moyenne** ε_m :

$$\boxed{\varepsilon_m = \frac{\text{Tr } \overline{\overline{\varepsilon}}}{3}} \quad (2.18)$$

on peut construire le tenseur isotrope, dit **sphérique** de la déformation:

$$\overline{\overline{S}}_\varepsilon = \varepsilon_m \overline{\overline{I}} \quad (2.19)$$

qui représente une déformation isotrope à forme constante, c'est à dire une **expansion ou contraction homogène**.

Nous appelons **déviateur** de la déformation la partie restante:

$$\overline{\overline{D}}_\varepsilon = \overline{\overline{\varepsilon}} - \overline{\overline{S}}_\varepsilon$$

qui a par construction une **trace nulle**. Il représente une déformation anisotrope à volume constant, c'est à dire une déformation en **cisaillement pur**. Ayant une moyenne nulle, la façon appropriée d'évaluer l'intensité ε_d du déviateur (et donc du cisaillement) est d'utiliser la racine de la moyenne quadratique (*EN: RMS, Root Mean Square*):

$$\boxed{\varepsilon_d = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\overline{\overline{D}}_\varepsilon^2)}{3}} = \sqrt{\frac{\sum_{ij} D_{ij}^2}{3}} = \frac{|\overline{\overline{D}}_\varepsilon|}{\sqrt{3}}} \quad (2.20)$$

ce qui fait appel à la définition de la norme d'un tenseur (equation 2.16).

Comme le tenseur sphérique est isotrope, il n'aura pas de repère propre défini. Il en suit que le déviateur a les **mêmes directions propres que le tenseur de déformation**. On peut exprimer cela en introduisant la notion de **signe d'un tenseur**:

$$\boxed{\overline{\overline{\text{signe}}}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \equiv \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}}{|\overline{\overline{\varepsilon}}|}} \quad |\overline{\overline{\text{signe}}}(\overline{\overline{\varepsilon}})| = 1 \quad (2.21)$$

qui est un tenseur de norme unitaire ayant les mêmes directions propres que le tenseur d'origine (notion totalement analogue au signe d'un scalaire et d'un vecteur). On peut donc écrire le déviateur comme:

$$\overline{\overline{D}}_\varepsilon = |\overline{\overline{D}}_\varepsilon| \overline{\overline{\text{signe}}}(\overline{\overline{D}}_\varepsilon) = \sqrt{3}\varepsilon_d \overline{\overline{\text{signe}}}(\overline{\overline{\varepsilon}})$$

On peut donc écrire la décomposition de la déformation en partie isotrope et anisotrope comme:

$$\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{S}}_\varepsilon + \overline{\overline{D}}_\varepsilon = \varepsilon_m \overline{\overline{I}} + \sqrt{3}\varepsilon_d \overline{\overline{\text{signe}}}(\overline{\overline{\varepsilon}})}$$

2.1.5 États de déformation simples

Affinité verticale homogène (extension géométrique)

$$u_z = \varepsilon z \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{Tr } \bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon$$

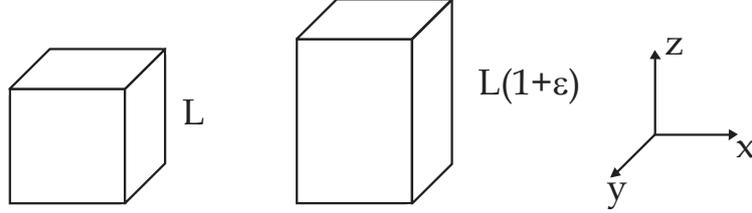


Figure 2.3: Affinité verticale homogène.

Nous remarquons qu'à cause du choix de l'orientation en z , le repère cartésien est aussi un repère propre du tenseur de déformation. NB: mis à part l'axe z , les directions propres dans le plan ne sont pas définies.

Si on décompose en sphérique et déviateur nous avons:

$$\bar{\bar{S}}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon/3 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon/3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon/3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_m = \frac{\text{Tr } \bar{\bar{\varepsilon}}}{3} = \frac{\text{Tr } \bar{\bar{S}}_\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{3} \frac{dV}{V}$$

$$\bar{\bar{D}}_\varepsilon = \bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{S}}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -\varepsilon/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon/3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_d = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\bar{\bar{D}}_\varepsilon^2)}{3}} = \varepsilon \sqrt{\frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \varepsilon$$

Le déviateur est déjà diagonal (même repère propre que $\bar{\bar{\varepsilon}}$).

Affinité trois axes homogène (expansion)

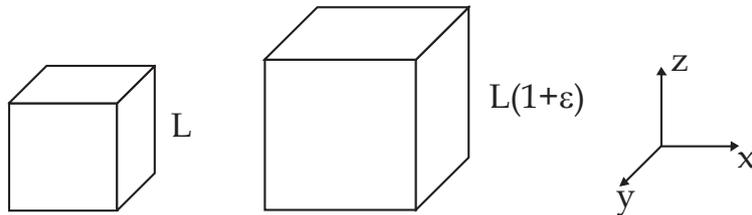


Figure 2.4: Affinité trois axes homogène.

$$u_i = \varepsilon x_i \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon \bar{\bar{I}} = \bar{\bar{S}}_\varepsilon \quad \text{Tr } \bar{\bar{\varepsilon}} = 3\varepsilon = \frac{dV}{V} \quad \varepsilon_m = \varepsilon \quad \bar{\bar{D}}_\varepsilon = 0$$

Dans ce cas spécifique, tout repère est un repère propre du tenseur de déformation, qui résulte être isotrope. Le déviateur est nul.

Cisaillement simple

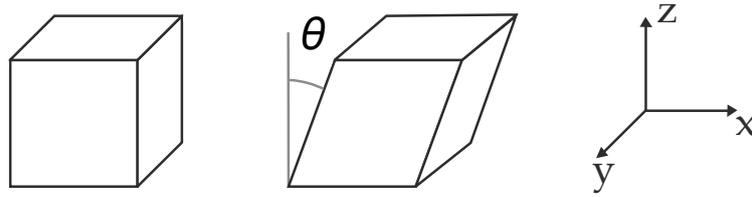


Figure 2.5: Cisaillement simple.

$$u_x = \gamma z \quad \gamma = \frac{\partial u_x}{\partial z} = \tan \theta \simeq \theta \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{\gamma}{2} \simeq \frac{\theta}{2}$$

Le déplacement se fait uniquement le long d'un axe (par exemple x), mais sa valeur augmente linéairement avec une coordonnée orthogonale (par exemple z). Ces deux directions identifient un plan (x, z) orthogonal à l'axe y . Nous avons une seule dérivée non nulle $\partial u_x / \partial z = \gamma$, donc le tenseur gradient du déplacement $\overline{\overline{G}}$ n'est pas symétrique. Il faut donc le décomposer en partie symétrique et antisymétrique, c'est à dire dans la somme d'une déformation et une rotation (equation 2.9):

$$\overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{\varepsilon}} + \overline{\overline{\Theta}} \quad \overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{\Theta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La déformation correspond à un cisaillement pur d'angle $\theta/2$ auquel on doit rajouter une rotation infinitésimale d'angle $\theta/2$ autour de l'axe y . La somme des deux conduit à la configuration déformée représentée en figure 2.5.

Cisaillement pur

Si on veut réaliser une transformation de cisaillement pur, non accompagnée d'une rotation, il faut que $\overline{\overline{G}}$ soit symétrique:

$$\overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{\varepsilon}} \quad \overline{\overline{\Theta}} = \overline{\overline{0}}$$

ce qui implique deux dérivées partielle non nulles $\partial u_x / \partial z = \partial u_z / \partial x = \gamma$, ce qui donne la configuration déformée suivante:

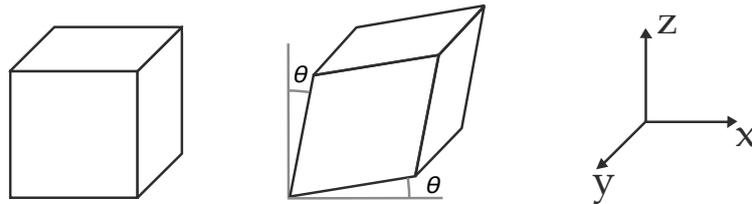


Figure 2.6: Cisaillement pur.

$$u_x = \gamma z \quad u_z = \gamma x \quad \gamma = \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} = \tan \theta \simeq \theta \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \gamma \simeq \theta$$

On remarque que cette fois la variation angulaire θ de l'orientation des arêtes est uniquement liée à un cisaillement (la rotation est nulle). Le tenseur de déformation a la même forme que dans le cas du cisaillement simple, mais ses termes ont une valeur double (l'angle entre les deux arêtes à l'origine diminue cette fois de 2θ). Nous remarquons également que la trace du tenseur est nulle (et donc le sphérique aussi): le cisaillement se fait sans changement de volume!

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{\bar{D}}_\varepsilon \quad \text{Tr } \bar{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad \bar{\bar{S}}_\varepsilon = 0 \quad \varepsilon_d = \gamma \sqrt{\frac{1+1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma$$

Contrairement aux deux premiers exemples, pour les deux types de cisaillement le tenseur de déformation n'est pas diagonal. Mais on sait qu'il sera diagonal dans le repère propre. Il suffit de diagonaliser le sous bloc identifié par le plan (x, z) :

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Dans le repère propre (X, Z) , le cisaillement prend la forme d'une superposition d'une traction (en X) et d'une compression (en Z) de même valeur absolu γ (ce qui preserve la trace nulle et donc le volume). Dans le repère non déformé, les axes du repère propre forment un angle de 45° par rapport aux axes cartésiens de départ (à ne pas confondre avec l'angle θ de déformation).

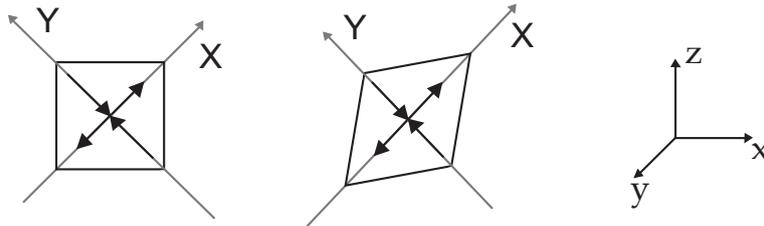


Figure 2.7: Equivalence entre un état de cisaillement et un état de traction/compression.

On remarque que les axes propres sont orientés comme les diagonales de la facette sur le plan x, z . Pour le cas du cisaillement pur les directions des axes propres ne changent pas lorsqu'on passe de la configuration de référence (à gauche) à la configuration déformée (au centre). Si en revanche on faisait la même construction pour le cisaillement simple (figure 2.5), la direction des axes propres (diagonales) subirait une rotation de $\theta/2$ entre la configuration de référence et la déformée.

Remarques générales

Il est important de retenir l'équivalence entre un état de cisaillement pur et un état d'extension et contraction de même intensité sur deux axes orthogonaux. De façon générale, tout état de déformation peut être vu comme la somme de trois états de extensions ou contractions arbitraires, c'est l'essence même de la diagonalisabilité du tenseur de déformation.

Un autre aspect général est qu'on pourra toujours représenter un état de déformation comme la somme d'une compression (ou traction) isotrope et d'un cisaillement pur. Cette dernière propriété résumée beaucoup de la nature tensorielle de la déformation. En outre cette décomposition se montrera très riche de signification physique.

2.1.6 Continuité et compatibilité des déformations

Afin que la transformation correspondant au champ de déplacement respecte l'intégrité physique du corps solide, elle doit respecter certaines conditions.

$$\vec{x}' = \vec{\mathcal{F}}(\vec{x}) \quad \vec{dx}' = \bar{\lambda} \vec{dx} \quad \bar{\lambda} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{\mathcal{F}}$$

La continuité du solide se traduit par la relation:

$$\det \bar{\lambda} = \frac{dV'}{dV} > 0$$

Si on ajoute la conservation de la masse $dm = \rho dV = \rho' dV'$, elle peut être réécrite comme:

$$\rho' \det \bar{\lambda} = \rho$$

La compatibilité des déformations nécessite la non-compénétration des parties d'un corps. Si la forme du corps est complexe, cette condition est non locale, mais pour un domaine convexe on peut écrire une condition locale sur le champ de déformation. Notamment si on veut que tout se passe bien, il faut que le champ de déformation soit intégrable, c'est à dire que \vec{du} soit une différentielle exacte, c'est à dire qu'il existe une fonction de déplacement dont le champ de déformation est le gradient:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}' - \vec{x} \quad \bar{G} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} = \bar{\varepsilon} + \bar{\Theta}$$

$$\vec{du}' = \bar{G} \vec{dx} \quad \bar{G} = \bar{\lambda} - \bar{I}$$

Ceci est vérifié si le rotationnel de \bar{G} est nul²:

$$\overline{\text{rot}}_d \bar{G} = \bar{0} \quad (2.22)$$

On peut montrer que cette condition est équivalente à la condition complexe:

$$\overline{\text{rot}}_d \left(\overline{\text{rot}}_g \bar{\varepsilon} \right) = 0 \quad \text{ou bien} \quad \overline{\text{rot}}_g \left(\overline{\text{rot}}_d \bar{\varepsilon} \right) = 0$$

²Le rotationnel d'un tenseur peut être défini des deux manières suivantes, dites **rotationnel droit et gauche**:

$$\left(\overline{\text{rot}}_d \bar{G} \right)_{ij} \equiv \delta_{ilm} \frac{\partial G_{mj}}{\partial x_l} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_{21}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{31}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial G_{11}}{\partial x_3} & \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial G_{21}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G_{22}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{32}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{32}}{\partial x_1} - \frac{\partial G_{12}}{\partial x_3} & \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G_{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{33}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{33}}{\partial x_1} - \frac{\partial G_{13}}{\partial x_3} & \frac{\partial G_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial G_{23}}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

Le rotationnel droit a pour lignes les rotationnels des vecteurs lignes de \bar{G} .

$$\left(\overline{\text{rot}}_g \bar{G} \right)_{ij} \equiv \delta_{jlm} \frac{\partial G_{im}}{\partial x_l} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{13}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{22}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{23}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{32}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{33}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_{13}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{33}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{31}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_{11}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{21}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{32}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Le rotationnel gauche a pour colonnes les rotationnels des vecteurs colonnes de \bar{G} .

2.2 Contraintes

2.2.1 Vecteurs et tenseurs de contraintes

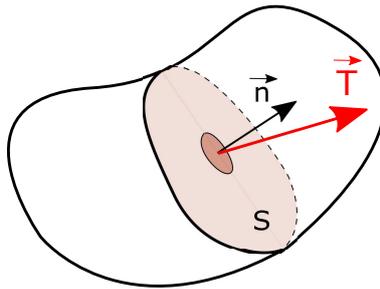
Nous avons l'habitude de contraintes appliquées à l'aire de contact entre deux corps. La contrainte est dimensionnellement définie comme une force par unité de surface et, comme la pression, elle se mesure en Pa :

$$\sigma \sim \frac{F}{S} \quad \left[Pa = \frac{N}{m^2} \right]$$

mais contrairement aux contraintes provoquées par la pression d'un liquide, les contraintes sur l'aire de contact entre deux solides peuvent avoir une direction différente de la normale. En faisant l'approximation grossière de contraintes constantes sur l'aire de contact, on peut les représenter par un vecteur de contrainte, ayant deux composantes dites respectivement normale et de cisaillement. Dans le cas du contact entre deux corps, la composante de cisaillement peut être supportée grâce aux forces de friction statique.

Nous allons maintenant définir les contraintes internes au corps et nous convaincre qu'elles ont une nature tensorielle. On considère un point interne à notre corps et on sépare le corps en deux selon un plan imaginaire passant par ce point et identifié par sa normale orientée \vec{n} . On comprend maintenant naturellement que ces deux surfaces exercent en général des contraintes de contact l'une sur l'autre représentées par deux vecteurs de contraintes, égaux mais de sens opposé (3ème principe action/réaction). Comme on l'a vu précédemment ces deux vecteurs de contraintes ne sont pas nécessairement normaux à la surface de contact, on peut donc les décomposer en une composante normale et une composante de cisaillement. Dans un solide cette dernière est plutôt supportée par les forces de cohésion.

On remarque qu'on peut réduire toute l'interaction entre les deux parties du solide à des forces de surface: en effet les interactions atomiques sont de courte portée et la MMC s'appuie sur une description de la matière qui se situe à une échelle plus grande que cette portée. On peut ainsi négliger les aspects discrets de la matière, les fluctuations locales de composition et de structure, ainsi que les interactions volumiques entre atomes.



Jusqu'ici tout se modélise par des vecteurs de contrainte à la surface de contact entre deux solides. La particularité des contraintes internes est qu'on peut en principe séparer le solide en deux parties selon une infinité de plans imaginaires passant par le point en question. La nature tensorielle des contraintes en un point donné apparaît en remarquant que le vecteur de contrainte sera en général différent pour chaque plan imaginaire choisi. L'existence d'une application linéaire qui relie un vecteur à un autre traduit la nature physique des tenseurs. Le tenseur de contrainte $\bar{\sigma}$ relie le vecteur de contrainte \vec{T} agissant sur une surface imaginaire au vecteur \vec{n} normal à cette surface:

$$\vec{T} = \bar{\sigma} \vec{n}$$

Cette relation physique dérive de la nécessité de équilibrer des forces appliquées autour d'un élément de volume suffisamment petit pour que les contraintes soient décrites par une seule valeur $\bar{\sigma}$. Cette relation physique est indépendante du repère choisi pour décrire les vecteurs, mais si l'on choisit un repère orthonormé (x_1, x_2, x_3) , le tenseur de contrainte sera représenté par une matrice σ_{ij} (comme tout tenseur de rang 2):

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Quand on sépare le corps en deux, la relation précédente s'applique séparément aux deux parties, en considérant pour chacune un vecteur normal \vec{n} dirigé vers l'extérieur de cette partie. Pour chaque partie, le vecteur de contrainte $\vec{T} = \bar{\sigma} \vec{n}$ représente la contrainte appliquée par l'élément exclu (force extérieure) sur l'élément retenu. Il en suit que les forces dirigées vers l'extérieur (tractions) sont considérées comme positives, alors que les compressions ont un signe négatif. NB: celle ci est la convention des physiciens en mécanique du solide.

Une façon simple de retenir la signification des composantes du tenseur de contraintes dans un repère orthonormé est la suivante:

$$\sigma_{ij} = \frac{F_i}{S_j}$$

où F_i est la composante i de la force agissant sur une surface S_j orientée perpendiculairement à l'axe j .

Le tenseur de contrainte est défini en chaque point, il constitue un champ de tenseur. Cette description se fait en considérant autour de chaque point un élément de volume suffisamment petit pour considérer l'état de contrainte comme constant, mais suffisamment grand pour pouvoir négliger les aspects inhomogènes de la matière. L'équilibre des forces appliquées sur les facettes d'un tel élément est automatiquement respecté par la construction du tenseur de contrainte: les forces appliquées sur chaque couple de facettes opposées sont opposées. Si on ajoute l'équilibre des moments associés à ces forces, on obtient que le tenseur de contrainte doit être symétrique. Pour chaque direction orthogonale à une facette, la résultante des moments est égale à la somme de deux couples de forces. Ces deux couples doivent être opposés et il en va donc de même pour les forces agissant sur deux facettes adjacentes. Compte tenu des conventions de signe pour les composantes des forces on peut écrire:

$$\sigma_{ij} = \frac{F_i}{S_j} = \frac{F_j}{S_i} = \sigma_{ji}$$

NB: pour une démonstration formelle et détaillée de la nature tensorielle de la contrainte et de la symétrie, voir les constructions géométriques sur le livre de Maugis[7].

2.2.2 Repère propre, contraintes principales et invariants

La symétrie du tenseur de contrainte réduit le nombre de composantes indépendantes de 9 à 6. Elle conduit à rendre le tenseur de contraintes diagonalisable, il existe donc un repère orthonormé propre dans lequel le tenseur de contrainte prend la forme diagonale:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Localement tout état de contrainte peut se réduire à la somme de trois états de traction/compression purs dans trois directions orthogonales (les trois axes principaux). Les trois

valeurs propres $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont dites **contraintes principales**. Avec les trois angles d'Euler identifiant la direction du repère propre, on retrouve les six quantités indépendantes du tenseur. On remarque que ce résultat est analogue à celui obtenu pour le tenseur de déformation, mais il s'agit bien d'une propriété physique différente. La relation entre les deux repères propres de contrainte et de déformation est simple uniquement dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire.

Comme tout tenseur symétrique d'ordre 3, $\bar{\bar{\sigma}}$ admet trois invariants indépendants. Un jeu typique est:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr } \bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \det \bar{\bar{\sigma}} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

Mais on peut construire d'autres invariants, tels que:

$$\begin{aligned} I_2^* &= \text{Tr } (\bar{\bar{\sigma}}^2) = \sigma_{ij}\sigma_{ij} = |\bar{\bar{\sigma}}|^2 = I_1^2 - 2I_2 \\ I_3^* &= \text{Tr } (\bar{\bar{\sigma}}^3) = I_1^3 - 3I_1I_2 + 3I_3 \end{aligned}$$

2.2.3 Sphérique et déviateur

De façon analogue au tenseur de déformation, on peut toujours décomposer le tenseur de contraintes en la somme de deux états liés respectivement à une traction (ou compression) isotrope et à un cisaillement pur:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{S}}_\sigma + \bar{\bar{D}}_\sigma \quad (2.23)$$

La partie isotrope est dite **sphérique** de la contrainte $\bar{\bar{S}}_\sigma$ et elle est caractérisée par la **contrainte moyenne** σ_m :

$$\bar{\bar{S}}_\sigma = \sigma_m \bar{\bar{I}} \quad \sigma_m = \frac{\text{Tr } \bar{\bar{\sigma}}}{3} \quad (2.24)$$

et elle constitue la généralisation de la notion de **pression**. NB: la pression $p = -\sigma_m$ est définie positive en hydrodynamique. La partie anisotrope est dite **déviateur** de la contrainte $\bar{\bar{D}}_\sigma = \bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{S}}_\sigma$ et elle représente les déviations par rapport à l'isotropie moyenne. Elle peut être représentée en multipliant la **contrainte déviatorique moyenne** (cisaillement) σ_d fois un tenseur signe (c.f. section 2.1.4) qui caractérise les directions principales de $\bar{\bar{\sigma}}$:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sqrt{\frac{\text{Tr}(\bar{\bar{D}}_\sigma^2)}{3}} = \sqrt{\frac{\sum_{ij} D_{ij}^2}{3}} = \frac{|\bar{\bar{D}}_\sigma|}{\sqrt{3}} \\ \bar{\bar{D}}_\sigma &= |\bar{\bar{D}}_\sigma| \overline{\text{signe}}(\bar{\bar{D}}_\sigma) = \sqrt{3}\sigma_d \overline{\text{signe}}(\bar{\bar{\sigma}}) \\ \bar{\bar{\sigma}} &= \bar{\bar{S}}_\sigma + \bar{\bar{D}}_\sigma = \sigma_m \bar{\bar{I}} + \sqrt{3}\sigma_d \overline{\text{signe}}(\bar{\bar{\sigma}}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La trace de $\bar{\bar{D}}_\sigma$ est nulle par définition. Cette représentation contient beaucoup de la nature tensorielle de $\bar{\bar{\sigma}}$ et permet d'extraire l'essence physique de l'état de contrainte locale, indépendamment de tout repère choisi. La partie isotrope a une signification analogue dans tout matériau solide ou fluide, alors que la partie déviateur détermine la grosse différence de comportement entre les classes des matériaux. Alors que les fluides ne peuvent pas supporter une partie déviateur et vont s'écouler pour la relaxer, les solides plastiques vont la supporter élastiquement jusqu'à une intensité limite, au delà de laquelle ils vont s'écouler de façon analogue aux liquides.

2.2.4 Cercles de Mohr

Il est en général assez difficile de se donner une représentation mentale du tenseur de contrainte qui nous permette d'en saisir la physique et de visualiser l'état de contrainte local. Une partie de cette difficulté est due à la nature 3D du tenseur, mais même en 2D le changement des contraintes en fonction des facettes choisies n'est pas évident. Une proposition intéressante fut fournie par Otto Mohr en 1882. Cette construction permet de représenter de manière synthétique les valeurs des composantes de traction σ et de cisaillement τ sur chaque facette passant par un point donné en utilisant des simples constructions de cercles et droites sur un plan (dit plan de Mohr).

Pour en saisir l'essence on traitera d'abord le cas 2D (état de contraintes planes). Les composantes dans le repère O, x_1, x_2 et dans le repère propre O, X_1, X_2 seront respectivement:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

où on suppose par convention que $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Le repère propre peut dans ce cas être associé au repère initial par une simple rotation d'un angle θ .

Si on prend comme repère initial le repère propre, il est facile d'exprimer les composantes du tenseur de contraintes dans un autre repère formant un angle θ avec le premier.

$$\begin{aligned} \vec{T}(\vec{n}) &= \bar{\bar{\sigma}} \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \end{pmatrix} \\ \vec{T}(\vec{r}) &= \bar{\bar{\sigma}} \vec{r} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sin \theta \\ \sigma_2 \cos \theta \end{pmatrix} \\ \sigma_{nn} &= \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \sigma_{rr} &= \vec{T}(\vec{r}) \cdot \vec{r} = \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta \\ \sigma_{nr} &= \sigma_{rn} = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{r} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Par des manipulations simples³ on peut réécrire ces termes comme:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{rr} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{nr} &= \sigma_{rn} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

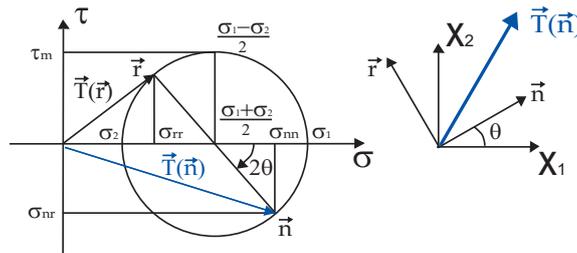


Figure 2.8: Représentation du cercle de Mohr en 2D.

³Il suffit d'utiliser les formules trigonométriques: $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ et $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

Si maintenant on représente le vecteur de contrainte $T(\vec{n})$ sur un plan ayant comme abscisse la composante normale σ et comme ordonnée la composante de cisaillement τ (figure 2.8) on peut reconnaître que $(\sigma_{nn}, \sigma_{nr})$ sont les équations du point n situé sur un cercle de centre $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ et ayant parcouru un angle 2θ en sens horaire. De même, le vecteur de contrainte $T(\vec{r})$ de coordonnées $(\sigma_{nr}, \sigma_{rr})$ se situe sur le même cercle au point diamétralement opposé.

Il est ainsi évident que la contrainte normale σ peut prendre toutes les valeurs comprises entre les contraintes propres σ_2 et σ_1 . Il est aussi évident que la valeur maximale de la contrainte de cisaillement est égale au rayon du cercle:

$$\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad -\tau_m < \tau < \tau_m \quad \sigma_2 < \sigma < \sigma_1 \quad \theta = 45^\circ$$

On remarquera aussi que cette représentation rend explicite la séparation entre sphérique (position du centre du cercle sur l'axe σ) et déviateur (rayon du cercle), en clarifiant son sens physique.

Les calculs pour la situation 3D sont bien plus longs et ne seront pas détaillés, mais le résultat de projection sur le plan de Mohr (σ, τ) est presque aussi simple (figure 2.9). Les trois contraintes propres $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ identifient maintenant trois cercles de Mohr et l'ensemble des vecteurs de contrainte associés au tenseur de contrainte locale sont représentés par un point pouvant bouger dans la zone comprise entre les trois cercles. On constate que la contrainte de cisaillement maximale est donnée par le rayon du plus grand des cercles de Mohr soit $\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

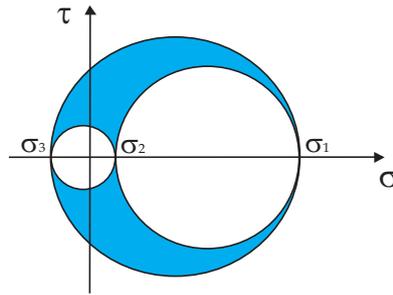


Figure 2.9: Représentation du cercle de Mohr en 3D.

Les critères de plasticité et de rupture seront représentés par le premier point ou le cercle de Mohr traverse une frontière donnée. Le point de contact entre le cercle et la frontière nous permet de connaître l'angle d'orientation θ de la facette qui cédera, ainsi que les valeurs de σ et τ sur cette facette. Par exemple pour le critère de plasticité de Tresca (c.f. section 5.3.3) la frontière de plastification est une couple de lignes horizontales de distance $\pm\sigma_P$. Le cercle de Mohr le touchera systématiquement à ses deux sommets (haut et bas), ce qui correspond à un glissement plastique sur des facettes à $\pm 45^\circ$ par rapport à la contrainte principale plus intense (imaginer le test uniaxial).

2.3 La loi fondamentale de la dynamique

2.3.1 Dérivation en forme locale

Nous ne nous sommes préoccupés, jusqu'ici, que de l'équilibre mécanique *statique* d'une particule de matière centrée au point M soumise de la part du milieu environnant à des forces de contact caractérisées par leur densité surfacique $\vec{T}(M, \vec{n})$. Cette analyse, qui nous a conduit à la linéarité du tenseur de contraintes (équilibre des forces) et à sa symétrie (équilibre des moments), était menée à l'ordre 1, c'est à dire en considérant un élément de volume dV suffisamment petit pour considérer le tenseur de contrainte comme constant à l'intérieur du volume et donc aussi sur toutes les facettes qui l'entourent. En outre en prenant la limite $dV \rightarrow 0$, nous avons pu négliger l'effet des forces agissant en volume (gravité, inertie, ...) par rapport aux forces agissant sur les surfaces.

Nous allons maintenant reconsidérer le bilan des forces agissant sur un petit cube de matière de volume élémentaire $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ (figure 2.10) à une échelle légèrement supérieure, où on devra considérer les variations de $\bar{\sigma}$ entre facettes et la contribution des forces de volume et d'accélération. Cette analyse d'ordre 2 nous conduira à la **forme locale de la loi dynamique** pour un corps déformable. A l'échelle du milieu continu, ces forces seront caractérisées par leurs densités volumiques:

- accélération : $\rho \vec{a}(M)$
- force externe : $\vec{f}(M)$

$\rho(M)$ étant la masse volumique du milieu matériel, $\vec{a}(M)$ l'accélération et $\vec{f}(M)$ la densité volumique de force externe auxquelles il est soumis. En mécanique, la densité volumique de force la plus fréquemment rencontrée est la gravité $\rho \vec{g}$ qui permet de prendre en compte l'effet du poids propre de la structure.

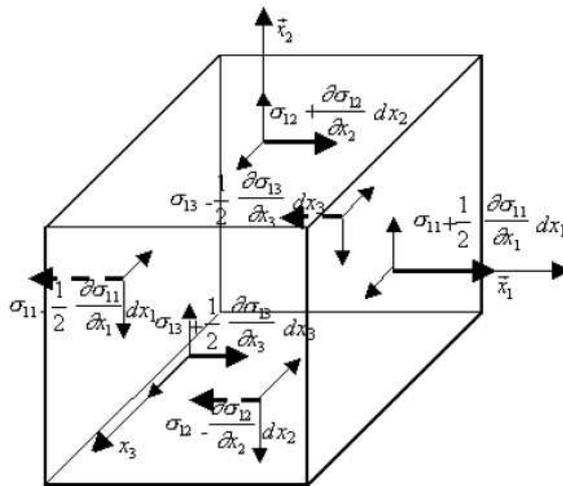


Figure 2.10: Équilibre dynamique d'une particule de matière.

La loi fondamentale de la dynamique $m \vec{a} = \sum \vec{F}$ nous donne la relation:

$$\sum_{\text{faces}} \vec{T} dS + \vec{f} dV = \rho \vec{a} dV \quad (2.26)$$

En projection sur l'axe x_1 , le premier terme devient :

$$\begin{aligned} \sum_{faces} T_1 dS &= \{[\sigma_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1] - [\sigma_{11} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1]\} dx_2 dx_3 \\ &+ \{[\sigma_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2] - [\sigma_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2]\} dx_1 dx_3 \\ &+ \{[\sigma_{13} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3] - [\sigma_{13} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3]\} dx_1 dx_2 = \\ &= \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) dV = [\overrightarrow{\text{div}} \overline{\sigma}]_1 dV \end{aligned}$$

En répétant pour les autres composantes on obtient:

$$\sum_{faces} T_i dS = \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \right) dV = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = [\overrightarrow{\text{div}} \overline{\sigma}]_i dV$$

Ces trois relations peuvent être combinées dans la relation vectorielle:

$$\sum_{faces} \overrightarrow{T} dS = \overrightarrow{\text{div}} \overline{\sigma} dV$$

qui introduit pour la première fois dans ce cours la notion de **divergence d'un champ tensoriel** (à prendre comme définition).

L'écriture (2.26) du deuxième principe de la dynamique devient donc:

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\sigma} + \overrightarrow{f} - \rho \overrightarrow{a} = 0 \quad \text{ou alors} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i - \rho a_i = 0 \quad (2.27)$$

avec sommation sur l'indice j répété selon la convention d'Einstein dite des *indices muets*.

Notons que cette équation ne fait pas appel à la nature du milieu considéré, celle-ci étant prise en compte dans l'équation d'état ou loi de comportement du matériau.

Par exemple, en considérant un fluide au repos sous l'action d'un champ gravitationnel (équilibre hydrostatique), on peut écrire:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} &= -p \overline{\delta}, \quad \overrightarrow{a} = 0, \quad \overrightarrow{f} = \rho \overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{\text{div}} (-p \overline{\delta}) + \rho \overrightarrow{g} &= 0 \end{aligned}$$

et l'équation de l'équilibre conduit à l'équation de l'hydrostatique:

$$-\overrightarrow{\nabla} p + \rho \overrightarrow{g} = 0$$

2.3.2 Dérivation à partir d'un bilan global

La loi fondamentale de la dynamique peut aussi être obtenue en effectuant un calcul d'équilibre sur une portion de matière finie. On va pour cela isoler au sein d'un milieu matériel un volume V limité par une surface S . Ce volume est soumis à la densité volumique de forces externes \overrightarrow{f} agissant dans le volume V et à la densité surfacique de forces (externes) \overrightarrow{T} exercée par la matière environnante. La loi fondamentale de la dynamique $\sum \overrightarrow{F} = m \overrightarrow{a}$ s'écrit sous la forme d'un bilan intégral:

$$\int_V \overrightarrow{f} dV + \int_S \overrightarrow{T} dS = \int_V \rho \overrightarrow{a} dV$$

Comme les actions de contact sont liées par la relation $\vec{T} = \bar{\bar{\sigma}} \vec{n}$, le théorème de la divergence (dit théorème de Octogradsky) permet de transformer l'intégrale sur S en intégrale sur V :

$$\int_S \vec{T} dS = \int_S \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} dS = \int_V \overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} dV$$

et le bilan s'écrit:

$$\int_V \vec{f} dV + \int_V \overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} dV = \int_V \rho \vec{a} dV$$

Ce bilan étant indépendant du volume V choisi, on peut en tout point réduire le volume à un élément infinitesimal dV et déduire la validité partout de la forme locale de la loi dynamique:

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} - \rho \vec{a} = 0 \quad (2.28)$$

2.3.3 Loi d'équilibre statique

L'équation d'équilibre statique découle simplement de l'équation (2.28):

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (2.29)$$

et en l'absence de forces de volume (donc typiquement quand la gravité est négligeable), l'équation d'équilibre se réduit à:

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.30)$$

Si l'interaction du solide avec l'extérieur se réduit à la présence d'une distribution de contraintes $\vec{T}(\vec{x})$ sur la surface extérieure Σ , le champ de contrainte peut être déterminé indépendamment de la connaissance de la loi de comportement en résolvant l'équation aux dérivées partielles (2.30) avec pour condition aux limites sur toute la surface extérieure:

$$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x}) \vec{n} = \vec{T}(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Sigma$$

Dans d'autres cas, les conditions aux limites peuvent imposer le déplacement $\vec{u}(\vec{x})$ sur la surface extérieure Σ . Ou encore on pourrait avoir des conditions aux limites mixtes qui imposent les déplacements sur une partie de Σ et la contrainte sur une autre partie. Dans les deux cas la solution du problème nécessite la définition d'une loi de comportement reliant les contraintes aux déformations en tout point à l'intérieur du volume du corps.

Des conditions aux limites appropriées doivent aussi être prises en compte pour des éventuelles des interfaces intérieures au corps. Par exemple dans les cas d'interfaces internes à contrainte nulle (fissures) ou alors aux interfaces séparant deux régions avec loi de comportement différente (composites).

2.4 Lois de comportement (Slides Séminaire)

2.4.1 Le problème général de la mécanique

2.4.2 Mesure des lois de comportement

2.4.3 Contraintes et déformations nominales et vraies

Les matériaux élastiques mous, ainsi que certains matériaux plastiques, peuvent présenter des très grandes élongations avant la rupture ($\lambda = L/L_0 \sim 5$). Pour étudier la loi de comportement (1D) à partir d'un test uniaxial en grande déformation, il faut préciser et adapter les notions de contrainte et déformation.

On rappelle la définition de **contrainte et déformation nominale** pour un test de traction uniaxiale:

$$\sigma_N = \frac{F}{S_0} \quad \varepsilon_N = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (2.31)$$

où l'indice 0 se réfère aux valeurs de section et de longueur avant le début de la déformation. La grande amplitude des déformations justifie l'utilisation des concepts de **contrainte et déformation vraie**. On définit le **taux d'extension** λ :

$$\lambda = \frac{L}{L_0} = 1 + \varepsilon_N \quad (2.32)$$

La déformation vraie est donnée par⁴:

$$\varepsilon_V = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \lambda = \ln(1 + \varepsilon_N) \simeq \varepsilon_N \quad \text{si } \varepsilon_N \ll 1 \quad (2.33)$$

Cette définition permet aux déformations successives d'être commutatives et donc cohérentes entre elles. En outre, pour des faibles déformations on retrouve la définition nominale. La contrainte vraie est définie en tenant compte de la réduction de section de l'éprouvette, conséquence de la contraction latérale pendant la traction (effet du rapport de Poisson):

$$\sigma_V = \frac{F}{S} \quad (2.34)$$

Dans le cas de matériaux denses (c'est à dire non poreux, comme dans l'extension élastique des élastomères, ou l'extension plastique des métaux ou polymères non poreux) l'extension se fait à volume constant (le rapport de Poisson vaut $\nu = 0.5$, on parle de matériaux incompressibles) et on peut donc exprimer:

$$S_0 L_0 = S L \quad S = \frac{S_0}{\lambda} \quad \sigma_V = \lambda \sigma_N \quad (2.35)$$

Nous rappelons que l'utilité de ces notions pour l'identification d'une loi de comportement à partir d'un test uniaxial est limitée aux situations pour lesquelles la déformation est homogène dans le volume de l'éprouvette de test (du moins pour ce qui concerne la partie centrale à section constante). S'il y a apparition d'une striction, ces notions perdent leur signification et il faut considérer des estimations plus locales dans la striction, ce qui nécessite par exemple une mesure indépendante de la section minimale S_m à l'endroit de la striction.

⁴Pour comprendre cette définition, il faut subdiviser l'extension en plusieurs petits pas dL_i . La déformation associée à chaque pas est donnée par $d\varepsilon_i = dL_i/L_i$, où L_i est la longueur de l'éprouvette à l'étape i plutôt que la longueur initiale L_0 . Dans la limite des petits pas, la somme devient une intégrale et conduit à la fonction logarithme.

- 2.4.4 Essais mécaniques typiques (1D)
- 2.4.5 Comportement élastique
- 2.4.6 Comportement visco-élastique (solide)
- 2.4.7 Comportement élasto-plastique
- 2.4.8 Essais mécaniques complémentaires (3D)
- 2.5 **Classes de matériaux, micromécanismes de déformation et rupture (Slides Séminaire)**
 - 2.5.1 Diagrammes de Ashby
 - 2.5.2 Matériaux minéraux: céramiques, verres, roches
 - 2.5.3 Matériaux métalliques
 - 2.5.4 Matériaux organiques: les polymères

Chapter 3

Elasticité

3.1 Loi de comportement élastique et potentiel élastique

La loi de comportement élastique se traduit par une relation bijective entre les contraintes et les déformations:

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}) \quad \sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl})$$

ce qui revient à dire que si on connaît l'état actuel des déformations en tout point, alors on connaît complètement l'état mécanique, et donc aussi les contraintes. Si on relâche les contraintes, les déformations s'annulent complètement en tout point.

