

ÉCOULEMENT DE FLUIDES À SEUIL

I Mesure du seuil d'écoulement d'un fluide complexe

Une manière de mesurer le seuil d'écoulement d'un fluide à seuil est de mesurer l'écoulement d'un film de ce fluide déposé sur un plan incliné.

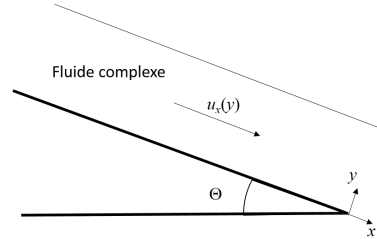


FIGURE 1 – Schéma de l'écoulement d'un film de fluide complexe sur un plan incliné.

On se place dans la configuration de la figure 1, à deux dimensions. Quand on travaille avec un fluide non newtonien, on ne peut pas utiliser directement l'équation de Navier-Stokes car le lien entre les contraintes visqueuses $\bar{\sigma}'$ et le taux de déformation $\dot{\epsilon}$ n'est plus simplement $\bar{\sigma}' = \eta \dot{\epsilon}$. On utilise donc l'équilibre des contraintes suivant :

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

où $\bar{\sigma} = -P + \bar{\sigma}'$. L'opérateur $\vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}$ projeté dans la direction i s'écrit $(\vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}) \cdot \vec{e}_i = \sum \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$

1. Justifier que le champ de vitesse dans le film se réduit à $\vec{u} = u_x(y) \vec{e}_x$ et que la contrainte ne dépend que de y .
2. Écrire la projection sur $\vec{e}_x$ de l'équation d'équilibre des contraintes.
3. En déduire l'expression de la variation de la contrainte σ_{xy} dans l'épaisseur du film. Représentez graphiquement le résultat.
4. Dans le cas d'un fluide newtonien, calculez le profil de vitesse. Donner la vitesse à la surface du liquide.
5. Si on a maintenant un fluide à seuil, modélisé comme un fluide de Bingham, on a

$$\dot{\epsilon} = 0 \text{ pour } \sigma_{xy} < \sigma_y \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_{xy} - \sigma_y}{\eta} \text{ pour } \sigma_{xy} \geq \sigma_y \quad (2)$$

Faire un schéma de l'écoulement dans le film montrant que deux zones apparaissent, une pour $y \leq y_c$ dans laquelle la contrainte est inférieure au seuil et une où elle lui est supérieure.

6. En déduire la contrainte σ_y . Dans la suite, on notera $h_c = h - y_c$.
7. Montrer que le profil de vitesse complet s'écrit comme suit :

$$u_x = \frac{\rho g}{\eta} \sin \theta \left((h - h_c) y - \frac{y^2}{2} \right) \text{ pour } \sigma_{xy} \leq \sigma_y \quad (3)$$

$$u_x = \frac{\rho g \sin \theta}{2\eta(h - h_c)^2} \text{ pour } \sigma_{xy} \geq \sigma_y \quad (4)$$

8. Dessiner le profil de vitesse dans le film de fluides complexes.
9. Montrer comment on peut mesurer le seuil d'écoulement en mesurant la vitesse à la surface du film. Proposer une méthode pour le faire.