

# I) Solides élastiques et fluides risqueux

## 1°) Positionnement du cadre du problème :

\* Loi d'échelle importante :

↳ Echelle microscopique  
 $\sim \text{nm}$

Echelle mésoscopique  
 $\sim \mu\text{m}$

Echelle macroscopique  
 $\sim \text{m}$

↳ liage des grandeurs possibles  
→ On considère élasticité, viscosité, ...  
grandeurs continues.

\* Echelle de temps :

Temps longs :

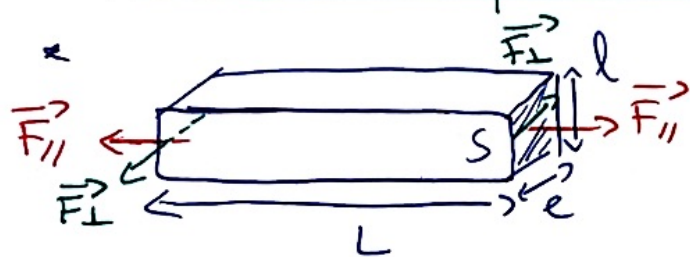
Si un matériau résiste à une déformation → solide  
finit par s'écouler → liquide

Différents régimes en fonction de l'échelle de temps :

Si la déformation suit les contraintes appliquées → élastique

Si la dérivée de la déformation suit les contraintes → risqueux

## 2°) Solide élastique : loi de Hooke



Contrainte →  $\frac{\text{Force}}{\text{Surface}}$

Il y a deux types de force :

- Force de traction :  $F_{II}$
- Force de cisaillement :  $F_{\perp}$

,  $[\sigma]$  : Pascal

$$\rightarrow \boxed{\sigma_{II} = \frac{F_{II}}{S}} \text{ et } \boxed{\sigma_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{S}}$$

Déformation : → lié gradient de déplacement

$$\boxed{\epsilon_{II} = \frac{\Delta L}{L}}$$

$$\text{et } \boxed{\epsilon_{\perp} = \frac{\Delta e}{e}}$$

(dans notre cas ici)  
sans dimension

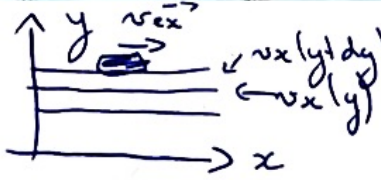
Loi de Hooke :  $\boxed{\sigma_{II} = E \times \epsilon_{II}}$  → E module de Young  
[E] : Pascal

$$\boxed{\epsilon_{\perp} = -\nu \epsilon_{II} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{II}}$$

coefficient de poisson

$\nu \in [0, 0.5]$   $\nwarrow$  incompressible  
liège  $\nearrow$

### 3°) Liquides Newtoniens et non newtoniens :

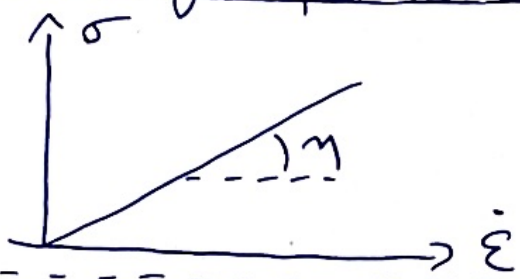
Rappels :   $d\vec{F} = \eta \frac{dv_x}{dy} dS \vec{e}_x$   $\frac{dv_x}{dy} = \dot{\epsilon}$

Gr d'après ce qu'on a vu, on dérive par rapport de l'intense

précédemment  $\frac{dF}{dS} \equiv$  contrainte  $\rightarrow \sigma = \eta \frac{dv_x}{dy}$

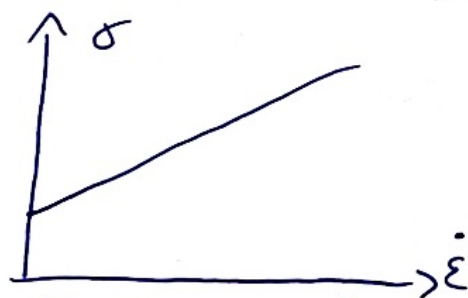
$\hookrightarrow \boxed{\sigma = \eta \dot{\epsilon}}$ ,  $\dot{\epsilon} \rightarrow$  dérivée de la déformation  $[\eta]$  : Pascal.s

On distingue plusieurs cas :



Fluides newtoniens :  $\eta = \text{cte}$ ,  
peu importe la déformation  
 $\rightarrow$  eau, miel, huile de cuisson, ...