Comme les tenseurs $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ sont symétriques, on a besoin a priori de 6 fonctions de 6 variables, mais ces relations ne peuvent pas être quelconques.

La nature conservative de l'élasticité nécessite l'existence d'une fonction scalaire $\mathcal{U}_{el}(\bar{\varepsilon})$, dite **potentiel élastique**, qui représente la densité d'énergie élastique dans le matériau. La connaissance de ce potentiel permet de calculer les contraintes par dérivation:

$$\bar{\sigma} = \frac{d\mathcal{U}_{el}}{d\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}_{el}}{\partial \varepsilon_{ij}}(\bar{\varepsilon}) \quad (3.1)$$

NB: nous rencontrons ici pour la première fois la dérivée d'un scalaire par rapport à un tenseur. Il s'agit simplement de la matrice qui contient les dérivées partielles du scalaire par rapport à toutes les composantes du tenseur.

Nous avons donc restreint la loi de comportement élastique à la connaissance d'une seule fonction de 6 variables. Il faut voir cette procédure comme la généralisation de la démarche suivie en 1D pour la force élastique d'un ressort individuel:

$$F = kx \quad U_{el}(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad F = \frac{dU_{el}}{dx}$$

NB: nous utiliserons la notation U_{el} [J] pour l'énergie élastique et \mathcal{U}_{el} [Pa] pour la densité volumique d'énergie élastique (nous utiliserons un code graphique similaire pour les autres grandeurs énergétiques mécaniques et thermodynamiques pour signifier la grandeur extensive ou sa densité volumique). L'existence d'un potentiel élastique implique que le travail effectué par les efforts extérieurs pendant la déformation d'un corps d'une configuration 1 vers une configuration 2 est indépendant du parcours suivi. On en déduit que le travail des forces extérieures dans tout cycle de déformation doit être nul.

3.1.1 Cas des petites déformations

Dans le cas des petites déformations on peut linéariser la loi de comportement, ce qui revient à retenir un développement du potentiel élastique à l'ordre 2 en déformation:

$$\mathcal{U}_{el}(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{U}_{el}^0 + \sum_{ij} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (3.2)$$

où σ_{ij}^0 représente le tenseur de précontrainte (ou contrainte résiduelle) éventuellement présent à chaque point à déformation nulle, et C_{ijkl} est le tenseur de rigidité (NB: tenseur d'ordre 4). On peut l'écrire en forme tensorielle:

$$\mathcal{U}_{el}(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{U}_{el}^0 + \text{Tr}(\bar{\sigma}^0 \bar{\varepsilon}) + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \bar{\bar{C}} \bar{\varepsilon} \quad (3.3)$$

En dérivant par rapport à $\bar{\varepsilon}$ on en déduit la loi de comportement linéaire:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + \bar{\bar{C}} \bar{\varepsilon} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.4)$$

C_{ijkl} a beaucoup de symétries. Pour un matériau linéaire et anisotrope il a 21 coefficients indépendants. Pour le cas des matériaux isotropes il n'en a que 2!

3.1.2 Cas des matériaux isotropes

Pour un matériau isotrope le potentiel élastique ne peut être exprimé qu'en fonction de quantités elles mêmes isotropes, et donc d'invariants du tenseur de déformation. Il convient de choisir le jeu de trois invariants indépendant suivants:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr} \bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} \\ I_2^* &= \text{Tr}(\bar{\varepsilon}^2) = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \\ I_3 &= \det \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{aligned}$$

$$\mathcal{U}_{el}(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{U}_{el}(I_1, I_2^*, I_3)$$

Ceci est valable pour tout matériau élastique isotrope. Dans le cas de petites déformations \mathcal{U}_{el} est une fonction quadratique, donc on doit exclure I_3 et on peut écrire:

$$\mathcal{U}_{el}(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{U}_{el}^0 + \sigma^0 \text{Tr} \bar{\varepsilon} + \frac{\lambda}{2} (\text{Tr} \bar{\varepsilon})^2 + \mu \text{Tr}(\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{U}_{el}(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{U}_{el}^0 + \sigma^0 \varepsilon_{ii} + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{ii})^2 + \mu (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}) \quad (3.6)$$

Les coefficients ne peuvent être que scalaires: σ^0 est l'éventuelle précontrainte (qui doit donc être isotrope!). Les coefficients λ et μ sont les deux coefficients élastiques de Lamé. Les déformations étant sans dimensions, toutes les autres grandeurs sont en Pa, l'unité qui représente à la fois une pression, une contrainte, un module élastique et le potentiel élastique. On remarque que un Pa est à la fois une force par unité de surface et une énergie par unité de volume!

$$Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{Nm}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

En dérivant par rapport à $\bar{\varepsilon}$ on obtient la relation de Lamé¹:

$$\bar{\sigma} = \sigma^0 \bar{I} + \lambda(\text{Tr } \bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad \sigma_{ij} = \sigma^0 \delta_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.7)$$

qui est une des expressions de la loi de Hooke pour un corps élastique linéaire isotrope. Nous en verrons d'autres dans les sections suivantes.

3.1.3 Contraintes résiduelles d'origine thermoélastique

Si on considère un corps à une température T_0 sans contraintes résiduelles et on applique une faible augmentation de température $T - T_0$, la dilatation conduit à une déformation thermique locale isotrope (expansion volumique):

$$\bar{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0) \bar{I} \quad (3.8)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique linéaire. Nous remarquons que pour rester dans l'approximation des petites déformations, il faut que la variation de température reste faible. La variation de volume relative vaut:

$$\frac{dV^{th}}{V} = \text{Tr } \bar{\varepsilon}^{th} = 3\alpha(T - T_0)$$

Si le corps se trouvait confiné dans un volume dont les parois sont rigides, sa déformation thermique ne serait pas permise par les conditions aux limites. Pour pouvoir annuler la déformation, les parois doivent exercer une contrainte²

$$\bar{\sigma}^0 = -(3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0) \bar{I}$$

Si on applique ce raisonnement à un petit élément à l'intérieur d'un corps rigide, on comprend qu'un faible échauffement local engendre l'apparition locale d'une contrainte résiduelle $\bar{\sigma}^0$. On remarque que le module élastique en jeu équivaut au module de compressibilité: $3\lambda + 2\mu = 3K$ (voir table en Fig. 3.1.5). S'agissant de contraintes internes, les contraintes résiduelles doivent être globalement équilibrées. Donc l'existence d'une région en compression, implique l'existence concomitante d'une région en traction. Exemples: rupture par choc thermique, trempe thermique des verres, bilame thermique, matériaux composites. Lorsque on s'écarte du comportement purement élastique, le matériau peut garder des contraintes résiduelles même lorsque la température du matériau redevient homogène, suite à son histoire thermique pendant sa synthèse (effets de viscoélasticité ou de plasticité).

Nous allons dans la suite négliger les contraintes thermiques dans les équations d'élasticité par simplicité graphique, mais il faut savoir les prendre en compte au bon moment.

¹La dérivée de $\text{Tr } \bar{\varepsilon}$ par rapport à $\bar{\varepsilon}$ s'écrit: $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{kk} = \delta_{ij}$. La dérivée de $\text{Tr } \bar{\varepsilon}^2$ par rapport à $\bar{\varepsilon}$ s'écrit: $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{kl} = 2\varepsilon_{ij}$.

²Il s'agit de la contrainte qu'il faut appliquer pour obtenir une déformation identique à $\bar{\varepsilon}^{th}$, mais de signe opposé. Nous avons substitué (3.8) dans (3.7) et tenu compte que $\text{Tr } \bar{I} = 3$.

3.1.4 Modules de compressibilité de cisaillement

Si on décompose la déformation en sphérique et déviateur:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} + \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}\right) \quad \bar{\varepsilon} = \bar{S}_\varepsilon + \bar{D}_\varepsilon = \varepsilon_m \bar{I} + \sqrt{3}\varepsilon_d \overline{\text{signe}}(\bar{\varepsilon})$$

On peut décrire la relation de Lamé de la façon suivante:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}\right) \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.9)$$

$$\bar{\sigma} = 3K\bar{S}_\varepsilon + 2\mu\bar{D}_\varepsilon$$

En décomposant aussi la contrainte:

$$\bar{\sigma} = \bar{S}_\sigma + \bar{D}_\sigma = \sigma_m \bar{\delta} + \sqrt{3}\sigma_d \overline{\text{signe}}(\bar{\sigma})$$

on peut **découpler la partie sphérique et déviatorique de la loi de Hooke**:

$$\boxed{\bar{S}_\sigma = 3K\bar{S}_\varepsilon \quad \bar{D}_\sigma = 2\mu\bar{D}_\varepsilon \quad \overline{\text{signe}}(\bar{\sigma}) = \overline{\text{signe}}(\bar{\varepsilon})} \quad (3.10)$$

Le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et celui des déformations $\bar{\varepsilon}$ ont le même signe, ce qui veut dire qu'ils ont les **mêmes directions principales en tout point**. Au niveau scalaire on peut écrire:

$$\boxed{\sigma_m = 3K\varepsilon_m = K\frac{dV}{V} \quad \sigma_d = 2\mu\varepsilon_d} \quad (3.11)$$

La première des équations (3.11) justifie l'identification de K avec le **module de compressibilité**. Dans le cas d'une compression hydrostatique $\sigma_m = -dp$ on peut en fait écrire:

$$K = \frac{-dp}{\frac{dV}{V}} = -V\frac{dp}{dV} \quad (3.12)$$

La deuxième des équations (3.11) justifie le nom pour μ de **module de cisaillement** (appelé souvent G). K décrit les changements de volume à forme constante, alors que μ décrit les changements de forme à volume constant.

3.1.5 Module d'Young et rapport de Poisson

Les modules d'Young et le rapport de Poisson sont définis à partir du test de **traction/compression uniaxiale**:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\parallel}}} \quad \boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}} \quad (3.13)$$

Par exemple si on applique une contrainte le long de l'axe 1 on aura:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} \end{pmatrix}$$

Si on considère la somme de trois contraintes uniaxiales dans les trois axes et de trois contraintes de cisaillement (couples perpendiculaires aux trois axes), on obtient les set de 6 équations:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu}\end{aligned}$$

Ce qui peut se compacter dans la forme tensorielle:

$$\boxed{\bar{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{I}} \quad \boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}} \quad (3.14)$$

En identifiant cette relation avec la relation de Lamé on obtient:

$$\boxed{\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \quad \boxed{\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}} \quad (3.15)$$

La table suivante resume les **relations entre tous les couples de modules élastiques**:

	(λ, μ)	(E, μ)	(K, λ)	(K, μ)	(λ, ν)	(μ, ν)	(E, ν)	(K, ν)	(K, E)
$K =$	$\lambda + \frac{2\mu}{3}$	$\frac{E\mu}{3(3\mu - E)}$			$\lambda \frac{1 + \nu}{3\nu}$	$\frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$		
$E =$	$\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$		$9K \frac{K - \lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{9K\mu}{3K + \mu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	$2\mu(1 + \nu)$		$3K(1 - 2\nu)$	
$\lambda =$		$\mu \frac{E - 2\mu}{3\mu - E}$		$K - \frac{2\mu}{3}$		$\frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$\frac{3K(3K - E)}{9K - E}$
$\mu =$			$3 \frac{K - \lambda}{2}$		$\lambda \frac{1 - 2\nu}{2\nu}$		$\frac{E}{2 + 2\nu}$	$3K \frac{1 - 2\nu}{2 + 2\nu}$	$\frac{3KE}{9K - E}$
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\frac{E}{2\mu} - 1$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}$					$\frac{3K - E}{6K}$
$M =$	$\lambda + 2\mu$	$\mu \frac{4\mu - E}{3\mu - E}$	$3K - 2\lambda$	$K + \frac{4\mu}{3}$	$\lambda \frac{1 - \nu}{\nu}$	$\mu \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}$	$E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$3K \frac{1 - \nu}{1 + \nu}$	$3K \frac{3K + E}{9K - E}$

Le signe positif de l'énergie de déformation élastique pour toute déformation nécessite que les modules élastiques soient tous positifs:

$$\boxed{\lambda, \mu, K, E > 0}$$

Le domaine de variabilité du rapport de Poisson peut se comprendre en considérant les signes positifs du module de compressibilité et du module de cisaillement:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu < \frac{1}{2}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu > -1$$

$$\boxed{-1 < \nu < 1/2}$$

Le cas limite $\nu = 1/2$ correspond à un matériau **incompressible** (fluide, élastomère, ...). On remarque que dans la limite incompressible, K , λ et M divergent, alors que μ et $E = 3\mu$ peuvent rester faibles et du même ordre de grandeur.

Bien que la plupart des matériaux aient une valeur de ν positive, généralement comprise entre 0.2 et 0.4, des matériaux comme le liège ne présentent pas de contraction latérale ($\nu = 0$), d'autres matériaux à structure complexe (mousses solides, métamatériaux) s'étendent latéralement suite à une traction ($\nu < 0$) et son dits **auxétiques**.

3.2 Les problèmes plans

Les problèmes 3D sont certainement très complexes et sont en général traités par des simulations aux éléments finis. La plupart des problèmes qu'on traitera, tout en étant 3D, posséderont des symétries qui permettent de se ramener à une solution sur un plan. Les cas plus simples sont une invariance par translation dans la direction x_3 , ce qui nous amène à chercher des solutions 2D dans le plan x_1, x_2 , ou alors une symétrie de révolution par rapport à θ , ce qui nous amène à chercher des solutions 2D dans le plan r, z (coordonnées polaires cylindriques). On va se limiter ici à des problèmes plans, définis par le fait que toutes les grandeurs ne dépendent que de (x_1, x_2) et que x_3 soit direction principale en tout point. Il faut distinguer les deux situations suivantes.

3.2.1 La déformation plane (*plane strain*)

Si on considère un cas pour lequel le déplacement u_3 est nul et les déplacements u_1, u_2 sont indépendants de x_3 . Il s'ensuit que pour la déformation $\varepsilon_{ij} = 1/2(\partial u_i/x_j + \partial u_j/x_i)$:

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} \quad \text{indépendant de } x_3$$

ce qui définit un état de déformation plane. C'est le cas d'une plaque maintenue entre deux parois rigides qui empêchent toute déformation selon x_3 . C'est aussi en bonne approximation la condition de déformation dans la partie interne d'une plaque très épaisse en direction x_3 . La loi de Hooke $\varepsilon_{33} = 1/E(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}))$ fait émerger une contrainte $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ car le matériau n'est pas libre de se déformer selon x_3 . Les tenseurs de déformation et contraintes se réduisent donc à:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}$$

On remarque que l'état de déformation est biaxial (déformation plane), alors que **l'état de contrainte est triaxial** (c'est à dire qui comporte trois contraintes principales non nulles). En remplaçant σ_{33} par sa valeur $\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ on peut néanmoins écrire une loi de Hooke 2D dans la forme:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E'}(\sigma_{11} - \nu'\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E'}(\sigma_{22} - \nu'\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \end{cases} \quad (3.16)$$

au prix de l'utilisation des **modules effectifs**:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

NB: $E' > E$. Quand la déformation latérale est interdite, le matériau paraît plus rigide à cause de la frustration due à l'effet de Poisson. La situation de déformation plane s'applique aussi dans la partie interne d'une plaque très épaisse et avec les faces libres. En effet, la grande épaisseur empêche l'apparition de fortes déformations dirigées selon x_3 et variables en x_1, x_2 hormis dans une couche proche des surfaces.

3.2.2 La contrainte plane (*plane stress*)

Par analogie avec la déformation plane, on peut définir un état de contrainte plane par les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} &\text{ indépendant de } x_3\end{aligned}$$

La loi de Hooke 2D devient alors:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2\mu}\end{aligned}$$

complétée par les relations impliquant la troisième coordonnée x_3 :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \varepsilon_{23} &= 0 \quad \varepsilon_{13} = 0\end{aligned}$$

Les tenseurs de contrainte et déformation se réduisent donc à:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{pmatrix}$$

C'est un état de contrainte biaxial (avec deux contraintes principales non nulles), alors que **l'état de déformation est triaxial**. La contrainte ε_{33} étant constante dans l'épaisseur de l'échantillon, l'épaisseur h de l'échantillon subit une variation locale de $u_3 = h\varepsilon_{zz}$ (effet du rapport de Poisson).

L'état de contrainte plane correspond à la situation d'une plaque fine sujette à des chargements dans le plan de la plaque. Les trois composantes du vecteur contrainte sont nulles sur les deux surfaces libres définies par la normale à la direction 3. Néanmoins ces trois composantes ne sont pas forcément nulles à l'intérieur de la plaque, sauf dans la limite où l'épaisseur tend vers zéro. L'état de contrainte plane est donc une approximation asymptotique valable dans la limite de faible épaisseur.

3.2.3 Modules effectifs et fonction de contrainte d'Airy

Pour les deux conditions de déformation et de contrainte plane on peut écrire la même loi de Hooke 2D (3.16), formellement analogue à la loi 3D, à condition d'utiliser des **modules effectifs**:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad \text{pour des déformations planes}$$

$$E' = E \quad \nu' = \nu \quad \text{pour des contraintes planes}$$

Dans les deux cas, l'équilibre élastique en l'absence de forces de volume ($\operatorname{div} \bar{\sigma} = 0$) s'écrit:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

Ces équations sont automatiquement satisfaites si l'on trouve une fonction scalaire $\Phi(x_1, x_2)$, dite **fonction de contrainte d'Airy** (Airy, 1862), telle que:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Maxwell a montré en 1868 que pour les problèmes plans, les conditions de compatibilité (c.f. section 2.1.6) peuvent être écrites en termes de contrainte dans la forme suivante:

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

En termes de fonction de contrainte de Airy la solution d'un problème plan revient donc à trouver une fonction biharmonique:

$$\Delta \Delta \Phi(x_1, x_2) = 0$$

qui satisfait aux conditions aux limites du problème. Cette technique est utilisée en plusieurs disciplines, telles que la mécanique de fluides, l'électrostatique, etc.

On remarque que si les conditions aux limites sont écrites en termes de contraintes, les deux états plans admettent la même solution en termes de champ de contraintes. Les champs de déformation et de déplacement sont aussi identiques à un facteur près donné par la différence de module effectif.

De façon encore plus remarquable, les solutions en termes de champ de contrainte sont indépendantes des modules élastiques (et donc du matériau). Cette propriété est le fondement de la **photoélasticimétrie**, qui utilise des prototypes en matériau photoélastique (par exemple PMMA) pour étudier la distribution de contrainte d'une pièce à réaliser dans un matériau quelconque.

C'est dans le cadre de cette élasticité 2D que l'on définit les lieux caractéristiques que l'on pourra mesurer par une analyse photoélastique, tels que les **lignes isoclines** (même orientation des axes propres), les **lignes isochromes** (même différence de contraintes principales $\sigma_1 - \sigma_2$), les **lignes isopachiques** (même épaisseur de l'échantillon, donc même valeur de ε_{33}) et les **lignes isostatiques** (trajectoires des directions des contraintes principales).

3.3 Approches énergétiques

3.3.1 La densité d'énergie élastique (revisited)

Reconsidérons la densité d'énergie élastique d'un matériau linéaire et isotrope:

$$\mathcal{U}_{el}(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{U}_{el}^0 + \sigma^0 \text{Tr } \bar{\varepsilon} + \frac{\lambda}{2} (\text{Tr } \bar{\varepsilon})^2 + \mu \text{Tr } (\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.17)$$

Nous supposons dans la suite que $\sigma^0 = 0$ et choisissons que $\mathcal{U}_{el}^0 = 0$ (on prend pour état de référence l'état à déformation nulle).

$$\mathcal{U}_{el}(\bar{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} (\text{Tr } \bar{\varepsilon})^2 + \mu \text{Tr } (\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.18)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{U}_{el}}{\partial \bar{\varepsilon}} = \lambda (\text{Tr } \bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad (3.19)$$

En calculant le produit on obtient:

$$\bar{\sigma} \bar{\varepsilon} = \lambda (\text{Tr } \bar{\varepsilon}) \bar{\varepsilon} + 2\mu \bar{\varepsilon}^2 \quad (3.20)$$

et en estimant la trace de cette quantité:

$$\text{Tr}(\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) = \lambda (\text{Tr } \bar{\varepsilon})^2 + 2\mu \text{Tr}(\bar{\varepsilon}^2) \quad (3.21)$$

on trouve que la densité d'énergie élastique peut être exprimée sous la forme:

$$\mathcal{U}_{el} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \dots) \quad (3.22)$$

NB: il s'agit de multiplier les termes correspondants des matrices $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ et de sommer le tout.

Par exemple dans le cas simple d'un chargement uniaxial σ_{11} , nous avons l'expression simple:

$$\mathcal{U}_{el} = \frac{1}{2} \sigma_{11} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{11}^2}{E} = \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2 \quad (3.23)$$

C'est l'analogie de l'énergie élastique d'un ressort. Si on répète le même traitement fait pour construire la loi de Hooke à partir de l'énergie élastique on aurait:

$$U_{el} = \frac{1}{2} k x^2$$

$$F = \frac{dU_{el}}{dx} = kx$$

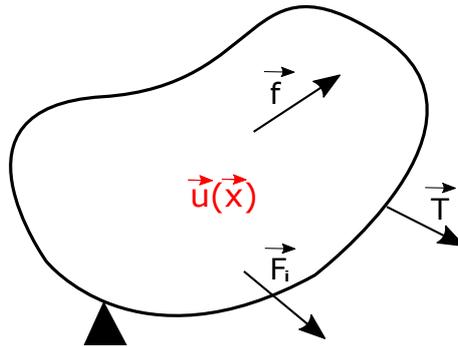
$$U_{el} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} F x = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$$

3.3.2 Théorème de l'énergie potentielle - Principe variationnel

Si on considère un corps élastique linéaire initialement dans sa configuration neutre (sans précontrainte) et qu'on lui applique un chargement extérieur représenté par une distribution de forces dépendant uniquement de la position \vec{x} dans la configuration non déformée (des forces volumiques $\vec{f}(\vec{x})$ à l'intérieur, des forces surfaciques $\vec{T}(\vec{x})$ à la surface extérieure et des forces ponctuelles \vec{F}_i appliquées en des points \vec{x}_i), alors la solution du problème d'équilibre statique en termes de champ de déplacement $\vec{u}(\vec{x})$ **rend minimale l'énergie potentielle** U_p définie comme:

$$U_p = U_{el} - W \quad (3.24)$$

où U_{el} est l'énergie élastique et W est le travail des efforts extérieurs (les deux associés au champ de déplacement $\vec{u}(\vec{x})$).



De fait ce théorème définit une façon alternative de résoudre un problème élastique en substituant l'ensemble des équations différentielles de l'équilibre (section 2.3.3) et de la loi de Hooke (section 3.1) par un **principe variationnel**:

$$dU_p(\vec{u}) = dU_{el}(\vec{u}) - dW(\vec{u}) = 0 \quad (3.25)$$

La **fonctionnelle** $U_p(\vec{u})$ peut en principe être calculée pour tout **champ de déplacement** $\vec{u}(\vec{x})$ **cinématiquement admissible** (c'est à dire qui respecte les conditions aux limites ainsi que la continuité du corps élastique). Et la solution du principe variationnel est le champ $\vec{u}(\vec{x})$ qui minimise U_p .

Dans la cas plus général des principes variationnels on ne demande pas que ce soit strictement un minimum, mais uniquement que la fonction différentielle soit nulle. Formellement on peut écrire:

$$U_p(\vec{u} + d\vec{u}) = U_p(\vec{u}) + \frac{dU_p}{d\vec{u}} d\vec{u}$$

en traitant le principe variationnel comme une sorte de dérivée d'un scalaire par rapport à une fonction (NB: action permise uniquement aux physiciens, les mathématiciens crieraient). Le principe variationnel revient à demander que:

$$\frac{dU_p}{d\vec{u}} = 0$$

Pour savoir si cet extremum est un minimum, il faudrait calculer les dérivées d'ordre deux. Dans le cas de l'élasticité linéaire il se trouve qu'il s'agit toujours d'un minimum parce que l'énergie élastique est définie positive (fonction quadratique des déformations).

On peut donner une interprétation physique intuitive du théorème de l'énergie potentielle. Par la suite on traitera uniquement des chargements tels que les efforts extérieurs (densité

volumique de force extérieure \vec{f} ou distribution de contraintes extérieures \vec{T} sur les surfaces) sont constants pendant le chargement (en chaque point), ce qui revient à dire que les forces seront conservatives. On pourra donc définir une énergie potentielle U_{ext} liée au travail des forces extérieures telle que:

$$W = -\Delta U_{ext}$$

L'énergie potentielle U_p peut donc être vue comme l'énergie potentielle totale dans un problème globalement conservatif:

$$U_p = U_{el} + U_{ext}$$

Le théorème de l'énergie potentielle devient alors une condition d'équilibre statique global, c'est à dire une minimisation de l'énergie potentielle totale. On souligne qu'on cherche une solution $\vec{u}(\vec{x})$ statique: on la trouve grâce à la condition d'un minimum d'énergie potentielle. Autrement des petites perturbations conduiraient à la création instable d'énergie cinétique, et donc à l'éloignement par rapport à cette solution.

Reprenons l'analogie 1D d'un ressort soumis à une force externe constante F_{ext} , la solution du problème d'équilibre statique par cette méthode peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2}kx^2 & W &= F_{ext}x & U_p &= \frac{1}{2}kx^2 - F_{ext}x \\ \frac{dU_p}{dx} &= kx - F_{ext} = 0 & \Rightarrow & & x_{eq} &= \frac{F_{ext}}{k} \\ F &= \frac{dU_{el}}{dx} = kx & F_{eq} &= kx_{eq} = F_{ext} \end{aligned}$$

c'est à dire que la valeur de x à l'équilibre statique sera telle que la force élastique équivaut à la force extérieure appliquée. En estimant les différentes formes d'énergie à la valeur d'équilibre x_{eq} , nous obtenons que:

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx_{eq}^2 = \frac{1}{2}\frac{F_{ext}^2}{k} \quad W = F_{ext}x_{eq} = \frac{F_{ext}^2}{k} = 2U_{el} \quad U_p = U_{el} - W = -U_{el}$$

En particulier, la relation:

$$\boxed{W(x_{eq}) = 2U_{el}(x_{eq})} \quad (3.26)$$

est de grande utilité dans le traitement de tout système élastique linéaire.

De fait la même relation peut être aussi appliquée à l'échelle de chaque élément MMC d'un corps élastique linéaire (uniquement). On peut donc exprimer une densité volumique de travail \mathcal{W} effectué sur un élément par des proches voisins en termes des contraintes et de déformations locales à l'équilibre:

$$\mathcal{W} = 2\mathcal{U}_{el} = \text{Tr}(\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) \quad (3.27)$$

Le travail total des forces extérieures associé à la solution d'équilibre $\vec{u}_{eq}(\vec{x})$ peut donc être exprimé à la fois en termes de forces extérieures et des champs de contraintes et déformations internes:

$$W = \int_V \text{Tr}(\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) dV = \int_V \vec{f} \cdot \vec{u} dV + \int_S \vec{T} \cdot \vec{u} dS \quad (3.28)$$

3.3.3 Analyse de stabilité

Si le problème élastique à traiter est fonction d'un paramètre extérieur q , il faudra agir en deux temps. D'abord résoudre le problème variationnel minimisant U_p en maintenant le paramètre q constant, ensuite trouver la valeur d'équilibre de q en minimisant la solution par rapport à q , et finalement étudier la dérivée seconde par rapport à q pour déterminer la stabilité. Formellement on peut écrire:

$$\begin{aligned}
 U_p &= U_p(\vec{u}, q) \\
 dU_p &= \frac{\partial U_p(\vec{u}, q)}{\partial \vec{u}} d\vec{u} + \frac{\partial U_p(\vec{u}, q)}{\partial q} dq = 0 \\
 \frac{\partial U_p(\vec{u}, q)}{\partial \vec{u}} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_{eq}(q) \\
 \frac{\partial U_p(\vec{u}_{eq}(q), q)}{\partial q} &= 0 \quad \Rightarrow \quad q_{eq} \\
 \frac{\partial^2 U_p(\vec{u}_{eq}(q_{eq}), q_{eq})}{\partial q^2} &> 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stable} \\
 \frac{\partial^2 U_p(\vec{u}_{eq}(q_{eq}), q_{eq})}{\partial q^2} &< 0 \quad \Rightarrow \quad \text{instable}
 \end{aligned}$$

Si le problème dépend de plusieurs paramètres extérieurs q_1, q_2, \dots, q_n , le schéma de solution précédant reste valable en regroupant formellement les paramètres dans un vecteur $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Il faut d'abord résoudre le principe variationnel pour \vec{q} constant, ce qui donne \vec{u}_{eq} . Ensuite déterminer la valeur d'équilibre \vec{q}_{eq} en imposant que le gradient de U_p soit nul (n équations):

$$\overrightarrow{\text{grad}} U_p(\vec{u}_{eq}(\vec{q}), \vec{q}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U_p(\vec{u}_{eq}(\vec{q}), \vec{q})}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{q}_{eq}$$

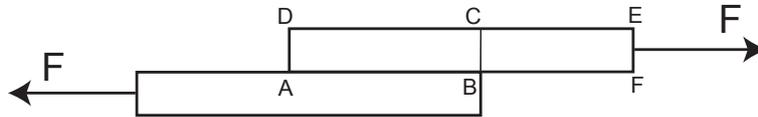
Finalement on analyse la stabilité en regardant la matrice des dérivées mixtes d'ordre deux de l'énergie potentielle U_p par rapport aux q_i , ce que l'on appelle une matrice Hessienne. Après diagonalisation de la matrice Hessienne, il suffit que l'une des valeurs propres soit négative pour rendre l'équilibre instable (comme sur un paysage énergétique en forme de selle de cheval!).

Nous observons que si le chargement extérieur se fait à déplacement imposé, le travail W des efforts extérieurs est nul et le principe variationnel, ainsi que l'analyse de stabilité, s'appliquent directement à l'énergie élastique U_{el} .

3.4 Solution de problèmes simples en loi d'échelle

3.4.1 Transfert de charge sur un joint soudé

Considérons l'assemblage de deux plaques d'épaisseur h et largeur b , constituées du même matériau et soudées sur une longueur L . L'assemblage est soumis à une traction horizontale F :



Équilibre global

En imposant l'équilibre des forces sur l'élément BCEF et ensuite sur ABCD, déduire l'ordre de grandeur des composantes du tenseur de contraintes sur les quatre faces de l'élément considéré.

Corrigé

En l'absence de forces de volume, l'équilibre statique global s'écrit en termes d'efforts T appliqués à la surface Σ :

$$\sum_{\Sigma} \vec{T} dS = \vec{0}$$

Si on considère la composante x (colinéaire à \vec{F}) de cette équation sur l'élément BCEF on obtient la valeur moyenne de la composante σ_{xx} agissant sur BC:

$$\sigma_{xx} h b = F \quad \sigma_{xx} = \frac{F}{hb}$$

On considère maintenant la composante x de l'équation d'équilibre global sur l'élément ABCD. Les deux facettes qui portent des contraintes à composante horizontale sont BC et AC. En considérant des valeurs moyennes sur les facettes on peut écrire:

$$\sigma_{xx} h b + \sigma_{xy} L b = 0 \quad |\sigma_{yx}| = \sigma_{xx} \frac{h}{L} = F/bL \quad (3.29)$$

On constate que le transfert de la force résultante F entre les deux plaques implique l'évolution spatiale du champ de contrainte d'un état dominé par la traction sur BC à un état dominé par le cisaillement sur AB. L'intensité de la contrainte est amplifiée (ou réduite) en proportion au rapport h/L , notamment le cisaillement diminue si la longueur de la soudure augmente.

Équilibre local

Déduire le même résultat de la question précédente en imposant en ordre de grandeur l'équation d'équilibre locale $\vec{\text{div}} \bar{\sigma} = 0$ sur l'élément de volume ABCD.

Corrigé

L'équation d'équilibre statique locale s'écrit:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

En approchant les contraintes sur chaque facette de ABCD par des moyennes, et en considérant les variations entre facettes opposées, la première équation nous donne en loi d'échelle:

$$\frac{\sigma_{xx}}{L} + \frac{\sigma_{xy}}{h} = 0$$

ce qui est le même résultat que (3.29). Ayant fait l'approximation que σ_{xy} est indépendant de x , la deuxième équation conduit à une fonction σ_{yy} nulle (car elle est nulle à la surface).

On remarque que l'équation $\vec{\text{div}} \bar{\sigma} = 0$ nous renseigne sur la façon spécifique dont les composantes de la contrainte doivent se transformer afin de préserver l'équilibre statique.

3.4.2 Flexion d'une poutre

Nous allons considérer différentes solutions du même problème (la flexion d'une poutre) pour illustrer les méthodes de calcul en loi d'échelle. L'objectif sera d'estimer rapidement l'ordre de grandeur de la variable physique envisagée et de déterminer les lois d'échelle qui gouvernent sa dépendance avec d'autres grandeurs du problème.

Le problème traité ici est la flexion d'une poutre de longueur L et de dimensions latérales caractéristiques b et h ($h \ll b$). La poutre est encadrée à une extrémité et soumise à une force verticale F à l'autre extrémité comme dans la figure 3.1. Nous déterminerons par différentes méthodes l'ordre de grandeur de la flèche δ .

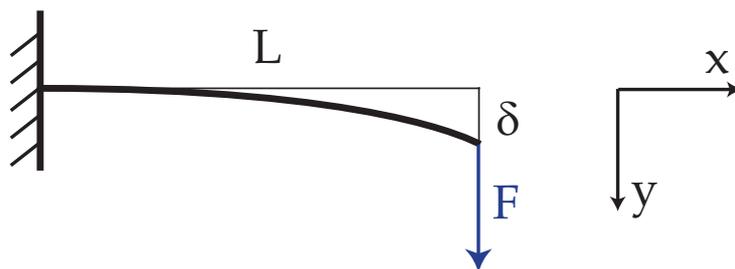


Figure 3.1: Poutre horizontale de longueur L encadrée en flexion d'une quantité δ sous l'action de la force verticale F .

Traitement 1: Théorie de Euler-Bernoulli pour les poutres minces

Selon l'équation de flexion des poutres élancées ($L/h \gg 1$), la courbure locale κ est donnée par:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

où $I = \int_S y^2 dS$ est le moment quadratique de surface calculé sur la section S de la poutre. Estimer l'ordre de grandeur de la flèche δ dans la limite des faibles flexions et sans résoudre l'équation différentielle.

Corrigé

La solution exacte est:

$$\begin{aligned} M(x) &= F(L - x) \\ \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L - x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \\ \frac{dy}{dx}(x) &= 0 + \frac{F}{EI} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \\ y(x) &= 0 + \frac{F}{EI} \left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{FL^3}{2EI} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{3L} \right) \\ y(x) &= \frac{\delta}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(3 - \frac{x}{L} \right) \quad \delta = \frac{FL^3}{3EI} \quad I = \frac{bh^3}{12} \end{aligned}$$

Le moment fléchissant au point x vaut:

$$M(x) = F(L - x) \sim FL$$

Sa valeur diminue de FL à zéro, mais on peut retenir FL comme valeur caractéristique en ordre de grandeur. Cette approximation revient à approcher le profil de flexion $y(x)$ avec un arc de cercle de rayon R donné par:

$$\frac{EI}{R} = M \sim FL \tag{3.30}$$

ce qui est raisonnable pour des faibles flexions. On peut ensuite estimer le rayon de courbure R en fonction des grandeurs géométriques L et δ en utilisant la loi d'échelle pour la dérivée seconde:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \sim \frac{\delta}{L^2} \tag{3.31}$$

NB: il y a plusieurs façons d'obtenir cette relation géométrique. Par exemple, si on considère la flexion de la poutre en arc de cercle AB (voir figure 3.2), il en dérive que le triangle ABC est rectangle. En considérant donc la similitude entre les triangles rectangles AHB et BHC, on peut écrire:

$$\frac{AH}{HB} = \frac{HB}{HC}$$

Pour $\delta \ll L \ll R$ on peut en outre approcher:

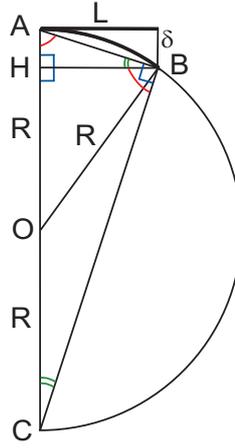


Figure 3.2: Approximation circulaire et similitude entre triangles rectangles.

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{L}{2R} \sim \frac{L}{R} \quad \frac{1}{R} \sim \frac{\delta}{L^2}$$

En substituant dans la loi de la flexion des poutres (3.30) nous obtenons enfin la loi d'échelle pour la flèche δ :

$$\frac{EI\delta}{L^2} \sim FL \quad \delta \sim \frac{L^3}{EI}F$$

NB: la solution exacte vaut $\delta = (L^3/3EI)F$, nous avons perdu le préfacteur $1/3$.

Même sans connaître les détails de forme de la section, la loi d'échelle du moment quadratique de surface peut être estimée en ordre de grandeur:

$$I = \int_S y^2 dS \sim h^2 S \sim h^2(bh) = bh^3$$

les détails de forme interviendront uniquement au niveau d'un préfacteur numérique (par exemple $1/12$ pour une section rectangulaire d'épaisseur total h).

L'ordre de grandeur de la flèche peut donc s'exprimer aussi comme:

$$\delta \sim \frac{L^3}{Ebh^3}F$$

NB: la solution exacte vaut:

$$\delta = (4L^3/Ebh^3)F \quad (3.32)$$

nous avons perdu le préfacteur 4, mais nous estimons correctement la loi d'échelle de la flèche en fonction des grandeurs du problème E, F, L, b, h .

Traitement 2: Un pas en arrière...: analyse en volume

On fait maintenant un pas en arrière. Nous oublions la connaissance de l'équation de la flexion des poutres élancées. Estimer une valeur caractéristique de la déformation ε dans la poutre. En déduire une estimation de la contrainte typique σ et de la densité d'énergie élastique \mathcal{U}_{el} .

En considérant le travail de chargement de la poutre par la force F , utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour estimer l'ordre de grandeur la fleche δ de la poutre. Reconnaître dans l'équation finale le rôle du moment d'inertie I . Exprimer la valeur de la contrainte typique en fonction des variables du problème (E, F, L, b, h) .

Identifier une valeur typique de la force de flexion (associée au passage en flexion forte) et exprimer l'équation pour la fleche en forme sans dimensions.

Corrigé

Nous regardons le problème à deux échelles. A l'échelle L de la poutre nous continuons à faire l'approximation d'une flexion circulaire avec un rayon de courbure typique R (ce qui préserve la relation géométrique $\delta \sim L^2/R$). A l'échelle de l'épaisseur h , la description de l'état de contrainte et de déformation dans le volume de la poutre est présentée sur la figure 3.3. Nous identifions un axe neutre et la nature dominante des contraintes de traction et compression sur les fibres extérieures et intérieures, représentés par les composantes σ_{xx} et ε_{xx} que nous considérons approximativement liées par la relation:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

NB: ceci est a priori une simplification importante de la nature tensorielle de la loi de Hooke (on néglige par exemple les couplages dus au rapport de Poisson), mais étant donnée la prédominance des termes xx , elle représente bien la loi de comportement en ordre de grandeur.

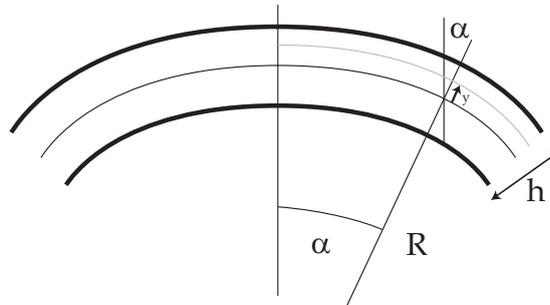


Figure 3.3: Déformation interne dans une poutre en flexion.

