

Réf. : D1322 V1

Date de publication : 10 février 2014

Éléments sur la théorie des lignes de transmission

Cet article est issu de : Énergies | Conversion de l'énergie électrique

par Bernard DÉMOULIN

Mots-clés

ligne de transmission | équation d'onde | impédance caractéristique | phénomène de propagation | paramètres S | télécommunications | Ingénierie électronique | mesures | transmission de données **Résumé** L'article propose tout d'abord une initiation à la théorie des lignes de transmission. Est abordé ensuite le calcul des paramètres primaires d'une ligne, ainsi que l'analyse de la propagation TEM. Il s'intéresse ensuite à la résolution de l'équation d'onde appliquée aux ondes stationnaires entretenues par des signaux sinusoïdaux, puis traite la question des dissipations d'énergie et l'usage de théories spécifiques au calcul de la réponse transitoire d'une ligne et de sa caractérisation physique en termes de paramètres S.

Keywords

transmission line | wave equation | characteristic impedance | propagation phenomena | S parameters | telecommunications | Electronic engineering | measurements | data transmission



Pour toute question : Service Relation clientèle Techniques de l'Ingénieur Immeuble Pleyad 1 39, boulevard Ornano 93288 Saint-Denis Cedex

Par mail : infos.clients@teching.com Par téléphone : 00 33 (0)1 53 35 20 20 **Abstract** This article organized about five main sections deals with a simple approach of the transmission line theory. Section one introduces the per unit length parameters of the line and the TEM wave concept. Sections two and three describe the wave equation and the solutions expressed in terms of standing waves generated under a steady sine wave excitation. Sections four and five insert the power losses and the description of other theoretical approaches leading to the computation of the line transient response and its physical characterization according to the usual S parameters matrix.

Document téléchargé le : **11/04/2022** Pour le compte : **7200039662 - ens paris saclay** // **195.221.160.4**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

Éléments sur la théorie des lignes de transmission

par Bernard DÉMOULIN

Professeur émérite Université Lille 1, Groupe Telice de l'IEMN, UMR CNRS 8520

D 1 32	2 - 2
—	3
—	4
—	5
—	7
_	8
—	8
—	9
—	10
—	12
_	13
—	13
—	16
—	17
—	18
_	19
—	20
—	21
_	23
—	23
—	23
—	25
—	32
_	33
Doc. D	1 322
	D 1 32

L'évolution des technologies électroniques et des procédés de télécommunications apporte aujourd'hui un regard nouveau sur la **théorie des lignes de transmission**. Deux exemples empruntés à des échelles géométriques volontairement opposées révèlent tout à fait bien le contexte.

Commençons par les circuits élaborant des signaux logiques sous des temps de transit s'approchant de la picoseconde. Il est maintenant bien établi que la conception de ces circuits ne peut être efficacement maîtrisée qu'en faisant intervenir les phénomènes de propagation. Dans ce cas, les mécanismes de propagation agissent principalement sur l'**intégrité des signaux** transportés sur des connexions de dimensions minuscules. Bien que réalisable sous l'assistance de simulations produites par logiciel, le travail d'analyse exige accessoirement un effort d'interprétation physique facilité par la théorie des lignes.

À l'autre extrémité se situent les **télécommunications à courants porteurs**. Ces systèmes plus connus sous l'acronyme anglais de PLC (**Power Line Communications**) risquent d'apparaître à brève échéance sur les réseaux d'énergie électrique de bâtiments et de véhicules les plus divers. Comme précédemment, l'usage d'outils de simulations, aussi perfectionnés soient-ils, demande fréquemment un niveau élémentaire de compréhension physique assez bien restitué par la théorie, telle que décrite et développée dans l'article.

Il est certain que d'autres extensions de l'usage de la théorie des lignes sont envisageables, notamment, pour les études de **compatibilité électromagnétique** ou d'autres domaines des sciences appliquées dans lesquels se propagent des signaux selon une **seule dimension de l'espace**.

L'article, structuré en cinq sections, a donc pour vocation première de fournir au lecteur les rudiments de la théorie des lignes. L'approche rudimentaire n'exclut cependant pas l'outil mathématique. Nous verrons à maintes reprises que l'examen et l'analyse des équations facilitent considérablement la compréhension de subtilités physiques. Au descriptif de l'article brièvement résumé ci-après, il convient de préciser que l'analyse est présentement restreinte à des **sources de signaux** et à des **charges aux comportements linéaires**.

La première section consacrée aux **bases physiques** accordera une place importante aux questions de terminologie et de positionnement du sujet par rapport aux théories classiques de l'électrocinétique et de l'électromagnétisme.

La deuxième section portera principalement sur la mise en place de l'équation d'onde et de solutions analytiques relatant les phénomènes de propagation engendrés sur une ligne. Nous verrons à cette occasion le rôle majeur dévolu à la dimension longitudinale de la ligne, à la longueur d'onde, ainsi qu'à l'impédance caractéristique.

La troisième section aborde le problème de la génération des **ondes station naires**. Ces phénomènes rencontrés sur des lignes soumises à des **signaux sinusoïdaux entretenus** seront comme précédemment relatés par l'outil analytique. Des investigations également inspirées d'exemples permettront de différencier plusieurs classes de fonctionnement des lignes.

La quatrième section traite la question des **dissipations d'énergie** introduites dans les conducteurs composant la ligne, ainsi que la matière diélectrique utilisée pour leur isolement. Le calcul de la **constante de propagation complexe** sera entrepris dans sa formulation la plus générale, puis simplifié pour l'usage conventionnel. Les simplifications aboutiront au calcul de l'**atténuation d'une ligne** engendrée par la seule contribution de la **résistance haute fréquence** des conducteurs.

La cinquième section, la plus volumineuse de l'article, aborde la théorie des lignes sous d'autres formalismes que ceux examinés dans les paragraphes précédents. Dans l'ordre chronologique seront ainsi exposés, le formalisme de l'impédance d'entrée, le formalisme matriciel, le formalisme symbolique puis le formalisme des paramètres S.

La section consacrée au formalisme symbolique appliqué au calcul de la **réponse transitoire d'une ligne** paraîtra probablement plus ardu que d'autres parties de l'article. Cet aspect de la théorie des lignes était toutefois incontournable pour dissocier avec réalisme physique les **régimes transitoires** du **régime entretenu**, car par tradition, cet aspect est souvent occulté !

La lecture de l'article n'exige pas de connaissances préalables approfondies, hormis quelques bases sur l'électromagnétisme et la théorie des circuits. En l'absence de ces notions minimales, le lecteur trouverait alors avantage à consulter les articles [E 1 020] et [E 104].

1. Bases physiques de la théorie des lignes

Au même titre que la théorie des circuits électriques dont elle est issue, la théorie des lignes de transmission adopte un vocabulaire et des conventions de notations qu'il est indispensable de bien maîtriser. Ce premier paragraphe subdivisé en quatre parties est donc voué à l'examen de diverses définitions et situations propices à l'énoncé de quelques termes propres aux lignes de transmission. En tout premier lieu, on s'intéressera aux propriétés géométriques d'une ligne, ainsi qu'aux critères d'uniformité permettant de définir les **paramètres électriques primaires** contenus dans les concepts d'inductance et de capacité linéiques. Une deuxième partie concernera la **ligne coaxiale** dont la structure géo métrique particulièrement simple permettra de découvrir des **rela**tions de dualités spécifiques à toute ligne de transmission. Dans une troisième partie, l'analyse précédente sera étendue à d'autres structures géométriques, notamment la **ligne bifilaire** et la **ligne monofilaire** composée d'un conducteur parallèle à un plan métallique. En quatrième partie sera abordée une question beaucoup plus fondamentale reliée aux conditions de propagation de l'onde transverse électromagnétique (TEM).

1.1 Propriétés géométriques et physiques d'une ligne uniforme

Le terme « ligne de transmission » s'adresse à des circuits électriques filiformes comprenant dans leur présentation la plus courante deux conducteurs. L'adjectif filiforme signifie que la distance entre les conducteurs reste très inférieure à la dimension longitudinale du circuit. De plus, par comparaison avec les circuits électriques usuels où la transition des signaux de l'entrée vers la sortie est supposée instantanée ; dans une ligne de transmission, on fait intervenir le temps de propagation des signaux, et consécutivement, des courants et tensions auxquels ils seront attachés. La mise en place de la propagation dans les lignes s'effectue par la résolution d'une équation tout à fait similaire aux équations d'onde rencontrées en acoustique, en optique, ou plus généralement en électromagnétisme. L'équation d'onde sera étudiée dans le deuxième paragraphe.

Dans la suite de ce premier paragraphe seront examinées les principales propriétés d'une ligne uniforme et, plus spécialement, la définition des paramètres primaires ainsi que les conventions adoptées pour représenter courants et tensions.

1.1.1 Paramètres primaires d'une ligne de transmission

L'illustration de la figure **1** décrit un tronçon de ligne de transmission constituée de deux conducteurs identiques et parallèles de diamètre *d* portant les repères **1** et **2**. Les conducteurs espacés de la distance d_{12} possèdent pour dimension longitudinale commune L_0 .



Figure 1 – Illustration d'un tronçon de ligne uniforme de dimension longitudinale L_0 constitué de deux conducteurs parallèles de diamètres d identiques espacés de d_{12}

Propriétés de la ligne uniforme

Une **ligne uniforme** signifie que la distance d_{12} des conducteurs et leurs diamètres d, ou plus généralement, la géométrie transversale, demeurent invariants quelle que soit la position d'un observateur situé sur le tronçon L_0 . Cette propriété peut être étendue à toute valeur de L_0 .

D'autre part, une ligne se différencie d'un circuit électrique classique dès que les paramètres géométriques transversaux demeurent très inférieurs à la dimension longitudinale, soit pour la ligne présentée figure **1** : d, $d_{12} << L_0$.

Paramètres primaires d'une ligne uniforme

La théorie générale des circuits électriques appliquée à la ligne décrite en figure **1**, ou à d'autres configurations géométriques, attribue aux deux conducteurs ainsi constitués une inductance $L_{\rm B}$ et une capacité $C_{\rm B}$, l'indice B s'adresse à la ligne bifilaire.

Les inductances linéiques désignées par le symbole L et capacités linéiques par le symbole C, sans discrimination d'indices correspondent aux inductances et capacités rapportées à l'unité de dimension longitudinale, soit pour l'exemple illustré figure **1** :

$$L = \frac{L_{\rm B}}{L_0}$$
 et $C = \frac{C_{\rm B}}{L_0}$

avec $L_0 \gg d_{12}$, d.

Sachant que $L_{\rm B}$ prend pour unité le Henry (H) et $C_{\rm B}$ le Farad (F), L s'exprimera en H/m et C en F/m. Habituellement, on adopte des unités sous-multiples, pour une ligne usuelle, on trouve les ordres de grandeur suivants :

$$L \cong 200 \text{ nH/m et } C \cong 100 \text{ pF/m} (1 \text{ nH} = 10^{-9} \text{ H et } 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F})$$

Il est important de rappeler que l'usage des paramètres primaires *L* et *C* suppose la dimension longitudinale de la ligne très supérieure aux dimensions transversales : $L_0 \gg d_{12}$, *d*. Sans le respect de cette condition, les calculs seraient entachés d'erreurs dues aux effets d'extrémités de la ligne.

