

SYSTÈME TERRE - LUNE

Intro La face cachée Lune intrigue.

Explication : T révolution Lune autour $T_{ex} = T$ rotation Lune

↳ 1 hasard

Pour comprendre :
→ trajectoire de la Lune
→ retrouver, à partir de modèles, les lois de Kepler
→ forces de marées

Transi : T révolution : L en orbite → essayons de le montrer

I] Orbite de la Lune autour du Soleil

1) Problème à deux corps

* Système = { Terre + Lune } en interaction

→ 6 ddls : les éq^s de chq corps font apparaître les coord. des autres

↳ comment simplifier l'étude ?

* Référentiel de Copernic R_C supposé galiléen

Sys : { T et L , de masses M_T et M_L , supposés ponctuels }

On note $\vec{F}_{L \rightarrow T}$ l'interaction gravitationnelle ...

Hyp : le syst est isolé (

PFD appliqué à chq point s'écrit :

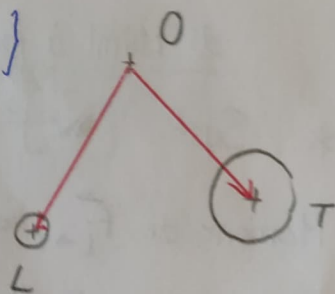
$$M_L \frac{d^2 \vec{r}_L}{dt^2} = -\vec{F}_{L \rightarrow T} \quad (1); \quad M_T \frac{d^2 \vec{r}_T}{dt^2} = \vec{F}_{L \rightarrow T} \quad (2)$$

↳ éq^s couplées par forces d'interaction : comment découpler ?

$$* \quad (1) + (2) \quad \frac{d^2}{dt^2} (M_L \vec{r}_L + M_T \vec{r}_T) = \vec{0}$$

Centre de masse : $M_L \vec{r}_L + M_T \vec{r}_T = (M_L + M_T) \vec{OG} = (M_L + M_T) \vec{r}_G$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} = \vec{0}$$



* Réf. barycentrique: réf d'origine G, d'axes // à ceux de R_c : R^*

Comme le syst est isolé, R^* est en translat rectiligne unif pr / R_c gal.

$\Rightarrow$ il est aussi gal.

* Moment relatif des part: $M_L \vec{G_L} + M_T \vec{G_T} = \vec{0}$

Chasses: $M_L \vec{G_L} + M_T \vec{G_L} + M_T \vec{L_T} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{G_L} = \frac{-M_T}{M_L + M_T} \vec{L_T}$$

De m: $\vec{G_T} = \frac{M_L}{M_L + M_T} \vec{L_T}$

Or $M_L = 7,6 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

$\Rightarrow \frac{M_T}{M_L} \approx 79$

$\Rightarrow \frac{\|\vec{G_T}\|}{\|\vec{L_T}\|} = 1 \cdot 10^{-2} \ll 1$

$M_T = 50 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Dans R^* : la Terre est confondu avec G $\rightarrow$ immobile

$\Rightarrow$ ON SE RAMÈNE À UN PB À 1 CORPS

Transition: jis 3 dds $\rightarrow$ se ramener à 1 pb à 1 dd grâce aux forces centrales

2) Mvmt à force centrale

* Syst: ~~{2}~~ $\} ; R^*$ gal. ~~Syst~~ $\vec{r} = \vec{G_L} \approx \vec{L_T}$

$\triangleright$ Moment de $\vec{F}_{L \rightarrow T} = \vec{0}$

$\triangleright$ TMC: conservat du moment cinétique

$\triangleright$ Or $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

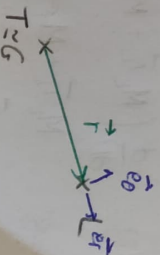
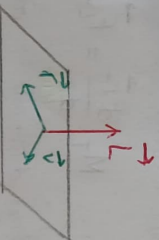
$\Rightarrow$ mvmnt plan

$\Rightarrow$ DEUX DBLS

$\triangleright$ coordonnées polaires

* $\vec{r} = r \vec{e_r}$

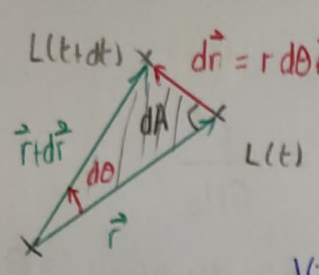
$\vec{v} = \dot{r} \vec{e_r} + r \dot{\theta} \vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{L} = r \vec{e_r} \wedge m(\dot{r} \vec{e_r} + r \dot{\theta} \vec{e_\theta}) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e_\theta}$



$$\Rightarrow \underline{C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte}} \Rightarrow 1 \text{ DDL}$$

* Deux lois de Kepler:

$L(t+dt) \times \vec{dr} = r d\theta \vec{e}_\theta$ $dA = \text{aire balayée par } \vec{r} \text{ pendant } dt$ Anima θ