On peut établir géométriquement que la déformation varie linéairement dans le profil vertical comme $\varepsilon_{xx} = y/R$, y étant la distance verticale à la ligne neutre:

$$\varepsilon_{xx} \sim \frac{\alpha(R+y) - \alpha R}{\alpha R} \sim \frac{y}{R}$$

Les valeurs typiques de déformation et de contrainte sont donc données par les valeurs maximales à $y \sim h$:

$$\varepsilon \sim \frac{h}{R} \sim \frac{h\delta}{L^2} \quad \sigma \sim E\varepsilon \sim \frac{Eh\delta}{L^2}$$

L'ordre de grandeur de la densité volumique d'énergie élastique vaut donc:

$$\mathcal{U}_{el} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \sim \frac{Eh^2}{R^2} \sim \frac{Eh^2\delta^2}{L^4}$$

NB: cette valeur maximale positive est prise sur les deux surfaces supérieure et inférieure.

Pour estimer l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle élastique totale de la poutre nous négligeons tout détail de la distribution de déformation, et intégrons simplement la densité d'énergie liée à la valeur typique ε sur le volume de la poutre:

$$U_{el} \sim \mathcal{U}_{el}V \sim \frac{Eh^2\delta^2}{L^4}Lbh = \frac{Ebh^3\delta^2}{L^3}$$

La conservation de l'énergie veut que l'énergie élastique totale soit égale au travail $W = F\delta$ fait par la force extérieure F constante pendant le chargement jusqu'à la flèche δ . Nous avons donc la relation:

$$U_{el} \sim \frac{Ebh^3\delta^2}{L^3} = F\delta = W \quad (3.33)$$

Il s'ensuit une estimation en ordre de grandeur de la fleche δ identique à celle obtenue par le traitement 1:

$$\delta \sim \frac{L^3}{Ebh^3}F \sim \frac{L^3}{EI}F$$

où on reconnaît le terme $I \sim bh^3$.

L'expression de la contrainte typique en fonction des données du problème est donc:

$$\sigma \sim \sigma_{xx} \sim E\varepsilon_{xx} \sim E\frac{h}{R} \sim E\frac{h\delta}{L^2} \sim \frac{FL}{bh^2}$$

Remarques

On aurait pu obtenir le même résultat par d'autres pistes équivalentes, tel que:

1) Égaliser deux expressions indépendantes de l'énergie élastique de la poutre:

$$U_{el}^{(1)} \sim \frac{Ebh^3\delta^2}{L^3} \quad U_{el}^{(2)} = \frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{F\delta}{2}$$

La première, issue du calcul précédant, représente l'énergie élastique associée à la déformation interne de la poutre. La deuxième représente l'énergie élastique d'un ressort équivalent de raideur $k = F/\delta$. En égalisant ces deux expressions on obtient la relation $\delta(F)$ recherchée.

2) Le théorème de l'énergie potentielle nous dit que si le chargement extérieur est une force F constante, la solution du problème s'obtient en minimisant l'énergie potentielle totale par rapport au déplacement δ :

$$U_p = U_{el} - W$$

$$\frac{dU_p}{d\delta} = \frac{dU_{el}}{d\delta} - \frac{dW}{d\delta} = 0$$

$$\frac{Ebh^3}{L^3}\delta \sim F \quad \delta \sim \frac{L^3}{Ebh^3}F$$

D'ailleurs en loi d'échelle, une approximation du terme $dU/d\delta$ s'obtient en calculant le rapport des valeurs caractéristiques U/δ , donc on peut écrire:

$$\frac{dU_{el}}{d\delta} = \frac{dW}{d\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_{el}}{\delta} \sim \frac{W}{\delta} \quad \Rightarrow \quad U_{el} \sim W$$

ce qui nous conduit encore une fois au même résultat. Mais il est utile de savoir sur quelle loi physique on s'appuie: en effet toutes n'ont pas le même domaine d'application. On prendra ainsi moins de risques de se tromper.

Valeur typique de la force et forme sans dimensions

L'expression en loi d'échelle pour la fleche:

$$\delta \sim \frac{L^3}{Ebh^3} F$$

est limitée au domaine des faibles flexions, ce que l'on peut exprimer par $\delta \ll L$ ou $\delta/L \ll 1$.

On peut donc estimer une valeur typique F_c pour la force, correspondant à la force critique qui comprend le passage en forte flexion, en posant la condition $\delta \sim L$:

$$\delta \sim L \sim \frac{L^3}{Ebh^3} F_c \quad \Rightarrow \quad F_c \sim \frac{Ebh^3}{L^2} \sim \frac{EI}{L^2} \quad (3.34)$$

Nous précisons qu'il ne s'agit pas d'une force de seuil, mais d'un ordre de grandeur typique, dépendant des dimensions de la poutre et du matériau qui la constitue. C'est ce qu'on appelle une **échelle physique**. De façon très concrète l'expression de la force typique nous permet de dimensionner une poutre de telle sorte qu'elle puisse supporter la charge typique qui lui sera appliquée tout en gardant sa forme globalement droite. La valeur typique de la force peut aussi être utilisée pour exprimer l'équation de la fleche en forme sans dimension:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{F}{F_c} \quad F_c \sim \frac{Ebh^3}{L^2} \quad (3.35)$$

Traitement 3: Une fausse piste...?

On fait encore un pas en arrière... Si on oublie aussi qu'il existe une ligne neutre et un profil linéaire de traction/compression, on pourrait être tenté de chercher une loi d'échelle encore plus simplement. Par exemple on pourrait identifier une déformation caractéristique du problème par des considérations d'analyse dimensionnelle:

$$\varepsilon \sim \frac{du}{dx} \sim \frac{\delta}{L}$$

Appliquer l'argument de la conservation d'énergie pour estimer la flèche de la poutre. Le résultat est-il raisonnable? Justifier. Quelle est l'interprétation physique des calculs effectués? Exprimer le rapport entre l'estimation présente de la flèche et celle obtenue par les traitements 1 et 2 en fonction de l'élanement L/h .

Corrigé

Si on estime la déformation caractéristique:

$$\varepsilon \sim \frac{\delta}{L}$$

la méthode de conservation de l'énergie conduit à l'expression:

$$U_{el} \sim (E\varepsilon^2) V \sim F\delta \sim W$$

$$E \frac{\delta^2}{L^2} Lbh \sim F\delta$$

$$\delta \sim \frac{FL^2}{ELbh} \sim \frac{L}{Ebh} F \quad (3.36)$$

Expression qui n'est pas en accord avec l'équation (3.32) pour la flexion des poutres. Le souci vient du fait de ne pas avoir pensé à la nature tensorielle de $\bar{\varepsilon}$ dans l'estimation scalaire

$\varepsilon \sim \delta/L$. Comme δ et L sont perpendiculaires, nous avons en fait obtenu une estimation d'une déformation de cisaillement:

$$\varepsilon \sim \varepsilon_{yx} \sim \frac{\delta}{L}$$

D'ailleurs on voit bien qu'on doit avoir une composante de cisaillement, parce que l'effort tranchant F est constant sur toute la poutre, ce qui signifie que sur chaque section la contrainte de cisaillement moyenne est:

$$\sigma \sim \sigma_{yx} \sim \frac{F}{S} \sim \frac{F}{bh} \quad (3.37)$$

En d'autres termes, l'opération mathématique qu'on a faite, suppose physiquement que toute la flèche δ soit portée par les composantes de cisaillement (on néglige la flexion). La raideur d'un tel ressort serait:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{\sigma_{xy}bh}{\varepsilon_{xy}L} = \mu \frac{bh}{L} \sim \mu \frac{S}{L}$$

qui est analogue à la formule $k = ES/L$ pour la raideur d'une poutre en traction! L'expression pour la flèche δ :

$$\delta \sim \frac{L}{\mu bh} F$$

est justement identique au résultat (3.36). On remarque qu'en négligeant la nature de cisaillement de la déformation, nous avons aussi utilisé le module E au lieu de μ , mais en loi d'échelle cela n'a pas de sens de faire la différence, qui fait apparaître au pire à un facteur 3 (pour les matériaux incompressibles)³.

En faisant le rapport entre les deux estimations de la flèche en cisaillement et en flexion:

$$\frac{\delta_{cisail}}{\delta_{flexion}} \sim \frac{FL}{Ebh} / \frac{FL^3}{Ebh^3} \sim \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (3.38)$$

nous constatons que pour des poutres élancées ($L/h \gg 1$) la flexion est un mode beaucoup plus souple que le cisaillement (*EN: bending vs shear* en anglais)! NB: l'élancement est défini comme $\lambda = L/h$.

Traitement 4: un traitement plus juste et cohérent!

Pour remettre de l'harmonie entre les deux pistes, et établir une méthode de travail robuste et non ambiguë, on va appliquer plus rigoureusement les lois physiques de la mécanique aux solutions de Euler-Bernoulli envisagées pour la flexion.

Il faut écrire sans préfacteurs le champ $\sigma_{xx}(x, y)$ déduit de la théorie de Euler-Bernoulli dans le profil 2D de la poutre et faut vérifier s'il respecte la condition d'équilibre statique $\vec{\text{div}} \bar{\sigma} = 0$. En tirant des conséquences sur l'ordre de grandeur des autres composantes du tenseur de contraintes. Commenter le lien entre les composantes σ_{xx} et σ_{xy} .

Bien que dimensionnellement on puisse écrire simplement $\mathcal{U}_{el} \sim \sigma \varepsilon$, il vaut mieux se rappeler qu'il faut faire la somme sur toutes les composantes:

$$\mathcal{U}_{el} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \sim \sum_{ij} E \varepsilon_{ij}^2 \sim \sum_{ij} \frac{\sigma_{ij}^2}{E}$$

³On rappelle que $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Écrire l'équation de l'énergie élastique totale et utiliser la conservation de l'énergie pour estimer la flèche δ pour une poutre d'élanement générique. Comment interpréter le résultat en rapport aux deux modes de flexion et cisaillement étudiés aux points précédents?

Corrigé

Nous allons maintenant considérer la condition d'équilibre statique $\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} = 0$.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

Nous repartons de la solution en théorie des poutres (faite en MSM1) en faisant attention à toute les dépendances spatiales qu'on a négligées en prenant des ordres de grandeurs.

$$M(x) = F(L - x) \sim FL$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M(x)}{EI} \sim \frac{F(L - x)}{Ebh^3} \sim \frac{FL}{Ebh^3}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{y}{R} \sim \frac{F(L - x)y}{Ebh^3} \sim \frac{h}{R}$$

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \sim \frac{F(L - x)y}{bh^3} \sim \frac{FL}{bh^2}$$

On constate que cette solution à σ_{xx} dominante (contrainte localement uniaxiale) ne respecte pas la condition d'équilibre statique. Notamment la dépendance de σ_{xx} en x implique l'existence d'une composante σ_{xy} non nulle:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{Fy}{bh^3} \sim -\frac{F}{bh^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{Fy}{bh^3} \sim \frac{F}{bh^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xy} = \frac{Fy^2}{2bh^3} \sim \frac{F}{bh}$$

Nous obtenons la même estimation de σ_{xy} qu'au traitement 3 (équation 3.37). Le fait que σ_{xy} ne dépend pas de x , conduit à la nullité de $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$ (selon la deuxième composante de l'équation $\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} = 0$), et donc aussi de σ_{yy} compte tenu de son annulation aux surfaces extérieures.

On en conclut que les deux composantes σ_{xx} et σ_{xy} sont en fait inséparables dans notre problème. Leur rapport vaut en loi d'échelle:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{\left(\frac{F}{bh}\right)}{\left(\frac{FL}{bh^2}\right)} \sim \frac{h}{L}$$

On confirme que le terme σ_{xy} devient négligeable pour des poutres élançées, ce qui nous ramène aux solutions des traitements 1 et 2, mais qu'au contraire c'est le terme σ_{xx} qui devient négligeable pour des poutres très courtes, ce qui nous ramène à la solution du traitement 3. On peut par exemple penser à une couche de colle qui soutiendrait un tableau! Il est clair que sa déformation en cisaillement domine. D'ailleurs le moment $M \sim FL$ tend vers zéro.

Pour trouver la flèche δ on peut reprendre la conservation de l'énergie, mais en se rappelant qu'il faut sommer tous les termes tensoriels:

$$\mathcal{U}_{el} = \text{Tr} (\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \sim \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} \sim$$

$$\sim \frac{\sigma_{xx}^2}{E} + \frac{\sigma_{xy}^2}{\mu} \sim \frac{\sigma_{xx}^2}{E} \left(1 + \frac{E}{\mu} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right) \sim \frac{\sigma_{xx}^2}{E} \left(1 + \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right)$$

Si la poutre est élancée toute l'énergie est fournie par le mode de flexion, alors que si la poutre est très courte (aplatie, comme couche de colle entre paroi et tableau) c'est le mode de cisaillement qui prend toute l'énergie et la poutre est beaucoup plus raide (traitement 3).

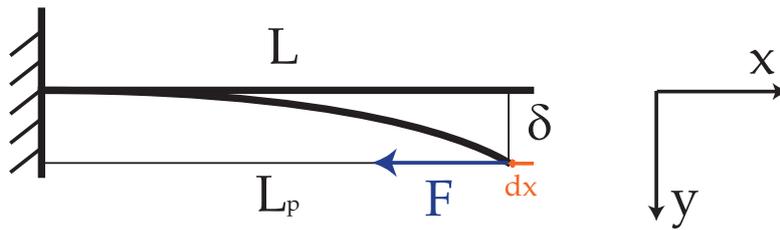
$$U_{el} = \mathcal{U}_{el} V \sim \frac{F^2 L^2}{E b^2 h^4} L b h \left(1 + \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right) \sim F \delta \sim W$$

$$\delta = F \frac{L^3}{E b h^3} \left(1 + \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right) = \delta_{flexion} + \delta_{cisail}$$

Le résultat peut être facilement interprété comme l'effet de deux ressorts en série, correspondant aux deux modes de flexion et cisaillement. Pour des poutres élancées le terme de flexion domine, pour des poutres courtes le terme de cisaillement domine.

3.4.3 Flambement

On considère maintenant la même poutre encastée, mais on applique une force F dans la même direction que la poutre et en compression.



Estimation de la force critique d'Euler

Estimer la relation $F(\delta)$ en loi d'échelle à partir de la théorie d'Euler-Bernoulli pour les poutres minces. En déduire une valeur critique F_c de la force appliquée (dite d'Euler) que l'on interprétera comme le seuil de flambement, c'est à dire la valeur maximale de la force de compression que la poutre peut supporter sans flamber.

Corrigé

Cette fois le moment fléchissant vaut:

$$M = Fy \sim F\delta = \frac{EI}{R} \sim \frac{Ebh^3}{R} \quad \frac{1}{R} \sim \frac{\delta}{L^2}$$

$$\frac{Ebh^3\delta}{L^2} \sim F\delta$$

Cette fois la flèche δ se simplifie et disparaît, ce qui nous laisse une valeur critique de la force (dite de Euler):

$$F_c = \frac{Ebh^3}{L^2}$$

dite force de Euler, qui correspond à la force de compression maximale soutenable par la poutre avant de flamber. On peut comprendre cette interprétation en comprenant que tout état flambé correspond à la même force F_c indépendamment de la flèche δ , qui reste de fait indéterminée. On n'a donc pas de solutions flambées pour $F < F_c$ et pour $F > F_c$ le flambement arrive sans que rien ne s'y oppose...

Incidemment nous remarquons qu'il s'agit de la même force typique estimée dans l'équation (3.35) pour la poutre en flexion transverse. Ceci n'est pas surprenant parce que cette valeur émerge naturellement à partir des dimensions du problème pour une poutre en flexion. Ce qui change est l'interprétation, comme on verra dans la question suivante.

Analyse de la stabilité par le théorème de l'énergie potentielle

Pour mieux comprendre la nature de cette instabilité, analyser le problème par le biais du théorème de l'énergie potentielle:

$$dU_p = dU_{el} - dW = 0$$

Substituer la valeur de la force critique F_c dans l'expression de l'énergie potentielle et montrer qu'elle correspond effectivement à une transition entre stabilité et instabilité de la solution non flambée.

Corrigé

Le résultat précédent reste un résultat d'analyse dimensionnelle qui permet principalement d'identifier la valeur de la force critique. Pour comprendre la nature physique de l'instabilité de flambement il vaut mieux utiliser le théorème de l'énergie potentielle et conduire une analyse de stabilité:

$$dU_p = dU_{el} - dW = 0$$

Pour l'énergie élastique, on utilise le calcul déjà fait pour la flexion d'une poutre élançée en approximation circulaire (section 3.4.2, traitement 2):

$$U_{el} = \frac{Ebh^3\delta^2}{L^3}$$

Le travail extérieur est $W = Fdx$, où dx est le déplacement horizontal du point d'application de la force. En utilisant l'approximation circulaire ceci est facilement calculé en effectuant la différence entre la longueur L de la poutre et la longueur projetée L_p :

$$L = \alpha R \quad L_p = R \sin \alpha$$

où α est l'angle correspondant à l'arc formé par la poutre de longueur L sur le cercle de rayon R égal à sa courbure typique.

$$dx = L - L_p = R(\alpha - \sin \alpha) \simeq R \frac{\alpha^3}{6} = \frac{R}{6} \frac{L^3}{R^3} = \frac{L^3}{6R^2} \sim \frac{\delta^2}{L} \quad \frac{1}{R} \sim \frac{\delta}{L^2}$$

où on a utilisé un développement limité de $\sin \alpha$ pour de faibles valeurs de α , ainsi que la relation géométrique approchée déterminée précédemment pour $1/R$.

$$U_p = \frac{Ebh^3\delta^2}{L^3} - F \frac{\delta^2}{L}$$

$$\frac{dU_p}{d\delta} = \frac{2Ebh^3\delta}{L^3} - \frac{2F\delta}{L} = 0$$

Encore une fois δ disparaît et on trouve une force critique:

$$F_c = \frac{Ebh^3}{L^2}$$

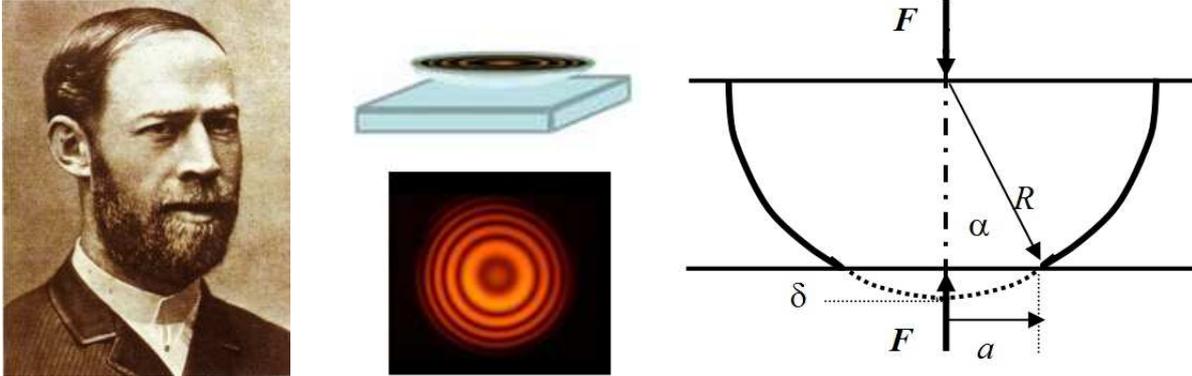
En substituant cette valeur critique dans l'expression de l'énergie potentielle on obtient:

$$U_p = \frac{\delta^2}{L}(F_c - F)$$

Comme le signe du prefacteur δ^2/L est toujours positif, on remarque que pour $F = F_c$ on a une inversion de concavité (dérivée seconde) dans la courbe $U_p(\delta)$ et donc une inversion de stabilité. Notamment pour $F < F_c$ la solution d'équilibre $\delta = 0$ est stable (c'est un minimum de l'énergie potentielle), alors que pour $F > F_c$ elle devient instable (maximum) et toute perturbation va causer le flambement.

3.4.4 Le contact de Hertz

C'est à 23 ans qu'Heinrich Hertz (1857-1894) s'interroge sur les figures d'interférences visibles entre deux lentilles de verre mises en contact : la force de contact entre les deux lentilles peut-elle influencer le motif? Il calcule alors exactement la distribution des pressions de contact entre deux sphères par analogie avec des méthodes d'électrostatique, et obtient ainsi (pendant les vacances de Noël 1880) la théorie du "contact de Hertz", qui se révéla très utile dès le début du siècle suivant (développement du chemin de fer, des roulements à billes).



Considérer le contact d'une sphère élastique de rayon R et de module élastique E soumise à une force F de compression contre un plan rigide. On appellera δ l'enfoncement et a le rayon de l'aire du contact sphère/plan. Effectuer les estimations suivantes en ordre de grandeur et dans l'approximation de faible enfoncement $\delta \ll a \ll R$.

- 1) Estimer le rayon a de l'aire du disque de contact en fonction de l'enfoncement δ et du rayon R de la sphère.
- 2) Estimer les contraintes typiques σ_{sph} à l'échelle de la sphère et σ_{loc} à l'échelle locale du contact.
- 3) Discuter la localisation des déformations et identifier la zone d'influence des contraintes locales à l'échelle du contact. Estimer une valeur typique de la déformation ε_{loc} dans la zone du contact en négligeant temporairement la déformation en dehors de cette zone.
- 4) Déduire l'ordre de grandeur de la force F qu'il faut exercer pour réaliser l'enfoncement δ de la sphère. Commenter le résultat.
- 5) Déduire l'ordre de grandeur de l'énergie élastique stockée U_{el} en fonction de E , R et δ .
- 6) Discuter le domaine de validité de l'approximation de déformation localisée à la zone de contact.

Corrigé

1) Parmi les N manières possibles pour démontrer la relation $a^2 \sim R\delta$, si $y(x)$ décrit le profil circulaire autour du point de contact initiale:

$$\frac{1}{R} \sim \frac{d^2y}{dx^2} \sim \frac{\delta}{a^2} \quad a \sim \sqrt{R\delta}$$

2) Pour avoir l'équilibre statique, la force F doit être supportée à la fois par le plan médian de la sphère et par l'aire de contact qui est d'ordre a^2 :

$$\sigma_{sph} \sim \frac{F}{R^2} \quad \sigma_{loc} \sim \frac{F}{a^2} \quad \frac{\sigma_{loc}}{\sigma_{sph}} \sim \frac{R^2}{a^2} \sim \frac{R}{\delta} \gg 1$$

On remarque que pour des faibles enfoncements, la contrainte locale est fortement amplifiée.

3) On peut en déduire que les déformations seront fortement concentrées dans cette région, qu'on peut imaginer s'étendre verticalement sur une distance de même ordre que a . On peut remarquer que ceci est la traduction en loi d'échelle de l'un des principes de Saint Venant, qui affirme que l'influence d'une condition aux limites appliquée sur une portion de contour de taille a s'estompera à une distance d'ordre a de cette zone. On peut voir le principe de Saint Venant comme une conséquence de l'équation d'équilibre statique $\overrightarrow{\text{div}} \overline{\sigma} = 0$ pour les systèmes élastiques linéaires.

Comme dans cette région le déplacement d'écrasement u varie de 0 à δ sur une distance d'ordre a , la déformation locale typique vaut:

$$\varepsilon_{loc} \sim \frac{du}{dx} \sim \frac{\delta}{a}$$

NB: cette même estimation peut s'appliquer aux composantes ε_{xy} et ε_{yy} à l'échelle locale.

4) La relation de l'élasticité $\sigma \sim E\varepsilon$ à l'échelle du contact conduit à la relation:

$$\sigma_{loc} \sim \frac{F}{a^2} \sim E \frac{\delta}{a}$$

qui, compte tenu de $a^2 \sim R\delta$, donne finalement:

$$F \sim Ea\delta \sim ER^{1/2}\delta^{3/2}$$

Le fait le plus étonnant est qu'une loi de comportement locale linéaire conduise à une loi de comportement non linéaire à l'échelle de la structure. NB: le résultat exact aurait un préfacteur $4/3$.

5) La force F étant la dérivée de l'énergie élastique stockée U_{el} par rapport au déplacement d'écrasement δ , elle s'exprime sur la forme:

$$F = \frac{dU_{el}}{d\delta} \sim \frac{U_{el}}{\delta} \quad U_{el} \sim F\delta \sim ER^{1/2}\delta^{5/2}$$

NB: la première égalité est valable malgré la non linéarité de la loi $F(\delta)$. C'est la relation $\delta = \frac{dU_{el}}{dF}$ qui ne l'est plus, il faudrait utiliser l'énergie complémentaire (qu'on n'a pas fait en cours).

6) En supposant la localisation de la déformation dans la zone du contact, nous avons implicitement séparé la sphère en deux régions élastiques qui se trouvent en série par rapport à l'axe vertical d'application des contraintes. La région de localisation des déformations dans la zone du contact a une forme hémisphérique de rayon $a \ll R$, et présente une contribution à l'enfoncement δ_{loc} :

$$F \sim ER^{1/2}\delta_{loc}^{3/2} \quad \delta_{loc} = \left(\frac{F}{ER^{1/2}} \right)^{2/3}$$

La region du reste de la sphère peut être identifiée à la sphère entière et présente une contribution à l'enfoncement δ_{sph} qu'on peut estimer en appliquant la loi de Hooke à l'échelle de la sphère:

$$\sigma_{sph} \sim \frac{F}{R^2} \quad \varepsilon_{sph} \sim \frac{\delta_{sph}}{R} \quad \sigma_{sph} \sim E\varepsilon_{sph}$$

$$\frac{F}{R^2} \sim E \frac{\delta_{sph}}{R} \quad \delta_{sph} \sim \frac{F}{ER}$$

L'enfoncement total δ est donc partagé selon:

$$\delta \sim \delta_{loc} + \delta_{sph} \sim \left(\frac{F}{ER^{1/2}} \right)^{2/3} + \frac{F}{ER} = \frac{F^{2/3}}{E^{2/3}R^{1/3}} \left(1 + \frac{F^{1/3}}{E^{1/3}R^{2/3}} \right)$$

On voit bien que pour des petits valeurs de la force, le terme à l'échelle de la sphère devient négligeable. Pour être plus quantitatifs on peut reformuler le rapport $\delta_{sph}/\delta_{loc}$ en termes de $\sigma_{sph} \sim F/R^2 \sim E\delta_{sph}/R$:

$$\frac{\delta_{sph}}{\delta_{loc}} = \frac{F^{1/3}}{E^{1/3}R^{2/3}} \sim \left(\frac{\sigma_{sph}}{E} \right)^{1/3} \sim \left(\frac{\delta_{sph}}{R} \right)^{1/3}$$

La force limite de validité du résultat de Hertz est donc:

$$F_c = ER^2 \quad \frac{\delta_{sph}}{\delta_{loc}} \sim \left(\frac{F}{F_c} \right)^{1/3}$$

c'est à dire simplement la force qui correspond à une contrainte moyenne $\sigma_{sph} \sim E$, et donc à une grande déformation $\varepsilon_{sph} \sim 1$. Ce qui peut être lu comme: la force doit être suffisamment faible pour ne pas comporter des déformations sensibles au niveau de la sphère.

3.5 Elastodynamique - Ondes et Vibrations (Slides Séminaire)

3.5.1 Equation élasto-dynamique de Lamé-Navier

Pour des milieux élastiques linéaires, isotropes et homogènes on peut combiner l'équation de la dynamique:

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \overrightarrow{f} - \rho \overrightarrow{a} = 0$$

avec la loi de Hooke (isotrope):

$$\bar{\sigma} = \lambda(\text{Tr } \bar{\varepsilon})\bar{I} + 2\mu\bar{\varepsilon}$$

et la définition des déformations:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\overline{\text{grad}} \overrightarrow{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \overrightarrow{u}}{2} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{Tr } \bar{\varepsilon} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div}(\overrightarrow{u}) = \frac{dV}{V}$$

pour obtenir l'équation de Lamé-Navier, qui exprime l'équilibre dynamique ou statique en termes de champ de déplacement uniquement, dans l'une des deux formes suivantes⁴:

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \overrightarrow{u}) + \mu \Delta \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f} = \rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} \quad (3.39)$$

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{u}) + (\lambda + 2\mu)\Delta \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f} = \rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} \quad (3.40)$$

NB: il s'agit de deux façons équivalentes d'exprimer la même équation, en mettant en évidence soit les changements de volumes $\text{div}(\overrightarrow{u})$ soit le rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{u}$. Ceci sera utile pour dériver la propagation d'ondes de volume et de cisaillement.

Trouver la solution d'un problème d'élasto-dynamique linéaire revient donc à trouver la solution de l'équation de Lamé-Navier, c'est à dire à résoudre une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en termes de champ de déplacement vectoriel $\overrightarrow{u}(\vec{x}, t)$, accompagnée des conditions aux limites appropriées. On remarque qu'on peut utiliser cette équation pour déterminer l'équilibre statique en posant que la dérivée temporelle est égale à zéro.

On peut remarquer que l'équation de Lamé-Navier pour les solides élastiques isotropes présente des fortes analogies avec l'équation de Navier-Stokes pour les fluides newtoniens, qui est exprimée en termes du champ de vitesse $\overrightarrow{v}(\vec{x}, t)$:

$$\rho \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \rho \overrightarrow{v} \cdot \overline{\text{grad}} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \overrightarrow{v} + \left(\kappa + \frac{\eta}{3} \right) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \overrightarrow{v})$$

où les coefficients κ et η représentent la première et deuxième viscosité, associés respectivement à l'expansion isotrope et au cisaillement.

⁴Rappels de quelques relations entre opérateurs différentiels:

Opérateur Nabla: $\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$

Opérateur laplacien: $\Delta = \overrightarrow{\nabla}^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2}$

$\overrightarrow{\text{div}} \left((\text{div } \overrightarrow{u}) \bar{I} \right) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \overrightarrow{u})$

$\overrightarrow{\text{div}} \left(\overline{\text{grad}} \overrightarrow{u} \right) = \Delta \overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{\text{div}} \left({}^t \overline{\text{grad}} \overrightarrow{u} \right) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \overrightarrow{u})$

$\Delta \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{u})$

$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{u} \right) = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{u} \right) = \overrightarrow{0}$

3.5.2 Ondes de volume

Ondes longitudinales et ondes transversales

Vitesse de propagation en loi d'échelle

Confinement géométrique et modules élastiques effectifs

Mesure de modules élastiques par ultrasons

Melange des modes aux interfaces

3.5.3 Ondes de surface et d'interface

3.5.4 Ondes de flexion sur plaques et coques

3.5.5 Modes propres de vibration d'une structure

3.5.6 Couplage élastodynamique et limites du regime quasistatique

Chapter 4

Viscoélasticité

4.1 Théorie viscoélastique linéaire (1D)

Les polymères, les composites à matrice organique, le bitume et dans une moindre mesure le bois (mais aussi verre et métaux à haute température) présentent des phénomènes dissipatifs associés à l'élasticité que l'on peut traduire globalement par une viscosité. Les caractéristiques essentielles du caractère visco-élastique d'un corps solide sont la dépendance de sa réponse à la vitesse de sollicitation et l'existence d'un retour (à contrainte nulle et aux temps longs) à l'état initial du matériau non déformé. On parle de "réversibilité de la déformation", mais le processus est thermodynamiquement irréversible à cause de la dissipation visqueuse. Ce phénomène est à son paroxysme dans le cas des polymères dans un état proche de leur transition vitreuse. Dans cet état les propriétés mécaniques peuvent varier de 3 ordres de grandeur pour des variations de température de l'ordre de 30°C.

Pour mieux comprendre ce phénomène complexe, nous resterons dans le domaine des petites déformations, où le comportement peut être décrit par une théorie linéaire. Dans ce cas, la dissipation d'énergie viscoélastique est faible, on peut donc négliger les variations de température dues à l'autoéchauffement, permettant le traitement simplifié de la théorie isotherme. Les comportements réels, traités comme des écarts au comportement modèle, seront discutés en fin de chapitre.

La théorie linéaire permet de décrire aussi des fluides viscoélastiques, qui ont la spécificité de couler à temps long, mais leurs lois d'écoulement sortent du cadre de ce cours.

4.1.1 Aspects phénoménologiques

La réponse typique d'un solide viscoélastique à l'application rapide d'une contrainte et à son relâchement après un temps t est montrée en figure 4.1. On remarque la séparation entre une réponse élastique instantanée AB et une **réponse retardée** qui tend aussi à se stabiliser après un certain temps BC (dit **temps de fluage**). De même, après le relâchement de la contrainte, on a un retour élastique instantané partiel DE, et ensuite une recouvrance presque totale de la déformation initiale après un temps EF (dit **temps de recouvrance**).

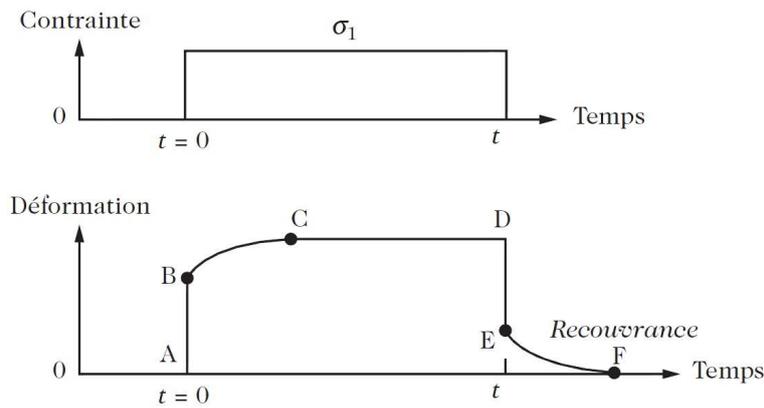


Figure 4.1: Test de fluage: réponse d'un matériau viscoélastique à l'application d'une contrainte constante pendant un temps t et à son relâchement.

Si on impose plutôt une déformation constante comme en figure 4.2, les solides viscoélastiques présentent encore une fois une élasticité instantanée AB, suivie cette fois par une diminution progressive de la contrainte pendant un temps BC (dit **temps de relaxation**).

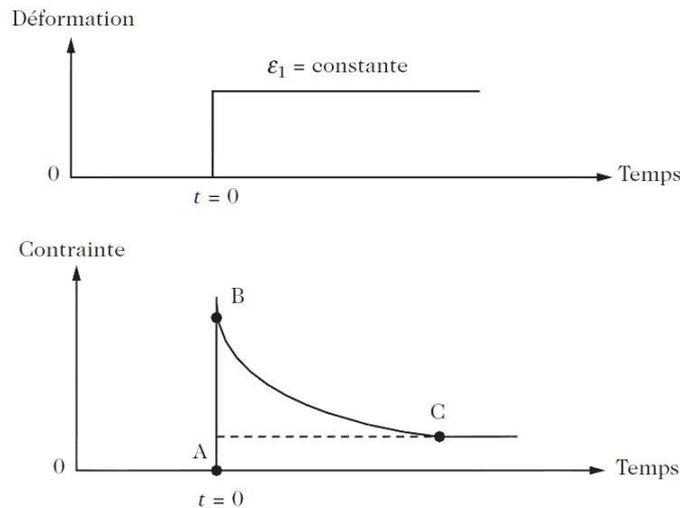


Figure 4.2: Test de relaxation: réponse d'un matériau viscoélastique à l'application d'une déformation constante pendant un temps t et à son relâchement.

En général, l'état de contrainte est fonction de l'histoire de la déformation passée, et vice versa l'état de déformation est fonction de l'histoire de la contrainte passée. Si on représente les courbes de charge-décharge sur un diagramme $\sigma - \varepsilon$, on observe l'apparition d'une **hystérésis** qui augmente avec la rapidité du chargement. Ce phénomène est d'autant plus marqué que le temps d'application des contraintes s'approche du temps de relaxation viscoélastique, pour diminuer ensuite. La combinaison de l'effet de retard et de l'hystérèse peut être aussi mise en évidence en appliquant des sollicitations cycliques, par exemple de déformation. Contrairement au cas de l'élasticité, on observera en général que les oscillations de contrainte sont en **déphasage** par rapport aux oscillations de déformation, comme représenté en figure 4.3.

Les comportements viscoélastiques sont aussi très **sensibles aux variations de température**. En général l'effet de l'augmentation de température est similaire à celui d'une diminution de la vitesse de chargement. Dans les matériaux polymères ceci sera mis en évidence de manière quantitative grâce au principe d'équivalence temps-température qui est au centre de la compréhension du caractère cinétique de la transition vitreuse (dite relaxation α en contexte

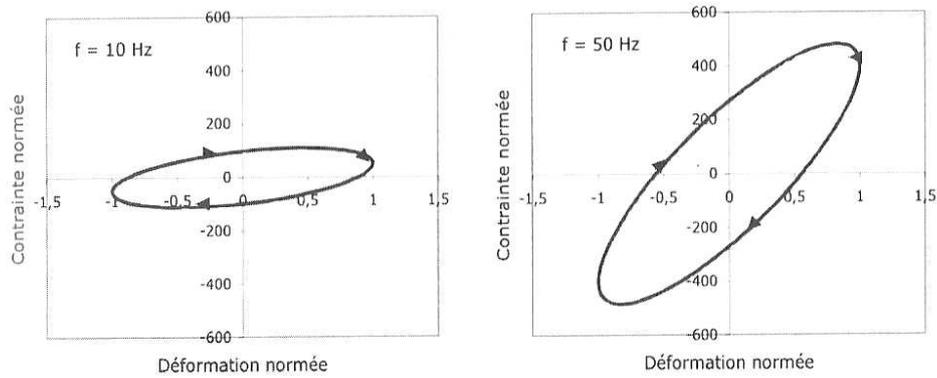


Figure 4.3: Réponse σ/ε d'un matériau viscoélastique soumis à des petites oscillations à différentes fréquences (PPMA à 100°C, d'après Y. Berthaud).

de mécanique). Cette dernière est la principale responsable des comportements viscoélastiques dans ces matériaux.

Les polymères présentent aussi d'autres formes de viscoélasticité de plus faible intensité, associées à d'autres transitions cinétiques (dites relaxations β , γ , etc.) liées à l'arrêt ou activation de mouvements moléculaires spécifiques (par exemple la rotation des groupes latéraux dans les chaînes de PMMA).

4.1.2 Modèles rhéologiques

Les modèles rhéologiques pour les matériaux viscoélastiques sont schématiquement représentés en 1D par des combinaisons en série et/ou en parallèle d'éléments élastiques (symbolisés par des ressorts de module élastique E) et d'éléments visqueux (symbolisés par des amortisseurs de viscosité η), qui représentent la réponse d'un élément de volume du matériau à une sollicitation élémentaire homogène (par exemple traction ou cisaillement) représentée symboliquement par une contrainte σ ou une déformation ε .

I. Modèle de Kelvin-Voigt

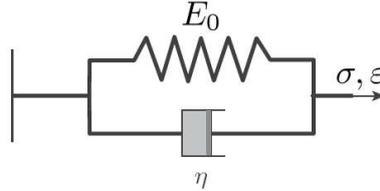


Figure 4.4: Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt (KV) est constitué **d'un ressort (de module E_0) et d'un amortisseur (de viscosité η) en parallèle**. En observant le schéma en figure 4.4, on constate que suite à l'application d'une contrainte σ , le ressort s'oppose à l'écoulement à long terme, alors que l'amortisseur s'oppose aux variations rapides de déformation. Il s'agit donc d'un **comportement viscoélastique solide**, et le module élastique E_0 est dit **module statique** ou **module relaxé** parce que il représente la réponse élastique à long terme (NB: avec notre usage, l'indice 0 se réfère à la réponse à une fréquence de sollicitation nulle, c'est à dire aux temps très longs).

La **loi de comportement** peut être obtenue en considérant qu'aux bornes des deux branches on doit avoir égalité des déformations, alors qu'on a une **repartition de la contrainte** sur les deux branches, dites **élastique** (indice e) et **anélastique** (indice an):

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^{an} \quad \sigma = \sigma^e + \sigma^{an}$$

Les lois de comportement linéaires des éléments de base pour chaque branche sont:

$$\sigma^e = E_0 \varepsilon \quad \sigma^{an} = \eta \dot{\varepsilon}$$

La loi de comportement globale s'écrit donc:

$$\boxed{\sigma = E_0 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} = E_0 (\varepsilon + \tau_F \dot{\varepsilon}) \quad \tau_F = \frac{\eta}{E_0}} \quad (4.1)$$

où τ_F est le temps caractéristique émergeant des valeurs de η et E_0 du matériau et il sépare naturellement le domaine du **comportement visqueux à temps court** (nombre de Deborah¹ grand: $De = \tau_F/t_{exp} \gg 1$) du **comportement élastique à temps long** ($De = \tau_F/t_{exp} \ll 1$).