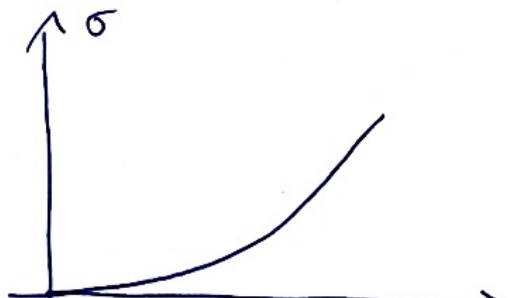
Fluides non newtoniens



Fluide à seuil  
(Bingham iii)  
ex : mayonnaise,  
(solide parfait sous faible  
contrainte)  
dentifrice, ...



Fluide rhéofluidifiant  
 $\eta \neq \text{cte}$   
 $\eta \downarrow$  pour  $\dot{\epsilon} \uparrow$   
ex : ketchup  
 $\hookrightarrow$  + on appuie sur la  
bouteille, plus il coule  
vite  $\rightarrow$  viscosité diminue



Fluide rhéopaisissant  
 $\eta \neq \text{cte}$   
 $\eta \uparrow$  pour  $\dot{\epsilon} \uparrow$   
ex : matériau pour  
gilet pare-balles.

Transition : la réalité n'est pas solide parfait et fluide visqueux parfait d'un côté, il existe des matériaux <sup>élastiques</sup> liant les deux :  
les matériaux viscoélastiques  $\rightarrow$  Rhéologie.

## II) Viscoélasticité et rhéologie :

### 1°) Notion de fluage et de relaxation :

Hypothèse  $\rightarrow$  petite déformation  $\rightarrow$  comportement linéaire ( $\eta$ )

(dissipation d'énergie faible  $\rightarrow$  peu de variation de température)  
(on rappelle que  $\eta$  diminue avec la température qui  $\uparrow$ )

Comportement d'un matériau visco élastique: (voir diapo)

Contrainte constante  $\rightarrow$  réponse retardée  $\rightarrow$  temps de fluage

Déformation constante  $\rightarrow$  diminution de  $\sigma \rightarrow$  temps de relaxation

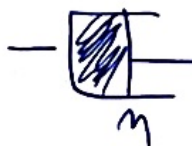
$\rightarrow$  On cherche à étudier des modèles rhéologiques pour expliquer ces comportements

2°) Différents modèles:

\* On se place à 1D (sans perte de généralité)  $E$

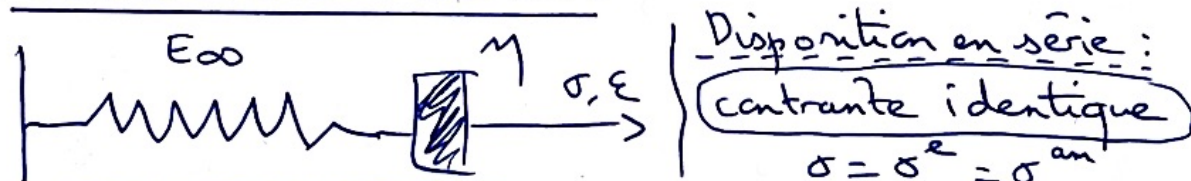
\* Schéma: composante élastique  
composant visqueux

 (ressort)

 (amortisseur)

$\rightarrow$  Combinaisons série / parallèle de ces 2 composants

\* Modèle de Maxwell:



déformation répartie  $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{am}$  (1)

On a  $\epsilon^e = \frac{\sigma}{E_{00}}$ ,  $\dot{\epsilon}^{am} = \frac{\sigma}{\eta} \rightarrow$  On dérive (1)  
(voir avant) (voir avant)

On a donc  $\frac{\dot{\sigma}}{E_{00}} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon} \Rightarrow \sigma + \tau_R \dot{\sigma} = \tau_R E_{00} \dot{\epsilon}$