Pour l'instant, la ligne sera admise composée de conducteurs électriques parfaits, c'est-à-dire élaborés dans un matériau hypothétique de conductivité électrique infinie. On supposera également les conducteurs dépourvus de gaines isolantes, ce qui équivaut à dire que le milieu environnant les conducteurs est uniquement constitué par l'air.

L'inductance linéique L et la capacité linéique C composent ainsi les seuls paramètres primaires de la ligne. Nous verrons dans le déroulement du paragraphe 4 consacré à l'impact des pertes énergétiques, que l'on peut accessoirement ajouter deux paramètres primaires complémentaires constitués par la résistance linéique Rdes conducteurs et dans certains cas, la conductance linéique G du diélectrique formant l'isolement artificiel des conducteurs **1** et **2**.

1.1.2 Conventions d'orientations des courants et tensions

La figure **2** représente le schéma d'une ligne de transmission munie de repères géométriques appropriés. L'origine O de la ligne, généralement confondue avec le générateur de signaux, s'intitule le **plan d'entrée**. L'axe Oz prenant le plan d'entrée de la ligne pour origine permet de fixer la coordonnée longitudinale z. Le **plan de sortie** de la ligne correspond à l'extrémité de coordonnée $z = L_0$, où L_0 représente la dimension longitudinale.

Les signaux transportés sur la ligne se manifesteront par des courants et tensions assimilés à des fonctions des deux variables *z* et *t*, où *z* représente la coordonnée longitudinale et *t* le temps.

Si le conducteur portant le repère **2** forme la référence de potentiel, le signal tension donné par la fonction v(z, t) doit être

métrique particulièrement simple permettra de découvrir des **relations de dualités** spécifiques à toute ligne de transmission. Dans une troisième partie, l'analyse précédente sera étendue à d'autres structures géométriques, notamment la **ligne bifilaire** et la **ligne monofilaire** composée d'un conducteur parallèle à un plan métallique. En quatrième partie sera abordée une question beaucoup plus fondamentale reliée aux conditions de propagation de l'**onde transverse électromagnétique** (TEM).

1.1 Propriétés géométriques et physiques d'une ligne uniforme

Le terme « ligne de transmission » s'adresse à des circuits électriques filiformes comprenant dans leur présentation la plus courante deux conducteurs. L'adjectif filiforme signifie que la distance entre les conducteurs reste très inférieure à la dimension longitudinale du circuit. De plus, par comparaison avec les circuits électriques usuels où la transition des signaux de l'entrée vers la sortie est supposée instantanée ; dans une ligne de transmission, on fait intervenir le temps de propagation des signaux, et consécutivement, des courants et tensions auxquels ils seront attachés. La mise en place de la propagation dans les lignes s'effectue par la résolution d'une équation tout à fait similaire aux équations d'onde rencontrées en acoustique, en optique, ou plus généralement en électromagnétisme. L'équation d'onde sera étudiée dans le deuxième paragraphe.

Dans la suite de ce premier paragraphe seront examinées les principales propriétés d'une ligne uniforme et, plus spécialement, la définition des paramètres primaires ainsi que les conventions adoptées pour représenter courants et tensions.

1.1.1 Paramètres primaires d'une ligne de transmission

L'illustration de la figure **1** décrit un tronçon de ligne de transmission constituée de deux conducteurs identiques et parallèles de diamètre *d* portant les repères **1** et **2**. Les conducteurs espacés de la distance d_{12} possèdent pour dimension longitudinale commune L_0 .



Figure 1 – Illustration d'un tronçon de ligne uniforme de dimension longitudinale L_0 constitué de deux conducteurs parallèles de diamètres d identiques espacés de d_{12}

Propriétés de la ligne uniforme

Une **ligne uniforme** signifie que la distance d_{12} des conducteurs et leurs diamètres d, ou plus généralement, la géométrie transversale, demeurent invariants quelle que soit la position d'un observateur situé sur le tronçon L_0 . Cette propriété peut être étendue à toute valeur de L_0 .

D'autre part, une ligne se différencie d'un circuit électrique classique dès que les paramètres géométriques transversaux demeurent très inférieurs à la dimension longitudinale, soit pour la ligne présentée figure **1** : d, $d_{12} << L_0$.

Paramètres primaires d'une ligne uniforme

La théorie générale des circuits électriques appliquée à la ligne décrite en figure **1**, ou à d'autres configurations géométriques, attribue aux deux conducteurs ainsi constitués une inductance $L_{\rm B}$ et une capacité $C_{\rm B}$, l'indice B s'adresse à la ligne bifilaire.

Les inductances linéiques désignées par le symbole L et capacités linéiques par le symbole C, sans discrimination d'indices correspondent aux inductances et capacités rapportées à l'unité de dimension longitudinale, soit pour l'exemple illustré figure **1** :

$$L = \frac{L_{\rm B}}{L_0}$$
 et $C = \frac{C_{\rm B}}{L_0}$

avec $L_0 \gg d_{12}$, d.

Sachant que $L_{\rm B}$ prend pour unité le Henry (H) et $C_{\rm B}$ le Farad (F), L s'exprimera en H/m et C en F/m. Habituellement, on adopte des unités sous-multiples, pour une ligne usuelle, on trouve les ordres de grandeur suivants :

$$L \cong 200 \text{ nH/m et } C \cong 100 \text{ pF/m} (1 \text{ nH} = 10^{-9} \text{ H et } 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F})$$

Il est important de rappeler que l'usage des paramètres primaires *L* et *C* suppose la dimension longitudinale de la ligne très supérieure aux dimensions transversales : $L_0 \gg d_{12}$, *d*. Sans le respect de cette condition, les calculs seraient entachés d'erreurs dues aux effets d'extrémités de la ligne.

Pour l'instant, la ligne sera admise composée de conducteurs électriques parfaits, c'est-à-dire élaborés dans un matériau hypothétique de conductivité électrique infinie. On supposera également les conducteurs dépourvus de gaines isolantes, ce qui équivaut à dire que le milieu environnant les conducteurs est uniquement constitué par l'air.

L'inductance linéique L et la capacité linéique C composent ainsi les seuls paramètres primaires de la ligne. Nous verrons dans le déroulement du paragraphe 4 consacré à l'impact des pertes énergétiques, que l'on peut accessoirement ajouter deux paramètres primaires complémentaires constitués par la résistance linéique Rdes conducteurs et dans certains cas, la conductance linéique G du diélectrique formant l'isolement artificiel des conducteurs **1** et **2**.

1.1.2 Conventions d'orientations des courants et tensions

La figure **2** représente le schéma d'une ligne de transmission munie de repères géométriques appropriés. L'origine O de la ligne, généralement confondue avec le générateur de signaux, s'intitule le **plan d'entrée**. L'axe Oz prenant le plan d'entrée de la ligne pour origine permet de fixer la coordonnée longitudinale z. Le **plan de sortie** de la ligne correspond à l'extrémité de coordonnée $z = L_0$, où L_0 représente la dimension longitudinale.

Les signaux transportés sur la ligne se manifesteront par des courants et tensions assimilés à des fonctions des deux variables *z* et *t*, où *z* représente la coordonnée longitudinale et *t* le temps.

Si le conducteur portant le repère **2** forme la référence de potentiel, le signal tension donné par la fonction v(z, t) doit être



Figure 2 - Convention de représentation des courants et tensions en un point de coordonnée longitudinale z quelconque



Figure 3 - Illustration des paramètres géométriques, des courants et tensions des champs magnétique et électrique attachés à une ligne coaxiale

conforme à l'orientation choisie sur la figure **2**. Le signal courant déterminé par la fonction i(z, t) sera fixé et orienté selon la flèche portée sur le conducteur **1**. Le retour du courant s'effectue par le second conducteur **2** avec une orientation évidemment opposée à la précédente, mais absente de la figure **2**.

Toutes ces définitions préliminaires étant admises, le contenu du prochain paragraphe sera exclusivement consacré à la ligne coaxiale.

1.2 Cas particulier de la ligne coaxiale

La symétrie de révolution de la ligne coaxiale facilite considérablement l'analyse physique en vue de la détermination de l'inductance linéique et de la capacité linéique. À cet argument s'ajoute l'usage très répandu de la ligne coaxiale en tant que composant destiné à transmettre des signaux de fréquences très élevées, pouvant atteindre et même dépasser quelques gigahertz.

1.2.1 Description géométrique et physique

La figure **3** comporte trois épures géométriques d'une ligne coaxiale relatant les paramètres dimensionnels (figure **3***a*), les

conventions d'orientation des courants et tensions (figure **3***b*), l'orientation du champ magnétique H_{θ} lié au courant *i*(*z*, *t*) et du champ électrique E_{ρ} lié à la tension *v*(*z*, *t*) (figure **3***c*).

Analyses détaillées des paramètres géométriques

L'élément prenant l'indice **1** constitue le conducteur intérieur de diamètre *d*, l'élément **2** concentrique au précédent, le conducteur extérieur où retourne le courant. Le conducteur extérieur possède pour diamètre interne *D* et pour épaisseur *e*. L'orientation choisie pour la tension (figure **3b**) signifie que l'élément **2** forme la référence de potentiel.

Il sera admis pour l'instant que l'espace entre les conducteurs est exempt de tout matériau diélectrique.

On procédera au calcul du **champ magnétique** H_{θ} et du **champ électrique** E_{ρ} en tout point **P** intérieur au domaine cylindrique vide entre **1** et **2**. Les résultats du calcul seront utiles pour la détermination de l'inductance linéique *L* et de la capacité linéique *C*.

E Calcul du champ magnétique H_{θ}

Considérons le fonctionnement en régime statique attribuant au courant une valeur $i(z, t) = I_0$ invariante dans le temps et dans la direction longitudinale. Sachant que le conducteur extérieur est constitué d'un tube homogène dépourvu d'ouvertures, le champ

magnétique engendré par le courant de retour dans **2** sera strictement nul. Ce comportement physique suppose évidemment une densité de courant uniforme dans toute la section du conducteur. En conséquence, il ne subsiste dans la ligne coaxiale que le champ magnétique produit par le courant circulant sur le conducteur intérieur **1**. Le courant I_0 va donc générer une composante angulaire H_{θ} de champ magnétique répondant au critère de *symétrie de révolution*, c'est-à-dire invariante avec la variable angulaire θ précisée à la figure **3***c*. Le régime statique autorise alors l'usage du théorème d'Ampère formulé ci-dessous :

$$\int_{0}^{2\pi} H_{\theta} \rho d\theta = I_{0} \rightarrow H_{\theta} = \frac{I_{0}}{2\pi\rho}$$
(1)

Le calcul de l'intégrale étant immédiat, on extrait l'expression de H_{θ} figurant à droite de l'équation (1).