En considérant le modèle rhéologique, on peut voir qualitativement que dans un test de fluage ($\sigma = \text{cst.}$) on a initialement une phase d'écoulement de l'amortisseur, qui ralentit progressivement jusqu'à ce que l'étirement du ressort supporte toute la contrainte appliquée. Comme il sera démontré explicitement ensuite, le temps caractéristique $\tau_F = \eta/E_0$ du modèle de Kelvin-Voigt correspond donc à un **temps de fluage**. D'autre part, dans un test de relaxation ($\varepsilon = \text{cst.}$) la contrainte reste constante dans le temps, ce qui ne correspond pas au comportement typique décrit en section 4.1.1 pour un solide viscoélastique en relaxation. Les temps de relaxation est ici nul ($\tau_R = 0$).

¹ t_{exp} représente le temps d'observation, c'est à dire la durée d'une expérience de mesure.

II. Modèle de Maxwell



Figure 4.5: Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est constitué **d'un ressort (de module E_∞) et d'un amortisseur (de viscosité η) en série**. En observant le schéma en figure 4.5, on constate que suite à l'application d'une contrainte σ , le ressort atteint une élongation d'équilibre, alors que l'amortisseur coule indéfiniment. Il s'agit donc du comportement d'un **fluide viscoélastique**. Suite à l'application de contraintes très rapides, l'amortisseur n'a pas le temps de couler et la réponse à temps court est donc purement élastique avec module E_∞ , qui prend le nom de **module instantané** ou **module dynamique** (NB: encore une fois, l'indice ∞ se réfère à la limite de fréquence infinie, c'est à dire aux temps très courts).

Suite à la disposition en série, la contrainte aux bornes des deux éléments sera identique, alors qu'on aura une **repartition de la déformation** en deux termes élastique et anélastique:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an} \quad \sigma = \sigma^e = \sigma^{an}$$

La loi de comportement globale devient:

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E_\infty} \quad \dot{\varepsilon}^{an} = \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_\infty} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\boxed{\sigma + \tau_R \dot{\sigma} = \tau_R E_\infty \dot{\varepsilon} \quad \tau_R = \frac{\eta}{E_\infty}} \quad (4.2)$$

Cette fois le temps caractéristique τ_R émergeant des valeurs de η et E_∞ sépare plutôt le domaine du **comportement élastique à temps court** ($De = \tau_R/t_{exp} \gg 1$) du **comportement visqueux à temps long** ($De = \tau_R/t_{exp} \ll 1$).

On peut voir qualitativement que dans un test de relaxation ($\varepsilon = \text{cst.}$) l'étirement initial du ressort, est progressivement réduit par l'écoulement du patin, jusqu'à être complètement déchargé. Comme il sera démontré explicitement ensuite, le temps caractéristique $\tau_R = \eta/E_\infty$ du modèle de Maxwell correspond donc à un **temps de relaxation**. D'autre part, dans un test de fluage ($\sigma = \text{cst.}$) l'étirement du ressort reste constant et l'écoulement de l'amortisseur continue indéfiniment. Les temps de fluage est donc infini ($\tau_F = \infty$).

III. Modèle de Zener: “Solide linéaire standard”

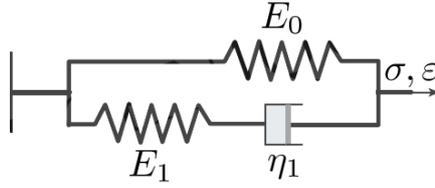


Figure 4.6: Modèle de Zener

Le modèle de Solide Linéaire Standard (SLS, associé aussi au nom de Zener) est constitué d’une **mise en parallèle entre un fluide de Maxwell et un ressort de contention de raideur E_0** comme en figure 4.6. Le rajout du ressort de contention pallie l’impossibilité d’équilibre statique du fluide de Maxwell et redonne donc un caractère solide à long terme, avec un module élastique statique (ou relaxé) E_0 . Suite à l’application de contraintes très rapides, l’amortisseur n’a pas le temps de couler et la réponse à temps court est donc purement élastique avec un module instantané (ou dynamique) $E_\infty = E_0 + E_1$, correspondant au parallèle des deux ressorts, et donc plus rigide que le module relaxé E_0 . Ce modèle permet donc de rendre compte qualitativement du **comportement d’un solide viscoélastique typique**, y compris pour sa capacité de relaxation et de fluage (voir section 4.1.1).

Pour écrire sa **loi de comportement** on écrit d’abord les équations pour chaque branche (indice 0 = branche élastique, 1 = branche Maxwell) ainsi que la répartition des contraintes (entre les deux branches) et des déformations (entre les deux éléments de la branche 1):

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^{an} \\ \varepsilon_0 &= \frac{\sigma_0}{E_0} \quad \varepsilon_1^e = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \dot{\varepsilon}_1^{an} = \frac{\sigma_1}{\eta_1}\end{aligned}$$

Nous allons ensuite les combiner pour arriver à une loi de comportement qui ne présente pas explicitement les variables internes (ε_1^e , ε_1^{an}):

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}_0}{E_0} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad \dot{\sigma}_1 = E_1 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_1}{\eta_1} \right) \\ \dot{\sigma} &= \dot{\sigma}_0 + \dot{\sigma}_1 = E_0 \dot{\varepsilon} + E_1 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_1}{\eta_1} \right) \quad \sigma_1 = \sigma - E_0 \varepsilon \\ \dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta_1} \sigma &= E_0 \frac{E_1}{\eta_1} \varepsilon + (E_0 + E_1) \dot{\varepsilon}\end{aligned}$$

En multipliant par le temps de relaxation $\tau_R = \eta_1/E_1$ de la branche de Maxwell, et en explicitant le module dynamique E_∞ , on obtient la loi de comportement:

$$\boxed{\sigma + \tau_R \dot{\sigma} = E_0 \varepsilon + \tau_R E_\infty \dot{\varepsilon} \quad \tau_R = \frac{\eta_1}{E_1} \quad E_\infty = E_0 + E_1} \quad (4.3)$$

On remarque que cette fois le choix du temps caractéristique n’est pas unique, comme nous avons deux modules élastiques indépendants E_0 et E_1 . Comme il sera démontré ensuite, le **temps de relaxation** du modèle SLS correspond au temps de relaxation de la branche Maxwell $\tau_R = \eta_1/E_1$, alors que le **temps de fluage** $\tau_F = \tau_R(E_\infty/E_0) \simeq \eta_1/E_0$ est dominé par l’étirement progressif du ressort de contention, à la manière du modèle de Kelvin-Voigt. Le

temps de relaxation (plus court) sépare le domaine du **comportement élastique dynamique (plus rigide) à temps court** ($De_R = \tau_R/t_{exp} \gg 1$) du **comportement visqueux** à temps intermédiaire ($De_R = \tau_R/t_{exp} \ll 1 \ll De_F$). Le temps de fluage (plus long) sépare le comportement visqueux du **comportement élastique statique (plus mou)** à temps très long ($De_F = \tau_F/t_{exp} \ll 1$).

Formulation thermodynamique

On présente ici une façon alternative d'exprimer la loi de comportement du modèle de Zener en empruntant le formalisme de la thermodynamique. Ceci revient à exprimer la loi de comportement en faisant **apparaître explicitement la variable interne** ε_1^{an} , ainsi que **son équation d'évolution**²:

$$\boxed{\sigma = E_0\varepsilon + \eta_1\dot{\varepsilon}_1^{an} \quad \dot{\varepsilon}_1^{an} = \frac{E_1}{\eta_1}(\varepsilon - \varepsilon_1^{an})} \quad (4.4)$$

Par substitution directe, on peut aussi écrire:

$$\sigma = E_0\varepsilon + E_1(\varepsilon - \varepsilon_1^{an})$$

ce qui permet de mieux comprendre le sens du module élastique dynamique E_∞ qui représente la réponse instantanée avant que la variable interne ε_i^{an} puisse évoluer:

$$E_\infty = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon_1^{an}=cst.} = E_0 + E_1$$

La déformation anélastique ε_1^{an} joue le rôle de variable interne au sens de la thermodynamique et ses variations sont reliées à la dissipation intrinsèque d'énergie. En termes de densité volumique de puissance dissipée peut s'écrire:

$$\boxed{\mathcal{P}_{diss} = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1^{an}} \quad (4.5)$$

IV. Modèle de Maxwell généralisé (ou de Maxwell-Wiechert)

Le modèle de solide linéaire standard permet de rendre compte qualitativement des comportements d'un solide viscoélastique typique. Pour permettre aussi un **accord quantitatif**, il faut **rajouter en parallèle d'autres éléments simples de type Maxwell** comme en figure 4.7. Ceci permet de rendre compte d'une multitude de temps de relaxation $\tau_i = \eta_i/E_i$ liés à des mécanismes de relaxation moléculaire différents (voir section 4.2). Les équations de chaque branche s'écrivent:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 + \dots \sigma_i + \dots \sigma_m \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 = \varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^{an} \end{aligned}$$

²On repart des partitions de déformations et contraintes:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 = E_0\varepsilon + \eta_1\dot{\varepsilon}^{an} \\ \sigma_1 &= \eta_1\dot{\varepsilon}^{an} = E_1\varepsilon_1^e = E_1(\varepsilon - \varepsilon_1^{an}) \\ \dot{\varepsilon}^{an} &= \frac{E_1}{\eta_1}(\varepsilon - \varepsilon_1^{an}) \end{aligned}$$

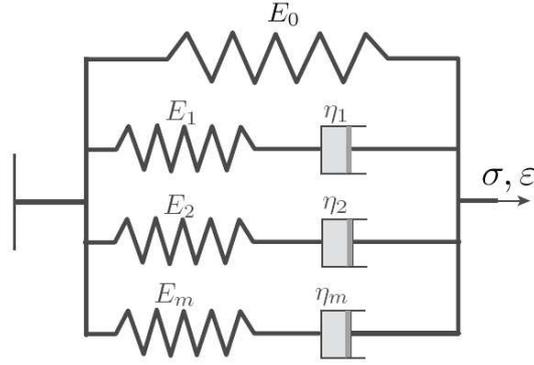


Figure 4.7: Modèle de Maxwell généralisé (Maxwell-Wiechert).

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} \quad \varepsilon_i^e = \frac{\sigma_i}{E_i} \quad \dot{\varepsilon}_i^{an} = \frac{\sigma_i}{\eta_i} \quad i = 1 \dots m$$

La **loi de comportement** s'écrit alors, en utilisant le formalisme thermodynamique:

$$\sigma = E_0 \varepsilon + \sum_{i=1}^m \eta_i \dot{\varepsilon}_i^{an} \quad \dot{\varepsilon}_i^{an} = \frac{E_i}{\eta_i} (\varepsilon - \varepsilon_i^{an}) \quad i = 1 \dots m \quad (4.6)$$

Le module dynamique devient:

$$E_\infty = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon_i^{an} = cst.} = E_0 + \sum_{i=1}^m E_i \quad (4.7)$$

et la densité volumique de puissance de dissipation intrinsèque d'énergie associée à la variation des variables internes ε_i^{an} s'écrit:

$$\mathcal{P}_{diss} = \sum_{i=1}^m \sigma_i \dot{\varepsilon}_i^{an} \quad (4.8)$$

Ce modèle présente plusieurs temps de relaxations $\tau_R^i = \eta_i/E_i$ relatifs à chaque branche Maxwell, et un temps de fluage global $\tau_F \sim (\sum \eta_i)/E_0$.

4.1.3 Représentation temporelle

Pour des matériaux présentant des lois de comportement viscoélastiques linéaires (ce qui inclut aussi les modèles rhéologiques vus ci dessus), il existe deux grandes familles de méthodes pour **représenter la réponse viscoélastique d'un matériau aux sollicitations élémentaires** afin de **prédire leur réponse à tout type de sollicitation**.

La première famille, dite **représentation temporelle**, se fonde sur la caractérisation de la réponse suite à l'application d'une contrainte ou d'une déformation constantes. Le réponse est exprimée en termes de modules de complaisance ou de modules élastiques dépendants du temps. Ils sont dits **fonctions de fluage et/ou relaxation**.

La deuxième famille, dite **représentation fréquentielle**, se fonde sur la caractérisation de la réponse à des sollicitations cycliques à différentes fréquences. Celle ci est représentée par des **modules élastiques complexes** qui dépendent de la fréquence (on parle aussi de **spectroscopie mécanique**).

I. Fonction de fluage et principe de superposition de Boltzmann

Dans les matériaux viscoélastiques, **la réponse du matériau dépend en général de l'histoire passée de la sollicitation**. Si la sollicitation a pour origine l'application d'une contrainte variable dans le temps de forme $\sigma(t)$, ceci équivaut à dire que la réponse en déformation $\varepsilon(t)$ est une fonctionnelle de toute l'histoire passée de la contrainte:

$$\varepsilon(t) = \mathcal{F}(\sigma(t')) \quad -\infty < t' < t$$

On considère une sollicitation élémentaire sous la forme d'un test de fluage (voir figure 4.1), constituée par l'application d'une contrainte constante d'amplitude σ_0 à partir du temps $t_0 = 0$, que l'on peut représenter par un échelon de Heaviside³:

$$\sigma = \sigma_0 \mathcal{H}(t) \quad \dot{\sigma} = \sigma_0 \delta(t)$$

En conséquence de la linéarité de la loi de comportement, la réponse en déformation $\varepsilon(t)$ à une telle sollicitation doit rester proportionnelle à l'amplitude σ_0 de la marche et peut donc s'écrire sous la forme:

$$\boxed{\varepsilon(t) = J_f(t) \sigma_0} \quad (4.9)$$

Cette expression définit la **fonction de fluage** $J_f(t)$. Dimensionnellement il s'agit d'une **complaisance**, c'est à dire l'inverse d'un module élastique, avec comme unité le Pa^{-1} . On peut donc interpréter le fluage comme l'effet d'une augmentation progressive de la complaisance élastique dans le temps qui suit une sollicitation.

Dans le cas général, la fonction de fluage doit être **mesurée**. Mais dans le cas d'un **modèle rhéologique**, la fonction de fluage peut être **calculée en résolvant l'équation différentielle** (donnée par sa loi de comportement) qui décrit la réponse à une marche de contrainte appliquée au temps $t_0 = 0$. NB: par **principe de causalité** la fonction de fluage doit être nulle pour $t < 0$, donc il suffit de la calculer pour $t \geq 0$.

³La fonction de Heaviside est définie par:

$$\mathcal{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

La dérivée de la fonction marche de Heaviside est la fonction δ de Dirac, qui est nulle partout sauf pour $t = 0$ où elle est infinie, et qui a pourtant une intégrale unitaire. Sa définition formelle (au sens des distributions) est:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t' - t) dt' = f(t)$$

Par exemple, pour le modèle de **Kelvin-Voigt** on aura:

$$\begin{cases} \sigma = E_0(\varepsilon + \tau_F \dot{\varepsilon}) \\ \sigma(t) = \sigma_0 \quad t \geq 0 \\ \varepsilon(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\varepsilon} = -\frac{1}{\tau_F} \left(\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_0} \right) \\ \varepsilon(0) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) \right] \quad (4.10)$$

En comparant les equations (4.9) et (4.10) on peut donc identifier la fonction de fluage:

$$J_f(t) = \frac{1}{E_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) \right] \mathcal{H}(t) \quad (4.11)$$

La solution (4.10) permet d'interpréter clairement le temps caractéristique $\tau_F = \eta/E_0$, qui joue le rôle de **temps de fluage**, représentant la partie transitoire de la réponse en déformation. Pour $t \gg \tau_F$ le terme exponentiel s'annule et la réponse à long terme est simplement celle d'un ressort élastique de rigidité E_0 . Pour $t \ll \tau_F$ un développement limité montre que la réponse est dominée par l'écoulement d'un piston (élément fluide) de viscosité η :

$$\varepsilon(t) \simeq \frac{\sigma}{E_0} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\tau_F} + \dots \right) \right] \simeq \frac{\sigma_0 t}{E_0 \tau_F} \quad t \ll \tau_F$$

$$\dot{\varepsilon} \simeq \frac{\sigma_0}{E_0 \tau_F} = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad t \ll \tau_F$$

Pour **prédire la réponse du matériau à des sollicitations plus générales**, on considère dans un premier temps l'application d'une série de marches de contrainte d'amplitude $\Delta\sigma_j$ appliquées aux temps t_j comme illustré en figure 4.8.

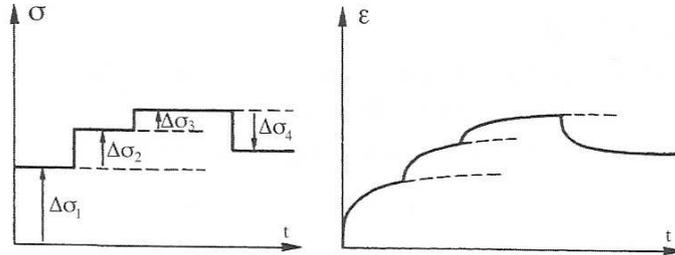


Figure 4.8: Réponse à une sollicitation par étages de contrainte.

$$\sigma = \sum_{j=1}^n \Delta\sigma_j \mathcal{H}(t - t_j)$$

En conséquence de la linéarité des lois de comportement considérées, la réponse en déformation est donnée par la superposition des réponses à chaque marche:

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^n J_f(t - t_j) \Delta\sigma_j$$

Si maintenant on considère une évolution continue de la charge $\sigma(t)$ comme la limite d'une série de fonctions étagées avec des pas de plus en plus denses, on peut passer d'une somme à la forme intégrale suivante, qui prend le nom de **principe de superposition de Boltzmann**:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J_f(t - t') \frac{d\sigma}{dt}(t') dt' \quad (4.12)$$

On voit donc que la connaissance de la fonction de fluage permet en principe de **prédire la réponse du matériau à toute sollicitation en contrainte** $\sigma(t)$.

II. Fonction de relaxation

De façon analogue, si la sollicitation provient de l'application d'une déformation variable dans le temps de forme $\varepsilon(t)$, ceci équivaut à dire que la réponse en contrainte $\sigma(t)$ est une fonctionnelle de toute l'histoire passée de la déformation:

$$\sigma(t) = \mathcal{F}(\varepsilon(t')) \quad -\infty < t' < t$$

On considère une **sollicitation élémentaire en forme de test de relaxation** (voir figure 4.1), constituée par l'application d'une déformation constante d'amplitude ε_0 à partir d'un temps $t_0 = 0$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t)$$

En conséquence de la linéarité de la loi de comportement, la réponse en contrainte peut s'écrire dans la forme:

$$\sigma(t) = E_r(t) \varepsilon_0 \quad (4.13)$$

ce qui définit la **fonction de relaxation** $E_r(t)$, qui a les mêmes dimensions qu'un module élastique. On peut donc interpréter la relaxation comme l'effet d'une diminution progressive du module élastique dans le temps qui suit une sollicitation.

Par exemple, pour un modèle rhéologique tel que le **modèle de Maxwell**, on peut calculer la fonction de fluage en résolvant l'équation différentielle pour la réponse à une marche de déformation appliquée au temps $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} \sigma + \tau_R \dot{\sigma} = \tau_R E_\infty \dot{\varepsilon} \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t) = \varepsilon_0 \quad t \geq 0 \\ \sigma(t < 0) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad \Delta\sigma(t=0) = E_\infty \Delta\varepsilon(t=0) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t=0^+) = E_\infty \varepsilon_0$$

Le fait que le loi de comportement de Maxwell soit sensible à $\dot{\varepsilon}$, crée une **singularité**⁴ à l'instant $t = 0$ correspondant à la mise en place de la déformation ε_0 . La seule façon de respecter l'équation différentielle de la loi de comportement à l'origine, est de faire subir à la contrainte une discontinuité comme explicité ci haut. D'un point de vue physique ceci correspond à l'occurrence d'une **réponse élastique instantanée** de module E_∞ .

Pour $t > 0$, le système redevient régulier et on garde simplement une condition initiale non nulle, ainsi que $\dot{\varepsilon} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = -\frac{\sigma}{\tau_R} \\ \sigma(t=0^+) = E_\infty \varepsilon_0 = \sigma_0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_R}\right) \quad \sigma_0 = E_\infty \varepsilon_0 \quad (4.14)$$

ce qui permet d'identifier la fonction de relaxation pour le modèle de Maxwell:

$$E_r(t) = E_\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_R}\right) \mathcal{H}(t) \quad (4.15)$$

Cette solution permet d'interpréter clairement le temps caractéristique $\tau_R = \eta/E_0$, qui joue le rôle de **temps de relaxation**, représentant la partie transitoire de la réponse en contrainte. Pour $t \ll \tau_R$ c'est la réponse élastique de module E_∞ qui domine, alors que pour $t \gg \tau_R$ la contrainte finit par s'annuler, c'est à dire qu'elle est totalement relaxée, malgré la persistance de la déformation ε_0 , ce qui est typique du comportement fluide à long terme. La valeur de la

⁴Voir footnote 3.

viscosité intervient plutôt dans le temps caractéristique de transition entre les deux réponses, qui vaut $\tau_R = \eta/E_\infty$.

Pour **prédire la réponse en contrainte $\sigma(t)$ du matériau suite à des sollicitations de déformation arbitraires $\varepsilon(t)$** , on peut reproduire la raisonnement fait pour le fluage, et arriver à une autre forme du **principe de superposition de Boltzmann**:

$$\sigma(t) = \int_0^t E_r(t-t') \frac{d\varepsilon}{dt}(t') dt' \quad (4.16)$$

Comme chacune des deux fonctions $J_f(t)$ et $E_r(t)$ semblent contenir un pouvoir prédictif complet, on imagine bien qu'elles ne peuvent pas être totalement indépendantes. En effet on peut montrer qu'elles sont liées mathématiquement par la relation intégrale suivante:

$$\int_0^t E_r(t') J_f(t-t') dt' = t \quad (4.17)$$

qui permet en principe de calculer l'une à partir de l'autre. Dans le cas empiriques, la mesure de ces fonctions n'est accessible que sur une **gamme de temps limitée**, comprise entre le temps minimal de quelques secondes nécessaire pour appliquer le chargement et le temps de mesure de quelques jours ou mois qu'on peut se permettre dans un laboratoire. Il faudrait donc utiliser des techniques d'inversion numériques approchées, et il est souvent préférable de mesurer les deux fonctions séparément.

4.1.4 Représentation en fréquence et modules élastiques complexes

La représentation en fréquence sert à condenser la caractérisation de la réponse d'un matériau viscoélastique linéaire par des **tests cycliques à fréquence variable** sous la forme d'un module élastique complexe dépendant de la fréquence de sollicitation ω (pulsation en radians par seconde).

Pour des faibles amplitudes de sollicitation, la réponse en contrainte $\sigma(t)$ à une sollicitation sinusoïdale en déformation $\varepsilon(t)$ (voir figure 4.3) aura également une forme sinusoïdale de même fréquence mais déphasée d'un angle δ . En utilisant le formalisme des nombres complexes (identifiés par une étoile *) on peut écrire:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos \omega t = \operatorname{Re}(\varepsilon_m e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(\varepsilon^*(t)) \quad (4.18)$$

$$\sigma(t) = \sigma_m \cos(\omega t + \delta) = \operatorname{Re}(\sigma_m e^{i(\omega t + \delta)}) = \operatorname{Re}(\sigma^*(t)) \quad (4.19)$$

On peut ainsi préserver le formalisme de la relation de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ en introduisant formellement un **module élastique complexe** E^* :

$$E^* = \frac{\sigma^*(t)}{\varepsilon^*(t)} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} e^{i\delta} = E' + iE'' \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} E' = \operatorname{Re}(E^*) = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} \cos \delta \\ E'' = \operatorname{Im}(E^*) = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} \sin \delta \end{cases} \quad (4.21)$$

En vertu de la linéarité de la loi de comportement, le module complexe ainsi défini est indépendant de la (faible) amplitude de sollicitation, et il est uniquement fonction de la fréquence de sollicitation: $E^*(\omega)$. On peut exprimer la réponse retardée $\sigma(t)$ en termes des parties réelle et imaginaire du module complexe en utilisant des identités trigonométriques:

$$\sigma(t) = \sigma_m \cos(\omega t + \delta) = \sigma_m [\cos(\omega t) \cos(\delta) - \sin(\omega t) \sin(\delta)] = \varepsilon_m [E' \cos(\omega t) - E'' \sin(\omega t)]$$

La partie réelle E' est dite **module de stockage** et elle correspond à la partie de la réponse qui est en phase avec la sollicitation. La partie imaginaire E'' est dite **module de perte** et elle correspond à la partie de la réponse qui est déphasée de 90° (dite **en quadrature avance**), comme la dérivée d'une fonction sinusoïdale. L'angle de phase⁵ δ (à exprimer en radians) est dit **angle de perte**, et sa tangente est:

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'} \quad (4.22)$$

On l'appelle le **facteur de perte**, parce qu'il fournit une indication du pourcentage d'énergie dissipée à chaque cycle par les pertes viscoélastiques (voir section 4.1.5).

En présence d'un modèle rhéologique, on peut exprimer analytiquement les modules complexes $E^*(\omega)$ à partir de la loi de comportement. Il suffit pour cela de substituer les solutions sinusoïdales complexes (4.18) et (4.19) dans la loi de comportement, et d'identifier ensuite les expressions pour les parties réelle et imaginaire du module complexe, comme illustré dans les exemples suivants.

⁵Selon la convention choisie, la phase $0 \leq \delta \leq 90^\circ$ représente l'avance de phase de la contrainte par rapport à la déformation, ou de façon équivalente un retard de la déformation par rapport à la contrainte. NB: il s'agit d'un angle de déphasage et pas d'un temps!

1) Le cas du **solide élastique linéaire** ne nécessite pas de calculs. Il peut être représenté par un module de stockage $E' = E$ indépendant de la fréquence et un module de perte nul:

$$\boxed{E^* = E \quad E' = E \quad E'' = 0}$$

2) On considère donc plus en détail le **fluide newtonien**, qui est le deuxième élément de base de la viscoélasticité:

$$\begin{aligned} \sigma &= \eta \dot{\varepsilon} & \varepsilon^*(t) &= \varepsilon_m e^{i\omega t} & \sigma^*(t) &= \sigma_m e^{i\omega t + \delta} \\ \sigma_m e^{i\omega t + \delta} &= i\omega \eta \varepsilon_m e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\boxed{E^* = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} e^{i\delta} = i\omega \eta \quad E' = 0 \quad E'' = \omega \eta}$$

On peut donc représenter un fluide Newtonien par un module élastique complexe purement imaginaire $i\omega\eta$, dont le module $|E^*| = E''$ augmente proportionnellement à la fréquence ω . La multiplication par un nombre imaginaire pur, conduit d'ailleurs à un déphasage de 90° . C'est tout le sens de la dérivation dans l'espace de Fourier. On remarque aussi qu'en l'absence d'un module élastique réel on ne peut pas construire de temps caractéristique τ pour un fluide.

3) Pour le **modèle de Kelvin-Voigt** (ressort et piston en parallèle):

$$\sigma = E_0(\varepsilon + \tau_F \dot{\varepsilon}) \quad \tau_F = \eta/E_0$$

$$\sigma_m e^{i\omega t + \delta} = E_0 \varepsilon_m e^{i\omega t} + i\omega \tau_F \varepsilon_m e^{i\omega t}$$

$$\boxed{E^* = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} e^{i\delta} = E_0(1 + i\omega \tau_F) = E_0 + i\omega \eta \quad E' = E_0 \quad E'' = \omega \eta}$$

On remarque qu'en formalisme complexe on peut traiter le module complexe du modèle KV comme la somme de deux ressorts en parallèle, de module complexe E_0 et $i\omega\eta$. Le résultat est représenté en figure 4.9, où on constate qu'il apparaît une transition entre le comportement élastique (solide) à basse fréquence et le comportement visqueux (fluide) à haute fréquence, séparés par la fréquence de transition $1/\tau_F$.

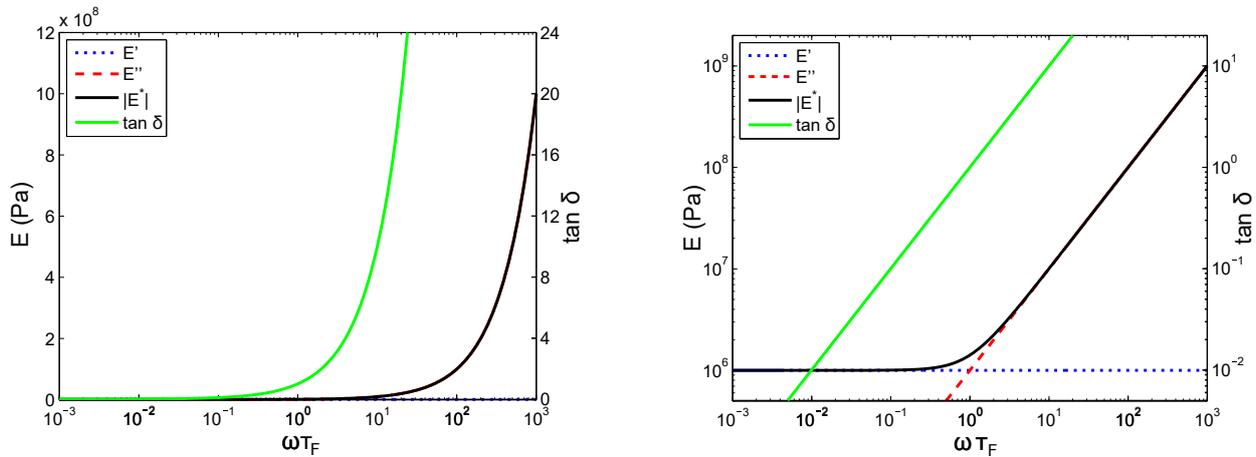


Figure 4.9: Module élastique complexe pour le modèle de Kelvin-Voigt (avec $E_0 = 1$ MPa et $\tau_F = 1$ s), en axes semilog et log-log. Le croisement de la valeur $\tan \delta = 1$ (axe de droite) est un démarquage caractéristique de la transition entre comportement solide et fluide pour $\omega = 1/\tau_F$ (la représentation en termes de $\omega \tau_F$ rend ce résultat plus général que pour la cas $\tau_F = 1$ s).

4) Pour le **modèle de Maxwell** (ressort et piston en série):

$$\sigma + \tau_R \dot{\sigma} = \tau_R E_\infty \dot{\varepsilon} \quad \tau_R = \eta / E_\infty$$

$$\sigma_m e^{i\omega t + \delta} + i\omega \tau_R \sigma_m e^{i\omega t + \delta} = i\omega \tau_R E_\infty \varepsilon_m e^{i\omega t}$$

$$E^* = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} e^{i\delta} = \frac{i\omega \tau_R E_\infty}{1 + i\omega \tau_R} = \frac{i\omega \eta E_\infty}{E_\infty + i\omega \eta} \quad \boxed{\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_\infty} + \frac{1}{i\omega \eta}}$$

Comme mis en évidence par la dernière expression, encore une fois le formalisme complexe permet de calculer le module complexe en manière analogue aux formules pour deux ressorts en série, et ce fait est totalement général. Pour expliciter les parties réelles et imaginaire, il faut d'abord rendre réel le dénominateur:

$$E^* = E_\infty \frac{i\omega \tau_R}{1 + i\omega \tau_R} \frac{1 - i\omega \tau_R}{1 - i\omega \tau_R} = E_\infty \frac{\omega^2 \tau_R^2 + i\omega \tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2}$$

$$\boxed{E' = E_\infty \frac{\omega^2 \tau_R^2}{1 + \omega^2 \tau_R^2} \quad E'' = E_\infty \frac{\omega \tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2}}$$

Le résultat est représenté en figure 4.10, où on constate la transition entre comportement fluide à basse fréquence et le comportement solide à haute fréquence, séparés par la fréquence de transition $1/\tau_R$.

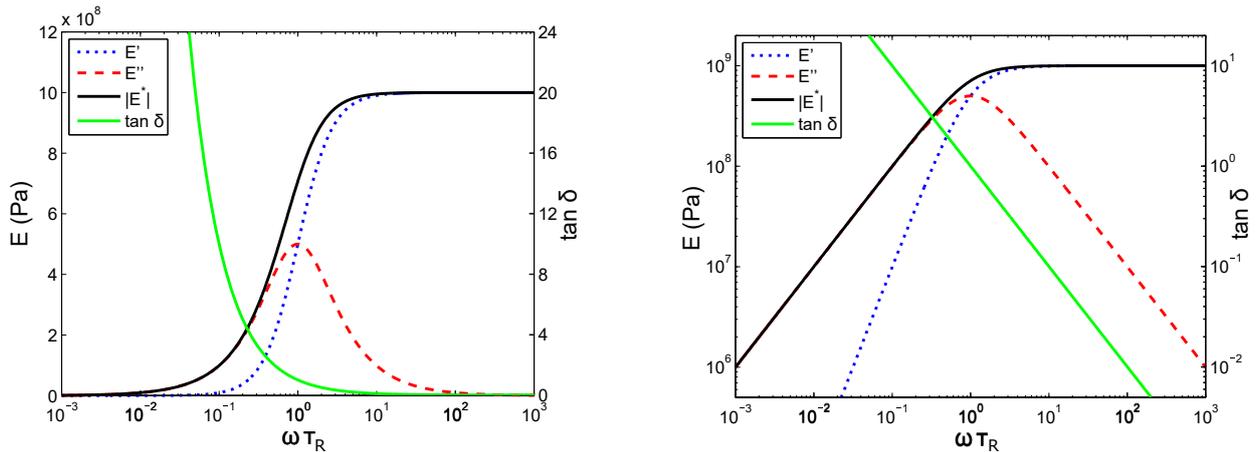


Figure 4.10: Module élastique complexe pour le modèle de Maxwell (avec $E_\infty = 1$ GPa et $\tau_R = 1$ s), en axes semilog et log-log.

5) Pour le **modèle de solide linéaire standard** (modèle de Maxwell en parallèle avec un ressort de contention):

$$\sigma + \tau_R \dot{\sigma} = E_0 \varepsilon + \tau_R (E_0 + E_1) \dot{\varepsilon} \quad \tau_R = \eta / E_1$$

$$\sigma_m e^{i(\omega t + \delta)} + i\omega \tau_R \sigma_m e^{i(\omega t + \delta)} = E_0 \varepsilon_m e^{i\omega t} + i\omega \tau_R (E_0 + E_1) \varepsilon_m e^{i\omega t}$$

$$\boxed{E^*} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} e^{i\delta} = \frac{E_0 + i\omega \tau_R (E_0 + E_1)}{1 + i\omega \tau_R} = \boxed{E_0 + \frac{i\omega \tau_R E_1}{1 + i\omega \tau_R}}$$

On remarque que la dernière forme rend visible le parallèle entre le ressort de contention E_0 et la branche de Maxwell caractérisée par les grandeurs E_1 et $\tau_R = \eta / E_1$. Pour expliciter les parties réelles et imaginaire, il faut encore une fois rendre réel le dénominateur:

$$E^* = \frac{E_0 + i\omega \tau_R (E_0 + E_1)}{1 + i\omega \tau_R} \frac{1 - i\omega \tau_R}{1 - i\omega \tau_R} = \frac{E_0 + i\omega \tau_R (E_0 + E_1) - i\omega \tau_R [E_0 + i\omega \tau_R (E_0 + E_1)]}{1 + \omega^2 \tau_R^2}$$

$$E' = \frac{E_0 + (E_0 + E_1)\omega^2\tau_R^2}{1 + \omega^2\tau_R^2} \quad E'' = \frac{E_1\omega\tau_R}{1 + \omega^2\tau_R^2}$$

Le module de stockage augmente avec la fréquence entre la valeur statique E_0 et la valeur dynamique $E_\infty = E_0 + E_1$. Le résultat est représenté en figure 4.11. Le module de perte E'' (qui représente l'énergie dissipée dans un cycle d'oscillation, comme ce sera démontré en section 4.1.5) tend vers zéro à des fréquences très basses ou très hautes; il passe par un maximum pour la fréquence caractéristique $1/\tau_R$, c'est à dire pour des temps de sollicitation qui correspondent au temps de relaxation du matériau. Pour identifier les regimes de comportement à dominance élastique ou visqueuse, il faut considérer le rapport $\tan \delta$ entre l'énergie dissipée et stockée (voir section 4.1.5). Ce rapport tend aussi vers zéro à basse et haute fréquence, indiquant un comportement élastique (respectivement mou et rigide). Mais on constate que le rapport $\tan \delta$ est plus grand que 1 dans un regime intermédiaire, compris entre une fréquence maximale $1/\tau_R$ et une fréquence minimale $(E_0/E_\infty)/\tau_R \sim 1/\tau_F$, qui correspond à l'inverse du temps de fluage. Nous avons donc un regime intermédiaire où le comportement est à dominance visqueuse (fluide), et l'extension en fréquence de ce regime correspond au nombre de décades qui séparent E_1 de E_0 (trois décades pour l'exemple choisi en figure 4.11).

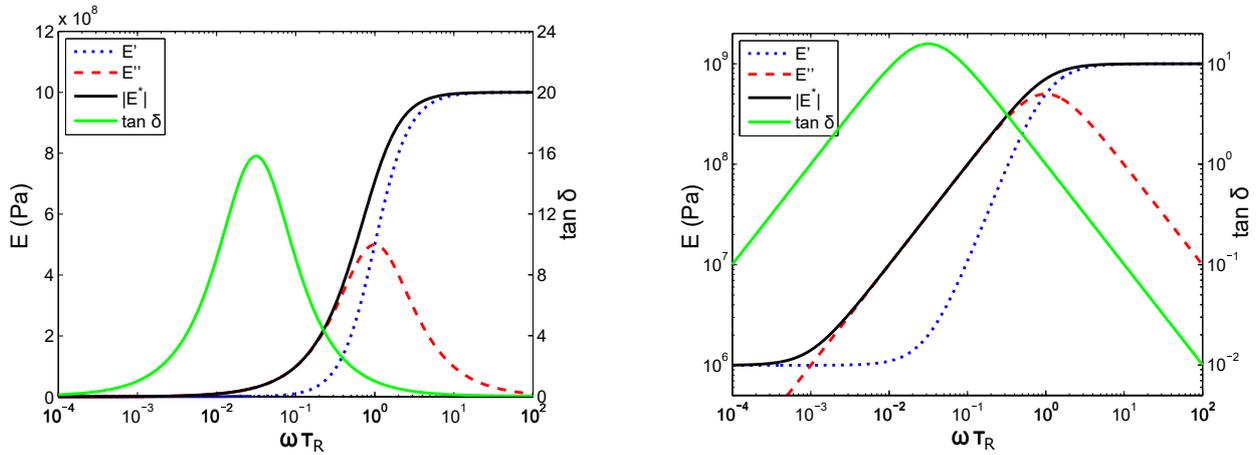


Figure 4.11: Module élastique complexe pour le modèle de solide linéaire standard (avec $E_0 = 1$ MPa, $E_\infty = 1$ GPa et $\tau_R = 1$ s), en axes semilog et log-log.

6) Le **modèle de Maxwell généralisé** à plusieurs branches permet de décrire la présence de plusieurs pics de dissipation (chacun associé à un mécanisme de dissipation spécifique avec son propre temps de relaxation $\tau_R^i = \eta_i/E_i$), séparés par des régions à comportement élastique avec des modules élastiques intermédiaires. Si le nombre de branches devient élevé, on ne distingue plus les pics de dissipation individuels, mais on est plutôt face à une distribution continue de temps de relaxation $\rho(\tau)$.

4.1.5 Dissipation d'énergie pendant un test oscillant

Quand un matériau répond à une sollicitation uniaxiale $\varepsilon(t)$ avec une contrainte $\sigma(t)$ (ou vice-versa), la puissance fournie par le système extérieur à chaque élément de volume unitaire est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{W}}{dt} = \sigma \dot{\varepsilon}} \quad \text{où} \quad d\mathcal{W} = \sigma d\varepsilon$$

Pour un cycle sinusoïdal on a :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos \omega t \quad \sigma(t) = \sigma_m \cos(\omega t + \delta)$$

L'intégrale de la puissance \mathcal{P} sur un cycle complet de période T (c'est à dire l'aire incluse dans le cycle $\sigma(\varepsilon)$ représenté en figure 4.3) correspond à la **densité volumique d'énergie dissipée** :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \int_0^T \sigma \dot{\varepsilon} dt = -\omega \sigma_m \varepsilon_m \int_0^T \cos(\omega t + \delta) \sin(\omega t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \omega \sigma_m \varepsilon_m \int_0^T [\sin(2\omega t + \delta) - \sin(\delta)] dt = \frac{1}{2} \omega \sigma_m \varepsilon_m T \sin \delta = \pi \sigma_m \varepsilon_m \sin \delta = \boxed{\pi E'' \varepsilon_m^2 = \mathcal{W}_{diss}} \end{aligned}$$

d'où le nom de **module de perte** pour E'' .