$dA \simeq \frac{r d\theta \times r}{2}$

Vitesse angulaire: $\underline{\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cte}}$

* Se ramener à l'étude d'un part 1D $\rightarrow$ étude NRT+lig

$\triangleright \vec{F} = -G \frac{M_L M_T}{r^2} \vec{e}_r = -\text{grad}(E_p) \Rightarrow E_p = -\frac{G M_L M_T}{r}$ ($E_p \rightarrow 0$ r $\rightarrow \infty$)

$\triangleright E_c = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{C}{r^2} \right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}$

$\triangleright E_m = E_{p, \text{eff}}(r) + \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ $E_{p, \text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{G M_L M_T}{r}$: 1 DDL

$\triangleright$ Graphes + discussion sur le type de trajectoire

Transit: éq° exacte de la traj?

3) Éq° de la trajectoire

* PFD dans R^* appliqué à $\{L\}$: $M_L \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M_L M_T}{r^2} \vec{e}_r$

$\emptyset$ de résolu connue immédiate

* Choix de variable de Binet: $u = 1/r$

$C = \frac{\dot{\theta}}{u^2}$

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \times \frac{du}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{-1}{u^2} \right) \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = -C \frac{du}{d\theta} \\ \ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-C \frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -C \dot{\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \end{cases}$$

* $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} (C u^2)^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - C u^3$

$$\rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_c}{c^2}$$

$$* \text{ Solub: } u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM_c}{c^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$$\text{avec } p = \frac{c^2}{GM_s} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{origine des angles à } \theta_0 = 0 \end{array} \right.$$

$p \equiv$ param. de la coniq

$e \equiv$ excentricité

* $e \geq 1 \leftrightarrow$ état libre : hyperbole

$0 < e < 1 \leftrightarrow$ état lié : ellipse

$e = 0, 0549$ pour la Lune // $\emptyset$ constante

AN, T, n', r, ...

Transition: lune en orbite autour de la Terre

Is raison que $\uparrow$ révéuls = $\uparrow$ rotat

$\Rightarrow$ effets méroing na gal. $\rightarrow$ marées

II) Géométrie statique des marées

1) Force de marée

* R_c : réf. Copernic, supposé galiléen $\simeq$ réf. héliocentrique

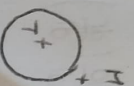
R_g : réf. géocentrique

Or $\uparrow$ en translat circulaire pr / Soleil $\Rightarrow R_g$ n'est pas galiléen !

* Sys: $\{M$ de masse m , à la surf de la Terre $\}$

Réf: R_g , nm gal

Pré: $m \vec{a}_{R_g} = m \vec{g}_T(M) + m \vec{g}_L(M) + \vec{F}_{ie}$



* Loi de composi^o des accélérat^os :

$$\vec{a}(H)/R_c = \vec{a}(H)/R_g + \vec{a}_e(H) + \vec{a}_r(H)$$

$$\text{et } \vec{a}(H)/R_g = \vec{0}$$

car H est statique

avec $\begin{cases} \vec{a}_e(H) = \vec{a}(T)/R_c \\ \vec{a}_r(H) = \vec{0} \end{cases}$ car R_c est en translat^o pr / R_g

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(H) = -m\vec{a}(T)/R_c$$

car $\begin{cases} \text{translat} \\ H \text{ statiq de } R_g \end{cases}$

Que vaut $\vec{a}(T)/R_c$?

* Sys : { Terre, supposée ponctuelle T }

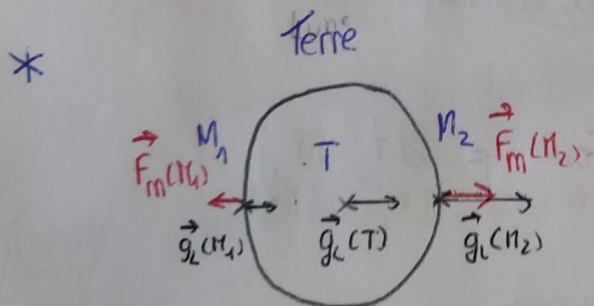
Ref: R_c

PFD: $M_T \vec{a}(T)/R_c = M_T \vec{g}_L(T) \Rightarrow \vec{a}(T)/R_c = \vec{g}_L(T)$

$$* m\vec{a}(H)/R_g = m\vec{g}_T^{(H)} + m\vec{g}_L^{(H)} - m\vec{g}_L^{(T)}$$

$$\Rightarrow m\vec{a}(H)/R_g = m\vec{g}_T^{(H)} + \underbrace{m[\vec{g}_L^{(H)} - \vec{g}_L^{(T)}]}_{\text{force de marées } \vec{F}_m^{(H)}}$$

2) Marées océaniques

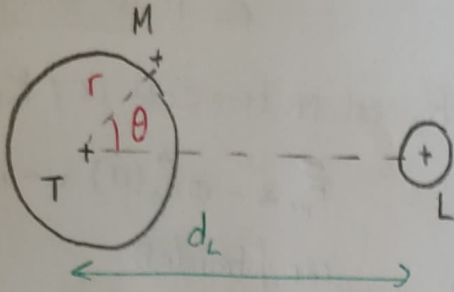


* Estimati^o de la force de marées :

