

Cette leçon a été placée à un niveau L2. Le cahier des charges proposé ici demande un rythme soutenu afin de tenir en 40 minutes. Aussi, le plan ici proposé est amputé de certains développements par rapport à l'oral effectué. J'ai supposé la notion de viscosité introduite sous la forme de la force de cisaillement surfacique (appliqué à couette plan) avant d'appliquer le PFD localement afin d'obtenir l'équation de Navier-Stokes. Les élèves auraient alors appliqué l'équation de Navier-Stokes à des fluides parfaits en premier lieu, et démontré le théorème de Bernoulli. Ce cours serait alors l'occasion de raccrocher la notion de viscosité déjà vue à des applications concrètes. Dans cette leçon on aurait pu traiter : d'écoulement de Stokes, de convection de Rayleigh-Bénard ([3] et [4]), de couche limite (Blasius) avec un parallèle avec la diffusion, etc.

Table des matières

1	Objectifs pédagogiques de la LP	1
2	Objectifs et messages forts de la LP (disciplinaire)	1
3	Introduction générale de la leçon	2
4	Proposition de plan détaillé	2
4.1	I./ Écoulement dans une conduite forcée	2
4.2	II./ Écoulement sanguin	3
5	Ouvertures possibles, prolongements et conclusion de la leçon	3
6	Subtilités de la leçon, points disciplinaires essentiels et remarques du correcteur	3
7	Exercices de base et applications intéressantes pour la leçon	4
8	Bibliographie pour construire la leçon	4
9	Expériences illustratives, simulations numériques et exploitation pédagogique	4
10	Critique des choix pédagogiques de la leçon, adaptation à une autre LP	4

1 Objectifs pédagogiques de la LP

- ▷ Mettre en évidence les effets du terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes sur des cas concrets
- ▷ Appliquer l'équation de Navier-Stokes à un écoulement unidirectionnel visqueux (Poiseuille)
- ▷ Savoir remettre en cause des hypothèses (fluide newtonien, stationnarité, Reynolds, viscosité variable)

2 Objectifs et messages forts de la LP (disciplinaire)

- ▷ Application de Navier-Stokes sur l'écoulement de Poiseuille horizontal, pour un écoulement unidirectionnel stationnaire incompressible.
- ▷ Apporter un regard critique sur les domaines de validité de cette équation pour le cas d'une conduite forcée

[†]arnaud.le_diffon@ens-paris-saclay.fr

- ▷ Proposer un cadre d'application plus adapté : l'écoulement sanguin
- ▷ Appliquer un modèle empirique de viscosité rhéofluidifiante afin d'interpréter le dimensionnement d'objets destinés à l'écoulement du sang
- ▷ Remise en cause de l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement de Poiseuille pour le cas du sang

Mots-Clés : viscosité dynamique, équation de Navier-Stokes, écoulement et loi de Poiseuille, nombre de Reynolds, fluide rhéofluidifiant

3 Introduction générale de la leçon

Pré-requis en lien avec le niveau de la leçon : notion de viscosité : force de cisaillement surfacique (appliqué à couette plan) équation de Navier-Stokes théorème de Bernoulli

Introduction :

Accroche slide : cathéter veineux périphérique et conduite dirigée d'eau. Aujourd'hui on va expliquer pourquoi la couleur du cathéter n'est pas anodine et pourquoi on s'embête à dimensionner des conduites dirigées aussi énormes, sûrement difficiles à produire et à monter. Pour ce faire on a besoin de [pré-requis]. Pour répondre à ces questions on va étudier l'écoulement dans un cylindre, un écoulement d'eau dans une conduite forcée pour commencer au plus simple.

4 Proposition de plan détaillé

4.1 I./ Écoulement dans une conduite forcée

► 1) Modélisation

démo de Poiseuille horizontal, le delta P étant dû à un barrage en amont. On montre que le rayon des canalisations doit être maximal pour maximiser le débit (donc la puissance cinétique du jet) toutes autres choses étant égales par ailleurs.

Subtilité : techniquement le problème n'est pas invariant par rotation autour de l'axe du cylindre du fait de la présence du champ de pesanteur. Or c'est seulement en supposant l'écoulement unidirectionnel (ou $Re \ll 1$, rarement vérifié) que l'on obtient une équation de Navier-Stokes linéaire permettant de découpler le gradient de pression statique de l'équation différentielle sur \vec{v} régissant la dynamique. Donc il faut plaquer en premier lieu l'hypothèse d'écoulement unidirectionnel, non justifiée, et ensuite en tirer les conséquences sur l'écoulement (cf [1]).

possibilité ici de parler de forces de frottement afin de faire écho à une éventuelle 3ème partie sur les forces de traînée, et d'introduire la notion de dissipation intuitivement

► 2) Pertes de charges

On effectue une sorte d'approche perturbative sur la conduite horizontale suivant l'écoulement en sortie d'un barrage (exo 83 de la partie méca flu de [2]). On applique Bernoulli sur la partie inclinée de la conduite forcée puis on caractérise la perte de charge dans la conduite forcée horizontale. On généralise alors le théorème de Bernoulli.

A.N. : on perd 16 cm de perte de charge sur un barrage de 100m, c'est ridicule

Transition didactique : On calcule le Reynolds ($\sim 10^7$) associé à l'écoulement dans une conduite forcée et on en déduit que l'hypothèse d'écoulement unidirectionnel est très probablement capillo-tractée. On donne Poiseuille valable pour $Re < 2000$. Appliquons donc notre loi de Poiseuille dans un écoulement dont les dimensions semblent plus favorables

4.2 II./ Écoulement sanguin

► 1) Quelques ordres de grandeur

voir exercice 92 de [2]

Tracé du rayon intérieur de cathéter pour voie veineuse périphérique en fonction du débit auxquels ils sont censés travailler : On remarque un débit volumique qui ne dépend pas du tout en R^4 . Quelle hypothèse remettre en cause dans notre modèle ? D'abord le fait que le sang soit un fluide newtonien.