Pour estimer la densité volumique d'énergie élastique maximale $\mathcal{U}_{el}^{max}(\omega)$ accumulée pendant le cycle, il faut calculer l'intégrale uniquement sur 1/4 de cycle :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{1/4} &= \int_0^{T/4} \sigma \dot{\varepsilon} dt = -\omega \sigma_m \varepsilon_m \int_0^{T/4} \cos(\omega t + \delta) \sin(\omega t) dt = \\ &= -\frac{\sigma_m \varepsilon_m}{2} \cos \delta + \frac{\pi \sigma_m \varepsilon_m}{4} \sin \delta = -\frac{E'}{2} \varepsilon_m^2 + \frac{\pi E''}{4} \varepsilon_m^2 = -\mathcal{W}_{stock}(1/4) + \mathcal{W}_{diss}(1/4) \end{aligned}$$

En reconnaissant dans le deuxième terme 1/4 de l'énergie dissipée dans un cycle, on peut identifier dans le premier terme l'énergie stockée de façon élastique (avec un signe moins parce que le premier quart de cycle correspond à une décharge), ce qui justifie le nom de **module de stockage** pour E' :

$$\boxed{\mathcal{U}_{el}^{max}(\omega) = \mathcal{W}_{stock}(1/4) = \frac{1}{2} E'(\omega) \varepsilon_m^2}$$

Nous pouvons ainsi exprimer la capacité d'amortissement d'un matériau viscoélastique comme suit :

$$\boxed{\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{\mathcal{W}_{diss}(\omega)}{\mathcal{U}_{el}^m(\omega)} = 2\pi \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} = 2\pi \tan \delta(\omega)}$$

ce qui justifie le nom de **facteur de perte** pour $\tan \delta$, ou encore de **frottement interne**. La grandeur inverse $Q(\omega)$ prend le nom de **facteur de qualité**.

4.1.6 Principe de correspondance et effets de structure

Pour des chargements simples, provenant de l'**activation instantanée d'un champ de contraintes extérieures ou d'un champ de déplacements imposés**, la solution du problème viscoélastique est la même solution que pour le **problème élastique correspondant**, pourvu qu'on lui associe une **dépendance temporelle** donnée respectivement par la fonction de fluage ou de relaxation du matériau.

Ce principe nous permet de traiter la réponse temporelle d'une structure viscoélastique en résolvant successivement un problème d'élasticité tensoriel et un problème de viscoélasticité temporel. On justifie ainsi la généralité du traitement viscoélastique scalaire conduit dans les sections précédentes.

On pourra ainsi traiter simplement la flexion ou la torsion d'une barre viscoélastique, ou encore le fonctionnement d'un plot amortisseur. Mais il ne faut pas oublier qu'on ne pourra **pas appliquer ce principe aux situations à géométrie variable**, tel le contact sphère/plan, le roulement d'un pneu, ou la propagation d'une fissure.

C'est encore sur ce principe que se fonde la mesure expérimentale des modules élastiques complexes en fonction de la fréquence par des techniques de spectroscopie mécanique (Dynamic Mechanical Analysis - DMA), fondée par exemple sur l'oscillation d'une barre de matériau sollicitée en trois points.

On remarque qu'une connaissance des modules complexes sur une vaste gamme de fréquences, permet en principe de dériver les fonctions de réponse temporelle (fluage et relaxation) par des outils de transformée de Fourier. L'inverse est possible à partir de mesures de fluage ou relaxation sur des temps longs. Mais encore une fois, la limitation des gammes de fréquence ou de temps expérimentalement accessibles rend délicate la conversion et une mesure directe de la grandeur souhaitée est souvent préférable.

4.1.7 Extension 3D de la viscoélasticité linéaire

Pour étendre la description viscoélastique 1D à une description tensorielle 3D, il convient de rappeler la version suivante de la loi de Hooke pour des matériaux homogènes et isotropes (c.f. section 3.1.4):

$$\overline{\overline{S}}_\sigma = 3K\overline{\overline{S}}_\varepsilon \quad \overline{\overline{D}}_\sigma = 2\mu\overline{\overline{D}}_\varepsilon$$

dans laquelle **la compression isotrope et le cisaillement sont totalement découplés**.

La théorie viscoélastique linéaire 3D s'obtient alors simplement en appliquant la théorie 1D séparément à la composante de compression isotrope (sphérique) et à la composante de cisaillement (déviateur). On aura ainsi deux effets viscoélastiques indépendants, caractérisés par exemple par **deux fonctions de fluage**. Ceci dit, pour la grande classe des **matériaux incompressibles** (ou pour lesquels la module de compressibilité ne dépend que faiblement du temps, comme les polymères) **seule la composante de cisaillement aura un rôle sensible**, et on peut donc appliquer directement le formalisme 1D développé dans les sections précédentes.

4.1.8 Ondes et vibrations atténuées

En conséquence du principe de correspondance (voir section 4.1.6), les **modes propres d'une structure viscoélastique** se comporteront chacun individuellement comme un **oscillateur harmonique amorti**. L'amortissement sera donné par la **partie imaginaire du module élastique complexe** correspondant à la fréquence de vibration libre du mode (très proche de la fréquence de résonance si l'atténuation est faible). La nature complexe du module élastique E^* se traduit dans la nature complexe de la raideur équivalente K^* du mode propre:

$$E^* = E' + iE'' \quad K^* = \alpha E^* = K' + iK'' = |K| \exp(i\delta) \quad \tan \delta = \frac{E''}{E'} = \frac{K''}{K'}$$

$$\ddot{x} + \omega^{*2}x = 0 \quad \omega^{*2} = \frac{K^*}{M_e} = \frac{K'}{M_e} + i\frac{K''}{M_e}$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M_e}} = \sqrt{\frac{|K|}{M_e}} \exp\left(i\frac{\delta}{2}\right) = \sqrt{\frac{|K|}{M_e}} \left(\cos\frac{\delta}{2} + i\sin\frac{\delta}{2}\right) = \omega' + i\omega''$$

$$x = x_0 \exp i(\omega^*t) = x_0 \exp(i\omega't) \exp(-\omega''t)$$

Pour la **propagation d'une onde plane** de fréquence bien définie ω , l'**atténuation spatiale** s'obtient directement à partir de la partie imaginaire du module élastique complexe correspondant à la fréquence ω de l'onde.

$$u = u_0 \cos(kx - \omega t) \quad V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{VT} = \frac{\omega}{V}$$

De façon analogue au calcul pour les modes propres, on obtient une vitesse de propagation complexe $V^* = V' + iV''$ avec une phase $\delta/2$. Si on l'emmène au numérateur on arrive à un vecteur d'onde complexe k^* , dont la partie imaginaire correspond à l'atténuation:

$$u^* = u_0 \exp i(k^*x - \omega t) = u_0 \exp(ik'x) \exp(-k''x) \exp(i\omega t) = u_0 \exp(-k''x) \exp i(k'x - \omega t)$$

$$E^* = |E| \exp(i\delta)$$

$$V^* = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{|E|}{\rho}} \exp\left(i\frac{\delta}{2}\right)$$

$$k^* = \frac{\omega}{V^*} = \frac{\omega}{|V|} \exp\left(-i\frac{\delta}{2}\right)$$

4.2 Comportement viscoélastique des polymères (Slides Séminaire)

Chapter 5

Plasticité

Les métaux, les polymères à l'état vitreux, les pâtes à modeler et d'autres matériaux (dans une moindre mesure) présentent à température ambiante un **comportement dissipatif de type plastique**, c'est à dire caractérisé par une réponse élastique aux faibles contraintes et l'apparition d'une **déformation permanente** au delà d'un **seuil de contrainte**. Les matériaux pouvant supporter une grande déformation plastique avant rupture sont dit **ductiles**, contrairement aux matériaux **fragiles** qui présentent une rupture sans déformation plastique.

En fonction des types de matériaux, des conditions de température et de sollicitation, le comportement plastique peut présenter plusieurs formes. Nous décidons ici de nous en tenir à l'étude de la **situation simplifiée** typique du comportement des **métaux à froid**¹.

Dans le coeur de ce chapitre on traitera donc le comportement plastique de matériaux **homogènes** et **isotropes** en condition **isotherme** et **quasi-statique**. Pour autant que la partie élastique de la déformation est compressible en accord avec la loi de Hooke, **la partie plastique de la déformation** est considérée comme **incompressible** (elle a lieu à volume constant). La déformation plastique sera **indépendante du temps** (et donc du taux de chargement).

Pour bien se focaliser sur les aspects importants du comportement plastique, nous présenterons d'abord le **comportement 1D**, c'est à dire concernant la réponse à un test de **traction uniaxiale**. On traitera ensuite le **comportement 3D**, premièrement pour remettre la plasticité dans son **cadre tensoriel**, et deuxièmement pour traiter des structures présentant une **déformation plastique spatialement inhomogène**.

Le chapitre se termine enfin par un séminaire (voir les transparents en ligne) présentant d'une façon qualitative les aspects qui sortent du cadre théorique simplifié précédant, comme les aspects **visco-plastiques** et de **mémoire de forme** (surtout typiques des polymères vitreux) ou les **matériaux compressibles plastiquement**. Le séminaire présente aussi une description des **micromécanismes à l'échelle moléculaire** responsables des différents aspects du comportement plastique pour certaines types de matériaux. Une **modélisation de type Eyring** permet de comprendre l'**équivalence temps-température-contrainte** dans la plasticité, et de faire un lien avec la viscoélasticité.

¹La condition de validité est que la température de travail soit inférieure à 35% de la température de fusion (en K!) du metal. On peut apprécier la validité à température ambiante pour les métaux suivants, à l'exception du plomb.

Matériau	T_f	$0.35T_f$
Tungsten	3700 K	1300 K = 1027 °C
Fer	1800 K	633 K = 350°C
Cuivre	1290 K	452 K = 179°C
Aluminium	934 K	327 K = 54°C
Plomb	600 K	210 K = -63°C !!

5.1 Caractéristiques des courbes de charge uniaxiale (1D)

5.1.1 Courbe de charge monotone: seuil de plasticité

La figure 5.1 (partie gauche) montre une **courbe de chargement monotone jusqu'à rupture**. Il s'agit d'un **test uniaxial** sur une barre de métal avec une vitesse de chargement constante, mais le résultat est indépendant de la vitesse de chargement pour les métaux froids. La courbe de gauche représente les résultats bruts mesurés par la machine de test, c'est à dire la force F en fonction du déplacement ΔL appliqué à l'éprouvette illustrée au centre. Par une simple renormalisation à la section initiale S_0 et longueur initiale L_0 de l'éprouvette les axes sont représentés en termes de **contrainte nominale** $\sigma_N = F/S_0$ et **déformation nominale** $\varepsilon_N = \Delta L/L_0$.

Cette courbe présente une phase initiale de chargement élastique linéaire avec module d'Young E , jusqu'à une **limite d'élasticité** σ_y , qu'on appellera par la suite **seuil de plasticité** parce qu'on s'intéressera principalement à la partie plastique du comportement (l'indice 'y' derive de l'anglais *yield strength* pour la résistance à l'écoulement plastique). Pendant la plastification la contrainte nominale augmente jusqu'à une valeur maximale σ_U , qui prend le nom de **résistance ultime à la tension uniaxiale**, pour ensuite diminuer doucement jusqu'à atteindre le **point de rupture R**. De fait le point de contrainte maximale U correspond à l'apparition spontanée d'une **striction localisée** dans un point de l'échantillon (voir schéma au centre de la figure 5.1). Dans la partie entre les points U et R la déformation n'est donc plus homogène, et la déformation nominale ne représente qu'une déformation moyenne.

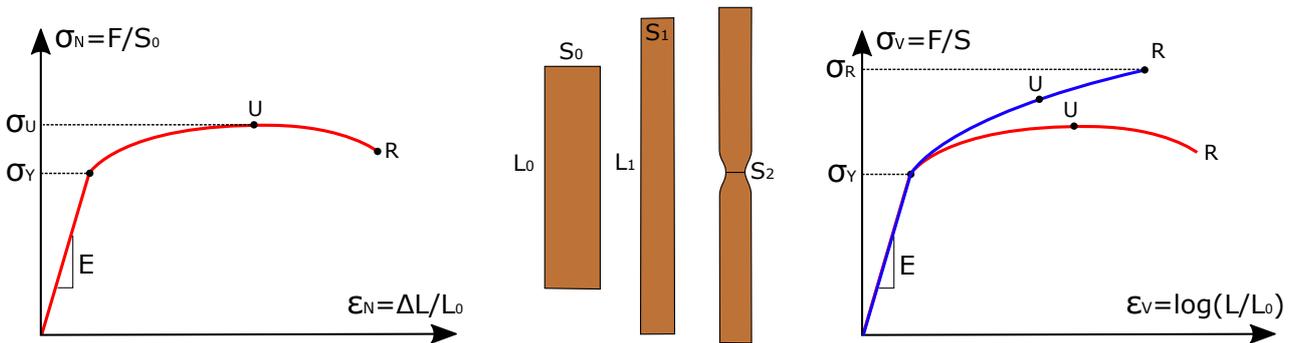


Figure 5.1: Courbe de charge monotone jusqu'à rupture pour un métal en traction uniaxiale. Gauche: représentation en valeurs nominales (courbe de l'ingénieur). Droite: représentation en valeurs vraies.

En raison des **grandes déformations plastiques** subies par l'échantillon pendant le test, la description du comportement plastique en vue d'appréhender ses lois de comportement nécessite l'utilisation des notions de **contrainte et déformation vraies**²:

$$\sigma_V = \frac{F}{S} \quad \varepsilon_V = \int_{L_0}^L \frac{dL'}{L'} = \log \frac{L}{L_0}$$

Tant que la déformation de la barre reste homogène, c'est à dire jusqu'au point U d'initiation de la striction, on peut relier les valeurs vraies aux valeurs nominales en exploitant

²On remarque que la déformation vraie possède la propriété de rendre **additives et commutatives** les grandes déformations:

$$\varepsilon_V^{0-1} = \log \frac{L_1}{L_0} \quad \varepsilon_V^{0-2} = \log \frac{L_2}{L_0} = \log \frac{L_2}{L_1} \frac{L_1}{L_0} = \log \frac{L_2}{L_1} + \log \frac{L_1}{L_0} = \varepsilon_V^{1-2} + \varepsilon_V^{0-1}$$

l'incompressibilité plastique (et en négligeant la déformation élastique):

$$\boxed{\varepsilon_V} = \log \frac{L}{L_0} = \boxed{\log(1 + \varepsilon_N)}$$

$$SL = S_0L_0 \quad \boxed{\sigma_V} = \frac{F}{S} = \sigma_N \frac{S_0}{S} = \sigma_N \frac{L}{L_0} = \boxed{\sigma_N(1 + \varepsilon_N)}$$

Le résultat de la conversion est représenté en figure 5.1 à droite, jusqu'au point noir correspondant au point U . Pour accéder à la partie suivante de la **loi de comportement du matériau après la striction**, il faut **mesurer la section S au centre de la striction** comme illustré dans la partie centrale de la figure 5.1.³ La contrainte vraie dans cette region active est ainsi directement connue, et on peut utiliser l'incompressibilité plastique pour estimer l'évolution de la déformation plastique vraie locale:

$$\sigma_V = \frac{F}{S} \quad \boxed{\varepsilon_V = \log \frac{S_0}{S}}$$

On peut ainsi remonter à la dernière partie de la loi de comportement en valeurs vraies représentée sur la partie droite de la figure 5.1. On remarque que la partie en faibles déformations, incluant le point de première plastification, reste identique à la courbe en déformation nominale. Mais ensuite les valeurs vraies donnent à la fois un effet de contrainte accrue, et de déformation réduite. Les deux effets contribuent à réhausser et compacter la courbe de comportement, mais l'effet le plus notable est la **disparition du maximum associé à la striction** en correspondance du point U . En conclusion, la **loi de comportement des métaux à froid** se trouve être **monotone croissante jusqu'au point de rupture R** .

C'est sur cette courbe reconstruite en valeurs vraies (c.f. figure 5.1 à droite) qu'on peut **définir et mesurer proprement la résistance à la rupture σ_R et la déformation à rupture ε_R** pour un métal à froid, malgré la striction.

Dans la suite de ce chapitre sur la plasticité on travaillera systématiquement en valeurs vraies, et on omettra donc les indices V .

³Par exemple en mesurant le diamètre par une caméra vidéo, sous l'hypothèse que la striction reste en symétrie orthoradiale. Ou alors en mesurant le périmètre local par la mesure de longueur d'un fil tendu et faisant un tour complet autour de la striction comme proposé par G'Sell et Jonas [2].

5.1.2 Décharge élastique: partage de la déformation

La figure 5.2 montre l'effet d'une inversion du sens de chargement après un chargement jusqu'au point 1. Des le début de la **décharge**, le matériau reprend un **comportement élastique avec le même module E** qu'au premier chargement. Lorsque la décharge est complète, le matériau présente une déformation permanente ε^p , qui prend le nom de **déformation plastique**.

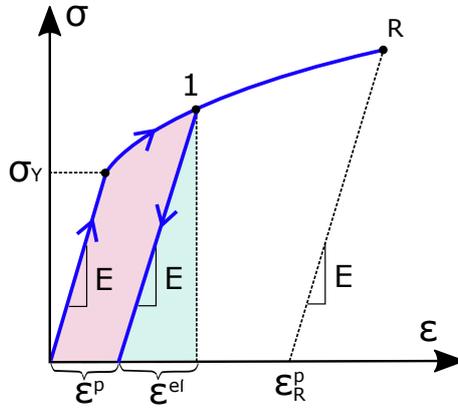


Figure 5.2: Courbe de charge présentant un cycle de charge/décharge.

La détermination expérimentale du seuil de plastification σ_y est fondée sur la détection d'une première déformation plastique permanente après décharge. Comme cette détection est sensible à la précision de la machine de test utilisée, la **définition de σ_y est conventionnelle**. Une norme internationale fixe la déformation plastique minimale à $\varepsilon_{seuil}^p = 0.002 = 0.2\%$.

Compte tenu de la nature élastique de la décharge, on peut en déduire qu'au point 1, le matériau possédait aussi une déformation élastique $\varepsilon^{el} = \sigma/E$, et que la déformation totale au point 1 peut donc se **décomposer de manière univoque** de la façon suivante:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^p} \quad \boxed{\varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{E}} \quad \boxed{\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^{el} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}} \quad (5.1)$$

La **densité volumique de travail \mathcal{W}** effectué pour charger le matériau jusqu'au point 1, peut aussi se décomposer en deux parties: la **densité volumique d'énergie élastique** conservée \mathcal{U}^{el} et la **densité volumique d'énergie dissipée plastiquement** \mathcal{U}_{diss}^p :

$$\mathcal{W}(1) = \int_0^1 \sigma d\varepsilon = \int_0^1 \sigma d\varepsilon^{el} + \int_0^1 \sigma d\varepsilon^p = \mathcal{U}^{el} + \mathcal{U}_{diss}^p \quad (5.2)$$

$$\boxed{\mathcal{U}^{el} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}} \quad \boxed{\mathcal{U}_{diss}^p = \int_0^1 \sigma(\varepsilon) d\varepsilon - \mathcal{U}^{el}} \quad (5.3)$$

La valeur maximale de la déformation plastique supportable avant rupture dans un test uniaxial prend le nom de **ductilité** d'un matériau:

$$\boxed{A \equiv \varepsilon_R^p}$$

Quand on décrit les propriétés d'un matériau plastique il faut bien distinguer les termes **dur/doux**, qui se réfèrent à la valeur de la résistance à la plastification σ_y , des termes **ductile/fragile** qui se réfèrent à l'ampleur des déformations plastiques qu'un matériau peut supporter avant rupture ε_R^p . C'est le **produit** de ces deux quantités qui (en première approximation) évalue la capacité totale d'un matériau de **dissiper de l'énergie avant rupture**:

$$\boxed{\mathcal{U}_{diss}^p \sim \sigma_y \varepsilon_R^p} \quad (5.4)$$

5.1.3 Effet de la plastification sur les propriétés mécaniques

La déformation plastique implique un profond remaniement du matériau à l'échelle de sa microstructure, et peut donc affecter les propriétés macroscopiques du matériau. On détaille ici le comportement simplifié des métaux à froid.

Si après le cycle de charge/décharge décrit dans la figure 5.2 on effectue un nouveau chargement, la réponse est décrite dans la figure 5.3. Le chargement s'effectue en suivant la même courbe que lors de la décharge, ce qui veut dire que **le module élastique E n'est pas affecté par la plastification**.

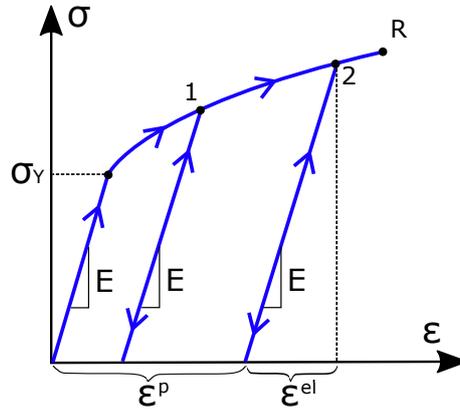


Figure 5.3: Courbe de charge présentant plusieurs cycles de charge/décharge.

Le chargement se poursuit de façon élastique jusqu'à rencontrer la valeur de contrainte maximale σ_1 atteinte dans le premier cycle de chargement, et se poursuit en suivant la même courbe de plastification qui aurait été suivie en l'absence du cycle de décharge. On dit alors que le matériau a été **durci** ou **écroui** par la plastification, et on entend par cela que sa dureté, c'est à dire sa nouvelle contrainte de plastification, se trouve augmentée par rapport à la valeur initiale σ_y . D'un point de vue de l'application, il faut voir un matériau écroui comme un matériau différent qui inclut sa pre-plastification dans le procédé d'élaboration. La plupart des métaux sont vendus dans un état écroui (*EN: work hardened*) pour en améliorer les propriétés de dureté.

La même chose se produit si on effectue d'autres cycles de charge et décharge en atteignant des contraintes maximales croissantes, et ceci jusqu'à atteindre le point de rupture σ_R qui ne se trouve pas altéré par l'historique de chargement. Si on reprend le point de vue de l'application, on constate alors qu'un matériau écroui n'a pas simplement une dureté accrue, mais il présente aussi une **réduction de ductilité**! Ceci veut dire que la déformation plastique qu'il peut encore subir avant rupture se trouve d'autant plus réduite que le matériau a été plastifié pendant son procédé. Dans la situation limite d'un matériau initialement très ductile, qui a été plastifié jusqu'à une valeur proche de son point de rupture, le comportement du matériau lors d'un prochain chargement sera de fait celui d'un matériau très fragile, et cassant à la fin de son chargement élastique.

On voit donc que les propriétés de **dureté et ductilité sont souvent antagonistes**: pour un même matériau l'effet de l'écrouissage est celui d'augmenter la première au détriment de la deuxième. Mais même en variant la composition des matériaux, il est difficile d'allier dureté et ductilité avec un matériau homogène.

Pour resumer, l'effet de la déformation plastique sur les propriétés d'un métal à froid sont:

- 1) Module élastique E inchangé
- 2) Dureté σ_y^{app} accrue
- 3) Ductilité $(\varepsilon_{max}^p)^{app}$ réduite

5.2 Description mathématique du comportement plastique uniaxial (1D)

5.2.1 Fonction d'écrouissage

Pour prendre en compte mathématiquement le phénomène d'écrouissage, on définit la **fonction d'écrouissage** $Y(\varepsilon^p)$ (*EN: hardening function*) qui représente l'augmentation de la contrainte de plastification en fonction de la déformation plastique ε^p subie par le matériau. En reprenant les données de la figure 5.3, on illustre dans la figure 5.4 la construction de la fonction d'écrouissage.

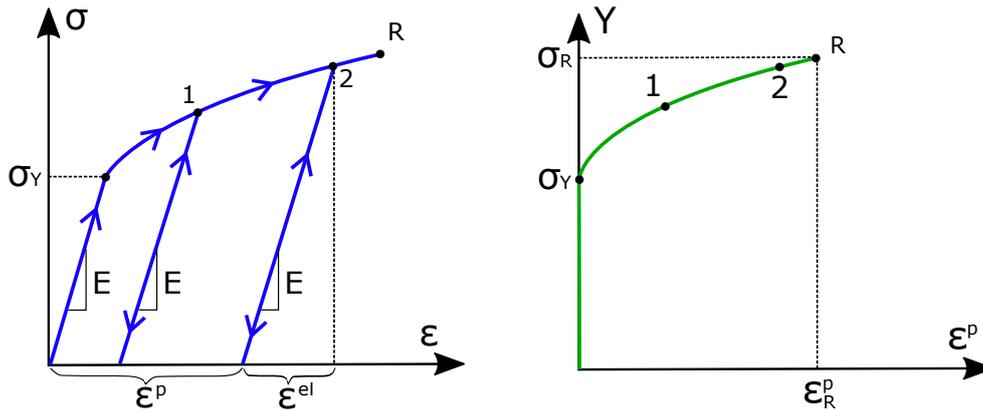


Figure 5.4: Gauche: Courbe de charge présentant plusieurs cycles de charge/décharge. Droite: courbe d'écrouissage $Y(\varepsilon^p)$ correspondante.

En appelant $\sigma(\varepsilon)$ la courbe de charge jusqu'à rupture (en valeurs vraies), la fonction d'écrouissage $Y(\varepsilon^p)$ est définie de façon implicite par:

$$\begin{array}{l}
 Y(0) \equiv \sigma_y \\
 Y(\varepsilon^p) \equiv \sigma(\varepsilon) \quad \varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E} \\
 Y(\varepsilon_R^p) \equiv \sigma_R
 \end{array} \tag{5.5}$$

La **condition de plastification** devient donc:

$$\boxed{\sigma = Y(\varepsilon^p)} \tag{5.6}$$

On remarque que l'équation (5.6) ne présente pas un symbole \geq car dès que la contrainte atteint la condition de plastification, la contrainte $\sigma(\varepsilon)$ augmente conjointement à la fonction d'écrouissage $Y(\varepsilon^p)$.

5.2.2 Déformation plastique équivalente

On s'est jusqu'à présent limité à des cycles de charge/décharge uniaxiale à contrainte toujours positive (tension), et donc présentant uniquement des déformations plastiques additives en extension. Pour compléter la description mathématique du comportement plastique 1D il faut maintenant prendre en considération le comportement suite à des **cycles de chargement toujours uniaxiaux, mais de signe arbitraire**.

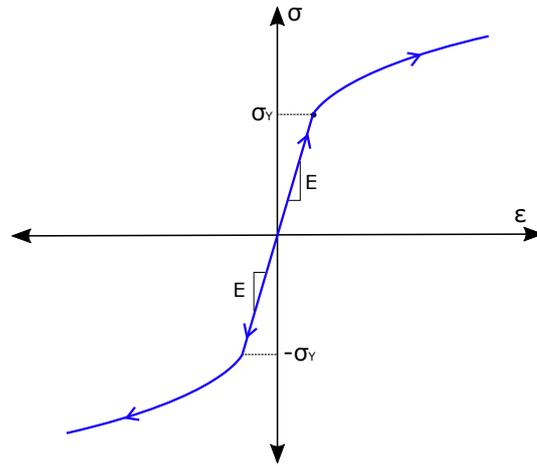


Figure 5.5: Comportement plastique suite à un chargement monotone soit en traction soit en compression.

Dans les métaux à froid, pourvu qu'on exprime les courbes de charge en valeurs vraies, **le comportement plastique en compression monotone suit essentiellement la même loi qu'en traction**, comme illustré en figure 5.5.

$$\sigma(-\varepsilon) = -\sigma(\varepsilon) \tag{5.7}$$

On peut donc décrire la condition de plastification avec la même fonction d'écroissage, mais en prenant la valeur absolue de la déformation:

$$|\sigma| = Y(|\varepsilon^p|) \tag{5.8}$$

Si maintenant on considère des **cycles de chargement arbitraires**, alternant des phases en traction et compression, la courbe de chargement évolue comme illustré en figure 5.6.

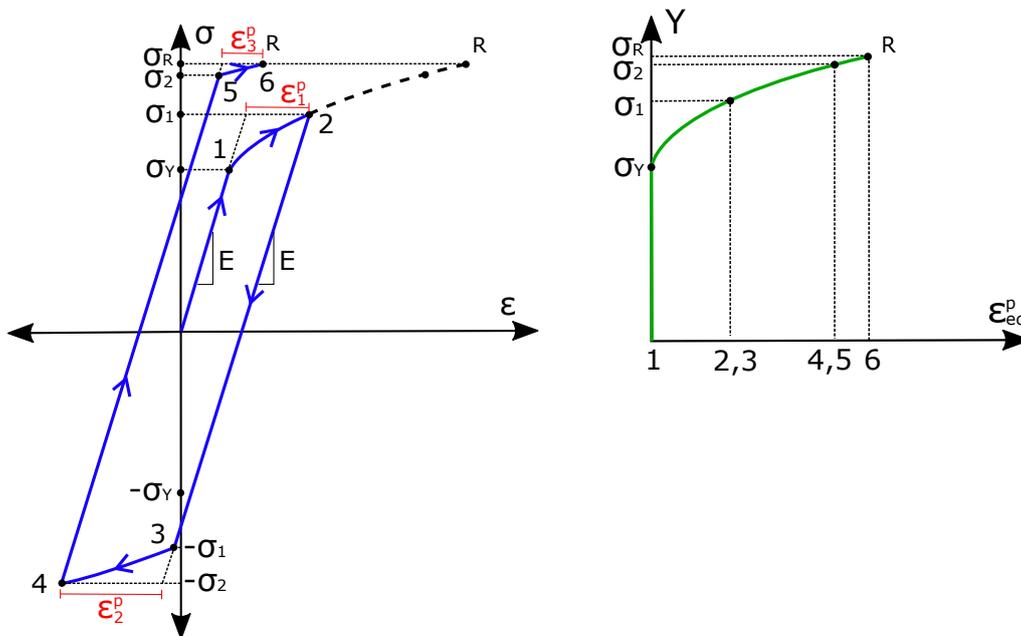


Figure 5.6: Comportement plastique suite à un cycle de charge uniaxiale arbitraire.

On constate que pour les métaux à froid **toute déformation plastique**, qu'elle soit en tension ou bien en compression, **contribue** de façon équivalente à **l'écroissage** du matériau,

on parle alors d'**écrouissage isotrope**. La **condition de plastification** peut être étendue à l'ensemble de ces comportements, en définissant une **déformation plastique équivalente**, constituée par la somme cumulative des valeurs absolues de tous les increments de la déformation plastique subis par la matériau pendant le trajet de chargement suivi:

$$\boxed{\varepsilon_{eq}^p = \int |d\varepsilon^p|} \quad (5.9)$$

$$\boxed{|\sigma| = Y(\varepsilon_{eq}^p)} \quad (5.10)$$

On remarque que cette dernière version de la condition de plastification intègre toutes les versions précédentes et s'applique donc à tout cycle de chargement uniaxial.

La symétrie observée entre chargements en traction et compression s'applique bien au comportement élasto-plastique des métaux à froid, mais ne s'étend pas d'un façon simple au point de rupture car les mécanismes de rupture dans les métaux (et en général) sont plutôt sensibles à l'état de triaxialité des contraintes. D'un point de vue général, le **point de rupture en compression se situe à des valeurs de déformation équivalente plus élevées**, et le comportement du matériau en compression aura donc une **plus forte ductilité** qu'en traction.

5.2.3 Direction de l'écoulement plastique

Pour compléter la description mathématique du comportement plastique 1D, il faut formaliser la **loi d'évolution générale pour chaque incrément de chargement**. La question qu'on va traiter se pose dans la façon suivante: si on a un matériau plastique caractérisé par le module élastique E et par la fonction d'écrouissage $Y(\varepsilon_{eq}^p)$, dans un état de chargement caractérisé par les valeurs des variables σ , ε , ε^p et ε_{eq}^p , quelles seront les évolutions de σ , ε^p et ε_{eq}^p suite à un incrément de chargement appliqué $d\varepsilon$? Pour répondre à cette question il faut spécifier les trois situations suivantes, identifiées sur la figure 5.7:

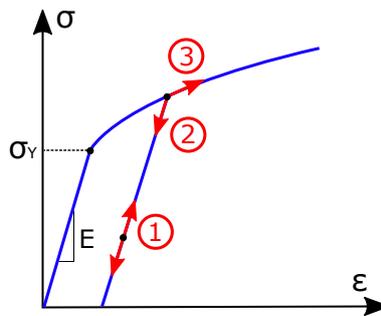


Figure 5.7: Schéma de la loi d'évolution pour le comportement plastique uniaxial.

(1) Domaine élastique

Dans le domaine de réponse élastique, identifié par la condition:

$$|\sigma| < Y(\varepsilon_{eq}^p) \quad (5.11)$$

les variations de déformation plastique sont identiquement nulles et l'évolution des autres variables est déterminée par la loi de Hooke:

$$\begin{cases} d\varepsilon^p = d\varepsilon_{eq}^p = 0 \\ d\sigma = E d\varepsilon^{el} = E d\varepsilon \end{cases} \quad (5.12)$$

(2) Décharge élastique

Si le point de chargement se trouve sur la courbe de plastification, mais l'incrément de chargement $d\varepsilon$ est de signe opposé par rapport au signe de la contrainte:

$$|\sigma| = Y(\varepsilon_{eq}^p) \quad \text{signe}(\sigma) \neq \text{signe}(d\varepsilon) \quad (5.13)$$

la réponse sera une décharge de type élastique, selon la loi de Hooke:

$$\begin{cases} d\varepsilon^p = d\varepsilon_{eq}^p = 0 \\ d\sigma = E d\varepsilon^{el} = E d\varepsilon \end{cases} \quad (5.14)$$

ce qui peut aussi être écrit dans la forme:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (5.15)$$

(3) Chargement plastique

Si par contre le point de chargement se trouve sur la courbe de plastification, mais l'incrément de chargement $d\varepsilon$ est du même signe que la contrainte:

$$|\sigma| = Y(\varepsilon_{eq}^p) \quad \text{signe}(\sigma) = \text{signe}(d\varepsilon) \quad (5.16)$$

alors le matériau va plastifier et l'évolution est déterminée par la **condition de consistance** (c'est à dire par le fait que la condition de plastification $|\sigma| = Y(\varepsilon_{eq}^p)$ doit être préservée pendant le chargement), ainsi que par la **condition de codirectionnalité** entre l'incrément de déformation plastique $d\varepsilon^p$ et la contrainte appliquée σ :

$$\begin{cases} |\sigma + d\sigma| = Y(\varepsilon_{eq}^p + d\varepsilon_{eq}^p) \\ d\varepsilon_{eq}^p = |d\varepsilon^p| \\ \text{signe}(d\varepsilon^p) = \text{signe}(\sigma) \end{cases} \quad (5.17)$$

La dernière ligne implique que si le chargement est en traction ($\text{signe}(\sigma) > 0$) la déformation plastique sera toujours une extension plastique ($\text{signe}(d\varepsilon^p) > 0$). A l'inverse, si le chargement est en compression ($\text{signe}(\sigma) < 0$) la déformation plastique sera toujours une contraction plastique ($\text{signe}(d\varepsilon^p) < 0$) dans la même direction que la contrainte.

5.2.4 Dissipation d'énergie

Le formalisme mathématique présenté permet de réécrire le bilan énergétique dans un cycle arbitraire de déformation plastique uniaxiale. La **densité volumique d'énergie élastique** reste formellement identique à l'équation 5.3:

$$\boxed{\mathcal{U}^{el} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}} \quad (5.18)$$

En vertu de la codirectionnalité entre la déformation plastique et la contrainte, la **densité volumique d'énergie dissipée** est positive pour chaque incrément de déformation plastique:

$$\boxed{d\mathcal{U}_{diss}^p = \sigma d\varepsilon^p = Y(\varepsilon_{eq}^p) d\varepsilon_{eq}^p} \quad \boxed{\mathcal{U}_{diss}^p = \int_0^{\varepsilon_{eq}^p} Y(\varepsilon_{eq}^p) d\varepsilon_{eq}^p} \quad (5.19)$$

On peut remarquer que la **capacité maximale de dissipation d'énergie par unité de volume** d'un métal à froid reste d'ordre $\sigma_y \varepsilon_R^p$ comme en équation 5.4, même si on effectue des chargements en sens alterné traction/compression, mais attention, la valeur de ε_R^p varie en général avec le sens du chargement au moment de la rupture.

5.2.5 Modèles simplifiés de comportement plastique

En général dans les solutions mathématiques on adopte des modèles simplifiés qui correspondent à des comportements idéalisés, qui s'adaptent plus au moins bien au type de matériau et à la condition de sollicitation en question. On illustre ici les plus typiques, ainsi que les modèles rhéologiques qui peuvent représenter leur fonctionnement le cas échéant.

A. Plasticité parfaite

Le **comportement plastique parfait**, représenté en figure 5.8, correspond à un matériau **totale-ment rigide** $[E = \infty]$ et ne présentant **pas de durcissement** pendant la plastification, c'est à dire ayant une fonction d'écrouissage constante $[Y(\varepsilon^p) = \sigma_Y]$. En vertu de la rigidité élastique du matériau, $\varepsilon^{el} = 0$ et $\varepsilon = \varepsilon^p$; la courbe d'écrouissage coïncide donc avec la courbe de chargement monotone. Bien que dans le modèle idéalisé l'écoulement plastique ne soit pas limité, il convient de ne pas oublier que tout matériau présente une ductilité limitée, représentée par un point de rupture sur la courbe de chargement. La partie droite de la figure 5.8 représente un **nouveau élément rhéologique** qui contient l'essence du comportement plastique: il représente un **curseur**, ou bien un **patin** à frottement sec, ayant la propriété de couler plastiquement (déformation ε^p libre) dans la même direction que la contrainte appliquée, quand la valeur absolue de la contrainte dépasse l'unique paramètre σ_Y du modèle.

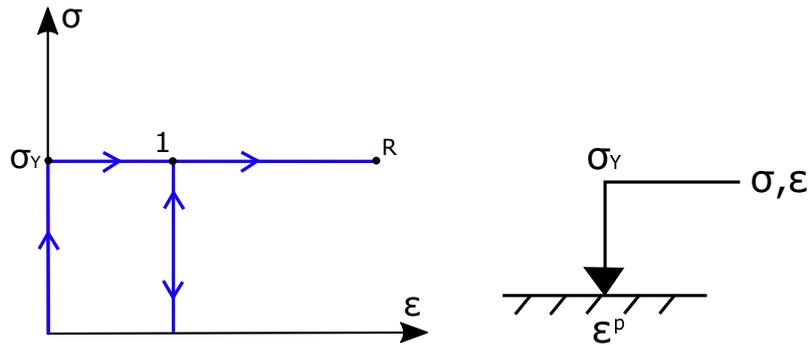


Figure 5.8: Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle de plasticité parfaite (gauche) et modèle rhéologique associé, représentant un patin à frottement sec (droite).

B. Elasto-plasticité parfaite

Le **comportement élasto-plastique parfait**, représenté en figure 5.9, correspond à un matériau élastique de **module d'Young** $[E]$, ne présentant **pas de durcissement** pendant la plastification. La fonction d'écrouissage est constante $[Y(\varepsilon^p) = \sigma_Y]$ et c'est la même que pour le modèle rigide vu en A. Encore une fois on décide de rajouter un point de rupture sur la courbe de chargement pour représenter la ductilité finie de tout matériau. Le comportement élasto-plastique parfait peut être représenté par un modèle rhéologique constitué d'un **patin plastique en série avec un ressort élastique**, comme illustré dans la partie droite de la figure 5.9. Le comportement en compression est analogue à celui du modèle rigide vu en A, sauf pour la présence d'une énergie élastique stockée correspondante à une déformation élastique en compression.