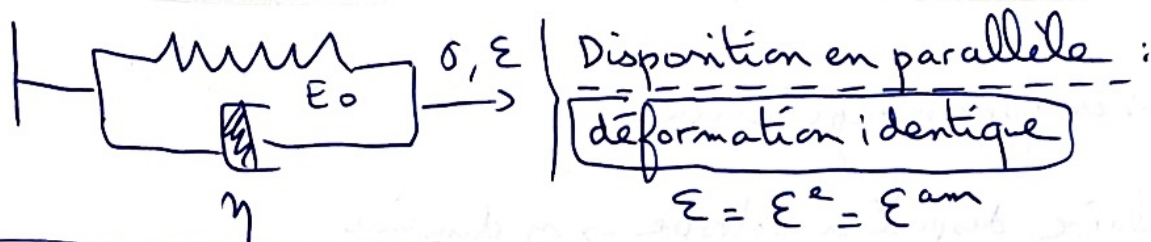
avec  $\tau_R = \frac{\eta}{E_{00}}$  Nombre de Deborah  $\tau_R \leftarrow$  temps relaxation  
 $\tau_S \leftarrow$  temps de sollicitation

$\tau_R \ll 1 \rightarrow$  élastique,  $\tau_R \gg 1 \rightarrow$  visqueux }  $E_{mRP} \rightarrow \sigma = 0$

Pour  $\epsilon = \text{cte}$ ,  $\dot{\epsilon} = 0 \rightarrow$  on retrace le temps de relaxation

Pour  $\sigma = \text{cte}$ ,  $\tau_F \rightarrow \infty$  (pas de fluage) (modèle imparfait)

\* Modèle de Kelvin Voigt:



Contrainte répartie  $\sigma = \sigma^e + \sigma^{am}$

On a  $\sigma^e = E_0 \epsilon$  et  $\sigma^{am} = \eta \dot{\epsilon} \rightarrow \sigma = E_0 \epsilon + \eta \dot{\epsilon}$

$$\hookrightarrow \frac{\sigma}{E_0} = \epsilon + \tau_f \dot{\epsilon} \quad , \quad \tau_f = \frac{\eta}{E_0}$$

Cette fois  $De \gg 1 \rightarrow$  élastique,  $De \ll 1 \rightarrow$  visqueuse

Pour  $\sigma = \text{cte} \rightarrow \tau_f$  temps de fluage (en RP  $\rightarrow \sigma = E_0 \epsilon$ )

Pour  $\epsilon = \text{cte} \rightarrow \sigma = \text{cte} \rightarrow$  pas de temps de relaxation  
(modèle imparfait)

\* Modèle de Zener: (voir diaporama) modèle adapté

### 3°) Utilisation de rhéomètre:

Exercice rappels révision: (Faire si n'aiment on a le temps!!)

\*  $\vec{v}(r, \theta, z) = v(r) \vec{u}_\theta$ ,  $0 = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}$   
(fluide incompressible  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ ) écoulement unidirectionnel stationnaire

Après projection:  $\eta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right) = 0$

$$\Rightarrow v_\theta(r) = \frac{A r}{2} + \frac{B}{r} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_\theta(R_2) = 0 \\ v_\theta(R_1) = \Omega_0 R_1 \end{array} \right. \quad \text{C.L.}$$

$$\rightarrow v_\theta = \frac{-\Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{\Omega_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \times \frac{1}{r}$$

$\Gamma = -2 \times \pi \times R_2 \times H \times \sigma_{\theta\theta}(R_2) \times R_1$  et  $\sigma_{\theta\theta} = \eta \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$

$$\rightarrow \sigma_{\theta\theta}(R_1) = \frac{-2\eta \Omega_0 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad \frac{\Gamma}{H} = \frac{4\pi\eta \Omega_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$\rightarrow$  Connaissant  $\Gamma$ , on connaît  $\eta$ ,  $\eta$  on connaît  $\sigma_{\theta\theta}(R_1)$  et  $\dot{\epsilon}(R_1) = -2\Omega_0 R_1^2 / (R_2^2 - R_1^2) \approx -\frac{2\Omega_0 R_1}{R_2 + R_1} \rightarrow$  principe rhéomètre