Calcul du champ électrique *E*_p

L'hypothèse statique consiste cette fois à soumettre la ligne à une tension invariante avec z et t, c'est-à-dire, v (z, t) = V₀. Pour un tronçon de ligne coaxiale de dimension unité, $L_0 = 1$ m, V_0 engendre sur le conducteur intérieur **1** la quantité de charges électriques Q_1 . On relie Q_1 à la capacité linéique C de la ligne par le produit, $Q_1 = CV_0$. La tension V_0 et la composante de champ électrique E_ρ orientée suivant la direction radiale ρ étant liées par le théorème de Gauss, les orientations choisies pour V_0 et E_ρ permettent d'écrire :

$$\int_{0}^{2\pi} E_{\rho} \rho d\theta = -\frac{Q_{1}}{\varepsilon_{0}} \rightarrow E_{\rho} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_{0}} \frac{CV_{0}}{\rho}$$
(2)

Les propriétés de symétries de révolution du champ électrique amenant une résolution immédiate de l'intégrale, $E_{\rm p}$ est donc déterminé par la formule figurant à droite de l'équation (2). Dans cette expression apparaît la permittivité absolue du vide prenant pour valeur approchée $\varepsilon_0 \cong (1/36\pi) \times 10^{-9}$ F/m.

1.2.2 Calcul de l'inductance linéique de la ligne coaxiale

Appelons Φ le **flux magnétique** engendré sur l'unité de dimension longitudinale par la composante de champ magnétique intérieure à la ligne coaxiale. L'inductance linéique *L* sera donc reliée au courant I_0 défini précédemment par la loi de l'auto-induction $\Phi = LI_0$.

Après usage de l'expression (1) fournissant ${\it H}_{\rm \theta},$ on parvient à l'intégrale :

$$\Phi = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi} \int_{d/2}^{D/2} \frac{d\rho}{\rho} = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \rightarrow L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$
(3)

La détermination de la primitive étant immédiate, on déduit aisément l'expression de l'inductance linéique *L* portée à droite de l'équation (3). Dans le résultat apparaît la perméabilité magnétique absolue du vide prenant pour valeur $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

1.2.3 Calcul de la capacité linéique de la ligne coaxiale

La tension statique V_0 appliquée entre le conducteur extérieur **2** et le conducteur intérieur **1** de la ligne coaxiale peut être reliée à la composante radiale E_{ρ} de champ électrique par deux expressions distinctes. La première établie par l'application du théorème de

Gauss figure dans l'équation (2). La seconde expression n'est autre que la définition de la différence de potentiel établie par l'intégrale :

$$V_0 = -\int_{d/2}^{D/2} E_{\rho} d\rho = \frac{CV_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$
(4)

De ce calcul, on extrait sans peine la valeur de la capacité linéique figurant à droite de l'équation (4).

Quand la ligne coaxiale est remplie d'un isolant homogène, ce qui est forcément le cas lors de l'utilisation rationnelle de câbles coaxiaux, il peut être montré que la capacité linéique *C* prend pour valeur :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$
(5)

Au numérateur de la formule figure la permittivité électrique relative ϵ_r du diélectrique constituant l'isolant.

Exemple de valeurs numériques de L et C

Prenons un câble coaxial ayant pour caractéristiques géométriques D = 4 mm et d = 1 mm, l'isolant est constitué de polyéthylène prenant pour permittivité électrique relative $\varepsilon_r = 2,35$. De la relation (3), on en déduit L = 277 nH/m pour l'inductance linéique, l'expression (5) donne C = 94 pF/m pour la capacité linéique.

Dualité des relations exprimant L et C

En formant le produit des relations (3) et (4), les logarithmes contenant les paramètres géométriques transversaux de la ligne s'éliminent pour ne laisser, que le produit des constantes physiques μ_0 , ϵ_0 , soit :

$$LC = \mu_0 \varepsilon_0 \tag{6}$$

Pour lier une propriété fondamentale des lignes à cette relation, exprimons la valeur approchée de la vitesse de la lumière c dans le vide (air) établie selon la formule (7) :

$$c \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m/s}$$
 où $\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{36 \,\pi} \times 10^{-9} \,\mathrm{F/m}$ (7)

La confrontation avec la relation (6) montre tout de suite que le produit *LC* n'est autre que l'inverse de la célérité *c* élevée au carré, soit $LC \cong 1/c^2$. Nous reviendrons sur cette question au cours du prochain paragraphe consacré à la résolution de l'équation d'onde.

1.3 Autres configurations de lignes

Les lignes composées de deux conducteurs parallèles ou torsadés généralement destinées au transport de l'énergie électrique sont d'un usage très répandu. Bien que le transport de l'énergie sous fréquence industrielle de 50 Hz permette de négliger les phénomènes de propagation, cette approximation n'est plus du tout acceptable quand se superposent aux courants forts et aux tensions élevées des signaux hautes fréquences. Ces phénomènes ont généralement diverses origines physiques, ils peuvent être la conséquence de perturbations entretenues par des convertisseurs d'énergie connectées au réseau. Il peut également s'agir de signaux hautes fréquences volontairement injectés sur les lignes d'énergie par des procédés de télécommunications à courants porteurs. Ces raisons incitent par conséquent à préciser les paramètres primaires de la ligne bifilaire et de la ligne monofilaire constituée d'un conducteur localisé à proximité d'un plan métallique. Le paragraphe 1.3 abordera également le rôle des gaines diélectriques constituant l'isolement de ces lignes.



Figure 4 - Description géométrique transversale de la ligne bifilaire

1.3.1 Ligne bifilaire

La figure **4** donne une coupe transversale de la ligne bifilaire constituée de conducteurs de diamètres d_1 et d_2 espacés de d_{12} . Il s'agit de conducteurs parallèles exempts de gaines isolantes.

Il sera plus commode d'exprimer *L* et *C* en fonction des rayons $r_1 = d_1/2$ et $r_2 = d_2/2$.

Formule de l'inductance linéique L

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[\frac{(d_{12} - r_1) (d_{12} - r_2)}{r_1 r_2} \right]$$
(8)

Formule de la capacité linéique C

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\frac{(d_{12} - r_1)(d_{12} - r_2)}{r_1 r_2}\right]}$$
(9)

Notons qu'en présence de deux conducteurs de diamètres identiques, le rayon et le terme comprenant le logarithme s'expriment respectivement r = d/2 et 2 ln $[(d_{12} - r)/r]$.

On retrouve la dualité des expressions (8) et (9) en formant le produit $LC = \mu_0 \varepsilon_0$, cette propriété est commune à toute ligne de transmission immergée dans un milieu homogène.

Recommandation d'usage des formules

Les formules (8) et (9) établies sous l'hypothèse de conducteurs dotés d'une conductivité électrique infinie demandent en pratique quelques précautions d'usage. En réalité, il s'agit de conducteurs composés de matériaux de grande conductivité électrique σ mais non idéalement infinie, tel est le cas du cuivre et de ses alliages où : $\sigma = 5,8 \times 10^{-7}$ S/m. Dans ces conditions réelles d'utilisation, s'il s'avère que les conducteurs sont très proches, c'est-à-dire à une distance comparable à $r_1 + r_2$, la répartition de la densité de courant dans la section des conducteurs cesse d'être uniforme pour se concentrer sur les zones de proximité marquées par les cercles en pointillés rouges de la figure **4**. Cet effet de proximité peut donc contribuer à introduire une dérive des valeurs de *L* et *C* telles qu'établies par les formules (8) et (9).

En conséquence, pour réduire l'erreur systématique due au phénomène de proximité, l'usage des relations (8) et (9) ne s'applique qu'aux lignes composées de conducteurs de faibles rayons r_1 et r_2

rapportés à leur distance mutuelle d_{12} , soit $r_1r_2 \ll d_{12}$.

1.3.2 Conducteur parallèle à un plan métallique

La coupe transversale de la figure **5** donne la structure géométrique d'une ligne composée d'un conducteur cylindrique parallèle à un plan métallique. Le plan est admis de dimensions idéalement infinies.



Figure 5 – Coupe transversale d'une ligne de transmission constituée d'un conducteur cylindrique parallèle à un plan métallique de dimensions infinies

Dans ce contexte, le plan métallique **2** forme la référence de potentiel et assure le retour du courant. Le calcul de l'inductance linéique et de la capacité linéique peut être entrepris à l'aide de la théorie des images électriques exposée dans l'article [E 1 020]. Dans ce cas, la transcription des relations (8) et (9) de la ligne bifilaire fournit directement les valeurs de L et C du conducteur parallèle au plan métallique, comme présenté sur la figure **5**.

Formule de l'inductance linéique L

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{4h-d}{d}\right) \tag{10}$$

Formule de la capacité linéique C

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{4h-d}{d}\right)}$$
(11)

On vérifie que le produit de ces nouvelles expressions conserve la propriété de dualité :

 $LC = \mu_0 \varepsilon_0$

Les précautions d'usage de ces relations nécessitent également le respect de la condition $d \ll h$.

Les pistes de circuits imprimés déposées sur un substrat diélectrique adossé à un plan de masse s'approchent de la configuration de la figure **5**. La mise en place d'expressions analytiques donnant L et C peut être également envisagée au prix d'aménagements tenant compte de la section rectangulaire du conducteur et de la présence du substrat.

Il est important de mentionner que l'assimilation du plan métallique à une surface infinie relève d'une commodité théorique imposée par l'usage des images électriques. En pratique, le plan peut être admis infini dès que sa dimension transversale l_0 portée sur la figure **5** est très supérieure à l'altitude *h* du conducteur. Cette approximation suppose également le conducteur éloigné des bordures du plan.

Une ligne de transmission répondant aux critères géométriques de la figure **5** s'appelle parfois « ligne monofilaire ».

1.3.3 Influence des gaines diélectriques

En règle générale, les conducteurs composant les lignes bifilaires ou monofilaires étudiées en sections précédentes sont revêtus d'une gaine isolante d'épaisseur extrêmement variable. Si le calcul de l'inductance linéique tel que formulé plus haut au paragraphe 1.2.2 demeure inchangé par la gaine isolante, il en va tout autrement pour la capacité linéique.

$$\varepsilon_{\rm req} = \frac{C_n}{2\pi\varepsilon_0} \ln K$$
 (12)

Le paramètre *Cn* correspond ainsi à la valeur de la capacité calculée numériquement et *K* aux rapports des dimensions géométriques transversales telles que libellées dans les expressions (9) ou (11). La propriété de dualité du produit *LC* s'exprime cette fois :

 $LC = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{req}$

Quand les conducteurs sont immergés dans un diélectrique homogène infiniment étendu, de permittivité relative ε_r , il suffit d'introduire directement ε_r dans les relations (9) et (11).

1.4 Restrictions imposées par la propagation TEM

Comme le prouvent les développements effectués pour la ligne coaxiale, les courants et tensions transportés dans une ligne de transmission sont naturellement liés au transport des champs électromagnétiques dans l'espace confiné entre les conducteurs **1** et **2**.

En absence de lignes, ou plus généralement de supports de propagation, le rayonnement d'une source d'énergie électromagnétique se manifeste par des ondes sphériques dispersées dans l'espace à la vitesse de la lumière dans le vide, l'article [E 1 020] restitue ce contexte physique.

Si l'on se limite pour l'instant à une source délivrant des champs animés de variations d'amplitude sinusoïdales telles que $e(t) = Em \sin(\omega t)$ pour le champ électrique et $h(t) = Hm \sin(\omega t)$ pour le champ magnétique et de pulsation ω . On peut joindre aux champs la fréquence f telle que $\omega = 2\pi f$, ainsi que la longueur d'onde λ émanant du rapport $\lambda = c/f$, où c représente la vitesse de la lumière dans le vide, un chiffre proche de 3×10^8 m/s.