• ~ dipole électrostatig : valable pour $\frac{R}{d_{TL}} \ll 1$

$$R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km} \quad d_{TL} = 3,8 \cdot 10^5 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_T}{d_{TL}} \sim 1 \cdot 10^{-2} \ll 1 \quad \text{OK}$$

À l'ordre 1 en $\frac{r}{d_L}$: $\frac{1}{LM^3} \approx \frac{GM_L}{d_L^3} r \left[(3\cos^2\theta - 1) \vec{u}_r - 3\cos\theta \sin\theta \vec{u}_\theta \right]$



* Force d'intensité max pour $\theta = 0$ ou π

$\Rightarrow$ c'est l'emplacement des bourrelets océaniques de ce modèle statig simple

* Conséquences de ce modèle :

$$1) * \text{ODG} : \begin{cases} \frac{F_T(M_1)}{m} \sim 1 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2} \\ g(M_1) \sim 10 \text{ m.s}^{-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_m(M_1)}{mg(M_1)} \sim 10^{-7}$$

$\hookrightarrow$ suffisant pour déformer la SL de l'océan

Mvmt des astres périodique $\Rightarrow$ soulèvement/abaissement eaux périodique
 $\Rightarrow$ ce sont les marées océaniques !

$$2) \begin{cases} T \text{ révolution Lune autour Terre} = 27,3 \text{ j} \\ T \text{ rotation Terre} = 24 \text{ h} \end{cases}$$

1^{ère} approx : Lune fixe pdt 1 journée

F_m passe par 2 max et 2 min $\Rightarrow$ 2 marées hautes et 2 basses/jour

Or les marées se décalent d'environ 50mn/jour

- 3) * Hyp : la Lune orbite autour de la Terre à 1 vitesse angulaire
cote & ds le m sens que celui de la rotat propre de la Terre
- * Lunaison $\equiv$ durée au bout de laquelle L, T, S sont ds la m
config. relative

* Mise en défaut de la théorie statiq de marées

- 1) * 2 x par mois, les marées sont $\oplus$ importantes $\rightarrow$ marées de vive-eau
2 x " , " $\ominus$ importantes $\rightarrow$ marées de mortes-eaux
- $\hookrightarrow$ prise en compte syzygie : posi° de la Lune en alignée ou en
quadrature de φ avec le Soleil

Hyp : $\frac{g_{\text{Lune}}}{g_{\text{Soleil}}} \approx \frac{1}{27}$: il faut prendre en compte le Soleil

- 2) $\neq$ types de marées (diurne, semi-diurne, ...)

• Marnage ($\neq$ de l'altitude de la SL entre marée haute et marée basse)

$\hookrightarrow$ Méditerranée : ~ 20 cm

$\hookrightarrow$ Mont-Saint-Michel : ~ 10 m

$\Rightarrow$ théorie dynamiq des marées : résonance

Transit : effets gravitationnels différentiels expliquent la fou cachée de la Lune

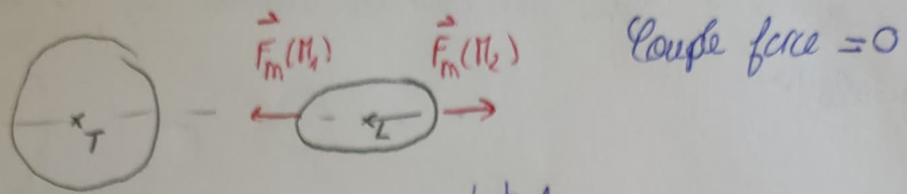
3) Rotat synchrone de la Lune

* La Lune déforme la Terre $\rightarrow$ la Terre déforme la Lune !

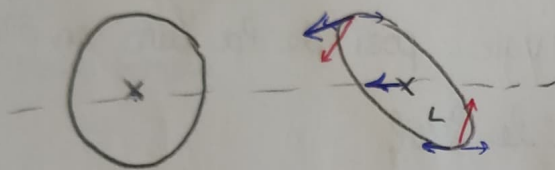
La Lune présente 2 renflements opposés ds l'axe Terre-Lune, ~ 10 aine m

* Si les bourrelets sont ds l'axe (verrouillage effectué)

Hyp: Lune = boule fluide, réf lunaire statig



* Si la rota° de la Terre est en retard / avance pr / révelu° :
déplacem⁺ du bourrelet ds le réf lunaire



Couple qui ramène le
bourrelet ds l'axe
Terre - Lune

* Phénomène dynamique:

↳ $\tau \sim 30$ aine années TL : synchronisé possible

↳ Terre-Soleil : $\tau \sim 100$ aine milliard années

↳ maintien des alternances jour/nuit, saisons,
etc. vie!

Ccl: théorie dynamique des marées

504^{2-}