Dans ces deux modèles sans écrouissage, la définition de la déformation plastique équivalente (c.f. equation 5.9) est uniquement utile au fin de l'estimation du point de rupture quand la somme des déformations plastiques aura atteint la limite de ductilité ε_R^p .

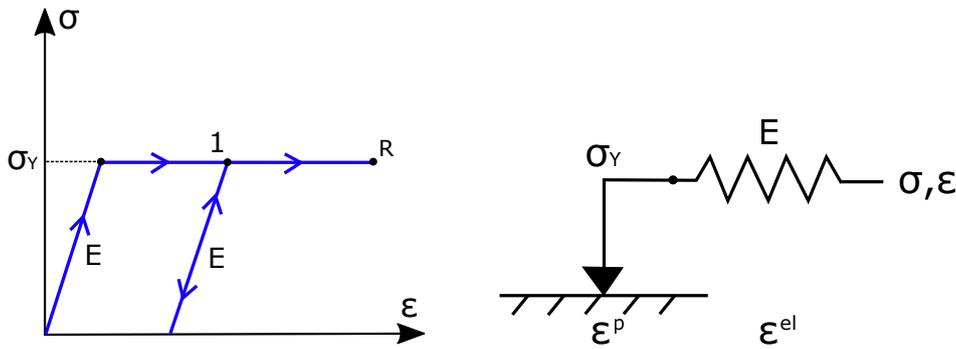


Figure 5.9: Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle de élasto-plasticité parfaite (gauche) et modèle rhéologique associé, représentant un patin à frottement sec en série avec un ressort élastique (droite).

C. Comportement plastique rigide écrouissant

Il s'agit d'un comportement analogue à celui exploré dans la section 5.1, mais présentant un module élastique infini ($E = \infty$, c.f. figure 5.10). La déformation élastique étant nulle, encore une fois on peut identifier la déformation totale avec la déformation plastique, et la courbe de charge monotone se trouve être identique à la fonction d'écrouissage $\sigma(\varepsilon) = Y(\varepsilon^p)$.

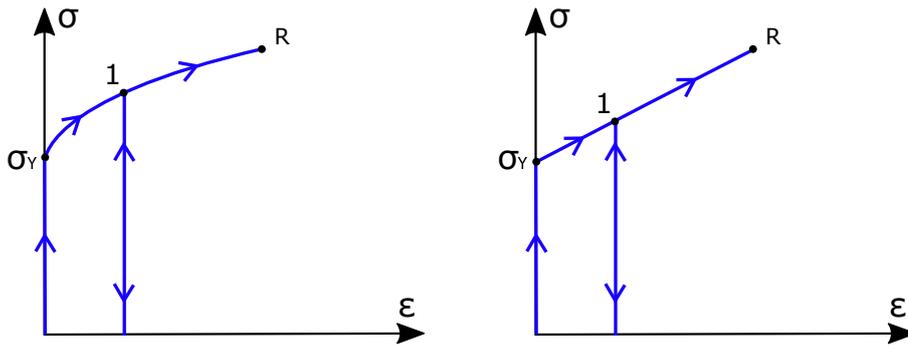


Figure 5.10: Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle de comportement plastique rigide écrouissant général (gauche) et pour le cas simplifié de l'écrouissage linéaire (droite).

Pour traiter mathématiquement un problème avec écrouissage, il faut donner une forme explicite à la fonction d'écrouissage $Y(\varepsilon^p)$. Une fonction très communément utilisée est la **loi de Hollomon-Ludwik**:

$$Y(\varepsilon^p) = \sigma_y + E_k \cdot (\varepsilon^p)^\chi \quad 0 \leq \chi \leq 1 \quad (5.20)$$

qui présente la forme générale donnée en figure 5.10 à gauche, où le préfacteur E_k [Pa] et l'exposant χ sont des paramètres du matériau. En pratique, on a généralement $0.15 < \chi < 0.5$, traduisant la **diminution progressive de la pente de la courbe d'écrouissage** lorsque la plastification progresse. On remarque que les deux cas limites sont la plasticité parfaite pour $\chi = 0$ et l'écrouissage **linéaire** pour $\chi = 1$ (c.f. figure 5.10 à droite):

$$Y(\varepsilon^p) = \sigma_y + E_k \varepsilon^p \quad (5.21)$$

Ce dernier est très utilisé dans les calculs d'application analytiques de par sa simplicité mathématique.

Pour les métaux à froid, le comportement suite à un **chargement cyclique arbitraire** est décrit en introduisant la déformation plastique équivalente (c.f. equation 5.9) comme en section 5.2.2. Si on veut représenter ce comportement par un **modèle rhéologique**, il faut enrichir l'élément de patin à frottement sec en substituant son paramètre σ_y par la fonction d'écrouissage $Y(\varepsilon_{eq}^p)$, comme en figure 5.11 à gauche. Pour le comportement élasto-plastique correspondant, il suffit de rajouter un ressort de module E en série, comme dans la figure 5.11 à droite. Le fait que la résistance au frottement du patin augmente selon la fonction $Y(\varepsilon_{eq}^p)$ implique les deux effets suivants: 1) toute déformation plastique (dans les deux directions) contribue à une augmentation de la résistance au frottement, et 2) à tout instant la résistance au frottement est la même indépendamment de la direction de sollicitation. Ce type de comportement prend le nom d'**écrouissage isotrope**, typique des métaux à froid.

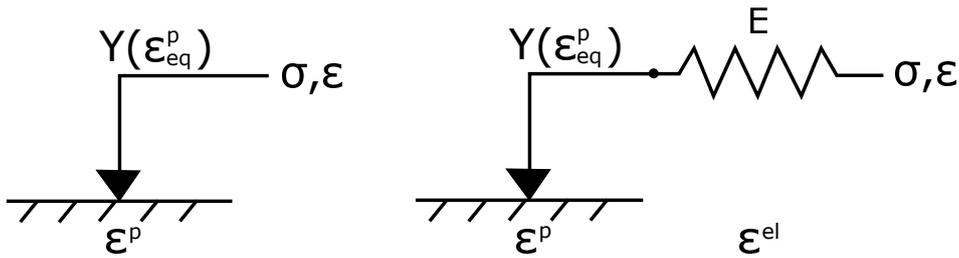


Figure 5.11: Modèle rhéologique pour le comportement rigide plastique écrouissant des métaux à froid (gauche). Le figure de droite représente le comportement élasto-plastique correspondant.

5.2.6 Sommaire des lois du comportement plastique 1D

Loi élastique	$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$
Déformation plastique équivalente	$\varepsilon_{eq}^p = \int d\varepsilon^p $
Condition de plastification	$ \sigma = Y(\varepsilon_{eq}^p)$
Codirectionalité	$\text{signe}(d\varepsilon^p) = \text{signe}(\sigma)$
Energie stockée	$\mathcal{U}^{el} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$
Energie dissipée	$\mathcal{U}_{diss}^p = \int_0^{\varepsilon_{eq}^p} Y(\varepsilon_{eq}^p) d\varepsilon_{eq}^p$

5.3 Description mathématique du comportement plastique triaxial (3D)

Jusqu'à présent on a traité uniquement des chargements de type uniaxial, c'est à dire dans la forme:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

tels qu'on peut les appliquer grâce à une machine de test ordinaire en traction. **Le comportement plastique est très sensible à la nature tensorielle du chargement.** Notamment, si en plus de la traction uniaxiale $\sigma_1 > 0$ nous appliquons une compression isotrope sur les deux autres axes propres $\sigma_2 = \sigma_3 < 0$, la plastification de l'échantillon est facilitée, et la contrainte de plastification en traction se trouve diminuée par rapport à la valeur mesurée dans un chargement uniaxial.

Dans cette section nous allons traiter le cas simplifié d'un **matériau homogène, isotrope et plastiquement incompressible** (au sens que toute déformation plastique se fait à volume constant), tel que c'est le cas pour les métaux à froid. De façon analogue à ce qui a été vu en élasticité et en visco-élasticité, la nature isotrope du matériau implique que la loi de comportement peut être écrite en séparant la partie isotrope du chargement (sphérique) et la partie en cisaillement (déviateur). Du fait de la nature incompressible des déformations plastiques, la partie isotrope de la déformation (impliquant un changement de volume) sera très faible et peut donc être négligée. **La déformation plastique proviendra donc essentiellement d'une déformation en cisaillement**, ce qui la rend **similaire à l'écoulement** des liquides. Avec ces approximations, la loi de comportement plastique se réduit donc à sa partie décrivant les déformations en cisaillement.

L'aspect tensoriel peut donc être pris en compte en **préservant le formalisme défini pour le chargement uniaxial** dans la section 5.2, pourvu qu'on définisse proprement deux grandeurs scalaires: la **contrainte équivalente** σ_{eq} et la **déformation plastique équivalente** ε_{eq}^p . Ces deux grandeurs permettent d'estimer l'intensité de la partie en cisaillement (déviateur) dans la contrainte et dans la déformation, et de les rapporter au chargement uniaxial qui produirait le même effet. La loi plastique les reliant pourra donc être mise en relation avec la **même fonction d'écrouissage** scalaire définie pour le comportement plastique uniaxial.

5.3.1 Charge/décharge élastique

Da façon analogue au traitement uniaxial, **la déformation dans le cas élasto-plastique 3D peut être décomposée en une partie élastique et une partie plastique**:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{el} + \bar{\varepsilon}^p \quad (5.23)$$

S'agissant en général de matériaux très rigides, **la partie élastique reste petite**, et peut être traitée dans le formalisme des **déformations nominales**, c'est à dire par le tenseur de déformation défini dans l'équation 2.4.

A tout moment d'un cycle de chargement arbitraire d'un matériau élasto-plastique, la partie élastique de la déformation est gouvernée par la **loi de Hooke tensorielle** (eq. 3.9)⁴:

$$\bar{\sigma} = K(\text{Tr } \bar{\varepsilon}^{el})\bar{I} + 2\mu\bar{D}_{\varepsilon^{el}} \quad (5.24)$$

⁴Voir les définitions de sphérique \bar{S} et déviateur \bar{D} d'un tenseur en section 2.1.4.

En vertu de l'**incompressibilité plastique** on peut écrire:

$$\boxed{\text{Tr } \bar{\varepsilon}^p = 0} \quad (5.25)$$

et on peut exprimer la loi de Hooke en termes de déformation totale $\bar{\varepsilon}$ et de déformation plastique $\bar{\varepsilon}^p$ de façon analogue à l'équation 5.15:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \bar{\varepsilon}^p = 0 &\Rightarrow \text{Tr } \bar{\varepsilon} = \text{Tr } \bar{\varepsilon}^{el} + \text{Tr } \bar{\varepsilon}^p = \text{Tr } \bar{\varepsilon}^{el} \\ \bar{S}_{\varepsilon^p} = \frac{\text{Tr } \bar{\varepsilon}^p}{3} \bar{I} = 0 &\Rightarrow \bar{\varepsilon}^p = \bar{S}_{\varepsilon^p} + \bar{D}_{\varepsilon^p} = \bar{D}_{\varepsilon^p} \\ &\Rightarrow \bar{D}_{\varepsilon^{el}} = \bar{D}_{\varepsilon} - \bar{D}_{\varepsilon^p} = \bar{D}_{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^p \\ &\boxed{\bar{\sigma} = K(\text{Tr } \bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2\mu(\bar{D}_{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^p)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.3.2 Déformation plastique équivalente

Comme dans le cas uniaxial (c.f. section 5.1), on utilise pour la déformation plastique, le formalisme des déformations vraies parce que la déformation peut prendre des valeurs bien plus grandes. Pour illustrer la construction de la **déformation plastique équivalente**, on se limite ici au cas d'un chargement homogène, et on traite la déformation dans le repère propre. On peut alors construire de manière simple un **tenseur de déformation vraie** diagonal de forme suivante⁵:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \log \frac{x_f}{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & \log \frac{y_f}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & \log \frac{z_f}{z_0} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

On rappelle ici les **notions de norme et signe d'un tenseur** \bar{A} (c.f. section 2.1.4):

$$|\bar{A}| \equiv \sqrt{\sum_{ij} A_{ij}^2} = \sqrt{\text{Tr } \bar{A}^2} \quad \text{signe}(\bar{A}) \equiv \frac{\bar{A}}{|\bar{A}|} \quad (5.28)$$

et on rappelle que la norme est un invariant (bien adaptée à exprimer l'intensité d'un tenseur à trace nulle, tel le déviateur) et que le tenseur signe a les mêmes directions propres que le tenseur d'origine.

La notion de **déformation plastique équivalente** pour un cycle de chargement arbitraire (eq. 5.9) peut être étendue à la formulation tensorielle de la manière suivante:

$$\boxed{\varepsilon_{eq}^p \equiv \int \sqrt{\frac{2}{3}} |d\bar{\varepsilon}^p|} \quad (5.29)$$

Le préfacteur numérique $\sqrt{2/3}$ dans la définition est choisi de telle sorte que le résultat soit **équivalent** à l'équation 5.9 pour une **déformation plastique uniaxiale** d'amplitude $d\varepsilon_{11}^p$. En vertu de l'incompressibilité plastique on peut de fait écrire:

$$\text{Tr } d\bar{\varepsilon}^p = 0 \quad d\bar{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} d\varepsilon_{11}^p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}d\varepsilon_{11}^p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}d\varepsilon_{11}^p \end{pmatrix}$$

$$|d\bar{\varepsilon}^p| = d\varepsilon_{11}^p \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} d\varepsilon_{11}^p$$

$$\boxed{d\varepsilon_{eq}^p} \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} |d\bar{\varepsilon}^p| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} d\varepsilon_{11}^p = \boxed{d\varepsilon_{11}^p}$$

⁵La définition générale du tenseur de déformation vraie sort du cadre de ce cours, voir par exemple Lemaitre et al. 2009 [6]

5.3.3 Condition de plastification

Le critère de plastification doit être indépendant du repère choisi, et son expression doit donc être uniquement fonction d'invariants du tenseur de contrainte (voir section 2.1.3). En outre, dans le cas des matériaux isotropes et incompressibles le critère ne peut dépendre que de la partie en cisaillement de la contrainte.

Critère de Tresca

Pour des raisons historiques on présentera d'abord le critère de Tresca, développé en 1864, qui exprime la **valeur maximale** τ_m **du cisaillement** que peut prendre le tenseur $\bar{\sigma}$ en termes des valeurs propres $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ qui sont eux mêmes des invariants de la contrainte:

$$\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k \quad (5.30)$$

L'expression de la contrainte de cisaillement maximale peut être facilement interprétée comme le rayon du plus grand cercle de Mohr, comme décrit en figure 2.9. Le seuil de plasticité en cisaillement k du matériau peut être relié au seuil de plasticité σ_y défini pour un test uniaxial en appliquant le critère de Tresca à une contrainte uniaxiale σ_{11} :

$$\sigma_1 = \sigma_{11} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \tau_m = \frac{\sigma_{11}}{2} \quad k = \frac{\sigma_y}{2}$$

Critère de Von Mises et Contrainte équivalente

Le critère de Von Mises, développé en 1913, exprime la **partie en cisaillement du tenseur de contrainte** comme la **norme du déviateur**, c'est à dire de l'invariant I_2^* défini en section 2.1.3. Pour rendre le critère tensoriel **équivalent à la définition pour le test uniaxial**, Von Mises définit une **contrainte équivalente** sous la forme:

$$\sigma_{eq} \equiv \sqrt{\frac{3}{2} |\bar{D}_\sigma|} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\bar{D}_\sigma^2)} \quad (5.31)$$

Encore une fois, le préfacteur numérique $\sqrt{3/2}$ dans la définition est choisi de telle sorte que le résultat soit **équivalent** à la contrainte mesurée dans un test uniaxial σ_{11} :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{S}_\sigma + \bar{D}_\sigma$$

$$\sigma_m = \frac{\text{Tr} \bar{\sigma}}{3} = \frac{\sigma_{11}}{3} \quad \bar{S}_\sigma = \sigma_m \bar{I} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{11}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{11}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}_\sigma = \bar{\sigma} - \bar{S}_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_{11}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_{11}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_{11}}{3} \end{pmatrix} \quad |\bar{D}_\sigma| = \sqrt{\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) \sigma_{11}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{11}$$

$$\sigma_{eq} \equiv \sqrt{\frac{3}{2} |\bar{D}_\sigma|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{11} = \sigma_{11}$$

La **condition de première plastification** peut donc être étendue à des situations de contrainte multiaxiale par le critère de Von Mises⁶:

$$\boxed{\sigma_{eq} = \sigma_y} \quad (5.32)$$

En outre, en combinant les notions de contrainte équivalente et déformation plastique équivalente, on peut étendre la **condition de plastification pour les matériaux écrouissants** (eq. 5.10) à des **cycles arbitraires de chargements triaxiaux**:

$$\boxed{\sigma_{eq} = Y(\varepsilon_{eq}^p)} \quad (5.33)$$

où $Y(\varepsilon_{eq}^p)$ est la même **fonction d'écrouissage obtenue par un test uniaxial monotone**⁷.

5.3.4 Codirectionalité - Loi d'écoulement normale

Pour compléter la loi de comportement plastique tensorielle, il faut rajouter l'information de la **'direction' de l'écoulement plastique qui doit être la même que la 'direction' du cisaillement**, c'est à dire du déviateur de la contrainte:

$$\boxed{d\bar{\varepsilon}^p \propto \bar{D}_\sigma}$$

ce qui peut être exprimé de façon plus formelle en utilisant la fonction de signe (eq. 2.21):

$$\boxed{\overline{\text{signe}}(d\bar{\varepsilon}^p) = \overline{\text{signe}}(\bar{D}_\sigma)} \quad (5.34)$$

ou encore:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{|d\bar{\varepsilon}^p|} = \frac{\bar{D}_\sigma}{|\bar{D}_\sigma|}$$

En se rappelant que:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} |\bar{D}_\sigma| \quad d\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} |d\bar{\varepsilon}^p|$$

on peut enfin exprimer la **loi d'écoulement normale**:

$$\boxed{d\bar{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{D}_\sigma}{\sigma_{eq}} d\varepsilon_{eq}^p} \quad (5.35)$$

⁶La contrainte équivalente peut être exprimée en fonction des valeurs propres par la relation suivante:

$$\sigma_{eq} = \left[\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \right]^{1/2}$$

On remarque que, contrairement au critère de Tresca, le critère de Von Mises fait intervenir aussi la valeur propre intermédiaire σ_2 .

L'expression en termes des coefficients σ_{ij} du tenseur de contrainte dans un repère donné est:

$$\sigma_{eq} = \left[\frac{1}{2} ((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2) + 3(\sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right]^{1/2}$$

⁷Bien que la fonction d'écrouissage est indépendante du cycle de déformation suivi, le point de rupture R en est en général dépendant.

5.3.5 Sommaire des lois du comportement plastique

	1D	3D
Loi élastique	$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$	$\bar{\sigma} = K(\text{Tr } \bar{\varepsilon})\bar{I} + 2\mu(\bar{D}_\varepsilon - \bar{\varepsilon}^p)$
Déformation plastique équiv.	$\varepsilon_{eq}^p = \int d\varepsilon^p $	$\varepsilon_{eq}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \int d\bar{\varepsilon}^p $
Condition de plastification	$ \sigma = Y(\varepsilon_{eq}^p)$	$\sigma_{eq} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \left \bar{D}_\sigma \right = Y(\varepsilon_{eq}^p)$
Codirectionalité	$\text{signe}(d\varepsilon^p) = \text{signe}(\sigma)$	$\overline{\text{signe}}(d\bar{\varepsilon}^p) = \overline{\text{signe}}(\bar{D}_\sigma)$ $d\bar{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{D}_\sigma}{\sigma_{eq}} d\varepsilon_{eq}^p$
Énergie stockée	$\mathcal{U}^{el} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_{el} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$	$\mathcal{U}^{el} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}^{el} \right)$
Énergie dissipée	$\mathcal{U}_{diss}^p = \int_0^{\varepsilon_{eq}^p} Y(\varepsilon_{eq}^p) d\varepsilon_{eq}^p$	$\mathcal{U}_{diss}^p = \int_0^{\varepsilon_{eq}^p} Y(\varepsilon_{eq}^p) d\varepsilon_{eq}^p$

5.4 Mécanismes microscopiques de plasticité dans les matériaux (Slides Séminaire)

Chapter 6

Rupture

La **rupture**, ou **fracture**, d'un matériau est essentiellement le phénomène de **création de nouvelles surfaces** à l'intérieur d'un objet aux dépens de son énergie mécanique (énergie élastique, travail des forces extérieures, énergie cinétique). Il s'agit d'un mode de ruine généralement opposé à la déformation plastique et qui se termine par la séparation de l'objet en deux ou plusieurs parties (dans ce dernier cas on parlera de **fragmentation**). La présence d'une **fissure** dans un objet chargé s'accompagne d'une forte **concentration de contrainte** dans la région proche de la pointe, responsable de la propagation ultérieure de la fissure.

On parlera de rupture **fragile** (céramiques) ou **ductile** (métaux) suivant que les déformations plastiques permanentes subies pendant la ruine sont négligeables ou bien dominantes. On commencera par introduire l'**initiation** de fissures dans des objets intègres, en discutant la notion de **résistance à la rupture**. On présentera ensuite la mécanique de la **propagation** des fissures, en insistant sur la **théorie de la rupture linéaire élastique** qui s'applique efficacement aux matériaux rigides et fragiles. Pour terminer, on discutera les différentes **extensions** de la théorie de la rupture linéaire élastique utiles pour traiter des situations plus générales, avec un accent particulier sur les cas où la **dissipation d'énergie** joue un rôle prépondérant (voir slides séminaire).

6.1 La résistance à la rupture (et ses limites)

6.1.1 Définitions et concepts

La **résistance mécanique** σ_M (*EN: strength*) d'un matériau est la valeur maximale de contrainte qu'il peut supporter avant la **ruine** (c'est à dire la perte de sa capacité de supporter de la charge). On se réfère généralement à la contrainte nominale mesurée pendant un test de traction uniaxiale, sauf si c'est spécifié par ailleurs (par exemple, contrainte vraie dans un test de traction uniaxiale, ou contrainte de cisaillement, ou contrainte de compression). En fonction du matériau et des conditions de chargement, la résistance mécanique sera limitée par des modes de ruine différents, tels que la rupture ou la striction plastique; on parlera alors plus spécifiquement de **résistance à la rupture** σ_R ou de **résistance ultime à la tension uniaxiale** σ_U (c.f. section 5.1).

Dans le cas où le matériau casse dans son domaine élastique, c'est à dire avant de plastifier, on parle de **rupture fragile**. Dans ce cas les deux (ou plusieurs) fragments qui restent peuvent être recomposés pour retrouver la forme de l'objet original (aucune déformation résiduelle). Dans le cas où il plastifie significativement avant de casser on parle de **rupture ductile**, les fragments restent déformés d'une façon permanente et ne s'emboîtent plus correctement.

Dans le cas des matériaux fragiles la rupture arrive brusquement en régime linéaire (c.f. figure 6.1(a)) et conduit généralement à la séparation rapide (instable) et complète du corps en deux ou

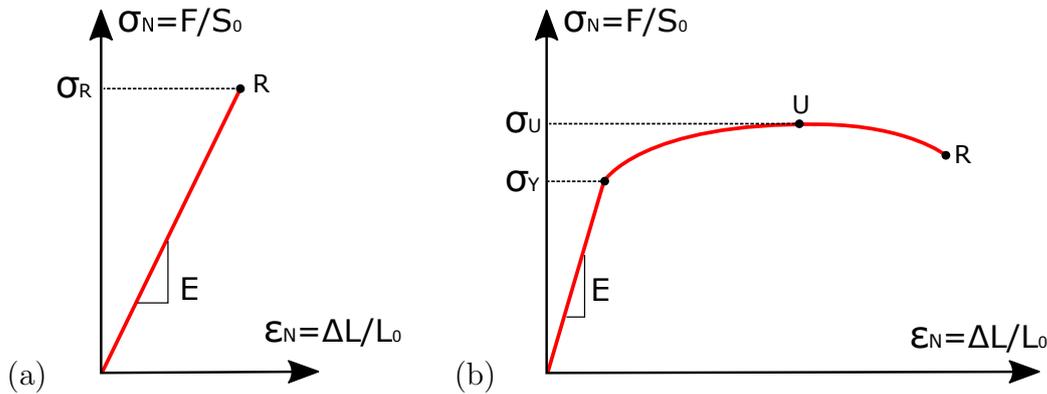


Figure 6.1: Courbes de charge pour la rupture fragile (a) et ductile (b) pendant l'étirement uniaxial d'une barre.

plusieurs parties. Dans le cas des matériaux ductiles on distingue quatre phases de déformation avant rupture, comme illustré dans la figure 6.1(b): après une phase de déformation élastique, la première plastification advient à la contrainte σ_y , la déformation plastique augmente d'une façon homogène jusqu'à la valeur maximale σ_U qui correspond à l'apparition d'une striction plastique, la rupture arrive après une déformation ultérieure conduisant au point R qui présente une contrainte nominale inférieure à σ_U (bien que la contrainte vraie soit supérieure à sa valeur au point de striction). Les valeurs de σ_U et σ_y sont généralement proches, donc en ordre de grandeur on peut les confondre, mais il convient de bien distinguer les deux concepts pour bien comprendre la suite des événements qui mènent à la rupture ductile.

On va maintenant se focaliser sur la **nature tensorielle** de la contrainte dans les **critères de résistance mécanique**. Si on se limite à la rupture fragile ou à la première plastification, ces critères sont généralement atteints pour des petites déformations et l'utilisation de contraintes nominales est valable. Le critère de rupture (initiation d'une fissure instable) est satisfait lorsque la plus grande des composantes de traction, c'est à dire la plus grande des valeurs propres (cf. cercle de Mohr en figure 2.9), atteint le seuil de résistance à la rupture σ_R :

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \geq \sigma_R \quad \text{avec} \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

alors que la première plastification arrive lorsque la plus grande des composantes de cisaillement du tenseur de contrainte dépasse le seuil de résistance au cisaillement plastique k . Par exemple le critère de Tresca (section 5.3.3) exprime le cisaillement maximal τ_{max} comme¹:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq k = \frac{\sigma_y}{2}$$

Comme l'intensité relative de tension maximale et de cisaillement maximal change avec la **triaxialité du chargement**, on peut comprendre que si on sort de la condition de test en traction uniaxiale le comportement fragile ou ductile d'un matériau peut être altéré. Par exemple, le rajout d'une forte compression isotrope (comme pour les roches profondes dans le manteau terrestre) tend à réduire voir éliminer tout état de tension, prévenant ainsi la possibilité d'une rupture. Le comportement à forte pression sera donc plutôt ductile et les roches du manteau, tout en étant fragiles en conditions de surface, couleront plastiquement dans le manteau sur des temps d'ordre géologique.

L'approche de la **Résistance Des Matériaux (RDM)** traitée en première année (MSM1) est de faire une modélisation élastique linéaire du champ de contrainte et de déformation d'un

¹On rappelle que par convention le seuil de plastification σ_y est associé à la première plastification en traction uniaxiale, c'est à dire pour un chargement avec $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. En considérant encore la représentation du cercle de Mohr en figure 2.9 on peut facilement obtenir la relation $\sigma_y = 2k$.

objet soumis à une charge. On peut ainsi estimer la charge maximale que l'objet peut supporter avant d'atteindre dans l'un des ses points intérieurs la critère de rupture (traction maximale $\geq \sigma_R$) ou de première plastification (cisaillement maximal $\geq \sigma_y$). Ceci parce que dans la plupart des applications structurales on reste en dehors du domaine de plasticité, qui implique une modification de forme de l'objet et sa fragilisation progressive. Les grandeurs σ_R et σ_y sont traitées comme des constantes, c'est à dire des propriétés bien définies du matériau, qu'on peut identifier à partir de la loi de comportement, selon la description de la mécanique des milieux continus, et en valeurs nominales en vue des petites déformations en jeu.

Un outil expérimental très répandu pour l'analyse en RDM est l'**étude photoélastique** d'une structure prototype intègre. L'étude des isochromes permet d'identifier le point où se présente le cisaillement maximal et qui sera le lieu de la première plastification. L'étude des isostatiques permet d'identifier les axes propres de la contrainte. En combinant les deux informations on peut ainsi identifier la région de traction maximale qui sera le lieu d'initiation d'une possible fissure (qui sera dirigée perpendiculairement à cette direction)².

NB: la RDM étudie les conditions d'initiation d'une rupture, mais pas la propagation de fissures, qui est l'objet d'une théorie mécanique à part qui sera présentée dans la suite du chapitre. Mais on va d'abord analyser de manière plus critique la notion de résistance à la rupture et son origine microscopique.

6.1.2 Résistance théorique à traction et cisaillement

On peut déduire une estimation théorique de la résistance mécanique à partir de l'intensité des **forces d'interaction moléculaires qui assurent la cohésion d'un solide**. On considère d'abord l'interaction entre **deux atomes isolés**, dont la forme typique de énergie $U(r)$ et force d'interaction $F(r)$ en fonction de la distance r entre atomes est représentée en figure 6.2.

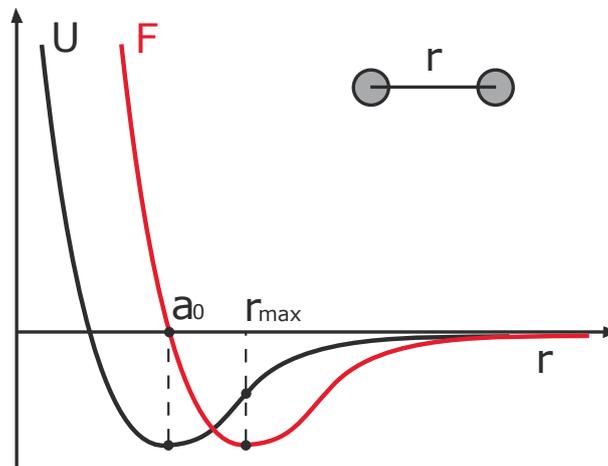


Figure 6.2: Énergie et force d'interaction entre deux atomes isolés.

Le minimum d'énergie représente la distance d'équilibre a_0 entre les deux atomes en l'absence de forces extérieures dans ce qu'on appelle le contact moléculaire, typique de la matière con-

²A titre d'exemple, si on considère une poutre horizontale encastrée à l'extrémité gauche contre une paroi rigide et soumise à l'extrémité droite à un chargement ponctuel dirigé vers le bas, tel qu'une masse accrochée (cf. figure 3.1), l'analyse élastique du système en flexion nous montre que le moment fléchissant est maximal au point d'encastrement à gauche, ce qui correspond à un état de contrainte localement uniaxial selon la direction horizontale et qui passe d'une compression maximale en bas à une traction maximale en haut. La contrainte maximale de traction est donc acquise à l'extrémité haute de la section d'encastrement et c'est dans cette région qu'on verra l'initiation d'une fissure verticale quand la charge dépassera une valeur seuil qu'on peut calculer facilement.

densée (solides et liquides). En calculant la dérivée de l'énergie d'interaction par rapport à la distance r on obtient la force d'interaction $F(r) = -dU/dr$. Au point d'équilibre la pente de $U(r)$ est horizontale et la force est nulle. Si les atomes s'approchent, ils subissent une force repulsive (liée à la résistance à la compénétration entre les deux nuages électroniques, et qui empêche de fait la matière de s'effondrer). A contrario, lorsque les atomes s'éloignent de leur position d'équilibre, ils subissent une force attractive (responsable de la cohésion) qui passe par une valeur maximale F_0 (associée au point d'inflexion de $U(r)$ en r_{max}) pour ensuite tendre rapidement vers zéro. La pente de $F(r)$ au point d'équilibre s'interprète comme une constante élastique de la force de rappel entre les deux atomes par rapport à des faibles écarts à la distance d'équilibre. L'ordre de grandeur de la force maximale F_0 est le nN, la distance d'équilibre a_0 est de l'ordre de l'Å (10^{-10} m) et la portée typique de l'interaction varie entre l'Å et la dizaines de nm en fonction du type d'interaction.

On considère ensuite le cas d'un solide rigide modèle à microstructure cristalline comme en figure 6.3 (mais l'argument peut être facilement généralisé à tout solide à élasticité enthalpique).

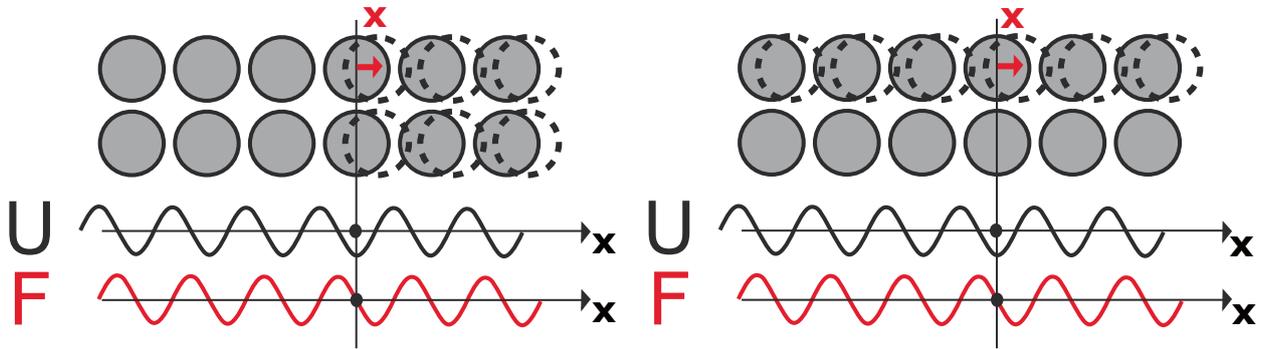


Figure 6.3: Énergie et force associées au déplacement x d'une rangée d'atomes dans un solide selon un chargement de traction (gauche) ou de cisaillement (droite).

Dans la situation d'équilibre tous les atomes sont séparés par la distance a_0 . On peut donc représenter l'énergie d'interaction $U(x)$ pour chaque atome comme une sinusoïde dont les minima sont régulièrement espacés d'une distance a_0 . Si on imagine de séparer le crystal selon une section verticale (figure 6.3 gauche), et qu'on déplace l'ensemble d'atomes se trouvant à droite de la séparation d'une distance horizontale x vers la droite, la force de rappel $F(x)$ agissant sur chaque atome peut être obtenue en dérivant l'énergie d'interaction. Celle-ci a la forme d'une sinusoïde décalée, qui a des points de force nulle aux positions d'équilibre des atomes, et une force de rappel donnée par la pente (négative) de l'énergie $U(x)$ à ces endroits. On peut ensuite estimer la contrainte moyenne $\sigma(x)$ agissant entre les deux plans atomiques en divisant la force $F(x)$ agissant sur chaque atome par la surface a_0^2 occupée dans la maille cristalline:

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{a_0}\right)$$

La valeur maximale σ_0 de la contrainte supportable par l'interface constitue donc la **valeur théorique de la résistance à la rupture** σ_R^{th} . En outre, dans la limite de petits déplacements x par rapport à la distance d'équilibre a_0 , on peut estimer le module élastique E en dérivant la contrainte par rapport à la déformation $\varepsilon = x/a_0$ correspondante:

$$\sigma(x) = \sigma_R^{th} \sin(2\pi\varepsilon) \simeq \sigma_R^{th} 2\pi\varepsilon = E\varepsilon \quad \varepsilon \ll 1$$

On obtient ainsi une relation théorique entre la résistance à la rupture et le module d'Young:

$$\boxed{\sigma_R^{th} = \frac{E}{2\pi} \sim \frac{E}{10}} \quad (6.1)$$

qui prédit des valeurs très élevées pour la résistance théorique, seulement un ordre de grandeur inférieures au module d'Young, indiquant que la déformation à rupture devrait atteindre 10%.

Le même argument peut s'appliquer à la **résistance théorique au cisaillement plastique** (figure 6.3 droite). Si on imagine le cisaillement de deux plans atomiques en bloc (sans dislocations) l'énergie peut s'exprimer comme une sinusoïde en fonction du déplacement x entre les deux plans atomiques par rapport à une configuration d'équilibre. Ici c'est plus facile de comprendre cette représentation parce que les plans peuvent glisser indéfiniment en passant d'un minimum à l'autre sans casser la solide. La contrainte de cisaillement τ peut donc s'exprimer en fonction de la déformation en cisaillement $\gamma = x/a_0$:

$$\tau(x) = \tau_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{a_0}\right) = \tau_0 \sin(2\pi\gamma) \simeq \tau_0 2\pi\gamma = \mu\gamma \quad \gamma \ll 1$$

On peut identifier la contrainte de cisaillement maximale τ_0 comme la valeur théorique de la limite d'élasticité en cisaillement avant l'apparition d'une première déformation plastique, c'est à dire τ_y^{th} (NB: nous avons vu dans le chapitre 5 que $\tau_y^{th} = k = \sigma_y^{th}/2$), et obtenir une relation avec le module élastique en cisaillement μ :

$$\boxed{\tau_y^{th} = \frac{\mu}{2\pi} \simeq \frac{\mu}{10}} \quad (6.2)$$

On remarque que la différence principale entre les deux types d'arguments est que lors du dépassement de la résistance théorique à la plastification les plans glissent d'un pas a_0 , mais le solide reste substantiellement intègre et avec les mêmes propriétés qu'avant, avec certes une petite déformation permanente. Alors qu'au dépassement de la résistance théorique à la rupture les deux plans qui s'éloignent d'un pas atomique de réseau a_0 perdent progressivement leur force de cohésion, et l'objet se retrouve cassé en deux parties qui n'interagissent plus (au delà d'une distance équivalente à la portée limitée des interactions en jeu, souvent d'ordre moléculaire).

Nous avons donc relié les deux modules élastiques E et μ , ainsi que les deux valeurs de résistance mécanique à la rupture σ_R^{th} et à la plastification σ_y^{th} à l'intensité des interactions moléculaires d'un solide cristallin, ce qui leur donne un fondement théorique en tant que propriétés du matériau. Si on injecte les paramètres atomiques $F_{max} \sim 1$ nN et $a_0 \sim 1\text{\AA}$ (pour une liaison covalente $C-C$), on estime une résistance à la rupture de l'ordre: $\sigma_R \sim F_{max}/a_0^2 \sim 100$ GPa, ainsi qu'un module d'Young dix fois supérieur $E \sim 1$ TPa, ce qui est une bonne estimation pour le plus rigide des solides cristallins, c'est à dire le diamant!

6.1.3 Quand les défauts font toute la différence

Nous allons à présent confronter la validité des notions de résistance mécanique et la prévision théorique de ses valeurs à l'épreuve de la réalité expérimentale. Cette confrontation se révèle assez décevante à cause des quatre constatations empiriques suivantes:

I. Une faiblesse inattendue

En consultant des tables de propriétés (mesurées) des matériaux, par exemple en figure 6.4, on trouve que la résistance à la rupture est en général 10 à 100 fois plus petite que la résistance théorique à la rupture, c'est à dire plutôt entre $E/100$ et $E/1000$, et on constate le même chose pour la résistance à la plastification qui vaut plutôt entre $\mu/100$ et $\mu/1000$. Ce qui signifie que les déformations élastiques maximales supportables élastiquement avant rupture ou avant plastification pour la plupart des solides sont de l'ordre de $1/100$, avec l'exception notable des élastomères qui peuvent s'étirer considérablement. Ceci justifie d'ailleurs l'utilisation de l'élasticité linéaire dans la RDM.

De même que les deux modules élastiques E et μ sont du même ODG dans les matériaux enthalpiques, on trouve que les valeurs mesurées de σ_R et σ_y sont aussi souvent du même ODG. La nature fragile ou ductile de la rupture dépend donc de manière critique des conditions de mesure (température, taux de déformation, triaxialité de la contrainte).