L'hypothèse de la **propagation transverse électromagnétique**, désignée par l'abréviation TEM, signifie que le transport des champs électromagnétiques sur un support quelconque, mais rectiligne, ne peut se produire que selon la direction longitudinale. Cette condition élimine évidemment toute composante de champ électrique ou de champ magnétique parallèle à la direction longitudinale du support, soit pour les conventions adoptées sur la figure **3***c Ez* = 0 et *Hz* = 0. La propriété de l'onde TEM ainsi énoncée élimine au sens strict toute onde radiale.

Une ligne de transmission doit satisfaire ce critère. Néanmoins, en fonction de la fréquence de la source et de la géométrie, la propagation peut s'éloigner de ce modèle TEM idéal. Nous allons ci-après analyser qualitativement l'influence des dimensions transversales et des dissipations d'énergie sur la propagation TEM.

1.4.1 Incidence des dimensions transversales de la ligne

Revenons sur la ligne coaxiale de la figure **3a** en faisant abstraction du conducteur intérieur. Sous ce régime, il peut être montré que la propagation des champs E_{ρ} et H_{θ} dans la direction longitudinale Oz n'est possible qu'au-dessus d'une fréquence minimale. Celle-ci est imposée par les conditions de propagation de l'onde radiale dirigée dans la direction du repère O_{ρ} .

Dans ces circonstances, il apparaît que la propagation selon Oz est entretenue dès la mise en résonance de l'onde radiale susmentionnée. Ce phénomène se manifeste quand la longueur d'onde λ satisfait la condition :

$\lambda/2 \cong D$

où D diamètre interne du conducteur tubulaire.

Par la théorie des ondes cylindriques exprimant les champs sous la forme de fonctions de Bessel, on montre que l'entretien de la propagation de l'onde longitudinale dans le tube donne naissance à une composante de champ électrique E_z ou magnétique H_z orientée selon Oz. Le champ longitudinal prend l'amplitude maximale sur l'axe du tube, c'est-à-dire pour r = 0. Ce fonctionnement est donc manifestement étranger à la propagation TEM définie plus haut. On observe une propagation transverse électrique (TE) quand $E_z = 0$ et $H_z \neq 0$, ou transverse magnétique (TM) quand $H_z = 0$ et $E_z \neq 0$. Une analyse plus approfondie montre que les champs, ainsi distribués, dans la section tubulaire de ce guide d'onde sont incompatibles avec l'usage des théorèmes d'Ampère ou de Gauss uniquement applicables aux champs magnétiques et électriques.

Malgré la sévérité de cette restriction, nous allons montrer que la ligne coaxiale satisfait les critères de la propagation TEM pour des fréquences pouvant atteindre et même dépasser le gigahertz.

Introduisons le conducteur intérieur dans le tube de diamètre *D*, sachant qu'il s'agit d'un conducteur parfait, la composante de champ électrique E_z sera forcément nulle sur la surface du conducteur, il en va de même pour H_z . Cela ne signifie pas pour autant l'absence d'onde radiale, car la théorie des ondes cylindriques étendue au guide coaxial révèle la présence des deux composantes E_z et H_z , prenant l'amplitude maximale à une position équidistante du conducteur intérieur et du conducteur extérieur. Toutefois, tant que la longueur d'onde reste très supérieure au diamètre du conducteur extérieur $\lambda \gg D$, la théorie indique que $E_z << E_\rho$. De plus, la propagation de l'onde longitudi-

nale accompagnant le critère $\lambda >> D$ n'est plus tributaire d'une fréquence minimale présentement confondue avec la fréquence nulle, c'est-à-dire le régime statique.

Ce préalable étant satisfait, la ligne coaxiale répond aux conditions de la propagation TEM. Cette propriété peut être transposée sur la ligne bifilaire décrite à la figure **4** ou la ligne monofilaire de la figure **5**. Dans ce cas, la propagation TEM exige

les conditions $\lambda \gg d_{12}$ et $\lambda \gg h$. Il est évident que les diamètres des conducteurs doivent être également très inférieurs à λ .

1.4.2 Incidence des dissipations d'énergie

La question des **dissipations d'énergie** introduite dans la ligne fait l'objet d'approfondissements abordés au paragraphe 4.

Auparavant, essayons d'anticiper la compréhension de ces phénomènes pour établir leur lien avec la condition de propagation TEM. Il est certain que la dissipation thermique engendrée dans la résistance électrique non nulle des conducteurs composant la ligne va compromettre la propagation TEM. Les théories électromagnétiques montrent que la dissipation d'énergie dans les conducteurs composant une ligne coaxiale équivaut à transporter dans la matière une onde orientée suivant la direction radiale, c'est-à-dire dotée d'une composante de champ électrique Ez orientée suivant l'axe Oz. Inversement, le diélectrique faisant office d'isolant de la ligne coaxiale peut faire l'objet de dissipations d'énergie contribuant à l'atténuation des signaux suivant la direction longitudinale Oz. Sous ces conditions, l'énergie transportée dans la ligne coaxiale n'est plus uniformément confinée entre le conducteur intérieur et le conducteur extérieur, la propagation TEM n'est donc plus respectée.

On fera un constat analogue avec la ligne bifilaire ou la ligne monofilaire définie plus haut. Il peut être montré que ces structures ouvertes adoptent un comportement intermédiaire situé entre une antenne rayonnante et un guide d'ondes. Néanmoins, tant qu'il peut être prouvé que la puissance rayonnée par la ligne rapportée à l'unité de dimension longitudinale reste très inférieure à la puissance transportée ou entretenue dans la ligne, l'approximation de la propagation TEM reste acceptable, on parle alors de **propagation quasi TEM**. En présence d'une ligne bifilaire ou mono-

filaire, cette condition rejoint les critères $\lambda >> d_{12}$ et $\lambda >> h$.

2. Équation d'onde et présentation des solutions

Dans le prolongement du paragraphe précédent, le second paragraphe aborde d'autres questions d'ordre fondamental sur le fonctionnement des lignes de transmission. Nous procéderons à la mise en place de l'**équation des télégraphistes** dont la formulation mène naturellement à l'**équation d'onde**. La résolution de l'équation d'onde apportera quelques éclaircissements quant au rôle imparti à la source et à la charge prenant place aux deux extrémités de la ligne. Nous verrons l'intérêt stratégique apporté par la formulation complexe des équations et des solutions. Pour conclure, l'analyse se tournera vers les paramètres secondaires de la ligne, ainsi que sur les concepts d'onde progressive et d'onde rétrograde.

2.1 Équation des télégraphistes

On examinera tout d'abord une démonstration permettant le passage du concept de circuits localisés aux circuits répartis et menant directement à un couple d'équations aux dérivées partielles, communément appelé équation des télégraphistes. Après quelques considérations sur l'élaboration des signaux harmoniques représentés par une fonction complexe, l'équation des télégraphistes sera libellée sous la forme usuelle complexe.

2.1.1 Passage des circuits localisés aux circuits répartis

Un retour sur la figure **2** illustrant un tronçon de ligne de dimension longitudinale L_0 permet d'extraire un sous-tronçon de longueur Δz évidemment très inférieure à L_0 , soit $\Delta z \ll L_0$.

Le tronçon Δz est ainsi assimilable à un quadripôle pour lequel il semble légitime de faire apparaître l'inductance ΔL et la capacité ΔC liés aux paramètres primaires L et C par les relations suivantes :

$$\Delta L = L \Delta z \quad \text{et} \quad \Delta C = C \Delta z \tag{13}$$

La transcription de ce raisonnement peut être portée dans le schéma de la figure **6** sur lequel ont été ajoutées les fonctions i(z, t) et v(z, t) afférentes au signal transporté sur la ligne.

Sous ces conditions, la théorie des circuits électriques mène à la détermination de la chute de tension $\Delta v_{\rm L}$ produite dans l'inductance ΔL , ainsi qu'au courant $\Delta i_{\rm c}$ dérivé dans la capacité ΔC .

La démonstration développée au-dessous montre que la résolution du problème par la théorie des circuits assortie de propriétés mathématiques adéquates mène aux équations des télégraphistes. Nous savons d'après les relations (13) que $\Delta L = L \Delta z$ et $C = C \Delta z$, l'entrée de ces quantités dans les équations précédentes permet d'éliminer le paramètre indéterminé Δz . De plus, la démonstration pouvant être étendue à toute valeur de la variable z_0 située entre z = 0 et $z = L_0$, cette dernière peut être confondue avec z. On parvient alors à la forme temporelle de l'équation des télégraphistes donnée par les relations (20) et (21).

Mise en place de l'équation des télégraphistes

La résolution du circuit de la figure **6** demande la formulation de l'équation des mailles présentement réduite à la relation :

$$\Delta v_{\rm L} = v (z_0, t) - v (z_0 + \Delta z, t)$$
(14)

expression à laquelle correspond l'équation des nœuds :

$$\Delta i_{\rm C} = i (z_0, t) - i (z_0 + \Delta z, t)$$
(15)

Sachant que la dimension du sous-tronçon Δz est très inférieure à la position z_0 de l'observateur, les fonctions $v(z_0 + \Delta z, t)$ et $i(z_0 + \Delta z, t)$ peuvent faire l'objet d'un développement suivant le théorème des accroissements finis, d'où :

$$v(z_0 + \Delta z, t) \cong v(z_0, t) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=z_0} \Delta z + \dots$$
 (16)

$$i(z_0 + \Delta z, t) \cong i(z_0, t) + \left(\frac{\partial i}{\partial z}\right)_{z=z_0} \Delta z + \dots$$
(17)



Figure 6 – Assimilation d'un tronçon de ligne de dimension Δz à un quadripôle

De plus, la tension $\Delta v_{\rm L}$ développée sur l'inductance et le courant $\Delta i_{\rm c}$ dérivé par la capacité sont naturellement liés à la variable temps *t* par les lois de l'induction relatées ci-dessous :

$$\Delta v_{\rm L} = \Delta L \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_{z=z_0} \quad \Delta i_{\rm c} = \left(\frac{\partial \Delta q_{\rm c}}{\partial t}\right)_{z=z_0} \tag{18}$$

Sachant que la quantité de charges Δq_c figurant dans (18) est reliée simplement à $v(z_0, t)$ et ΔC par l'expression $\Delta q_c = v\Delta C$, on pose :

$$\Delta i_{\rm c} = \Delta C \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{z=z_0}$$
(19)

La fusion des relations (14) et (19) mène aux équations portées ci-dessous :

 $-\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right)_{z=z_0} \Delta z = \Delta L \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_{z=z_0}$ $-\left(\frac{\partial i}{\partial z}\right)_{z=z_0} \Delta z = \Delta C \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{z=z_0}$

Sachant que $\Delta C = C\Delta z$ et $\Delta L = L\Delta z$, le paramètre indéterminé Δz s'élimine et l'on parvient à la forme temporelle des équations des télégraphistes présentée ci-dessous.

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$
(20)

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial v}{\partial t}$$
(21)

Il s'agit d'un couple indissociable d'équations aux dérivées partielles.

