

# Chapitre III Les comportements non linéaires

Jusqu'à maintenant, comportement linéaire

→ élastique  $\sigma = E \varepsilon$

→ visqueux  $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$

⊕ rhéofluidification  $\sigma = \eta(\dot{\varepsilon}) \dot{\varepsilon}$

## 1) Les fluides à seuil

∃ contrainte  $\sigma_c$ ,  $\sigma < \sigma_c \quad \dot{\varepsilon} = 0$   
 $\sigma > \sigma_c \quad \dot{\varepsilon} \neq 0$

modèle de Bingham

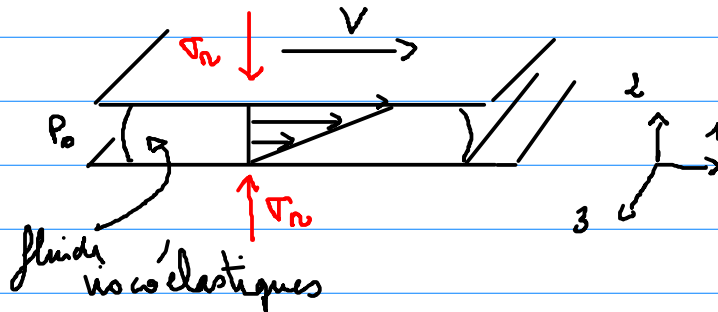
$\sigma < \sigma_c \quad \dot{\varepsilon} = 0$   
 $\sigma > \sigma_c \quad \sigma = \sigma_c + \eta \dot{\varepsilon}$

modèle de Herschel - Buckley

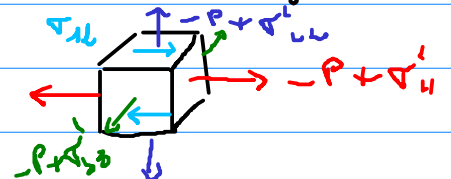
$\sigma < \sigma_c \quad \dot{\varepsilon} = 0$   
 $\sigma > \sigma_c \quad \sigma = \sigma_c + k \dot{\varepsilon}^m$

## 2) Les forces normales

Dans un liquide  $\underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{\sigma'}}$



$\sigma'_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$



$$\Pi = \begin{bmatrix} -P + \sigma'_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & -P + \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -P + \sigma'_{33} \end{bmatrix}$$

≠ les uns des autres pour un viscoélastique

Dans la direction 1  $-P_0 = -P + \sigma'_{11}$   
 Dans la direction 2  $\sigma_m - P_0 = -P + \sigma'_{22}$

$$\sigma_m = \sigma'_{22} - \sigma'_{11}$$

→ les forces normales sont liées aux  $\neq$  de contraintes normales

→ on définit deux forces (par unité de surface) normales

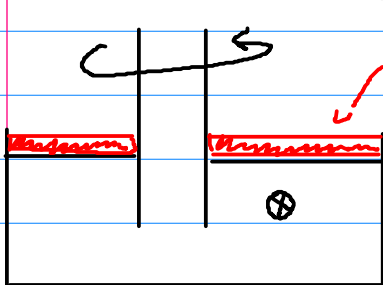
$$N_1 = \sigma'_{11} - \sigma'_{22}$$

$$N_2 = \sigma'_{22} - \sigma'_{33}$$

Par symétrie, fonctions paires  $N_1(\dot{\epsilon})$   $N_2(\dot{\epsilon})$  au premier ordre

$$N_1 = \psi_1 \dot{\epsilon}^2 \quad N_2 = \psi_2 \dot{\epsilon}^2$$

Exemple : l'effet Weyssberg



glissement sans frottement

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad} \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\left( \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) \cdot \vec{e}_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\vec{u} = v_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

sur  $\vec{e}_r$

$$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r}$$

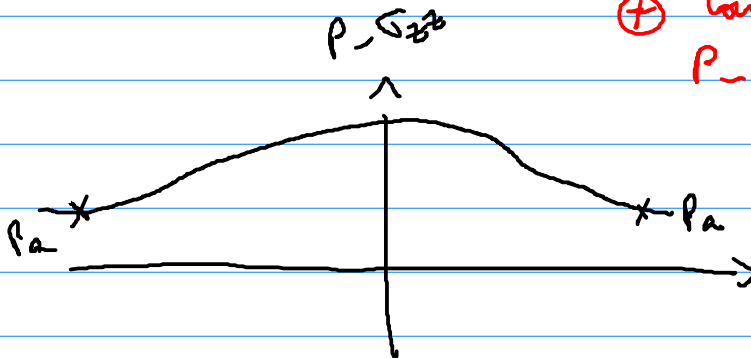
$$\frac{\partial P - \sigma_{zz}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\underbrace{\sigma_{rr} - \sigma_{zz}}_{N_2}) + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{v_\theta^2}{r}$$

$$\underbrace{N_2 < N_1}_{(\psi_2 < \psi_1)}$$

$< 0$   
+ diverge  
quand  $r \rightarrow 0$

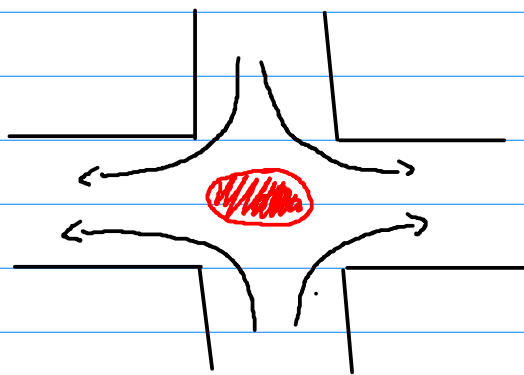
$P - \sigma_{zz}$  = force avec laquelle la plaque  
suint le liquide

=  $r \frac{\partial}{\partial r} (P - \sigma_{zz})$   
⊕ bon de l'axe  
 $P - \sigma_{zz} = P_a$



$P - \sigma_{zz}$  + important  
au centre  
→ quand on enlève  
la plaque, le liquide  
monte au centre.

### 3) La viscosité elongationnelle



$$\textcircled{2D} \quad \vec{v} \mid \begin{matrix} \dot{\epsilon}_x \\ -\dot{\epsilon}_y \end{matrix}$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

(3D)  $\vec{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_y \\ -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_z \end{bmatrix}$   $\dot{\epsilon} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\dot{\epsilon} \end{bmatrix}$

Fluide newtonien  $\underline{\underline{\sigma'}} = 2\eta \dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} 2\eta \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\eta \dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \dot{\epsilon} \end{bmatrix}$

$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 3\eta \dot{\epsilon}$

$\leadsto$  viscosité elongationnelle

$\eta_E = \frac{N_1}{\dot{\epsilon}} = 3\eta$

Fluide Newtonien  $\boxed{\eta_E = 3\eta_s}$

Fluides Complexes  $\eta_E \gg \eta_s$