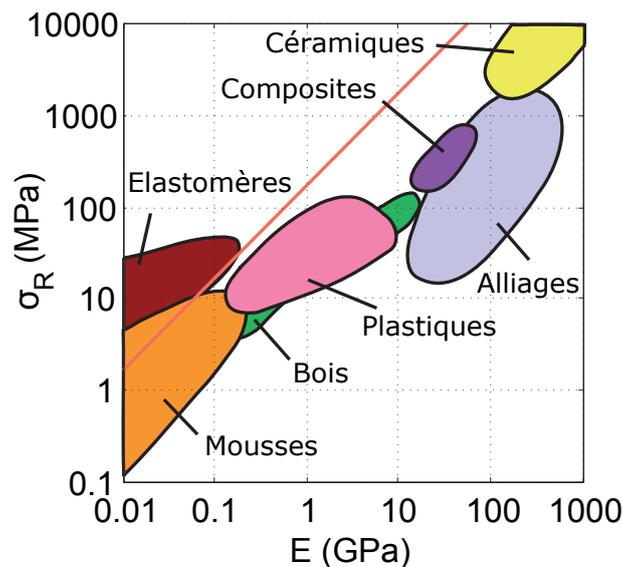


Figure 6.4: Corrélation entre résistance à la rupture σ_R et module élastique E des diverses classes de matériaux. Le trait diagonal en rouge représente la prévision théorique $\sigma_R \sim E/2\pi$. Depuis Ashby.

II. Jamais la même rupture...

On constate qu'il existe une différence remarquable entre plasticité et rupture: alors que les mesures de résistance à la plastification sont très reproductibles, les mesures de résistance à la rupture présentent des variabilités très fortes, comme l'illustre la figure 6.5. Cela implique d'ailleurs d'estimer la résistance à la rupture moyenne $\langle \sigma_R \rangle$ à l'aide d'un très grand nombre de mesures. La résistance à la rupture se révèle donc une observable très mal définie expérimentalement, et donc un mauvais candidat pour représenter une propriété fondamentale du matériau.

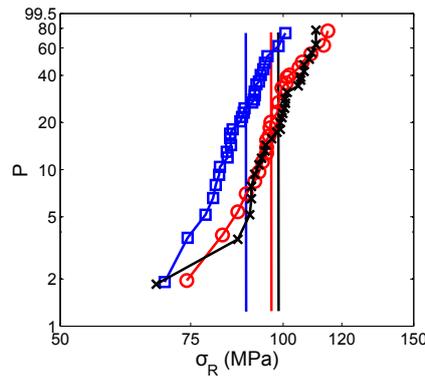


Figure 6.5: Estimation de la contrainte à la rupture moyenne $\langle \sigma_R \rangle$ pour trois matériaux différents. Pour chaque matériau on représente la distribution cumulative d'un grand nombre des mesures de la résistance à la rupture σ_R (nombre de mesures présentant une contrainte de rupture supérieure à σ_R divisé par le nombre total de mesures).

III. Quand le plus grand est le plus faible

La résistance à la rupture d'un matériau fragile diminue avec la taille de l'échantillon de test, ce qui est surprenant pour une propriété intrinsèque du matériau, liée à la loi de comportement. On remarque que les modules élastiques, et donc la prévision de résistance théorique, ne varient pas avec la taille. De son côté la résistance à la plastification reste plutôt stable avec la taille.

IV. Et puis un jour... crack!

La résistance à la rupture diminue dans le temps sous application d'une contrainte σ^* statique ou cyclique, inférieure à la résistance à la rupture σ_R qu'on aurait suite à un chargement monotone et rapide. Ce phénomène prend le nom de fatigue (statique ou dynamique suivant que le chargement est statique ou cyclique).

Le phénomène de **fatigue statique** est surtout typique des matériaux fragiles. On charge un échantillon à une contrainte sous-critique $\sigma^* < \sigma_R$, c'est à dire une contrainte insuffisante pour provoquer une rupture instantanée. Tout en gardant ce chargement statique σ^* , on constate que le matériau casse brutalement après un temps d'attente t_f . Si on reproduit un grand nombre de fois l'expérience avec des chargements σ^* différents on constate que t_f tend vers 0 quand σ^* tend vers σ_R . A l'inverse, t_f augmente très fortement quand σ^* s'écarte de σ_R . Un exemple typique est illustré en figure 6.6(a). Sur la même figure on constate aussi que la résistance à la rupture diminue significativement lorsque la surface de l'échantillon de test est abrasée. Ce phénomène est aussi appelé **rupture retardée**, et peut être interprété comme l'effet d'une réduction progressive dans le temps de la résistance à la rupture $\sigma_R(t)$ sous l'effet d'une forte contrainte statique σ^* . Alors que dans un test de chargement rapide jusqu'à rupture, la rupture arrive quand la contrainte appliquée atteint la résistance à la rupture $\sigma_R = \sigma^*(t = 0)$, dans le test de fatigue statique la contrainte appliquée σ^* est constante, la résistance à la rupture diminue dans le temps (d'autant plus rapidement que σ^* est grand) et la rupture arrive quand la résistance à la rupture atteint en diminuant la valeur de la contrainte appliquée, c'est à dire au temps t_f tel que $\sigma_R(t_f) = \sigma^*$.

Le phénomène de **fatigue dynamique** est surtout typique des matériaux ductiles, qui ne présentent pas de fatigue statique en général. On soumet l'échantillon à un chargement cyclique d'amplitude maximale σ^* , toujours inférieur à la résistance à la rupture au chargement monotone rapide $\sigma_R(0)$, et on mesure le nombre de cycles N que la structure peut supporter

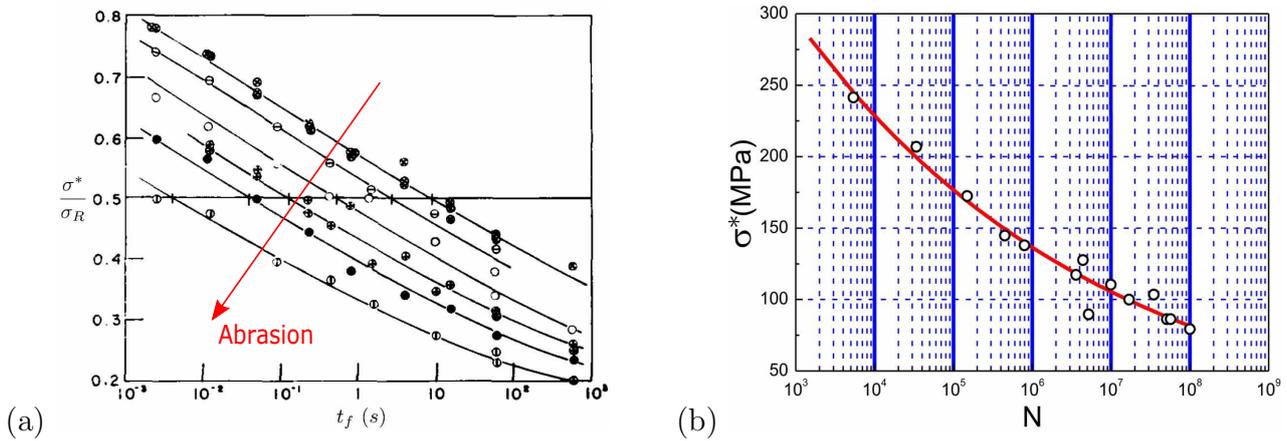


Figure 6.6: (a) Courbes de fatigue statique sur un verre à vitre: mesure de la durée de vie t_f avant rupture en fonction de la contrainte de traction appliquée σ^* . La durée de vie diminue avec l'intensité de la charge, mais aussi en fonction du degré d'abrasion des surfaces (depuis Mould and Southwick, 1959 [8]). (b) Courbe de fatigue dynamique (dite 'Courbe S-N' ou 'Courbe de Wohler') pour un aluminium de type 6061-T6: mesure du nombre de cycles N avant rupture en fonction de l'amplitude σ^* de la contrainte maximale appliquée dans les cycles (depuis Yahr 1997 [9]).

avant rupture. Un exemple typique est illustré en figure 6.6(b) et le comportement observé est qualitativement similaire à la fatigue statique si on considère la diminution de la résistance à la rupture en fonction du nombre de cycles (plutôt que du temps) et de l'écart entre σ^* et σ_R .

Quand on dimensionne une pièce pour une fonction structurale, il faut donc tenir compte de la durée de vie envisagée pour la pièce et s'assurer que la résistance à la rupture restera toujours en dessus de la contrainte de fonctionnement envisagée. L'opportunité de caractériser la rupture retardée par l'une ou l'autre méthode, dépend de la fonction que l'objet devra fournir pendant sa durée de vie envisagée. C'est ainsi qu'une roue de train subit en roulant un chargement cyclique et doit pouvoir supporter plusieurs millions de cycles sans rupture (on peut estimer 1 million de cycles pour un voyage Paris-Marseille), alors que le clou qui soutient un tableau doit supporter une charge statique pendant plusieurs années.

Le fait que la contrainte fatigue le matériau, c'est à dire qu'elle diminue sa résistance à la rupture dans le temps, n'est pas simplement explicable à partir du modèle de résistance théorique, parce que la nature des interactions moléculaires qui assurent la cohésion et donc le module élastique, n'évolue pas avec le temps.

Interprétation

L'ensemble de ces quatre évidences expérimentales est en désaccord avec le modèle théorique pour la résistance à la rupture et à la plastification présenté en section 6.1.2. Dans le cas de la rupture, la forte variabilité, la dépendance d'échelle et la forte sensibilité à la finition de surface affaiblissent la notion même de résistance à la rupture comme propriété d'un matériau. Tous ces aspects empiriques peuvent être rationalisés sur la base de la constatation que **les défauts d'un matériau affectent profondément sa résistance mécanique**.

Dans le cas de la **déformation plastique** des métaux, qui ont une structure polycristalline, nous avons déjà vu au chapitre 5 (séminaire matériaux) que la faiblesse du seuil de plastification (caractère très ductile) peut s'expliquer par la présence de **défauts d'empilement atomique**, dits **dislocations**. Comme le mouvement d'une dislocation fait intervenir le réarrangement d'un nombre limité d'atomes autour du front de dislocation, son coût énergétique est bien inférieur à celui qui est nécessaire pour faire glisser un plan complet d'atomes simultanément.

Par conséquent la propagation de dislocations peut survenir pour des contraintes très inférieures à celles issues de la prévision τ_y^{th} faite pour le mouvement simultané du plan. Comme la déformation plastique macroscopique résulte du mouvement concomitant d'un grand nombre de dislocations qui s'activent pour des niveaux de contraintes faibles, mais similaires, on comprend que la résistance à la plastification soit plus faible qu'attendue, mais assez reproductible à cause de l'effet statistique moyen d'un grand nombre de défauts. Le seuil de plastification σ_y est donc peu sensible au défaut individuel, mais plutôt à la **densité volumique de dislocations**, ainsi qu'à leur **degré de mobilité**. La déformation plastique génère des dislocations ainsi que leur mouvement, elle altère la population de ces dislocations, leur organisation et leur mobilité. Par conséquent elle peut altérer le seuil de déformation plastique. Ce phénomène est à l'origine de l'**écrouissage**, ainsi que de la **fragilisation** sous forte déformation où sous fatigue cyclique prolongée. La sensibilité à la densité volumique des dislocations explique aussi la très faible dépendance de σ_y de la taille de l'objet³.

Dans le cas de la **rupture des matériaux fragiles** le point limitant est plutôt relié à la présence de défauts en forme de **petites fissures**, souvent de taille submicrométrique et donc non visibles à l'oeil nu (c.f. figure 6.7). Ceux ci agissent comme concentrateurs de contraintes redoutables, **chacun pouvant conduire à la rupture instable** de la pièce pour des charge-ments bien inférieurs à la contrainte théorique qui serait supportable par un matériau sans défauts. La grosse différence par rapport à la plasticité, est que la propagation instable d'un seul défaut peut conduire à la rupture complète de la pièce. Malgré qu'un matériau contient généralement une grande distribution de taille de ce type de défauts, **la résistance à la rupture sera déterminée par un seul défaut**, le plus critique, c'est à dire le plus long (c.f. section 6.1.4).

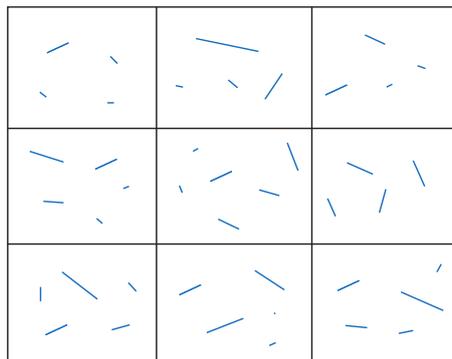


Figure 6.7: Distribution aléatoire de microfissures dans un matériau fragile. Si on divise par la pensée cette portion du matériau en sous-systèmes de plus petite taille, la plus longue microfissure dans chaque élément sera très différente, et sera statistiquement plus courte que si on considère l'objet entier.

Les défauts critiques sont responsables de la forte dispersion des mesures de résistance à la rupture. Alors que la distribution statistique de la moyenne de la taille d'une population de défauts est très stable et suit une distribution Gaussienne, la distribution de probabilité de la plus grande taille d'un défaut appartenant à la même population est très variable et doit être traitée par une **distribution de Weibull**. Ce qui justifie la nécessité d'un très grand nombre de mesures pour permettre la comparaison quantitative de résistance à la rupture entre deux matériaux (c.f. figure 6.5). Si on augmente la taille de l'échantillon (à partir du même lot de matière), on augmente la probabilité d'avoir un défaut de plus grande taille, et on comprend

³Des observations récentes ont montré néanmoins que le caractère très ductile des métaux peut se réduire quand la taille des objets approche l'échelle nanométrique, en conséquence de la forte réduction du nombre de dislocations possibles dans un si petit système.

ainsi la diminution de résistance à la rupture avec la **taille de l'objet** (c.f. figure 6.7). De la même façon, la forte sensibilité à la **finition des surfaces** s'explique par la génération de défauts critiques de plus grande taille suite à l'abrasion. En dernier lieu, la diminution de la résistance à la rupture avec le temps passé sous contrainte (c'est à dire la fatigue) s'explique par le fait que la contrainte induit une lente **croissance sous-critique des microfissures**, et donc une augmentation de taille progressive du plus grand défaut responsable de la résistance à la rupture. Dans les cas des verres, roches et céramiques, la croissance sous-critique est causée par le phénomène dit de **corrosion sous contrainte**. La forte concentration de contrainte en pointe de fissure y accélère la corrosion.

On comprend donc que la résistance théorique à la rupture $\sigma_R^{th} \simeq E/2\pi$ représente uniquement une limite supérieure de la résistance à la rupture qu'on aurait sur un matériau idéal parfait.

6.1.4 Concentration de contraintes par une cavité elliptique

Coefficient de concentration de contraintes de Inglis

Bien qu'une fissure soit un objet géométriquement irrégulier, l'archétype du microdéfaut responsable de la rupture d'un matériau fragile sous traction uniaxiale est une cavité elliptique aplatie. C'est ainsi que les premiers pas dans la compréhension du rôle des défauts arrivent en 1913 avec les travaux de l'ingénieur civil britannique Charles Edward Inglis, qui a réussi à résoudre analytiquement le difficile problème du calcul de la distribution de contraintes (tensorielle) autour d'une cavité elliptique dans un milieu homogène élastique linéaire de taille infinie soumis à un chargement asymptotique uniaxial homogène σ_∞ en direction perpendiculaire au demi-axe principal comme représenté dans la partie gauche de la figure 6.8. L'article original de Inglis [3] contient aussi la solution pour un angle arbitraire α entre le demi-axe principal du microcrack et la direction du chargement uniaxial asymptotique, ainsi que pour le cas du chargement biaxial, qui peut être dérivé par superposition élastique.

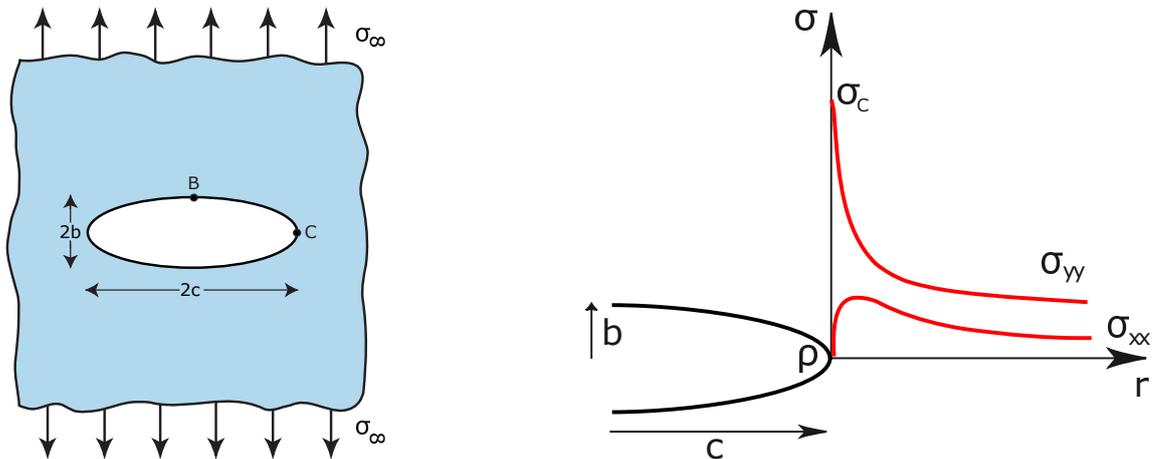


Figure 6.8: Gauche: cavité elliptique de demi-axes c et b (avec $c \leq b$) dans un milieu élastique infini soumis à une traction uniaxiale verticale σ_∞ . La petite cavité elliptique est agrandie pour un meilleur confort visuel, et représente la forme initiale avant l'application de la contrainte (bien que en élasticité linéaire le changement de forme reste négligeable). S'agissant d'un calcul 2D, la cavité doit être imaginée comme traversant l'épaisseur de l'échantillon. Droite: distribution de contrainte dans une section horizontale alignée avec l'axe principal de la cavité en fonction de la distance r à l'apex de la cavité.

La solution complète est très longue à dériver, et même trop complexe à écrire. Mais ce qui nous intéresse est l'effet d'amplification de contrainte induit en proximité de la pointe du

demi-axe principal. Dans la partie droite de la figure 6.8 on présente le profil de variation des deux composantes principales de la contrainte sur une section de l'échantillon qui prolonge le demi-axe principal. En s'éloignant de la cavité on retrouve l'état de chargement homogène macroscopique ($\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} = \sigma_\infty$) au delà d'une distance de l'ordre de la taille de la cavité en accord avec le principe de Saint Venant. En s'approchant de la pointe du demi-axe principal en C la traction maximale augmente significativement et atteint une valeur maximale σ_C (NB: $\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} = \sigma_C$) qu'on peut exprimer analytiquement comme:

$$\boxed{\sigma_C = \sigma_\infty \left(1 + 2\frac{c}{b}\right)} \quad (6.3)$$

On remarque que à l'apex B du demi-axe secondaire, on trouve un état de compression uniaxiale d'intensité égale à la traction asymptotique (NB: $\sigma_{xx} = \sigma_B, \sigma_{yy} = 0$):

$$\boxed{\sigma_B = -\sigma_\infty} \quad (6.4)$$

On remarque qu'en accord avec le principe de Saint Venant la perturbation induite par la cavité reste locale, c'est à dire qu'elle affecte une région de taille d'ordre c autour du défaut, qui dans notre cas d'intérêt est d'ordre micrométrique. La contrainte restera donc partout uniaxiale et de valeur très proche de σ_∞ , alors qu'en proximité des points C et B elle changera progressivement pour arriver aux valeurs décrites par les équations (6.3) et (6.4). La rigidité globale d'un échantillon contenant une petite cavité elliptique restera donc essentiellement inaltérée, et l'argument d'échantillon infini peut s'appliquer sur des échantillons avec taille transversale typique $w \gg 2c$. On remarque qu'au point C la contrainte reste une traction uniaxiale dans la même direction que le chargement extérieur σ_∞ , mais de valeur accrue d'un facteur k :

$$\boxed{k = \frac{\sigma_C}{\sigma_\infty}} = 1 + 2\frac{c}{b} \simeq 2\frac{c}{b} \gg 1 \quad \text{si } c \gg b \quad (6.5)$$

qu'on appelle **coefficient de concentration des contraintes** (indiqué par un k minuscule⁴), et qui pour des cavités effilées telles que les fissures, est proportionnel au rapport d'aspect c/b , qui peut devenir très grand⁵. Si on suppose que l'objet casse lorsque la contrainte maximale au point C atteint la résistance théorique σ_R^{th} , alors la rupture a lieu pour une contrainte macroscopique:

$$\sigma_R = \frac{\sigma_R^{th}}{k} \quad (6.6)$$

qui peut être bien inférieure à σ_R^{th} si on considère une fissure très effilée.

On remarque que pour un rapport d'aspect c/b constant, la résistance à la rupture ainsi prédite ne dépend pas de la taille globale c du défaut. Ceci est sans doute vrai pour une vraie cavité elliptique, c'est à dire qu'on aurait obtenu par enlèvement de matière dans la configuration au repos. Si on veut appliquer plus sérieusement ce résultat à la description d'une fissure dans un matériau très fragile, il faut plutôt considérer une fissure très fine, sans enlèvement de matière, ce qui revient à considérer un rayon de courbure à la pointe d'une

⁴A ne pas confondre avec le 'facteur d'intensité des contraintes', indiqué par un K majuscule, qu'on définira plus loin.

⁵Alors que le terme 1 ne peut pas être négligé dans le cas d'une cavité circulaire, qui présente un coefficient de concentration $k = 3$.

fissure limité intrinsèquement par la distance intermoléculaire a_0 . Il convient donc d'exprimer le résultat d'Inglis en termes du rayon de courbure ρ à l'apex du demi-axe principal⁶:

$$k = \frac{\sigma_C}{\sigma_\infty} = 1 + 2\frac{c}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{c}{\rho}} \simeq 2\sqrt{\frac{c}{\rho}} \quad \rho = \frac{b^2}{c} \ll c \quad (6.7)$$

On voit que la concentration de contrainte k augmente proportionnellement à la racine de la longueur de fissure c , et à l'inverse de la racine du rayon de courbure à la pointe ρ . Comme le rayon de courbure à la pointe est limité par la maille atomique $a_0 \sim 1\text{\AA}$, on comprend bien que la résistance à la rupture diminue avec la racine de la longueur c du défaut le plus grand:

$$\sigma_R = \frac{\sigma_R^{th}}{k} \sim \frac{\sigma_R^{th} \sqrt{\rho}}{\sqrt{c}} \quad (6.8)$$

Pour des microfissures de taille typique $c \sim 1 \mu\text{m}$ le rapport c/ρ vaut 10^4 et on a donc un coefficient de concentration des contraintes $k \sim 100!$ On comprend donc que la résistance à la rupture mesurée pour les matériaux fragiles soit inférieure d'un facteur 100 par rapport à l'estimation théorique $\sigma_R^{th} = E/2\pi$, comme discuté en section 6.1.3.

Le cas anecdotique de la résistance à la rupture du verre

On remarque que cet argument fait dépendre la résistance à la rupture d'un matériau fragile d'une propriété extrinsèque comme la présence d'une microfissure de taille $2c$. Mais si on considère qu'un matériau est systématiquement le résultat d'un procédé de mise en forme (par l'homme ou par la nature), la population de défauts qu'il possède doit être intégrée dans les propriétés intrinsèques du matériau. L'homogénéisation des propriétés pour passer à la description de la MMC doit donc être faite à une échelle plus grande, telle que tout élément de volume de base contienne une population de défauts similaire.

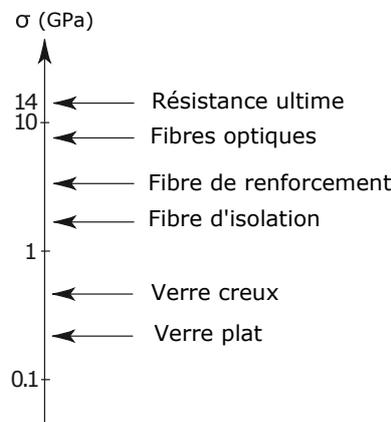


Figure 6.9: La résistance à rupture du verre (en échelle logarithmique) pour différents produits augmente significativement en fonction de la qualité du procédé de mise en forme ainsi que de la protection des surfaces.

Le verre est un excellent exemple pour rationaliser cette vision. La résistance à la rupture du verre se trouve dépendre très fortement de la qualité d'usinage. Moins de défaut il y

⁶Les formules $\rho_C = \frac{b^2}{c}$ et $\rho_B = \frac{c^2}{b}$ pour les rayons de courbure aux deux apex d'une ellipse sont des formules exactes de la géométrie, mais on peut les obtenir rapidement en loi d'échelle par:

$$\frac{1}{\rho_C} = \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \sim \frac{c}{b^2} \quad \frac{1}{\rho_B} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sim \frac{b}{c^2}$$

a, plus la résistance augmente. La figure 6.9 illustre la résistance à la rupture de différents produits en verre qui diffèrent substantiellement dans leur procédé de mise en forme ainsi que dans leurs conditions d'utilisation. On remarque que la résistance (moyenne) du verre dans ces produits varie sur plus d'un ODG (d'où l'échelle log de représentation) et qu'elle peut s'approcher significativement de la résistance théorique, qui à partir du module élastique $E \sim 70$ GPa est estimée à $\sigma_R^{th} \sim 14$ GPa. C'est ainsi que le verre plat, utilisé couramment pour les vitrages, et qui après flottement sur un bain d'étain fondu est refroidi en glissant sur des rouleaux métalliques, présente une résistance typique de 200 MPa⁷. Le verre creux, utilisé pour les bouteilles, et qui est obtenu par soufflage, a une résistance typique de 400 MPa, double de celle du verre plat parce qu'il n'y a pas de contact avec des solides pendant le refroidissement, mais encore faible pour les contacts subis ensuite entre les bouteilles froides. Le verre en fibre présente des valeurs de résistance à la rupture supérieures à 2 GPa. Ceci parce que dans l'étirement à chaud jusqu'à des diamètres typiques de 100 μm la plupart des défauts micrométriques sont gommés par l'écoulement. La différence entre gammes de fibres pour différentes applications dépend du degré de protection (des contacts et de l'environnement) après la mise en oeuvre et pendant le fonctionnement. Les fibres d'isolation sont simplement amassées dans un feutre dit laine de verre et restent à 2 GPa. Les fibres de renfort finissent dans des composites entourées par une matrice de résine qui les sépare, atteignant des résistances de 4 GPa. Au plus haut de la gamme, les fibres optiques sont gainées et protégées immédiatement après filage, ce qui leur permet d'atteindre une résistance typiques de 8 GPa, et de la garder dans le temps. La bataille technologique pour développer des nouveaux procédés permettant d'atteindre la résistance limite de 14 GPa est encore en cours. Si on reconsidère l'équation (6.8) on comprend que cela passe par la réduction de la taille des plus grands défauts tolérables dans le domaine de quelques distances interatomiques.

En conclusion, si on veut approcher le potentiel de résistance limite d'un matériau, on doit investir énormément dans la procédé de mise en oeuvre du matériau et on aura d'autant plus de mal que l'objet à réaliser est grand et que sa durée de fonctionnement est longue. Il faut en outre le protéger au mieux de l'environnement et travailler aux plus basses températures possibles. Incidemment, on retrouve des valeurs proches de la résistance théoriques dans les objets de taille micro et nanométriques qui peuvent présenter très peu de défauts.

La preuve de Griffith

Néanmoins cette prévision du lien entre la résistance à la rupture et la taille des microdéfauts reste qualitative. La première preuve expérimentale et quantitative fut fournie en 1920 [1] par un autre ingénieur anglais Alan Arnold Griffith (1893–1963). Pour s'affranchir de la mauvaise connaissance de la distribution de défauts dans une pièce en verre, Griffith a effectué une série de mesures de résistance après avoir introduit volontairement à la surface extérieure de la pièce des microfissures plus grandes que les autres et de longueur c bien définie. Il constata ainsi que la résistance σ_R mesurée diminuait avec la racine de la longueur c , et que le produit $\sigma_R\sqrt{c}$ conservait ainsi une valeur constante, qui peut être interprétée en accord avec l'équation (6.8):

$$\sigma_R\sqrt{c} = \sigma_R^{th}\sqrt{\rho} \quad (6.9)$$

Suite à cette importante démonstration, on dénomme **cracks de Griffith** ces défauts invisibles en forme de microfissure qui sont responsables de la rupture instable d'un matériau pour des valeurs de contrainte bien inférieures à la résistance théorique. Mais Griffith ne s'arrêta pas à cette observation. Il proposa aussi une interprétation révolutionnaire fondée sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle, qui sera traitée en section 6.2.2.

⁷Les données de fatigue statique en figure 6.6(a) montrent aussi que l'abrasion des surfaces extérieures conduit à une diminution ultérieure de la résistance à la rupture.

6.2 Théorie de la rupture élastique linéaire (LEFM)

La **mécanique de la rupture élastique linéaire (LEFM, Linear Elastic Fracture Mechanics)** constitue une puissante théorie décrivant la **propagation de fissures** dans des milieux solides élastiques. Bien que son développement est intrinsèquement lié à la description des **matériaux fragiles**, qui sont généralement **très rigides** et ne présentent que de très faibles déformations associées à la propagation d'une fissure, la théorie peut être étendue à des cas bien plus généraux qu'on discutera dans la section 6.3 (séminaire).

Dans le formalisme de la LEFM, on considère un **milieu solide linéaire élastique homogène et isotrope** (caractérisé par les modules élastiques E et ν) possédant initialement une fissure à l'intérieur, qu'on supposera droite et de longueur c . La **fissure** est considérée comme **infiniment fine**, et elle est idéalisée mathématiquement comme une surface traversant le solide et se terminant sur une ligne intérieure dite **front de fissure**. On traitera le problème dans un formalisme 2D, c'est à dire en supposant une symétrie par translation selon l'épaisseur t (constante) de l'objet considéré; on représentera donc la fissure comme une ligne se terminant par un point dit **pointe de fissure**, comme en figure 6.10.

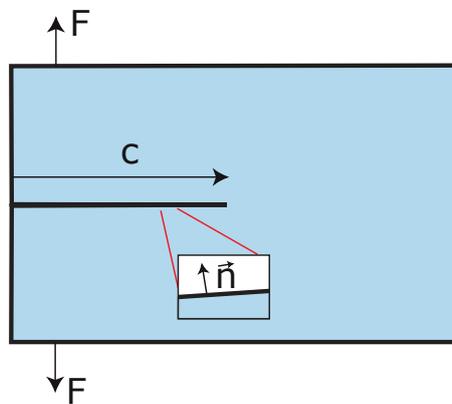


Figure 6.10: Chargement d'un corps contenant une fissure de longueur c sous l'action d'un couple de forces ouvrantes (mode I). Le zoom illustre la condition de contrainte normale nulle à chaque surface de la fissure: $\vec{\sigma}\vec{n} = \vec{0}$.

La fissure divise localement le solide en deux parties, et les deux surfaces opposées, bien que très proches, sont considérées comme des surfaces extérieures libres. Ceci se traduit par une condition aux limites de **contrainte normale nulle**, $\vec{\sigma}\vec{n} = \vec{0}$, pour le champ de contrainte à l'intérieur du solide.

L'objectif de la LEFM est de **prédire la condition de propagation de la fissure suite au chargement** de l'objet par un système de forces extérieures. L'exemple typique est donné en figure 6.10, où le chargement extérieur est représenté par un couple de forces F de sens opposé appliquées en des points bien déterminés de l'objet. La symétrie du chargement induit sur la fissure une traction en **mode ouvrant**, dit **mode I**, qui sera utilisé pour exposer la théorie, avant de la généraliser dans la section 6.3 (séminaire).

La théorie sera présentée initialement sous l'hypothèse d'une propagation de fissure **quasi-statique** (pas d'effets inertiels), **isotherme** (pas d'échauffement causé par la rupture) et **reversible** (possibilité de refermer une fissure). La théorie se développe en deux volets parallèles: les **approches en champ de contrainte** et en **bilan énergétique**, qui s'avéreront équivalents et complémentaires. Bien que l'approche énergétique soit historiquement antérieure, on commencera par la présentation de l'approche en contrainte, qui suit plus naturellement les arguments développés dans la section précédente sur la concentration de contrainte par des cavités effilées.

6.2.1 Approche en contrainte - K (Irwin)

Facteur d'intensité de contrainte

L'approche en contrainte de la LEFM concerne la description du champ de contrainte en proximité de la pointe de fissure. Ce champ est induit par l'action combinée du chargement extérieur et de la présence de la fissure même qui agit comme concentrateur de contraintes. Le résultat le plus important est établi en 1948 par le scientifique américain George Rankin Irwin (1907–1998) [4]. Il démontre de l'existence d'une région en proximité de la pointe de fissure, dite **region de dominance**, présentant une taille finie R_K à l'intérieur de laquelle le champ de contrainte d'équilibre élasto-statique présente une **singularité** avec une **forme asymptotique universelle**, qu'on peut représenter de manière synthétique en loi d'échelle en fonction de la distance r à la pointe de fissure:

$$\sigma(r) \sim \frac{K_I}{\sqrt{r}} \quad (6.10)$$

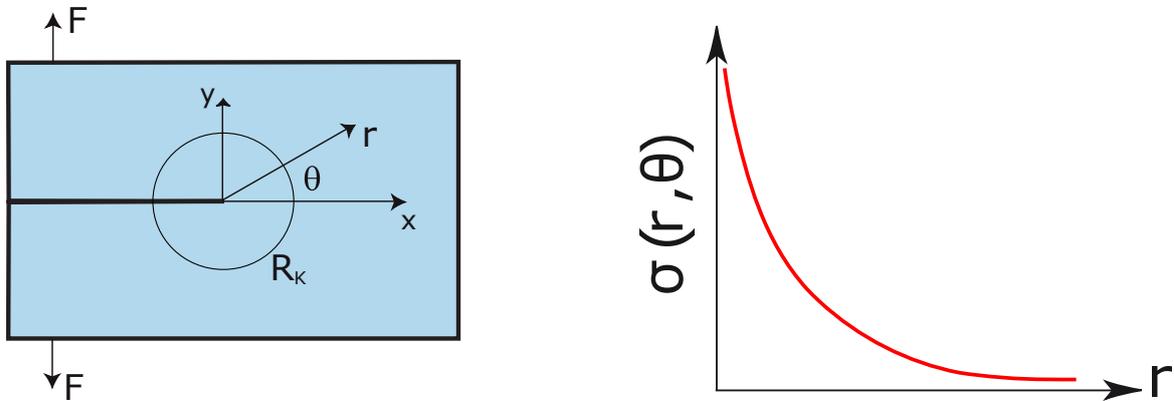


Figure 6.11: Représentation de la singularité de contrainte en pointe de fissure. Gauche: zone de dominance et repère polaire (r, θ) associé à la fissure. Droite: forme universelle $\sigma \sim K_I/\sqrt{r}$.

Plus précisément, l'expression tensorielle complète pour le champ de contrainte en fonction de la distance r à la pointe de fissure et de l'angle θ par rapport à la direction de fissure est:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{i.e.} \quad \bar{\sigma}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \bar{f}(\theta) \quad (6.11)$$

On observe que la dépendance radiale reste séparée et qu'elle est de nature scalaire. La partie tensorielle f_{ij} est uniquement fonction de l'angle θ par rapport à la direction de la fissure et elle est une fonction universelle connue (voir Lawn, 1993 [5]), mais que reste d'ordre 1 (d'où la forme simple de la version en loi d'échelle). On constate que tout est universel, sauf la valeur du coefficient K_I , qui prend le nom de **facteur d'intensité de contrainte**, et qui est le seul en lien avec le chargement extérieur (K_I sera proportionnel à F parce que dans les matériaux rigides la structure a une réponse linéaire pour une longueur de fissure c constante):

$$K_I \quad [Pa\sqrt{m}] \quad \text{Facteur d'intensité de contrainte}$$

Il s'agit d'une unité de mesure fractionnaire, difficile à interpréter, mais qui a la même dimension que la grandeur $\sigma_R\sqrt{c}$ que Griffith avait trouvé comme constante pour la propagation de défauts de taille c (c.f. section 6.1.4). Et c'est justement sur K_I qui s'appuie le **critère de propagation** des fissures selon la LEFM:

$$K_I \geq K_{Ic} \quad (6.12)$$

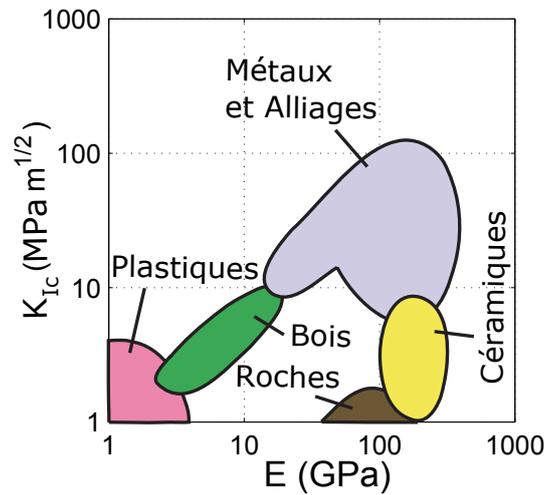


Figure 6.12: Correlation entre la ténacité K_{Ic} et le module élastique E des diverses classes de matériaux.

La valeur critique K_{Ic} prend le nom de **ténacité** (*EN: toughness*) et constitue une grandeur caractéristique du matériau (qu'il faut mesurer, il est très difficile de prédire sa valeur). La figure 6.12 illustre les valeurs typiques de la ténacité pour différentes classes de matériaux. On remarque que la ténacité augmente en général avec le module élastique E , sauf pour les matériaux très fragiles.

Si on revient à l'exemple des différentes qualités de finition de verre (section 6.1.4), bien que la résistance à la rupture σ_R varie énormément en fonction de la taille typique des microfissures de Griffith, la valeur de K_{Ic} qui fait propager la microfissure critique est la même pour tous les types de verres, et sa valeur de $0.7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ correspond à la valeur constante de $\sigma_R\sqrt{c}$ mesurée par Griffith. La ténacité est donc un bien meilleur candidat comme **propriété fondamentale du matériau** verre, et c'est le cas pour la plupart des matériaux fragiles.

On remarque que si le chargement d'un objet est défini en termes de forces, la valeur du facteur d'intensité de contraintes K_I dépend uniquement de la géométrie et du chargement (structure) et pas du module élastique. En revanche les champs de déformation et de déplacement associés dépendent du module élastique. Nous proposons de les évaluer maintenant.

Champ de déplacement et profil d'ouverture d'une fissure

Comme on se place dans le cadre d'une réponse élastique linéaire, le **champ de déformation** en proximité d'une pointe de fissure présente le même type de singularité que le champ de contrainte:

$$\varepsilon(r) \sim \frac{\sigma(r)}{E} \sim \frac{K_I}{E} \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (6.13)$$

La dépendance radiale du **champ de déplacement** peut donc être obtenue par intégration de cette forme singulière en direction radiale, ce qui en loi d'échelle donne:

$$\varepsilon \sim \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$u(r) \sim \int_0^r \varepsilon(r') dr' \sim \int_0^r \frac{K_I}{E} \frac{dr'}{\sqrt{r'}} \sim \frac{K_I}{E} \sqrt{r} \quad (6.14)$$

La forme analytique complète pour les trois composantes du champ de déplacement est [5]:

$$u_i(r, \theta) = \frac{K_I}{2E'} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} g_i(\theta) \quad (6.15)$$

ou E' est le module effectif.⁸ Encore une fois la dépendance radiale est séparée et de nature scalaire, alors que la partie vectorielle est constituée des trois fonctions universelles g_i de l'angle θ .

Le champ de déplacement sur les deux lèvres de la fissure est un cas particulier important, qu'on peut obtenir en posant $r = X$, $\theta = \pm\pi$. Dans le cas du mode ouvrant, le champ de déplacement est essentiellement constitué de la composante u_y normale à la fissure et, considérant que $g_y(\theta = \pm\pi) = \pm 8$, on a que:

$$\boxed{u_y(X) = \pm \frac{K_I}{E'} \left(\frac{8X}{\pi} \right)^{1/2}} \quad u_x(X) = u_z(X) = 0 \quad (6.16)$$

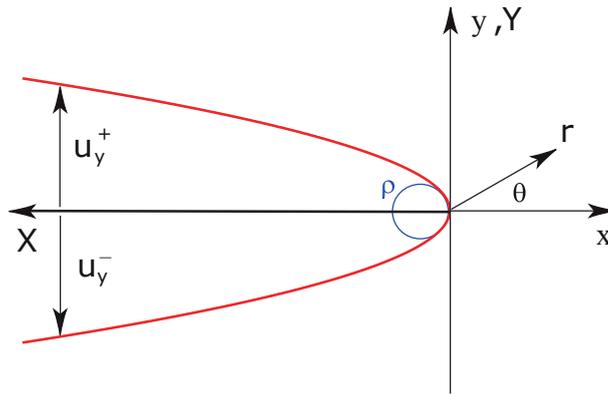


Figure 6.13: Profil d'ouverture parabolique $Y(X)$ en pointe de fissure. Le champ de déplacement $u_y(X)$ associé au chargement K_I fait passer de la configuration fermée (en noir) à la configuration ouverte (en rouge). Le cercle bleu représente le rayon de courbure minimal ρ en correspondance de la pointe de fissure.

