

Exercice 3.4 : Le claquement du fouet - Ulm PC

Expliquez le son du fouet qui claque.

Il n'est pas rare d'entendre dans certains films d'aventure ou westerns le claquement d'un fouet, produisant un son bref et intense. Le but de ce problème est de modéliser l'origine de ce bruit caractéristique. Afin de se donner une intuition du problème, imaginons tout d'abord qu'un opérateur produise par un mouvement de bras une impulsion dans le fouet, qui va se propager jusqu'à l'extrémité libre. Il est intéressant de remarquer que ce n'est que lorsque l'impulsion initiale atteint cette extrémité du fouet que l'on entend le claquement. Ceci semble suggérer que c'est le mouvement du bout du fouet qui provoque le « bang » entendu, tandis que l'impulsion qui se propage dans la corde ne donne pas un son audible. On retrouve un son similaire lorsqu'un coup de feu est tiré ou au passage d'un avion supersonique. Ainsi, l'idée couramment reçue pour expliquer le claquement du fouet est le dépassement de la vitesse du son par son extrémité libre.

Quelques pistes...

1. Est-il possible d'obtenir un mouvement supersonique avec une simple corde ? Quelle est la caractéristique d'un fouet qui permet d'expliquer une vitesse variable le long de la corde ?
2. Modéliser le fouet par une corde de section variable, et trouver l'équation des ondes dans le fouet.
3. Quelle forme particulière pour la section peut-on proposer ? On pourra penser à une forme particulière simplifiant le terme $\frac{1}{S(x)} \frac{dS}{dx}$.
4. En déduire l'évolution d'un paquet d'ondes se propageant le long du fouet, et montrer que l'extrémité peut atteindre une vitesse aussi grande que voulue.

1. La modélisation la plus simple que l'on puisse imaginer pour un fouet est une barre rigide, qui aurait un mouvement circulaire dicté par celui du bras de l'opérateur. Considérons ainsi un fouet de longueur $L \simeq 2$ m, mis en mouvement par un bras d'environ 20 cm. On peut considérer que pour passer d'une position verticale à une position horizontale, le bras de l'opérateur met environ 1 s, ce qui donne une vitesse angulaire de l'ordre de $\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1\text{s}} \simeq 1,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. La vitesse du bout du fouet est alors de l'ordre de

$$v_{\text{bout}} \simeq L\omega \simeq 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \ll c_{\text{air}}, \quad (1)$$

où c_{air} est la vitesse du son dans l'air. Ainsi, il apparaît que ce n'est pas le mouvement global du fouet transmis par l'opérateur qui expliquerait la vitesse supersonique de son bout.

Affinons à présent ce modèle grossier, en considérant le fouet comme une simple corde. On connaît bien l'équation de propagation d'une perturbation verticale z dans la direction x , qui est donnée par l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Cette équation n'est bien entendu pas dispersive, ce qui signifie qu'un paquet d'ondes se propagera sans se déformer. Ainsi, comme en général $c_0 < c_{son}$, il n'y a pas d'espoir de communiquer un mouvement supersonique à l'extrémité du fouet en se contentant de propager une onde dans une corde de section constante.

Lorsque l'on observe un fouet, il apparaît une caractéristique essentielle que ne possède pas une simple corde : la section du fouet diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche de son extrémité. On peut alors se donner une première idée de la raison pour laquelle le bout du fouet peut franchir le mur du son. On peut raisonnablement considérer qu'il n'y a pas de pertes d'énergie dans la propagation d'une onde le long du fouet. Ainsi, schématiquement, la quantité d'énergie cinétique par unité de longueur est

$$u_{ec}(x, t) = \rho S(x) v^2(x, t), \quad (3)$$

où $S(x)$ est la section du fouet au point x , ρ sa densité et $v(x, t)$ la vitesse de la portion considérée, va être une quantité conservée. Ainsi, lorsqu'un paquet d'ondes passe d'une portion de la corde avec une section S_0 plus grande que celle S_1 du bout de la corde, sa vitesse va augmenter. Elle peut devenir arbitrairement grande si $S \rightarrow 0$, et donc dépasser la vitesse du son. En pratique, cette vitesse est bien entendu limitée, notamment à cause de la rigidité de la corde ou de la viscosité de l'air, qui vont venir dissiper de l'énergie. De plus, le fouet possédant une résistance mécanique finie, une vitesse infinie provoquerait sa casse.