2.1.2 Fonctions harmoniques complexes

Jusqu'alors, aucune hypothèse n'était formulée quant aux sources de signaux connectées en extrémité de ligne. Sachant que tout signal récurrent ou non peut faire l'objet d'une conversion spectrale, le calcul de la réponse d'une ligne soumise à des signaux sinusoïdaux de pulsation ω , paraît dans ce contexte tout à fait opportun. Admettons qu'il s'agisse d'un générateur délivrant une fem prenant pour expression $e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t)$. Il va être montré que la formulation de la théorie des lignes à l'aide des nombres complexes facilite singulièrement les analyses ultérieures. Dans cette perspective, les principales propriétés des fonctions harmoniques complexes seront introduites. Appelons $e^{j\omega t}$ la fonction harmonique complexe de pulsation ω , la fonction sinusoïdale $e_0(t)$ précédente peut alors s'écrire :

$$e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t) = \ln [E_{0m} e^{j\omega t}]$$
 où $j = \sqrt{-1}$

La notation Im signifie que l'on sélectionne la partie imaginaire de la fonction exponentielle figurant dans cette expression, car la formule de Moivre implique la relation :

 $\mathrm{e}^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$

Sachant que la ligne est connectée à des impédances aux comportements linéaires, les signaux i(z, t) et v(z, t) restitueront des fonctions sinusoïdales de pulsation ω d'amplitude absolue

|I(z)| pour le courant et |V(z)| pour la tension. Les signaux seront dotés d'un terme de phase φ_i pour le courant et φ_v pour la tension, d'où :

$$i(z,t) = |I(z)|\sin(\omega t + \varphi_i)$$
(22)

$$\mathbf{v}(z,t) = |\mathbf{V}(z)|\sin(\omega t + \varphi_v) \tag{23}$$

Les fonctions i(z, t) et v(z, t) données dans les relations (22) et (23) représentent alors la réponse de la ligne en régime entretenu. En réalité, on doit ajouter à ces relations la réponse transitoire de la ligne. Dans la poursuite de l'exposé, nous ferons abstraction de ce phénomène, toutefois au cours du paragraphe 5.3 et, plus particulièrement au § 5.3.6, la question sera approfondie.

Sous le respect de la seule contribution du régime entretenu, rien n'empêche de convertir (22) et (23) en expressions complexes suivantes :

$$i(z,t) = I(z)e^{j\omega t}$$
⁽²⁴⁾

$$\mathbf{v}(z,t) = \mathbf{V}(z)\mathbf{e}^{j\omega t} \tag{25}$$

Dans ces nouvelles formules, I(z) et V(z) représentent deux fonctions complexes que l'on peut éventuellement écrire sous les formes polaires faisant apparaître les termes de phase φ_i et φ_v introduits précédemment :

$$I(z) = |I(z)|e^{j\varphi_i} \quad V(z) = |V(z)|e^{j\varphi_v}$$

2.1.3 Forme complexe de l'équation des télégraphistes

Après entrée dans les équations initiales (20) et (21) des fonctions complexes i(z, t) et v(z, t) établies en (24) et (25), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = jL\omega I \tag{26}$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = jC\omega V \tag{27}$$

Ces nouvelles relations donnent les formes complexes de l'équation des télégraphistes.

Dans la suite, quelques transformations algébriques complémentaires appliquées aux équations (20) et (21) ou (26) et (27) vont mener aux formes temporelles ou complexes de l'équation d'onde.

2.2 Équation d'onde

Cette partie est exclusivement consacrée à la mise en place des phénomènes de propagation engendrés dans une ligne de transmission. Les calculs aboutissent selon l'approche adoptée à isoler i(z, t) ou v(z, t) dans une équation aux dérivées partielles du second ordre initulée **équation d'onde spatio-temporelle**; sinon, si l'on s'adresse aux fonctions complexes $I(z) e^{j\omega t}$ ou $V(z) e^{j\omega t}$, on parvient à une équation d'inde second ordre encore appelée forme complexe de l'équation d'onde.

2.2.1 Forme spatio-temporelle de l'équation d'onde

Procédons sur la seconde équation des télégraphistes, établie en (21), à une dérivée des deux membres suivant la variable *z*, soit :

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = C \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Sachant que lors d'une inversion de l'ordre des dérivées, le résultat demeure inchangé, l'insertion dans le membre de droite de la seconde équation (20) élimine la fonction v(z, t), soit :

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = C \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = -CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

En conséquence, on rassemble l'équation des télégraphistes établie en (20) et (21) dans une seule équation aux dérivées partielles du second ordre figurant ci-dessous et appelée **équation d'onde spatio-temporelle** :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

Présentation usuelle de l'équation d'onde spatio-temporelle

L'équation d'onde établie précédemment peut être présentée sous la forme usuelle (28) contenant le paramètre v_0 homogène à une vitesse, car prenant pour unité physique le mètre par seconde :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{(v_0)^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$
(28)

On déduit immédiatement l'expression de v_0 en procédant au calcul de l'inverse de la racine carrée du produit *LC*, soit :

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{29}$$

On remarquera que l'équation (28) appartient à la famille d'équations des cordes vibrantes où la fonction i(z, t) s'apparente au déplacement vertical des vibrations d'une corde et v_0 la vitesse de propagation des ondes acoustiques. Dans ce cas, v_0 est reliée à la masse volumique de la corde, mais également à la force de traction mécanique. En ce qui concerne la ligne de transmission, nous allons montrer ci-dessous et grâce à la propriété de *dualité* des paramètres primaires que v_0 n'est autre que la célérité.

Lien de l'équation d'onde avec la vitesse v₀ des ondes électromagnétiques

Un retour sur la relation (6) établie en § 1.2.3 rappelle que le produit *LC* prend pour valeur *LC* = $\mu_0 \epsilon_0$. La vitesse de propagation figurant dans la relation (29) est donc fixée par la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, car :

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{30}$$

Si l'on choisit pour ϵ_0 la valeur $(1/36\pi) \times 10^{-9}$ F/m, on trouve $v_0 = 3 \times 10^8$ m/s. En réalité, il s'agit d'une valeur approchée, car la célérité a été décrétée en 1983 rigoureusement égale à 299 792 458 m/s. En effet, cette valeur de référence est aujourd'hui adoptée pour définir le mètre étalon à partir de la mesure extrêmement stable de la seconde fixée par les horloges atomiques.

En conséquence, pour retrouver par l'équation (30) la valeur officielle de la célérité, il faut adopter pour la permittivité électrique absolue ϵ_0 = 8,854187 \times 10 $^{-12}$ F/m. Il est évident que la valeur de la constante de perméabilité magnétique absolue demeure inchangée à μ_0 = 4 π \times 10 $^{-7}$ H/m.

Sauf nécessité de précision, on adopte généralement la valeur approchée de la célérité, c'est sous cette approximation que seront effectués les calculs de longueur d'onde λ entrepris dans la suite de l'article.

Lorsque la ligne est immergée dans un diélectrique homogène de permittivité électrique relative ϵ_r , la vitesse de propagation éta-

blie par l'équation (29) prend pour valeur $v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_r}$.

Inversement, en présence d'une ligne bifilaire ou monofilaire comportant une ou deux gaines diélectriques, on trouve

 $v_0 = c/\sqrt{\epsilon_{req}}$. La permittivité électrique relative équivalente figurant dans cette relation est alors déterminée selon les critères fixés par la relation (12) en § 1.3.3.

Il faut cependant souligner que la valeur de la permittivité électrique relative pouvant évoluer avec la fréquence, il n'est pas rare d'observer une dérive de v_0 , notamment aux fréquences supérieures à 100 MHz.

Équation d'onde duale

Le déroulement du calcul menant à l'équation d'onde aurait pu tout aussi bien se faire en procédant à la dérivée $\partial/\partial z$ de la première équation des télégraphistes (20). Dans ce cas, on parvient à l'équation d'onde (31), duale de la relation (28), car comportant la fonction v(z, t):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{(v_0)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$
(31)

En réalité, il n'existe qu'une seule famille de solutions provenant de l'équation génératrice (28) ou de son équation duale (30). Dans la poursuite de l'article, on adoptera l'équation d'onde (28).

2.2.2 Forme complexe de l'équation d'onde

Rappelons les transcriptions harmoniques complexes de i(z, t) et v(z, t) restreintes au seul régime entretenu de la ligne, soit :

$$i(z,t) = I(z)e^{j\omega t}$$
 et $v(z,t) = V(z)e^{j\omega t}$ (32)

Après insertion de (32) dans l'équation (28), on parvient à l'équation d'onde complexe (33) :

$$\frac{d^2I}{dz^2} + k^2I = 0 \quad \text{où} \quad k = \frac{\omega}{v_0}$$
(33)

C'est une équation différentielle du second ordre dans laquelle figure le nombre d'ondes *k* exprimé par le rapport ω/v_0 .

La forme complexe duale de l'équation (33) s'exprime alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} + k^2 V = 0$$

Les fonctions complexes I(z) et V(z) solutions de l'équation (33) sont par la suite intitulées, fonctions génératrices, car relatant la distribution d'amplitude des courants et tensions selon la coordonnée longitudinale z.

2.3 Solutions de l'équation d'onde

La résolution de l'équation d'onde va donc demander la sélection de l'équation (28) ou de l'équation (33) donnant toutes deux la priorité au courant.

Dans l'immédiat, nous distinguerons les solutions directes du domaine spatio-temporel livrant i(z, t) et v(z, t) et les solutions complexes relatant les fonctions génératrices I(z) et V(z). On se limitera présentement aux formes les plus générales des solutions.

Toutefois, au cours du paragraphe 5 venant conclure l'article, on évoquera d'autres formalismes découlant de propriétés physiques telles que l'impédance d'entrée de la ligne ou de propriétés algébriques empruntées au calcul symbolique ou au calcul matriciel.

2.3.1 Solutions spatio-temporelles directes

On montre facilement que l'équation d'onde en courant présentée sous la forme spatio-temporelle (28) possède pour **solutions générales** :

$$i(z, t) = i_A (z - v_0 t) + i_B (z + v_0 t)$$
 (34)

Le premier terme du membre de droite $i_A (z - v_0 t)$ désigne l'onde progressive de courant, le second terme $i_B (z + v_0 t)$, l'onde rétrograde de courant. Les indices A et B trouveront leur utilité lors du passage aux solutions complexes examinées au prochain paragraphe.

La nature mathématique des fonctions i_A et i_B est pour l'instant inconnue, car dépendante de la source génératrice des signaux. Le passage aux tensions s'effectue simplement par la substitution des symboles v_A et v_B aux symboles i_A et i_B .

D'autres solutions de l'équation d'onde temporelle sont possibles, notamment, par la méthode de séparation de variables menant au calcul des valeurs propres du nombre d'ondes *k*. Cette approche est généralement adoptée dans la résolution de l'équation des cordes vibrantes, car la source génératrice des signaux se situe en un point quelconque de la corde illustrée par exemple, par la position des doigts d'un harpiste ou de l'archet d'un violoncelle. L'ouvrage sur les chambres réverbérantes [12] aborde la résolution aux valeurs propres appropriée aux lignes de transmission. Présentement, la recherche des valeurs propres offre peu d'intérêt, car les sources et charges seront toujours connectées en extrémités de ligne.

2.3.2 Formes complexes des solutions

L'équation différentielle du second ordre (33) possède pour solutions en courant :

$$I(z) = Ae^{-jkz} + Be^{+jkz}$$
(35)

Dans cette expression figure le nombre d'ondes k défini en (33), ainsi que deux constantes A et B pour l'instant indéterminées, on

retrouve le nombre imaginaire $j = \sqrt{-1}$.