On remarque que le champ de déplacement présente en traversant la fissure une discontinuité, qui pour le mode ouvrant est perpendiculaire à la surface de fissure et correspond au profil d'ouverture $\delta(X)$ induit par le chargement:

$$\delta(X) = u_y^+(X) - u_y^-(X) = 2 \frac{K_I}{E'} \left(\frac{8X}{\pi} \right)^{1/2} \quad (6.17)$$

Ce **profil d'ouverture parabolique** est représentatif de la forme universelle asymptotique des pointes de fissures (en domaine élastique et dans le region de dominance). Le coefficient d'ouverture de la parabole est proportionnel au facteur d'intensité de contrainte K_I . Il permet donc de mesurer K_I à l'échelle microscopique locale, sans connaître tous les détails du chargement macroscopique. NB: malgré la similitude entre l'ouverture parabolique et la forme elliptique considérée initialement par Inglis pour décrire la forme de la cavité de fissure (c.f. section 6.1.4), il ne faut pas mélanger ces deux images. Dans le cas de Inglis la forme elliptique représente la forme du crack avant l'application de la contrainte, alors que dans le cas de Irwin, le crack est infiniment fin avant l'application du chargement et devient parabolique uniquement suite au chargement.

En réponse au chargement K_I , le **rayon de courbure à la pointe de fissure** passe donc d'une valeur nulle à une valeur finie ρ , que l'on peut estimer en loi d'échelle de la façon suivante

⁸ $E' = E$ en contrainte plane (plaque fine), $E' = E/(1 - \nu^2)$ en déformation plane (plaque épaisse). Voir section 3.2.

(c.f. figure 6.13):

$$Y(X) \sim u_y \sim \frac{K_I}{E} X^{1/2} \quad X(Y) \sim \left(\frac{EY}{K_I} \right)^2 \quad \frac{1}{\rho} \sim \frac{d^2 X}{dY^2}(X=0) \sim \frac{E^2}{K_I^2}$$

$$\boxed{\rho \sim \frac{K_I^2}{E^2}} \quad (6.18)$$

En considérant les unités de mesure de K_I et E , on constate que le rayon de courbure ρ à la pointe d'une fissure (initialement fine) constitue une **échelle de longueur caractéristique associée à la LEFM**, qui combine une grandeur indiquant l'intensité du chargement (K_I) et une grandeur indiquant la réponse du matériau (E). En considérant le critère de propagation de la fissure en eq. (6.12), on peut aussi remarquer que le **rayon de courbure maximal** au point de propagation constitue une **longueur physique intrinsèque du matériau** (qui combine uniquement deux propriétés du matériau K_{Ic} et E):

$$\boxed{\rho_{max} \sim \frac{K_{Ic}^2}{E^2}} \quad (6.19)$$

On remarque qu'à des distances $r < \rho$ de la pointe, les déformations ne sont pas si petites. En comparant les équations (6.13) et (6.19), on constate qu'à une distance $r = \rho$ de la pointe, la déformation dépasse la valeur $\varepsilon = 1$ (c'est à dire 100%), qui est la valeur caractéristique d'une **transition vers les grandes déformations** pour $r < \rho$, où la déformation tend vers l'infini. On peut visualiser cette transition aussi en s'intéressant aux conséquences du passage d'une configuration au repos pour laquelle la pointe infiniment fine vers une configuration chargée avec une pointe de forme parabolique de rayon de courbure ρ . Une simple considération géométrique nous montre qu'à l'échelle de ρ le déplacement normal devient d'ordre ρ et la déformation moyenne est donc:

$$\varepsilon \sim \frac{du_y}{dx} \sim \frac{\rho}{\rho} \sim 1$$

on peut aussi constater que la forme apparemment douce de la parabole exprime directement la singularité de déformation à la pointe par sa condition de tangente infinie à l'origine. On voit ici une **apparente contradiction de la théorie LEFM**, qui prédit des déformations infinies à partir d'un formalisme d'élasticité linéaire en petite déformation. L'échelle du rayon de courbure ρ détermine donc la limite intrinsèque de validité de la solution de Irwin, c'est à dire de la théorie LEFM elle même.

Ceci dit, pour les matériaux rigides et fragiles qui sont traditionnellement l'objet d'étude de la LEFM, le rayon de courbure maximal ρ_{max} est souvent de **taille moléculaire** $\sim \text{\AA}$ (0.1 nm), ce qui constitue aussi la limite de validité de l'approche MMC (Mécanique des Milieux Continus). Dans les faits la LEFM décrit des échelles généralement plus grandes que ρ , ce qui permet à la fois de préserver la MMC et la LEFM. En revanche en ce qui concerne les matériaux mous ($E < 10$ MPa, comme élastomères et hydrogels) cette zone de grande déformation en proximité de la pointe domine et nécessite un formalisme de grandes déformations qui sort du cadre de ce cours.

On conclut cette section sur l'approche en contrainte en analysant la **compatibilité physique** de la singularité de la LEFM. Cette solution implique à la fois un champ de contrainte et de déformation qui divergent à l'origine en $1/\sqrt{r}$. Le champ de déplacement associé présente une dépendance en \sqrt{r} qui reste donc limitée et finit par s'annuler à la pointe, ce qui préserve la compatibilité des déformations du milieu. La densité volumique d'énergie élastique associée à cette solution diverge aussi à la pointe selon $\mathcal{U}_{el}(r) \sim \sigma\varepsilon \sim 1/r$, mais ça reste une singularité intégrable (en coordonnées polaires), ce qui permet à l'énergie élastique totale de rester finie en

proximité de valeur de la pointe de fissure, et en tout cas dans la région de dominance de taille R_K de la singularité de contrainte (c.f. figure 6.11, t étant l'épaisseur de l'objet en dimension transverse):

$$U_{el} = \int_V \sigma \varepsilon dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t dz \int_0^R \frac{K_I}{r^{1/2}} \frac{K_I}{E r^{1/2}} r dr \sim 2\pi t \frac{K_I^2}{E} \cdot R_K \quad (6.20)$$

6.2.2 Approche énergétique - G (Griffith)

L'énergie de surface d'un solide

La description en contrainte à l'aide du facteur d'intensité de contrainte K_I na été développée que dans les années '40. Lors du premier développement de la LEFM en 1920, Griffith a développé plutôt une approche énergétique qui se révélera être équivalente et complémentaire à la fois.

Griffith considère que la propagation d'une fissure sur une surface A entraîne la création d'une paire de nouvelles surfaces dans un solide, avec un coût énergétique $2\gamma A$, où γ représente l'**énergie de surface du solide**, tout à fait analogue au cas de liquides. C'est une notion bien plus subtile que pour les liquides, pour lesquels la surface est à l'équilibre thermodynamique, alors que dans les solides les atomes des surfaces créés lors la formation de la fissure restent généralement figés en situation hors équilibre. Mais dans les deux cas cette énergie a pour origine un déficit du nombre de liaisons que les atomes de surface peuvent former, qui induit une carence d'énergie de liaison totale⁹.

Pour pallier à la difficulté d'interpréter l'énergie de surface d'un solide, Griffith a orienté ses expériences vers la rupture du verre. Le verre peut être vu comme un liquide figé à l'état solide par la brusque augmentation de viscosité lors du refroidissement rapide à travers la transition vitreuse. L'énergie de surface du verre peut être raisonnablement estimée grâce à l'extrapolation à température ambiante de la tension de surface du verre fondu, on obtient ainsi une énergie de surface $\gamma \sim 0.5 \text{ J/m}^2$.

Le taux de restitution de l'énergie

Par analogie avec le comportement des liquides, Griffith avait imaginé la formation de nouvelles surfaces comme un phénomène thermodynamiquement réversible. Dans l'approche de Griffith, la propagation d'une fissure est interprétée comme la conversion quasi-statique et réversible d'énergie mécanique en énergie de surface. L'état d'équilibre d'un système comportant une fissure d'aire A peut être donc étudié par un principe de minimisation de l'énergie totale, égale à la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie de surface U_{surf} :

$$U_{tot} = U_p + U_{surf} = U_{el} - W + U_{surf} \quad U_{surf} = 2\gamma A$$

$$dU_{tot} = dU_{el} - dW + dU_{surf} = dU_{el} - dW + 2\gamma dA = 0$$

Étant donnée la forme particulière de l'énergie de surface, il convient d'exprimer le bilan de la minimisation en termes d'énergie par unité d'aire dA balayée par le front de fissure:

$$\frac{dU_{tot}}{dA} = \frac{dU_{el}}{dA} - \frac{dW}{dA} + 2\gamma = 0$$

Griffith propose donc d'évaluer le chargement efficace par le **taux de restitution de l'énergie** (*EN: strain energy release rate*):

$$\boxed{G = -\frac{dU_{el}}{dA} + \frac{dW}{dA} = -\frac{dU_p}{dA}} \quad (6.21)$$

⁹On remarque qu'à partir de l'interprétation du module d'Young comme énergie interne de liaison par unité de volume, l'ordre de grandeur l'énergie de surface d'un solide peut être estimé comme:

$$\gamma \sim E a_0$$

c'est à dire l'énergie enthalpique par unité de surface contenue en une monocouche d'atomes.

Pour une fissure dans une plaque d'épaisseur t et avec un front de rupture droit comme en figure 6.11, on peut écrire $dA = t \cdot dc$. L'expression du taux de restitution d'énergie peut être donc relié directement aux variations de la longueur de fissure c :

$$G = -\frac{1}{t} \frac{dU_{el}}{dc} + \frac{1}{t} \frac{dW}{dc} \quad (6.22)$$

La **condition d'équilibre** d'une fissure sera donc donnée par:

$$\boxed{G = 2\gamma} \quad (6.23)$$

On remarque que G est la quantité d'énergie mécanique fournie par l'ensemble échantillon (via son énergie élastique) plus système de chargement (via le travail) si la surface de fissure subissait un incrément dA . La conservation de l'énergie implique donc que la fissure peut propager ($dc > 0$) uniquement si:

$$\boxed{G \geq G_c = 2\gamma} \quad (6.24)$$

ce qui devient le **critère de propagation** dans l'approche énergétique. On appelle G_c l'**énergie de rupture** du matériau [J/m^2], terme qui restera valable dans le cas non réversible, malgré le symbole sera changé en Γ . On remarque aussi que dans le cadre réversible théorisé par Griffith, la fissure pourrait également reculer ($dc < 0$) si $G \leq G_c$. On parle alors de **guérison**. Si $G < G_c$ la refermeture est énergétiquement avantageuse et s'accompagne donc d'une action mécanique de travail sur les lèvres de la fissure, qui donne lieu à une augmentation de l'énergie mécanique de l'échantillon.

Stabilité de la propagation

Il est important de remarquer que le critère de propagation $G = G_c$ peut être atteint sans nécessairement conduire à la rupture de l'échantillon. Pour déterminer cela il faut considérer une analyse de stabilité, en calculant les dérivées secondes de l'énergie totale par rapport à l'aire de fissure:

$$\frac{d^2 U_{tot}}{dA^2} = \frac{d^2 U_{el}}{dA^2} - \frac{d^2 W}{dA^2} = -\frac{dG}{dA} \left\{ \begin{array}{ll} > 0 & \frac{dG}{dA} < 0 \\ < 0 & \frac{dG}{dA} > 0 \\ = 0 & \frac{dG}{dA} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Propagation stable} \\ \text{Propagation instable} \\ \text{Propagation indifférente} \end{array} \quad (6.25)$$

Ce critère peut être interprété assez simplement. Considérons le cas $\frac{dG}{dA} > 0$. Si une fluctuation entraîne $G > G_c$, la fissure avance et G augmente de conséquence, ce qui la fait avancer encore plus: c'est l'instabilité vers la rupture. Considérons maintenant le cas $\frac{dG}{dA} < 0$. Si une fluctuation entraîne $G > G_c$, la fissure avance, mais G diminue jusqu'à rejoindre à nouveau la condition d'équilibre $G = G_c$, la fissure s'arrête donc à une position d'équilibre stable pour une valeur de c légèrement accrue. Il faut donc continuer d'augmenter le chargement afin que la fissure propage ultérieurement de façon stable.

La fonction $G(A)$ est une caractéristique de la structure fissurée en question. La question de la stabilité est donc une conséquence de la nature de la structure chargée et non du matériau¹⁰.

¹⁰La validité de cette affirmation est limitée aux hypothèses de propagation réversible, pour lesquelles G_c prend une valeur unique dépendant du matériau, mais n'affectant pas la stabilité. Dans le cas d'une propagation dissipative générale (évoqué dans le séminaire d'extensions de la LEFM en section 6.3), l'énergie de rupture prendra la forme $\Gamma(v)$ dépendant de la vitesse de propagation, et la nature de cette propriété du matériau pourra affecter autrement la stabilité de la propagation.

6.2.3 Equivalence K et G

Pour démontrer l'équivalence entre les approches en contrainte et énergie, nous allons calculer le taux de restitution de l'énergie associé à la propagation d'une fissure caractérisée par un champ de contrainte de Irwin avec facteur d'intensité de contrainte K_I constant.

On dénomme $\bar{\sigma}(c, r, \theta)$ et $\bar{u}(c, r, \theta)$ les champs de contrainte et de déplacement prévus par Irwin en proximité d'une pointe de fissure centrée en c comme en figure 6.14 (c.f. eqs. 6.11 et 6.15). Bien que ces champs restent constants dans le repère de la pointe de fissure c , l'avancée de la fissure libère progressivement d'énergie élastique, que l'on va estimer grâce à un bilan entre deux étapes de propagation 1 et 2, séparées par une avancée δc de la pointe de fissure. On pourra ainsi évaluer le taux de restitution de l'énergie selon l'équation:

$$G = -\frac{\delta U_{el}}{t \cdot \delta c}$$

Comme le seul changement dans le système est l'ouverture d'une portion ultérieure δc de fissure, on utilise l'artifice suivant pour évaluer la différence d'énergie élastique entre les deux configurations. On imagine d'abord que l'on coupe artificiellement les liaisons moléculaires dans la portion δc ,¹¹ qui devient ainsi une surface extérieure. On applique sur cette même la portion de surface δc un champ de contrainte extérieur identique au champ de contrainte interne qui existait avant la découpe (c'est à dire une traction entre les lèvres avec amplitude $\sigma_{yy}(c, r, \theta)$). La fissure restera ainsi fermée dans la portion δc comme dans la configuration 1. Si maintenant on diminue linéairement ce champ extérieur jusqu'à l'annuler, le système se retrouvera dans sa deuxième configuration d'équilibre en 2 (pas de contrainte sur les lèvres).

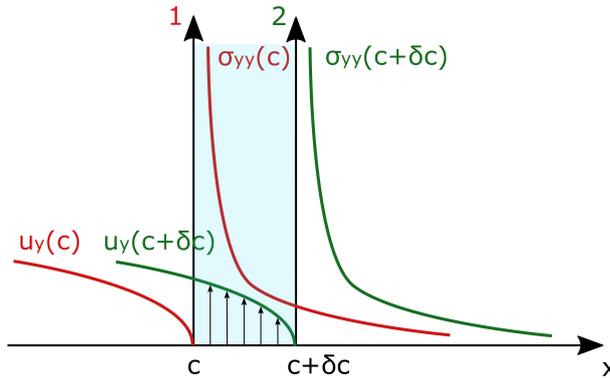


Figure 6.14: Calcul de la variation d'énergie élastique conséquence à l'avancement de la fissure d'une portion δc .

La différence d'énergie élastique entre l'état 2 et l'état 1 sera donc égale au travail effectué par les forces extérieures sur la portion δc des lèvres de fissure changé de signe: il faut donc intégrer sur la portion δc le travail fait par le champ de contrainte correspondant à l'état 1 sur le champ de déplacement correspondant à l'état 2 (voir zone bleue dans la figure 6.14). Pour chaque élément dx de l'intégrale, en vertu de la nature linéaire du chargement, le travail sera la moitié du produit entre les valeurs de contrainte et de déplacement pertinentes. Le tout doit être multiplié fois deux pour tenir compte de l'autre moitié du corps symétrique par rapport au plan de fissure:

$$\begin{aligned} \delta U_{el} &\sim -2 \int_c^{c+\delta c} \frac{1}{2} \sigma_{yy}(c, x) u_y(c + \delta c, x) \cdot t \cdot dx = \\ &= -t \int_c^{c+\delta c} \sigma_{yy}(c, r = x - c, \theta = 0) u_y(c + \delta c, r = c + \delta c - x, \theta = +\pi) dx = \end{aligned}$$

¹¹Ce qui d'ailleurs aurait le coût énergétique $2\gamma \cdot t \cdot \delta c$

$$\begin{aligned}
&= -t \int_c^{c+\delta c} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-c)}} \cdot \frac{K_I}{E'} \sqrt{\frac{8(c+\delta c-x)}{\pi}} dx = -t \cdot \frac{K_I^2}{E'} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta c} \sqrt{\frac{\delta c-z}{z}} dz = \\
&\quad - \left(t \cdot \frac{K_I^2}{E'} \frac{2}{\pi} \right) \mathcal{I} = - \left(t \cdot \frac{K_I^2}{E'} \frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{\pi}{2} \cdot \delta c \right) = - \frac{K_I^2}{E'} \cdot t \cdot \delta c
\end{aligned}$$

Où l'intégrale \mathcal{I} était calculée par les quatres changements de variable suivants:

$$z = x - c \quad u = \frac{\delta c}{z} - 1 \quad t = \sqrt{u} \quad t = \tan \phi$$

$$\mathcal{I} = \int_0^{\delta c} \sqrt{\frac{\delta c-z}{z}} dz = -\delta c \int_{\infty}^0 \frac{\sqrt{u}}{(u+1)^2} du = 2\delta c \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt = 2\delta c \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi = \delta c \frac{\pi}{2}$$

$$G = -\frac{\delta U_{el}}{t \cdot \delta c} = \frac{K_I^2}{E'}$$

On en retient la relation d'équivalence entre le taux de restitution de l'énergie G et le facteur d'intensité des contraintes K_I en mode I (ouvrant):

$$\boxed{G = \frac{K_I^2}{E'} \quad K_I = \sqrt{E'G}} \quad (6.26)$$

Cette relation montre que la relation entre K_I et G est bijection monotone. Il s'en suit naturellement que **les deux critères de propagation sont aussi équivalents**, ainsi que les grandeurs de **ténacité** et **énergie de rupture**:

$$\boxed{G \geq G_c = \frac{K_{Ic}^2}{E'} \quad K_I \geq K_{Ic} = \sqrt{E'G_c}} \quad (6.27)$$

Il en est de même pour les critères de stabilité (puisque $K_I \geq 0$ pour une fissure en mode ouvrant):

$$\frac{dG}{dA} = 2K_I \frac{dK_I}{dA} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dK_I}{dA} \geq 0 \quad \text{Propagation instable}$$

Il est important de retenir que K_I et G sont des variables liées à la structure de l'échantillon (géométrie + chargement) alors que G_c et K_{Ic} sont des constantes caractéristiques du matériau.

Grace à la relation d'équivalence, on peut réexprimer les longueurs physiques reliées au rayon de courbure du profil d'ouverture en termes de G et G_c :

$$\boxed{\rho = \frac{K_I^2}{E'^2} = \frac{G}{E'} \leq \rho_{max} = \frac{K_{Ic}^2}{E'^2} = \frac{G_c}{E'}} \quad (6.28)$$

6.2.4 Le crack de Griffith - Prototypé d'instabilité

Ce qu'on appelle un **crack de Griffith** est une petite fissure de longueur $2c$ se trouvant dans un milieu élastique linéaire infini soumis à une contrainte uniaxiale asymptotique σ_∞ et pouvant potentiellement causer la rupture de toute la structure.¹² On va ici étudier la condition de propagation et de stabilité de ce défaut modèle utilisant d'abord l'approche énergétique et ensuite l'approche en contrainte.

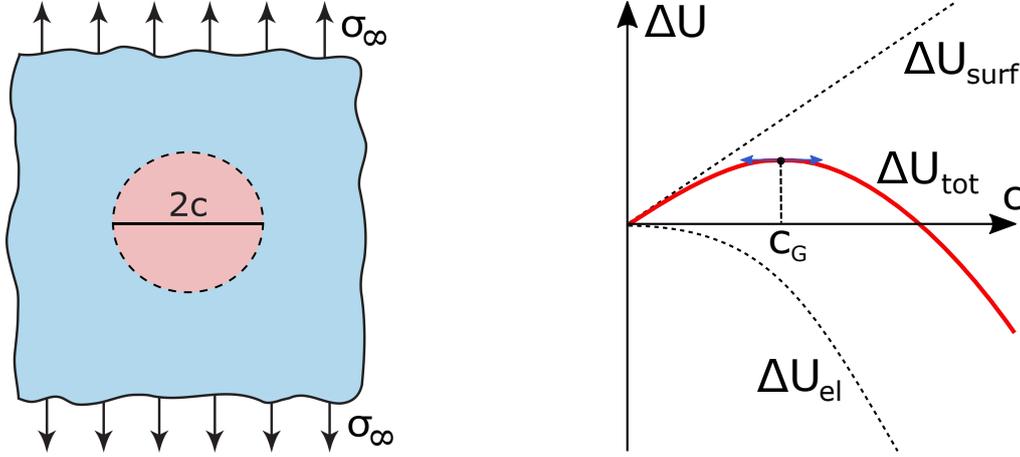


Figure 6.15: Gauche: le microdéfaut imaginé par Griffith est une fissure de longueur $2c$, traversante l'épaisseur t de l'échantillon et disposée perpendiculairement à la contrainte uniaxiale σ_∞ . Droite: représentation du bilan énergétique de la position d'équilibre instable.

Pour calculer le taux de restitution de l'énergie il nous faut estimer les variations d'énergie élastique ainsi que le travail des forces extérieures si on augmentait de taille de la fissure.

En l'absence de la fissure, les champs de contrainte et de déformation sont uniformes:

$$\sigma = \sigma_\infty = E\varepsilon_\infty \quad \varepsilon = \varepsilon_\infty = \frac{\sigma_\infty}{E} \quad \mathcal{U}_{el} \sim \sigma \cdot \varepsilon \sim \frac{\sigma_\infty^2}{E} \sim E\varepsilon_\infty^2$$

La présence de la fissure a pour effet de rendre nulle la contrainte et la déformation sur les lèvres de fissure et de relaxer ainsi localement l'énergie élastique¹³. Suivant le principe de Saint Venant, on peut considérer que cela affecte une zone circulaire (cylindrique) de diamètre $2c$ autour de la fissure. La première conséquence est que l'effet de la présence de la fissure reste très local, et que les déplacements à une grande distance de la fissure sont nuls. En particulier les déplacements aux points d'application du champ de contrainte extérieur sont nuls. Dans ces conditions le travail des forces extérieures est également nul. La deuxième conséquence est que la diminution d'énergie élastique dépend de la longueur de fissure au carré:

$$W = 0 \quad \Delta U_{el} \sim -\mathcal{U}_{el}V \sim -\frac{\sigma_\infty^2}{E} \cdot t \cdot \pi c^2 = -\frac{\pi t c^2 \sigma_\infty^2}{E} = -\pi t c^2 E \varepsilon_\infty^2$$

Bien que le raisonnement soit effectué en loi d'échelle, on remarque qu'on tombe sur le résultat exact à condition d'utiliser le module effectif E' pour décrire un état 2D de déformation plane ou de contrainte plane. Il s'agit d'une astuce pédagogique pour retrouver le résultat exact facilement.

Comme l'aire de fissure vaut $\Delta A = 2tc$, le taux de restitution de l'énergie vaut:

$$\boxed{G} = -\frac{\partial U_{el}}{\partial A} + \frac{\partial W}{\partial A} = -\frac{1}{2t} \frac{\partial \Delta U_{el}}{\partial c} = \boxed{\frac{\pi \sigma_\infty^2 c}{E'}} \quad (6.29)$$

¹²On peut le voir comme la version très fine de la cavité elliptique de Inglis avec $b \rightarrow 0$.

¹³Plus précisément c'est la contrainte normale qui s'annule $\bar{\sigma}\bar{n} = 0$, mais dans le cas spécifique, l'orientation de la fissure perpendiculairement à la direction de traction revient à annuler la totalité de la contrainte.

Le critère d'équilibre de Griffith nous donne que:

$$G = \frac{\pi\sigma_\infty^2 c}{E'} = G_c = 2\gamma \quad \boxed{c_G = \frac{2\gamma E'}{\sigma_\infty^2}} \quad \boxed{\sigma_\infty^R = \sqrt{\frac{2\gamma E'}{\pi c}}} \quad (6.30)$$

Le critère de stabilité nous donne que:

$$\frac{dG}{dA} = \frac{1}{2t} \frac{dG}{dc} = \frac{\pi\sigma_\infty^2}{E'} > 0$$

Donc en présence d'une traction asymptotique, la propagation est toujours instable, ce qui explique comment de si petits défauts peuvent causer la rupture de l'entière structure. L'équation 6.30 nous dit que pour une valeur fixée de σ_∞ , la taille maximale tolérable pour une microfissure est c_G et prend le nom de **longueur de Griffith**. Si au contraire on connaît la taille $2c$ du plus grand défaut, l'équation 6.30 nous donne la valeur maximale tolérable du chargement σ_∞^R avant rupture.

Pour mieux comprendre la nature instable de la propagation de ces petits défauts il convient représenter graphiquement en figure 6.15 les différents termes du bilan énergétique:

$$U_{tot} = U_{el} - W + U_{surf}$$

$$\Delta U_{el} = -\frac{\pi t c^2 \sigma_\infty^2}{E} \quad W = 0 \quad \Delta U_{surf} = 2\gamma \Delta A = 4\gamma t c$$

on peut bien voir que le coût d'énergie de surface (linéaire en c) est dominant pour des petites fissures, alors que la libération d'énergie élastique (qui varie en c^2) domine forcément pour des grandes fissures. La longueur de Griffith peut être aussi estimée en loi d'échelle par l'équivalence:

$$|\Delta U_{el}| \sim |\Delta U_{surf}| \quad \frac{\sigma_\infty^2}{E} t \pi c^2 \sim 4\gamma t c \quad \sigma_\infty^2 c \sim \gamma E \quad c_G \sim \frac{\gamma E}{\sigma_\infty^2}$$

En exploitant la relation d'équivalence 6.26 on peut aussi exprimer le facteur d'intensité de contrainte associé au crack de Griffith:

$$\boxed{K_I} = \sqrt{G E'} = \boxed{\sigma_\infty \sqrt{\pi c}} \quad (6.31)$$

Le critère de propagation s'exprime alors:

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi c} \geq K_{Ic} = \sqrt{2\gamma E'}$$

La longueur de Griffith prend la forme:

$$\boxed{c_G} = \frac{2\gamma E'}{\pi \sigma_\infty^2} = \boxed{\frac{1}{\pi} \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_\infty^2}} \quad K_{Ic} = \sigma_\infty \sqrt{\pi c_G} \quad (6.32)$$

On obtient ici la confirmation que la grandeur constante $\sigma_R \sqrt{c}$ constatée par Griffith (c.f. section 6.1.4) dans sa série de mesures de résistance à la rupture d'échantillons en verre avec défauts modèles était bien la ténacité du verre.

L'estimation en loi d'échelle reste valable pour tout type de petite fissure dans un solide, conduisant à la même longueur physique de Griffith. En conséquence le facteur d'intensité de contrainte s'exprimera en forme:

$$K_I = \psi \sigma_\infty \sqrt{c}$$

où le préfacteur ψ peut être obtenu par des études exactes. Le préfacteur vaut $\psi = \sqrt{\pi}$ pour le crack de Griffith (*EN: slit like crack*), il vaut $\psi = 1.122\sqrt{\pi}$ pour une fissure de longueur c sur un bord d'échantillon (*EN: edge crack*), il vaut $\psi = 2/\sqrt{\pi}$ pour une fissure circulaire (*EN: penny shape crack*) dans un plan perpendiculaire à la contrainte.

6.2.5 Clivage d'Obreimof - Prototype de stabilité

On considère le décollement d'une couche élastique d'épaisseur h fin, largeur b et longueur L et de modules élastiques E, ν , collée sur un substrat rigide avec une énergie de rupture interfaciale G_c . On insère un coin (rabot) qui impose un déplacement vertical δ à un point de la couche. On veut calculer la longueur c_{eq} qui se décolle (sous l'hypothèse $h \ll c_{eq} \ll L$) et discuter la stabilité de la propagation.

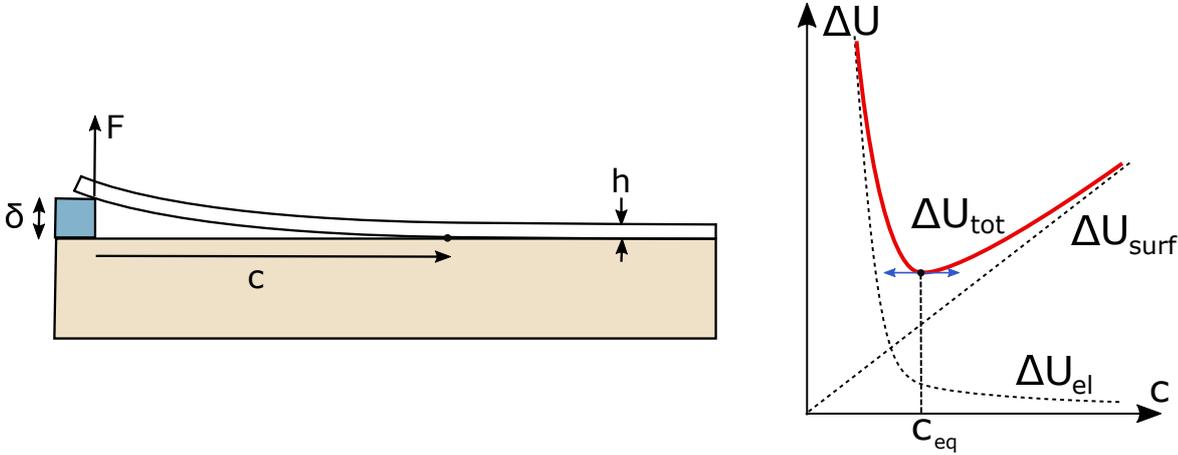


Figure 6.16: Gauche: Clivage d'une couche élastique fine collée sur un substrat rigide. Droite: représentation du bilan énergétique de la position d'équilibre stable c_{eq} .

En vertu de l'hypothèse $h \ll c_{eq}$, nous pouvons traiter la couche (élançée) comme une poutre en flexion. En supposant une longueur de décollement (fissure) c , et en approchant le profil de flexion de la poutre par un arc de cercle de rayon R , on peut calculer l'énergie élastique de la partie décollée en fonction du déplacement imposé δ :

$$U_{el} \sim Ebh^3 \left(\frac{\delta}{c^2} \right)^2 c \sim \frac{Ebh^3}{c^3} \delta^2 \quad \frac{1}{R} \sim \frac{d^2 y}{dx^2} \sim \frac{\delta}{c^2}$$

Par ailleurs le travail des forces extérieur est nul parce que le point d'application de la force ne bouge pas:

$$W = 0$$

Le taux de restitution de l'énergie vaut donc:

$$\boxed{G} = -\frac{dU_{el}}{b \cdot dc} \sim \boxed{\frac{Eh^3 \delta^2}{c^4}}$$

Par le critère de Griffith on peut donc déterminer la longueur de fissure d'équilibre¹⁴:

$$G = G_c \quad \boxed{c_{eq} = \left(\frac{Eh^3 \delta^2}{G_c} \right)^{1/4}}$$

¹⁴La longueur d'équilibre peut aussi être exprimée comme:

$$c_{eq} = \sqrt{\delta} \left(\frac{Eh^3}{G_c} \right)^{1/4} = \sqrt{\delta L_{EAF}} \quad L_{EAF} = \sqrt{\frac{Eh^3}{G_c}}$$

où la longueur physique L_{EAF} représente la compétition entre adhésion et flexion, rencontrée souvent dans le tutorats et dans le TP sur la formation des cloques.

Et le critère de stabilité nous donne que:

$$\frac{dG}{dA} = \frac{1}{b} \frac{dG}{dc} = -\frac{Eh^3\delta^2}{c^5} < 0$$

Donc dans cette configuration le propagation de fissure est toujours stable et la fissure va s'arrêter à la longueur c_{eq} . Dans l'hypothèse où la réversibilité de la propagation s'applique, la stabilité implique que si on décolle un peu plus que c_{eq} , le film va se recoller jusqu'à revenir à c_{eq} .

Pour mieux comprendre la nature stable de la propagation de ces petits défauts il convient représenter graphiquement en figure 6.16 (à droite) les différents termes du bilan énergétique:

$$U_{tot} = U_{el} - W + U_{surf}$$

$$\Delta U_{el} \sim \frac{Ebh^3}{c^3} \delta^2 \quad \Delta U_{surf} = G_c bc$$

A la différence du crack de Griffith, l'énergie élastique est positive et diverge (en $1/c^3$) pour des courtes fissures. De son côté le coût d'énergie de surface reste linéaire en c et devient donc dominant pour des longues fissures. La position d'équilibre c_{eq} est donc systématiquement un minimum de l'énergie total, et correspond donc à une position stable pour la longueur de fissure. Si on avance le rabot d'une distance X , une nouvelle portion du film se décollera pour rétablir une longueur de fissure c_{eq} .

6.2.6 Situation générale d'un échantillon de test fissuré dans une machine de traction

Un échantillon de test est une structure chargée avec un seul paramètre: la force appliquée F ou sa variable conjuguée le déplacement u du point d'application de la force! Contrairement aux tests pour déterminer une loi de comportement du matériau, le champ de contrainte est loin d'être uniforme dans l'échantillon, notamment en conséquence de la présence d'une fissure.

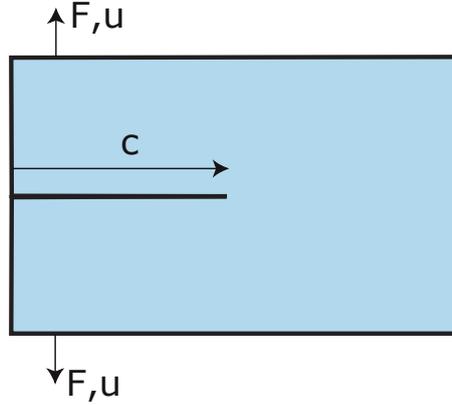


Figure 6.17: Situation schématique d'un échantillon de test fissuré, monté sur une machine de charge par le biais de deux points d'application de la force.

Pour un matériau fragile, tant que la fissure ne propage pas ($G < G_c$) la structure aura une réponse élastique avec une rigidité $k(c)$ qui est fonction décroissante de la longueur de fissure c . Pour les calculs qui suivent il convient d'exprimer plutôt la complaisance $J(c) = 1/k(c)$ qui est une fonction croissante de la longueur de fissure c :

$$F = k(c) \cdot u \quad u = J(c) \cdot F \quad k(c) = 1/J(c)$$

$$c \uparrow \quad k(c) \downarrow \quad J(c) \uparrow$$

L'énergie élastique peut être ainsi exprimée en termes des paramètres de chargement comme:

$$U_{el} = \int_0^u F \cdot du' = \frac{1}{2} F \cdot u = \frac{1}{2} J \cdot F^2 = \frac{1}{2} \frac{u^2}{J}$$

Situation 1. Pour un **chargement à force F imposée**:

$$dU_{el} = \frac{1}{2} F^2 dJ \quad dW = F du = F^2 dJ \quad dU_p = dU_{el} - dW = -\frac{1}{2} F^2 dJ$$

Le taux de restitution de l'énergie à force imposée G_F vaut donc:

$$\boxed{G_F(c)} = - \left. \frac{\partial U_p}{\partial A} \right|_F = - \frac{1}{t} \left. \frac{\partial U_p}{\partial c} \right|_F = \left[\frac{1}{2t} F^2 \frac{dJ}{dc}(c) \right] > 0 \quad \text{étant toujours } \frac{dJ}{dc}(c) > 0 \quad (6.33)$$

La propagation de fissure sera instable si:

$$\frac{dG_F}{dA}(c) = - \frac{1}{t^2} \left. \frac{\partial^2 U_p}{\partial c^2} \right|_F = \frac{1}{2t^2} F^2 \frac{d^2 J}{dc^2}(c) > 0 \quad \text{si } \left[\frac{d^2 J}{dc^2}(c) > 0 \right] \quad (6.34)$$

c'est à dire que la condition d'instabilité dépend du signe positif de la dérivée seconde de la fonction de complaisance $J(c)$.

Situation 2: Pour un **chargement à déplacement u imposé**:

$$dU_{el} = -\frac{1}{2} \frac{u^2}{J^2} dJ \quad dW = 0 \quad dU_p = dU_{el}$$

Le taux de restitution de l'énergie à déplacement imposé G_u :

$$\boxed{G_u(c)} = - \left. \frac{\partial U_p}{\partial A} \right|_u = - \frac{1}{t} \left. \frac{\partial U_p}{\partial c} \right|_u = \frac{1}{2t} \frac{u^2}{J^2} \frac{dJ}{dc}(c) = \frac{1}{2t} F^2 \frac{dJ}{dc}(c) = \boxed{G_F(c)} \quad (6.35)$$

On remarque que les valeurs de G à force et à déplacement imposés sont identiques une fois exprimés en fonction des mêmes variables. Il y a donc une seule fonction $G(c)$. Pour la stabilité la situation est plus complexe, la propagation est instable si:

$$\frac{dG_u}{dA}(c) = - \frac{1}{t^2} \left. \frac{\partial^2 U_p}{\partial c^2} \right|_u = \frac{1}{2t^2} \left(-2 \frac{u^2}{J^3} \frac{dJ}{dc}(c) + \frac{u^2}{J^2} \frac{d^2 J}{dc^2}(c) \right) > 0 \quad \text{si} \quad \boxed{\frac{d^2 J}{dc^2}(c) > \frac{2}{J} \frac{dJ}{dc}(c) > 0}$$

La stabilité de la propagation est généralement différente entre force et déplacement imposés. Le chargement à force imposée étant plus facilement instable. Dans le cas d'une force imposée il suffit que la complaisance augmente de plus en plus vite avec la longueur de fissure, comme indiqué dans l'équation 6.34. Dans le cas d'un déplacement imposé la condition d'instabilité devient plus limitante et beaucoup d'échantillons tendent à devenir stables.

Quand le calcul analytique de $J(c)$ n'est pas simple, on procède à une estimation de la fonction de complaisance $J(c)$ soit par une simulation numérique aux éléments finis, ou alors par une mesure expérimentale de la complaisance pour des échantillons avec des fissures de longueurs différentes (*EN: compliance calibration*).

6.3 Extensions de la LEFM (Slides Séminaire)

Bibliography

- [1] Griffith A.A., 1920, The Phenomena of rupture and and flow in solids, *Mech. Eng. A*, **221**, pp. 163–198.
- [2] G’Sell C. and Jonas J.J., 1979, Determination of the plastic behaviour of solid polymers at constant true strain rate, *J. Mat. Sci.*, **14**, 583–591.
- [3] Inglis C.E., 1913, Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans. Inst. Naval. Arch.*, **55**, pp. 219–241.
- [4] Irwin G.R., 1957, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *J. of Appl. Mech.*, **24**, pp. 361–364.
- [5] Lawn B.R., 1993, Fracture of brittle solids, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] Lemaitre J., Chaboche J.L., Benallal A., Desmorat R., 2009. Mécanique des matériaux solides. 3^{ème} édition. Dunod.
- [7] Maigis, D., 2000. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids (Springer Series in Solid-State Sciences).
- [8] Mould R.E. and Southwick R.D., 1959, Strength and Static Fatigue of Abraded Glass Under Controlled Ambient Conditions, *J. Amer. Ceram. Soc.*, **42**[12], pp. 582–92.
- [9] Yahr G.T., 1997, Fatigue design curves for 6061-T6 Aluminium, *J. Press. Vessel Tech.*, **119**, pp. 211–5.