2. Nous allons donc considérer que le fouet est une corde vibrante de section variable, et chercher l'équation d'onde correspondante. Nous allons bien entendu raisonner par analogie avec la corde vibrante simple. Considérons une portion de corde comprise entre x et $x + dx$. On suppose que le déplacement de la corde se fait purement verticalement et est repéré par $z(x, t)$, et on note $\alpha(x, t)$ l'angle entre l'horizontale et la tangente à la corde au point x , comme sur le schéma 3.6 suivant. On note $S(x)$ la section de la corde au point x , et ρ sa densité volumique.

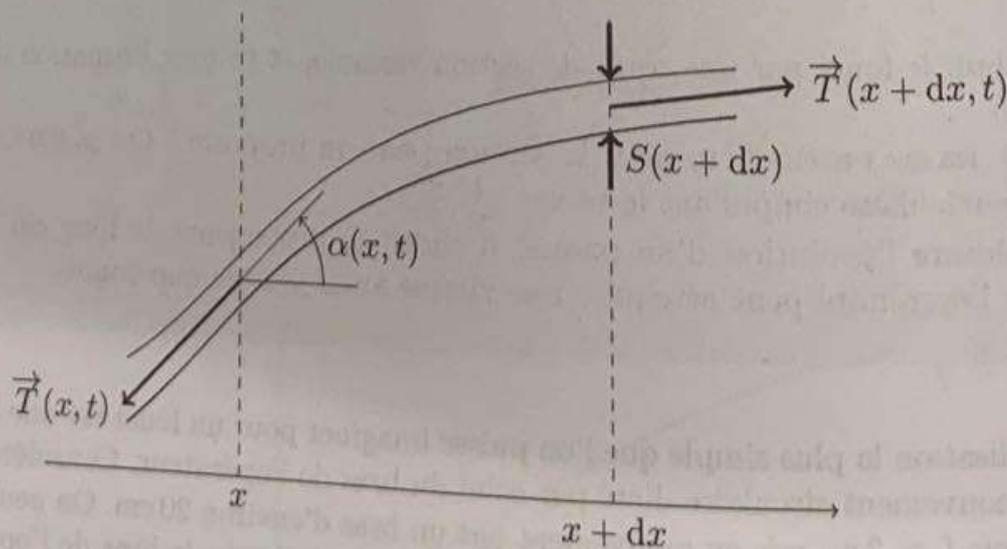


FIGURE 3.6. Corde vibrante de section variable

Comme dans le cas d'une corde simple, on va considérer une petite perturbation, c'est-à-dire que $\frac{\partial z}{\partial x} \simeq \sin \alpha(x, t) \simeq \alpha(x, t)$, et $\cos \alpha(x, t) \simeq 1$. Ainsi, la longueur de l'élément de fouet est

$$dl = \frac{dx}{\cos \alpha} \simeq dx, \quad (4)$$

et sa masse est

$$dm = \rho S(x)dl \simeq \rho S(x)dx. \tag{5}$$

Les forces qui s'appliquent sur la portion de corde sont les forces de tension \vec{T} , à chaque extrémité de la portion considérée, dirigées de manière tangente à la corde, et le poids \vec{P} , que l'on suppose négligeable devant les forces de tension. On peut projeter ces dernières, et on obtient

$$\begin{cases} \vec{T}(x, t) = -T(x, t) (\cos \alpha(x, t)\vec{e}_x + \sin \alpha(x, t)\vec{e}_z), \\ \vec{T}(x + dx, t) = T(x + dx, t) (\cos \alpha(x + dx, t)\vec{e}_x + \sin \alpha(x + dx, t)\vec{e}_z). \end{cases} \tag{6}$$

Afin de rendre compte le plus simplement possible de la variation de la section, on peut supposer que la norme de la tension est proportionnelle à la section au point x , c'est-à-dire de la forme

$$T(x, t) = t_0 S(x). \tag{7}$$

On peut alors écrire le principe fondamental de la dynamique projeté dans la direction z , et on obtient

$$\rho S(x)dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x + dx, t) - T(x, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x, t), \tag{8}$$

et en faisant les développements limités habituels, on obtient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{t_0}{\rho} \frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \frac{\partial z}{\partial x} \right). \tag{9}$$

Si S est constant, on retrouve bien l'équation de d'Alembert, et on pose donc $c_s = \sqrt{\frac{t_0}{\rho}}$, de telle sorte que l'équation précédente s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S(x)} \frac{\partial z}{\partial x} \right). \tag{10}$$

Les plus observateurs et observatrices auront reconnu l'équation du pavillon acoustique.