Les solutions en tensions V(z) s'obtiennent par la seconde équation des télégraphistes établie en (27), d'où :

$$V(z) = -\frac{1}{jC\omega}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = \frac{k}{C\omega}(\mathrm{Ae}^{-jkz} - \mathrm{Be}^{+jkz})$$

L'examen de l'équation indique que le rapport $k/C\omega$ est homogène à une impédance. Un retour sur l'équation (33) et la fusion

avec $k = \omega \sqrt{LC}$ permet d'introduire l'impédance caractéristique de la ligne Z_c calculée par la racine carée du rapport de l'inductance linéique L et de la capacité linéique C:

$$V(z) = Z_{c} (Ae^{-jkz} - Be^{+jkz}) \quad \text{où} \quad Z_{c} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
(36)

Bien qu'il s'agisse d'une quantité réelle, le symbole Z sera par convention maintenu.

Nous verrons en § 2.4.2 et dans d'autres parties du texte que l'impédance caractéristique joue un rôle fondamental dans le fonctionnement physique des lignes de transmission.

2.3.3 Configuration d'une ligne connectée à une source de signaux

La figure **7** comporte la représentation typique d'une ligne utilisée dans la fonction adoptée pour le transport de signaux. Présentement la ligne est configurée selon l'usage des fonctions génératrices (35) et (36), solutions de l'équation d'onde complexe.

La source de fem E_0 ayant pour impédance interne Z_0 est donc située dans le plan d'entrée de la ligne en z = 0, la charge déterminée par l'impédance Z_1 est localisée dans le plan de sortie en $z = L_0$. La terminologie alternative pour désigner le plan d'entrée ou **Port-1** (figure **7**) et le plan de sortie ou **Port-2** (figure **7**), concernera plus particulièrement l'usage des paramètres S examinés à l'issue du paragraphe 5. Il est également utile de préciser que la fem ici libellée par le symbole E_0 s'adresse à l'amplitude efficace et non à l'amplitude maximale comme tel était le cas en § 2.1.2 où figurait le symbole E_{0m} .



Figure 7 - Ligne de transmission véhiculant des signaux d'une source vers une charge

Méthode générale de calcul des constantes inconnues A et B

Les constantes inconnues A et B entrant dans les solutions générales (35) et (36) résultent de la résolution d'un système d'équations linéaires provenant des conditions de continuité des courants et tensions rencontrées aux deux extrémités de la ligne, soit :

$$V(0) = E_0 - Z_0 I(0)$$
 et $V(L_0) = Z_L I(L_0)$ (37)

Exemple : calcul des solutions I(z) et V(z) pour une ligne ouverte en extrémité

Prenons une source de fem dépourvue d'impédance interne $(Z_0 = 0)$ et une ligne ouverte en extrémité $(Z_L \rightarrow \infty)$. Dans ce cas particulièrement simple, le système (37) s'exprime :

$$V(0) = Z_{c} (A - B) = E_{0}$$
$$I(L_{0}) = A e^{-jkL_{0}} + B e^{+jkL_{0}} = 0$$

La seconde équation permet d'établir un lien entre A et B, soit $B = -Ae^{-2jkL_0}$. L'entrée de B dans la première équation permet

ensuite d'extraire A, d'où A = $(E_0/Z_c)/(1 - e^{-2jkL_0})$.

Après quelques transformations triviales, on parvient aux expressions compactes :

$$I(z) = j \frac{E_0}{Z_c} \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)}$$
(38)

$$V(z) = E_0 \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)}$$
(39)

L'analyse physique entreprise au prochain paragraphe insistera plus particulièrement sur les relations liant ces expressions aux phénomènes d'ondes stationnaires.

Conversion temporelle des solutions complexes

L'insertion de la variable temps dans les solutions générales formulées en (35) et (36) donne pour expressions :

$$\begin{split} &i(z,t) = I(z)\mathrm{e}^{j\omega t} = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-jk(z-v_0t)} + \mathrm{B}\mathrm{e}^{+jk(z+v_0t)} \\ &v(z,t) = V(z)\mathrm{e}^{j\omega t} = Z_{\mathrm{c}}[\mathrm{A}\mathrm{e}^{-jk(z-v_0t)} - \mathrm{B}\mathrm{e}^{+jk(z+v_0t)}] \end{split}$$

Pour les besoins de l'interprétation physique, le produit kv_0 a été substitué à la pulsation ω .

En effet, la confrontation de la première expression avec les solutions spatio-temporelles établies en (34) permet d'écrire :

$$i_{\rm A}(z-v_0t) \equiv {\rm A}\,{\rm e}^{-jk(z-v_0t)}$$
 et $i_{\rm B}(z+v_0t) \equiv {\rm B}\,{\rm e}^{+jk(z+v_0t)}$

L'examen de ces deux formules confirme que les fonctions déterminant l'onde progressive et l'onde rétrograde de courant sont bien tributaires de la nature de la fonction générant la source des signaux, présentement c'est la fonction harmonique $ej\omega t$.

2.4 Paramètres secondaires d'une ligne

Les paramètres secondaires de la ligne directement issus des paramètres primaires L et C seront représentés par le nombre d'ondes k et l'impédance caractéristique Z_c de la ligne. Nous verrons dans les étapes ultérieures de l'article que ces paramètres secondaires jouent un rôle majeur dans la compréhension des phénomènes de propagation. Ainsi, au nombre d'ondes et à la fréquence s'associe la longueur d'onde λ prenant pour unité physique le mètre. Pour cette raison, il sera avantageux de

substituer dans bien des cas la longueur d'onde à la fréquence des signaux. On fera la même constatation à propos de l'impédance caractéristique où il paraîtra occasionnellement intéressant de rapporter les impédances Z_0 et Z_L rencontrées en extrémités de ligne à Z_c .

2.4.1 Nombre d'onde et longueur d'onde

Dans les fonctions génératrices complexes I(z) et V(z) figurent les expressions $e^{\pm jkz}$ où l'exposant de la fonction exponentielle s'apparente à un argument exprimé en radians. Rien ne s'oppose alors à poser $kz = 2\pi (z/\lambda)$ où le scalaire λ , homogène à l'unité de dimension longitudinale est appelé longueur d'onde. La longueur d'onde ainsi définie est donc reliée simultanément à la fréquence *f*, ainsi qu'à la vitesse de propagation v_0 par quatre expressions énoncées ci-dessous :

$$k = \frac{\omega}{v_0} = \omega \sqrt{LC} = \frac{2\pi}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{v_0}{f}$$
(40)

Sachant que la longueur d'onde diminue avec l'accroissement de la fréquence des signaux, nous verrons plus loin que des valeurs particulières du rapport L_0/λ liant la dimension de la ligne à la longueur d'onde permettent de sélectionner des classes de fonctionnement de la ligne en régime d'ondes stationnaires.

2.4.2 Impédance caractéristique de la ligne

Génération de l'onde progressive

Revenons sur le schéma de la ligne établi sur la figure **7** en choisissant pour impédance de charge l'impédance caractéristique, soit $Z_L = Z_c$. L'impédance interne de la source étant nulle $Z_0 = 0$, les conditions aux limites (39) deviennent :

$$Z_{c} (A - B) = E_{0}$$
$$Z_{c} (A e^{-jkL_{0}} - Be^{+jkL_{0}}) = Z_{c} (A e^{-jkL_{0}} + Be^{+jkL_{0}})$$

On trouve immédiatement que B = 0 et A = E_0/Z_c , les fonctions génératrices I(z) et V(z) prennent alors pour expressions respectives :

$$I(z) = \frac{E_0}{Z_c} e^{-jkz} \quad \text{et} \quad V(z) = E_0 e^{-jkz}$$
(41)

Converties dans le domaine temporel, les solutions précédentes mènent aux fonctions :

$$i(z, t) = \frac{E_0}{Z_c} e^{-jk(z-v_0t)} \quad \text{et} \quad v(z, t) = E_0 e^{-jk(z-v_0t)}$$
(42)

La charge Z_{L} constituée par l'impédance caractéristique de la ligne a donc pour conséquence de sélectionner l'onde progressive. On peut alors affirmer qu'en éliminant l'onde rétrograde, l'impédance caractéristique adapte la propagation. Nous verrons que l'impédance de charge Z_{L} ainsi adaptée élimine les ondes stationnaires et consécutivement les mécanismes de résonances étudiés lors du prochain paragraphe.

Notion de front d'onde et de temps de propagation

On appelle **front d'onde** l'amplitude de l'onde progressive de courant ou de la tension acquise aux origines des variables *z* et *t*, soit en *z* = 0 et *t* = 0. Pour le courant établi par la relation (42), le front d'onde prend pour amplitude $I_0 = E_0/Z_c$.

À l'instant $t = t_1$ et pour un observateur situé en $z = z_1$ où

 $0 \leqslant \! z_1 \! \leqslant \! L_0$, l'onde de courant prend l'amplitude complexe :

$$i(z_1, t_1) = I_0 e^{-jk(z_1 - v_0 t_1)}$$

L'observateur situé en z_1 va donc retrouver l'amplitude I_0 du front d'onde à l'instant $t = \theta_1$ vérifiant la condition minimale :

$$z_1 - v_0 \theta_1 = 0 \rightarrow \theta_1 = \frac{z_1}{v_0} \tag{43}$$

Le paramètre θ_1 représente par conséquent le temps de propagation de l'onde de courant pour atteindre la coordonnée z_1 . Corrélativement, on déduit que le rapport $\theta = L_0/v_0$ représente le temps de propagation en ligne.

2.4.3 Problème académique de la ligne de dimension infinie

Avant d'aborder la question de la ligne de dimension infinie, revenons sur la configuration de la ligne adaptée en extrémité afin d'opposer les concepts physiques d'onde progressive et d'onde rétrograde.

Concept physique d'onde rétrograde

Dans le contexte de la ligne connectée sur impédance caractéristique, permutons les positions du générateur idéal de fem E_0 et de charge Z_c . Appelons O'z' un nouveau repère prenant pour origine l'extrémité de la ligne antérieurement connectée sur Z_c , c'est-à-dire, dans l'ancien repère, la position $z = L_0$. Sous ces nouvelles conventions, un observateur situé en z' reçoit une onde progressive prenant pour description analytique :

$$i'(z', t) = (E_0/Z_c)e^{-k(z'-v_0t)}$$

Procédons au changement de variable longitudinale $z' = L_0 - z$, l'expression précédente devient :

$$i'(z,t) = I_0 e^{k(z+v_0t)}$$
 où $I_0 = \frac{E_0}{Z_c} e^{-jkL_0}$ (44)

La relation obtenue répond par conséquent à la définition de l'onde rétrograde introduite dans l'expression primitive (34) tirée de la résolution spatio-temporelle de l'équation d'onde.

Ainsi, le terme Be⁺*jk*(*z*+*v*₀*t*) figurant dans les solutions générales sous excitation harmonique n'est autre que l'onde rétrograde venant d'une *source virtuelle* localisée à l'extrémité de la ligne en *z* = L_0 .