► 2) Un problème de viscosité

On montre avec le modèle de Carreau qu'on attend une viscosité en $\sim R^2$ et donc un débit en $\sim \frac{R^4}{R^2}$ soit $\sim R^2$. On trace et on constate que le dimensionnement des cathéter (selon leur couleur) suit bien cette loi-ci.

► 3) Un écoulement instationnaire

Remise en cause de l'hypothèse stationnaire pour l'application de la loi de Poiseuille à l'écoulement sanguin. Application de l'équation de N-S en Régime Sinusoïdal forcé pour le champ de vitesse. Obtention de l'équation de Helmholtz associée et discussion du critère de découplage temporel.

5 Ouvertures possibles, prolongements et conclusion de la leçon

- ▷ Possibilité de traiter dans un III des forces de frottement visqueux (loi de Darcy-Weisbach, appliquée à l'écoulement de Poiseuille puis généralisé, faisant écho à un éventuel I.2) calculant la force visqueuse sur les parois du cylindre).
- ▷ Conclure en récapitulant la démarche suivie : On cherche à modéliser un écoulement, on obtient une loi, on cherche alors à vérifier si les conditions d'obtention de cette loi sont bien valide pour notre problème. Sinon, on a possibilité d'améliorer le modèle en ciblant les points de déviation des observations avec la loi obtenue.
- ▷ Ouverture : Les forces de frottement visqueux pour des obstacles dans l'écoulement
- ▷ Ouverture : La conséquence de sténoses (pertes de charges en série, analogie électrocinétique) sur un écoulement, pertes de charges singulières.

6 Subtilités de la leçon, points disciplinaires essentiels et remarques du correcteur

Subtilités & points disciplinaires essentiels :

- ▷ Comme mentionné plus tôt, attention la démonstration de la loi de Poiseuille repose sur des hypothèses pour le moins discutables.
- ▷ La définition du nombre de Reynolds pour un écoulement unidirectionnel est glissante, car le Reynolds est alors ou bien rigoureusement nul, ou bien potentiellement élevé selon si on compare les termes de l'équation de Navier-Stokes ou bien la valeur $\frac{\rho U l}{\eta}$ en ordre de grandeur.
- ▷ Avoir des ordres de grandeur en tête pour chaque constante avancée durant le cours.

Retour sur la phase de correction (correcteur et correction étudiants) :

- ▷ Définition et comportement de la couche limite dans une conduite cylindrique lorsque le nombre de Reynolds augmente ?
- ▷ Questions relatives aux fluides non-newtoniens
- ▷ autres écoulements envisageables : Rayleigh-Bénard, dans quel cadre ? Convection du manteau terrestre s'accélération dans le passé : limite au modèle ? (la surface)

7 Exercices de base et applications intéressantes pour la leçon

- ▷ instabilité de Rayleigh-Bénard (existant également pour des fluides parfaits, cf [3]).
- ▷ force de traînée autour d'une sphère, et d'un cylindre
- ▷ viscosimètre de couette cylindrique, cône-plan
- ▷ écoulement de couette plan, mode de locomotion des gastéropodes

8 Bibliographie pour construire la leçon

Le Guyon est un incontournable, le Garing pour les applications numériques, le Landau est très enrichissant du point de vue théorique pour peu qu'on se donne le temps de le lire. Le Turcotte (p.493 pour Rayleigh-Bénard) suggéré par le correcteur pour les applications en géologie.

- 1 E.GUYON et Co. *Hydrodynamique Physique* éditions CNRS
- 2 C.GARING *1001 questions en prépa PHYSIQUE PC/PC** éditions ellipses
- 3 L. Landau *Fluid Mechanics*
- 4 D. Turcotte *Geodynamics*

9 Expériences illustratives, simulations numériques et exploitation pédagogique

- ▷ possibilité d'illustrer l'instabilité de Rayleigh-Bénard si on choisit de la placer dans ce cours
- ▷ Je ne conseille pas particulièrement de réaliser l'expérience de l'écoulement de Poiseuille pour ce plan de cours-ci, déjà plutôt tendu et pour lequel le dispositif actuel ne correspondrait ni aux dimensions ni aux fluides évoqués.

10 Critique des choix pédagogiques de la leçon, adaptation à une autre LP

Il faut aller plutôt vite pour réaliser tout cela en 40 minutes. Attention à privilégier la clarté des propos à une grande quantité d'information qui, si non claire, sera indigeste.

Choix pédagogiques effectués et éléments de réflexion pour s'adapter à un titre différent :

- ▷ Choix de ne développer qu'un écoulement (incontournable mais déjà long à développer) pour l'appliquer en détail à deux exemples.
- ▷ L'écoulement de Couette m'a semblé trop simple pour modéliser de manière convaincante des écoulements réels intéressants
- ▷ Au contraire la convection de Rayleigh-Bénard m'a semblé trop ardue, plus anecdotique dans un cours que l'écoulement de Poiseuille, et demandant plus de temps pour être appliquée correctement à deux écoulements distincts (Manteau Terrestre et air au sein d'un double vitrage par exemple).
- ▷ On peut essayer de se centrer autour de la force de traînée, mais réaliser un quelconque calcul de la force de Stokes, même dans un cas géométrique simple, est très fastidieux pour en tirer assez peu de physique à mon goût.