3. Pour pouvoir manipuler l'équation, il faut préciser une forme pour la section. On peut tout d'abord développer l'équation (10), et on obtient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right). \tag{11}$$

Dans le but d'avoir une équation linéaire à coefficients constants, on peut demander que

$$\frac{1}{S(x)} \frac{\partial S}{\partial x} = \text{cste}. \tag{12}$$

Ce qui donne un profil exponentiel pour S . Ainsi, afin de respecter la géométrie du fouet, on choisit

$$S(x) = S_0 \exp(-\alpha x).$$

Avec ce choix, on peut réécrire l'équation d'onde sous la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial y}{\partial x} \right). \tag{14}$$

4. Dans la suite, nous allons étudier l'évolution d'un paquet d'onde le long du fouet. Pour cela, nous allons commencer par chercher la relation de dispersion pour une onde plane progressive dans le sens des x croissants, sous la forme $z(x, t) = z_0 \exp(i(\omega t - kx))$. En remplaçant dans l'équation (14), on obtient

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - c_0^2 \alpha i k,$$

et donc le milieu est dispersif. Ensuite, il est naturel de s'intéresser aux vitesses de groupe et de phase, et il va donc nous falloir exprimer $k(\omega)$. Le plus simple est de séparer les parties réelles

et imaginaires du vecteur d'onde, que l'on écrit sous la forme $k = k' + ik''$. En remplaçant dans la relation de dispersion, on obtient alors

$$k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' - \alpha(ik' - k'') - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0. \quad (16)$$

Puisque ω , k' et k'' sont réels, on peut séparer les parties réelles et imaginaires de l'équation précédente, et obtenir

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 + \alpha k'' - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0, \\ k'(2k'' - \alpha) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

De la seconde équation, on tire facilement $k'' = \frac{\alpha}{2}$. On peut ensuite remplacer dans la première, pour obtenir

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow k' = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\alpha^2}{4}}. \quad (18)$$

Afin de ne conserver que la solution qui se propage dans le sens des x croissants, on choisit la solution avec un signe positif, et finalement on obtient

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\alpha^2}{4}} + i\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} + i\frac{\alpha}{2}. \quad (19)$$

où l'on a fait apparaître une pulsation de coupure $\omega_c = \frac{\alpha}{2}$. L'amplitude d'une onde monochromatique va augmenter le long du fouet : en effet, supposons qu'un opérateur impose une telle onde en $x = 0$, avec une amplitude z_0 , alors le mouvement en $x = L$ sera donné par

$$z(L, t) = z_0 \cos \left(\omega t - \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} L \right) \exp \left(\frac{\alpha}{2} L \right), \quad (20)$$

et donc la vitesse de l'extrémité est donnée par

$$v(L, t) = \frac{\partial z}{\partial t}(L, t) = -z_0 \omega \sin \left(\omega t - \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} L \right) \exp \left(\frac{\alpha}{2} L \right). \quad (21)$$

Ainsi, en choisissant correctement α à L donné, il est possible d'obtenir une vitesse dépassant le mur du son. Cherchons à estimer la variation de section entre le début et la fin du fouet nécessaire au claquement du fouet. Comme ordre de grandeur, on peut supposer que la vitesse du bras qui actionne le fouet est de l'ordre de $v_0 \simeq 15 \text{ m.s}^{-1}$. Pour que le bout du fouet atteigne une vitesse de l'ordre de $c \simeq 340 \text{ m.s}^{-1}$, il est nécessaire que

$$v_0 \exp \left(\frac{\alpha L}{2} \right) = c, \quad (22)$$

ce qui donne une valeur $\alpha \simeq 3.5 \text{ m}^{-1}$. On peut alors supposer que le diamètre du fouet à l'extrémité que l'on tient est de l'ordre de $d_0 = 5 \text{ cm}$. Dans ce cas et en notant $r_0 = \frac{d_0}{2}$, la section au bout de la corde est de l'ordre de

$$S(L) = \pi r_0^2 \exp(-\alpha L) = 1.7 \text{ mm}^2, \quad (23)$$

ce qui correspond à un diamètre de l'ordre de $d(L) \simeq 1.5 \text{ mm}$, ce qui semble être un ordre de grandeur raisonnable.

En conclusion, un simple modèle de corde vibrante à section variable nous permet de rendre compte de la croissance de la vitesse verticale le long du fouet, jusqu'à potentiellement dépasser la vitesse du son et provoquer le claquement caractéristique du fouet. Un tel modèle pourrait être largement complexifié. D'une part, il est clair qu'un opérateur n'envoie pas une onde monochromatique, mais plutôt un paquet d'ondes dont on pourrait étudier l'évolution. Finalement, un modèle plus complet pourrait prendre en compte des modifications structurelles plus complexes de la forme du fouet, par exemple en considérant des enroulements.