Ligne de dimension infinie

Des considérations précédentes établies sur le concept d'onde rétrograde, on se rend compte immédiatement qu'en présence d'une ligne idéalement infinie, $L_0 \rightarrow \infty$, le front de l'onde rétrograde met une durée infiniment grande pour parvenir à la coordonnée quelconque *z*, car la source virtuelle est rejetée à $L_0 \rightarrow \infty$. En conséquence, pour une ligne infinie le concept d'onde rétrograde est dénué de tout sens physique, on élimine la constante B, d'où :

$$L_0 \to \infty \Rightarrow B = 0$$
 (45)

Suivant ce préalable, seule les ondes progressives telles qu'établies par les expressions (46) concernent une ligne idéalement infinie :

$$i(z, t) = Ae^{-jk(z-v_0t)}$$
 et $v(z,t) = Z_c Ae^{-jk(z-v_0t)}$ (46)

On peut donc conclure que dans l'intervalle $0 \le z \le L_0$ une ligne de dimension L_0 chargée par sa propre impédance caractéristique adopte le comportement d'une ligne de dimension infinie.

Nous verrons dans le § 5.3 que le courant transitoire observé à l'entrée d'une ligne ouverte de dimension finie s'apparente au transitoire observé sur une ligne de dimension infinie. Le phénomène n'est toutefois perceptible qu'aux instants inférieurs à 2 θ , où θ représente le temps de propagation en ligne.

3. Génération des ondes stationnaires

Les ondes stationnaires résultent des interférences engendrées par l'onde progressive et l'onde rétrograde entretenues par une source délivrant des signaux sinusoïdaux. Nous verrons dans ce paragraphe divers aspects du sujet des ondes stationnaires allant de l'examen de leurs propriétés les plus élémentaires jusqu'à des fonctionnements spécifiques de lignes. On abordera la question de la mise en résonance des lignes et, dans une orientation strictement opposée, leur fonctionnement aux longueurs d'ondes très supérieures à leur dimension longitudinale. Pour conclure, la question de la puissance transportée ou entretenue dans une ligne sera abordée, ainsi que les concepts de coefficients de réflexion et de rapport d'onde stationnaire.

3.1 Description et propriétés des ondes stationnaires

Soit une source de fem $e_0(t)$ sinusoïdale connectée dans le plan d'entrée de la ligne selon la disposition de la figure **7** :

$$e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t) \tag{47}$$

Bien entendu, rien ne s'oppose à introduire dans cette expression un terme de phase arbitraire ou à envisager l'usage de la fonction $\cos(\omega t)$.

Les développements des prochains paragraphes déterminent en priorité les liens mis en place entre les mécanismes d'ondes stationnaires et les impédances Z_0 et Z_L rencontrées aux deux extrémités de la ligne.

3.1.1 Influence de l'impédance de charge de la ligne

Pour simplifier l'approche physique, on restreint le descriptif à la configuration d'une ligne ouverte en extrémité ($Z_{\perp} \rightarrow \infty$) alimentée par une source dépourvue d'impédance interne ($Z_0 = 0$).

Dans une seconde phase de l'analyse, l'extrémité de la ligne sera court-circuitée ($Z_L = 0$). Nous verrons que ces deux dispositions créent des ondes stationnaires dotées de propriétés remarquables.

Ligne ouverte en extrémité $Z_{L} \rightarrow \infty$

Il s'agit de l'exemple illustré au § 2.3.3 et aboutissant à la fonction génératrice I(z) établie en (38). Après quelques transformations, on parvient à l'expression spatio-temporelle complexe de i(z, t), soit :

$$i(z, t) = j \frac{E_0}{2Z_c \cos(kL_0)} [e^{jkL_0}e^{-jk(z-v_0t)} - e^{-jkL_0}e^{+jk(z+v_0t)}]$$

Cette relation montre que la quantité contenue dans les crochets traduit parfaitement l'interférence de l'onde progressive et de l'onde rétrograde ayant pour amplitudes complexes e^{jkL_0} et e^{-jkL_0} , soit deux quantités absolues strictement égales à l'unité, car $|e^{\pm jkL_0}| = 1$.

La question est donc de convertir l'expression précédente sous la forme d'une fonction représentant un signal d'amplitude réelle. L'application des critères établis au § 2.1.2 suggère de passer I(z) sous la forme polaire, soit $I(z) = |I(z)|e^{j\varphi_i}$. L'examen de la relation (38) montre que $\varphi_i = \pi/2 + \text{sg}(z)\pi$. Selon ces conventions

de notations, la fonction sg (z) est nulle quand le signe de sin $[k (L_0 - z)]$ est positif, inversement sg (z) prend pour valeur 1 dans le cas contraire, le signal courant *i* (z, t) peut alors s'écrire :

$$i(z,t) = \frac{E_{0m}}{Z_c} \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)} \cos(\omega t)$$
(48)

Analyse de l'onde stationnaire de courant sur la ligne ouverte

La formule établie dans l'expression précédente montre immédiatement que les vibrations sinusoïdales du courant sont en quadrature avance par rapport à la formule de la fem posée en (47).

De plus, la fonction sin $[k (L_0 - z)]$ figurant au numérateur de l'équation (48) a pour rôle de moduler l'amplitude du courant selon la position z d'un observateur situé le long de la ligne. Cette fonction, donc i(z, t), passe par des amplitudes nulles appelées « zéros » ou « nœuds de courant » pour toutes les positions z_n vérifiant les conditions suivantes :

$$\sin[k(L_0 - z_n)] = 0 \rightarrow z_n = L_0 - n\frac{\pi}{k}$$
 où $n \in \mathbb{N}^+$ (49)

Sachant que z_n ne peut être qu'une quantité positive, l'équation (49) exige $k > n (\pi/L_0)$. Conditions que l'on peut transcrire suivant la fréquence f ou la longueur d'onde λ sous les critères strictement équivalents exprimés ci-dessous :

$$f \ge n \frac{v_0}{2L_0} \text{ ou } \lambda \le \frac{2L_0}{n}$$
(50)

Le nombre entier *n* fixe l'ordre des nœuds de courant. L'intervalle $z_{n+1} - z_n$ délimitant deux nœuds consécutifs comporte en zone médiane un extremum ou « ventre » d'amplitude prenant pour valeur absolue :

$$|i(z_m,t)|_{\max} = \frac{E_{0m}}{Z_c} \frac{1}{|\cos(kL_0)|}$$
 (51)

Il est aisé de montrer que les extremums sont positionnés en $z_m = z_n + \lambda/4$, car la distance entre deux nœuds consécutifs est strictement égale à la demi-longueur d'onde, soit $z_{n+1} - z_n = \lambda/2$.

Ainsi pour décrire le cycle complet d'une onde stationnaire il faut au minimum trois nœuds :

$$n=2 \to f \geq \frac{v_0}{L_0}$$

c'est-à-dire une ligne de dimension L_0 supérieure ou au moins égale à la longueur d'onde.

Nous verrons que la fonction $\cos (kL_0)$ figurant au dénominateur des expressions (48) et (51) joue un rôle majeur dans les mécanismes de résonances traités au § 3.1.3.

Par opposition à l'onde stationnaire partielle analysée au § 3.3.2, l'onde stationnaire pleine (*full standing wave*) représentée par l'expression (48) prend une amplitude nulle aux positions z_n calculées en (49). Une onde stationnaire pleine est donc indissociable de la présence des nœuds.

Onde stationnaire de tension sur la ligne ouverte

Par un raisonnement similaire aux calculs entrepris précédemment, l'onde stationnaire de tension entretenue sur la ligne ouverte en extrémité et alimentée par la source de fem pure s'exprime :

$$v(z,t) = E_{0m} \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)} \sin(\omega t)$$
(52)

Cette relation montre que l'onde stationnaire de tension demeure en phase avec la fem, alors que la répartition des nœuds et ventres de tension est en quadrature, c'est-à-dire décalée d'un quart de longueur d'onde (λ /4) par rapport au courant relaté dans (48).

Exemple : représentation graphique d'une onde stationnaire

La ligne est formée d'un conducteur de diamètre d = 4 mm situé à une distance h = 1 m d'un plan conducteur. La ligne ainsi constituée est ouverte en extrémité $Z_L \rightarrow \infty$ et alimentée par une source de fem délivrant un signal sinusoïdal $e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t)$ de fréquence f = 12 MHz. La source est dépourvue d'impédance interne $Z_0 = 0$, et la ligne possède pour dimension longitudinale $L_0 = 28$ m.

On propose de réaliser une illustration graphique de l'onde stationnaire pleine établie sur la ligne en régime entretenu et pour la fonction représentative du courant, soit i(z, t).

La détermination de la longueur d'onde donne $\lambda = c/f = 25$ m, en prenant $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Le courant *i* (*z*, *t*) établi par la relation (48) s'exprimera donc :

$$i(z, t) = I_{0m} \sin(\varphi_i - kz) \cos(2\pi f t)$$

relation dans laquelle I_{0m} et φ_i prennent pour valeurs :

$$I_{0m} = \frac{E_{0m}}{Z_c} \frac{1}{\cos(kL_0)}$$
 et $\varphi_i = kL_0 = 7,03$ rad

Le calcul des paramètres primaires par les relations (10) et (11) donne L = 1,38 µH/m et C = 8 pF/m, d'où la valeur de l'impédance caractéristique Z_c = 415 Ω .

Si l'on normalise l'amplitude de I_{0m} à une fem unité, soit $E_{0m} = 1 \text{ V}$, on trouve pour amplitude maximale du courant en entrée de ligne i (0, 0) = $I_{0m} \sin \varphi_i = 1,64 \text{ mA}$.

Pour la représentation graphique, il sera plus commode de traiter des variables réduites de distance, de temps et d'amplitude, respectivement rapportée à la longueur d'onde λ , à la période T du signal source et à l'amplitude maximale I_{0m} du courant, soit :

$$z_{\rm r} = \frac{z}{\lambda} t_{\rm r} = \frac{t}{T} \text{ où } T = \frac{1}{f} i_{\rm r} (z, t_{\rm r}) = \frac{i(z, t)}{I_{0m}}$$

Le graphe de la figure **8** produit une représentation en trois dimensions de l'onde stationnaire pleine extraite du calcul précédent. La variable réduite de temps t_r évolue entre 0 et 10, soit sur dix périodes. La variable réduite longitudinale z_r couvre toute la dimension L_0 de la ligne soit, en coordonnées réduites z_r , l'intervalle [0 1,12].

Le repère **1** (figure **8**) indique l'amplitude du courant en t = 0 et z = 0, soit $i_r(0, 0) = \sin \varphi_i = 0,68$.

Les repères $N_1,\,N_2$ et N_3 (figure 8) donnent les positions des trois **nœuds** présentement contenus dans l'intervalle [01,12], car la dimension de la ligne couvre un peu plus d'une longueur d'onde.

Les repères V_1 et V_2 (figure **8**) donnent les positions des **ventres** de l'onde stationnaire pleine renouvelés cycliquement au rythme de la période *T* du signal sinusoïdal.

En règle générale, la représentation de l'onde stationnaire sera facilitée en limitant le graphe aux seules fonctions génératrices I(z) et V(z) décrites en amplitudes absolues.

Ligne court-circuitée en extrémité Z_L = 0

Les développements mènent pour i(z, t) et v(z, t) aux expressions suivantes :

$$i(z,t) = -\frac{E_{0m}}{Z_c} \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\sin(kL_0)} \cos(\omega t)$$
(53)

$$v(z,t) = E_{0m} \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\sin(kL_0)} \sin(\omega t)$$
(54)



Figure 8 - Illustration en trois dimensions d'une onde de courant stationnaire pleine engendrée sur une ligne ouverte en extrémité

Par rapport à la ligne ouverte, on se rend compte que le courant se manifeste en opposition de phase et sous une loi de distribution en quadrature. La tension évolue selon la même phase, mais la distribution selon la variable z s'effectue également en quadrature.

On peut donc dire que le passage de l'extrémité ouverte à l'extrémité court-circuitée génère des relations i(z, t) et v(z, t) mutuellement duales.

3.1.2 Incidence de l'impédance interne de la source

Considérons une ligne ouverte alimentée par une source possédant une impédance interne strictement égale à l'impédance caractéristique de la ligne ($Z_0 = Z_c$), on parle alors de source adaptée.

Dans ce cas, les signaux harmoniques i(z, t) et v(z, t) prennent pour expressions :

$$i(z, t) = \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin[k(L_0 - z)] \cos(\omega t - kL_0)$$
(55)

$$v(z, t) = E_{0m} \cos [k(L_0 - z)] \sin (\omega t - kL_0)$$
 (56)

Hormis l'élimination de la fonction $\cos (kL_0)$ située préalablement au dénominateur et l'apparition du terme de phase kL_0 , les propriétés des ondes stationnaires de courant et de tension demeurent similaires à la ligne alimentée par la fem idéale. Il s'agit d'une onde stationnaire pleine présentant des nœuds de courant aux positions z_n spécifiées en (49) et (50).

Les positions z_m des extremums d'amplitude seront également les mêmes, mais leur amplitude change pour la valeur portée ci-dessous :

$$\left|i\left(z_{m},t\right)\right|_{\text{maxi}} = \frac{E_{0m}}{Z_{c}}$$
(57)

L'interprétation physique des formules (51) et (57) livrant l'amplitude des extremums sera approfondie ci-après.

3.1.3 Modes de résonances d'une ligne

Poursuivons l'investigation amorcée au § 3.1.1 et précédemment sur le comportement de l'onde de courant engendrée sur une ligne ouverte.

Le calcul de la ligne soumise à une source de fem pure donnait pour amplitude des extremums de courant (ou ventres) :

$$|i(z_{\rm m}, t)|_{\rm maxi} = \frac{E_{0m}}{Z_{\rm c}} \frac{1}{|\cos(kL_0)|}$$

L'analyse de cette expression exhibe des singularités imposées par le passage à zéro de la fonction $\cos (kL_0)$. Ces conditions donnent lieu à une valeur $|i(z_m, t)|_{maxi}$ infinie, la ligne entre en résonance. Les résonances de la ligne sont donc définies par les valeurs particulières de l'argument kL_0 amenant $\cos (kL_0) = 0$, soit :

$$\cos (kL_0) = 0 \to k_r L_0 = (2r+1)\frac{\pi}{2} \text{ où } r \in \mathbb{N}^+$$
(58)

On trouve sans difficulté les fréquences de résonances $f_{\rm r}$ calculée par la relation :

$$f_{\rm r} = (2r+1)\frac{v_0}{4L_0} \tag{59}$$

Contrairement aux circuits localisés composés d'une inductance et d'une capacité en série, ou en parallèle, où l'on trouve qu'une seule fréquence de résonance, les lignes présentent un spectre infini de résonances espacées de l'intervalle fréquentiel $\Delta f = f_{r+1} - fr = v_0/2L_0$. On appelle fréquence de résonance fondamentale la résonance de rang *r* le plus bas, soit selon l'expression (59), $r = 0 \rightarrow f_0 = v_0/4L_0$. Sachant que la longueur d'onde s'exprime par le rapport $\lambda = v_0/f$, la résonance fondamentale implique le respect de la condition $r = 0 \rightarrow L_0 = \lambda/4$. Cela signifie que la ligne ouverte entre en résonance dès que la dimension L_0 s'accorde sur le quart de la longueur d'onde. Par exemple, une ligne coaxiale d'une dimension $L_0 = 10$ m où la vitesse de propagation des ondes prend pour valeur $v_0 = 2 \times 10^8$ m/s entre en résonance fondamentale (r = 0) pour une longueur d'onde $\lambda = 4L_0$, soit $\lambda = 40$ m, c'est-à-dire une fréquence de valeur $f_0 = v_0/\lambda = 5$ MHz.

L'origine physique de l'amplitude infinie sera justifiée au § 5.3.6.

Cependant, l'intuition incite à penser que l'amplitude des résonances ne peut être infinie à cause de la contribution des dissipations d'énergie jusqu'ici ignorées. On peut alors attribuer aux lignes de transmission un coefficient de qualité tout à fait similaire aux définitions adoptées pour les circuits localisés. Cet aspect physique sort du cadre de cet article d'initiation au sujet, le lecteur trouvera dans [12], qui traite des chambres réverbérantes à brassage de modes, quelques précisions complémentaires sur le calcul du coefficient de qualité des lignes.

Les dissipations d'énergie dans les matériaux constituant les lignes ne sont pas les seuls facteurs contribuant à limiter l'amplitude des résonances, voire à les éliminer totalement. Tel est le cas de la ligne ouverte alimentée par une source adaptée où la fonction $\cos (kL_0)$ a disparu des relations (55) à (56) établies plus haut. On parle alors d'une impédance interne adaptée.

3.2 Approximation des grandes longueurs d'ondes

L'approximation des grandes longueurs d'ondes, encore appelées fonctionnement des lignes aux basses fréquences ou « lignes électriquement petites », signifie que la fréquence des signaux transportés sur la ligne correspond à une longueur d'onde très supérieure à la dimension longitudinale L_0 , soit $\lambda >> L_0$. Sous ces conditions, les formules générales établies précédemment adoptent des expressions simplifiées auxquelles on peut joindre des circuits équivalents facilitant diverses interprétations physiques.

En d'autres termes, l'approximation des grandes longueurs d'ondes fait abstraction des phénomènes de propagation, tout en demeurant dans le domaine de validité du concept de circuit uniformément réparti.

3.2.1 Calcul approché des fonctions génératrices I(z) et V(z)

Ligne ouverte en extrémité

Revenons sur la ligne ouverte alimentée par la source de fem dépourvue d'impédance interne. Considérons les fonctions génératrices I(z) et V(z) données en (38) et (39) et rappelées ci-dessous :

$$I(z) = j \frac{E_0}{Z_c} \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)}$$
$$V(z) = E_0 \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)}$$

Ainsi, l'approximation des grandes longueurs d'ondes admet la quantité $kL_0 = 2\pi (L_0/\lambda)$ très inférieure à l'unité, ce qui équivaut à écrire $\lambda \gg L_0$. Il peut donc être fait usage des développements

limités au premier ordres des fonctions circulaires figurant dans (38) et (39), d'où :

$$kL_0 <<1 \rightarrow \sin[k \ (L_0 - z)] \cong k(L_0 - z) + \dots$$

$$kL_0 <<1 \rightarrow \cos(kL_0) \cong 1 + \dots$$

Les fonctions génératrices I(z) et V(z) prennent alors pour formes approchées :

$$kL_0 << 1 \rightarrow I(z) \cong I_0\left(1 - \frac{z}{L_0}\right) \text{ où } I_0 = j\frac{E_0}{Z_c}kL_0$$
(60)

$$kL_0 \ll 1 \rightarrow V(z) \cong E_0 \tag{61}$$

Ligne sur court-circuit

Pour la ligne en court-circuit, les fonctions complexes I(z) et V(z) s'expriment :

$$I(z) = -j \frac{E_0}{Z_c} \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\sin(kL_0)}$$
$$V(z) = E_0 \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\sin(kL_0)}$$

On reconnaît les expressions duales de (38) et (39).

Ces relations prennent pour formes limites aux grandes longueurs d'ondes :

$$kL_0 << 1 \rightarrow V(z) \cong E_0 \left(1 - \frac{z}{L_0} \right)$$
(62)

$$kL_0 << 1 \rightarrow I(z) = I_0 \text{ où } I_0 = -j \frac{E_0}{Z_c} \frac{1}{kL_0}$$
 (63)

Conclusion

Nous retrouvons dans les expressions (60) à (63) établies pour les grandes longueurs d'ondes les propriétés de *dualité* entre la ligne ouverte ou court-circuitée en extrémité. Ainsi, pour la ligne ouverte, la tension est indépendante de la position longitudinale; pour la ligne court-circuitée, cette propriété appartient au courant. Inversement, la ligne ouverte montre une évolution linéaire du courant rapportée à la variable *z*, pour la ligne court-circuitée, on observe ce comportement sur la tension. En réalité, l'évolution linéaire ne peut pas être expliquée par la contribution des phénomènes de propagation, mais par les propriétés des circuits à paramètres uniformément répartis. En effet, la condition $\lambda \gg L_0$ équivaut à dire que la période *T* inverse de la fréquence *f* des signaux harmoniques est très supérieure au temps de propagation 0. Cette remarque signifie que, sous l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes, le transit d'une période du courant ou de la tension dans la ligne est quasi instantané.

3.2.2 Assimilation de la ligne à un circuit localisé

L'impédance caractéristique Z_c et le nombre d'ondes k étant reliés aux paramètres primaires de la ligne par les expressions $Z_c = \sqrt{L/C}$ et $k = \omega \sqrt{LC}$ établis en (36) et (40), il est facile de prouver qu'une ligne ouverte peut être représentée par une capacité de valeur C_{eq} et une ligne court-circuitée par une inductance L_{eq} que l'on propose de déterminer.

Parution : février 2014 - Ce document a ete delivre pour le compte de 7200039662 - ens paris saclay // 195.221.160.4

Capacité équivalente à une ligne ouverte C_{eq}

Après entrée de Z_c et k, un retour sur l'expression (60) montre tout de suite que le courant I_0 à l'entrée de la ligne ouverte peut s'écrire :

$$I_0 = jE \frac{kL_0}{Z_c} = jEC_{eq} \omega \text{ où } C_{eq} = CL_0$$
(64)

La ligne ouverte fonctionnant aux grandes longueurs est donc équivalente à une capacité C_{eq} donnée par le produit de la capacité linéique *C* et de la dimension longitudinale L_0 .

Inductance équivalente à une ligne court-circuitée L_{eq}

Par une démarche tout à fait similaire à la précédente, le courant I_0 dans la ligne court-circuitée tel qu'établi dans l'équation (63) peut s'écrire :

$$I_0 = -j\frac{E}{Z_c}\frac{1}{kL_0} = \frac{E}{jL_{eq}\omega} \text{ où } L_{eq} = LL_0$$
(65)

Aux grandes longueurs d'ondes, la ligne court-circuitée est donc équivalente à une inductance L_{eq} déterminée par le produit de l'inductance linéique L et de la dimension longitudinale L_0 .

Concept de circuit équivalent étendu à une impédance de charge quelconque Z_L

Considérons maintenant une ligne connectée en extrémité sur une impédance quelconque Z_L et selon le schéma général de la figure **7**. Aux grandes longueurs d'ondes c'est-à-dire $\lambda \gg L_0$, capacité et inductance équivalentes telles que calculées en (64) et (65) peuvent prendre place dans le schéma synthétique de la figure **9**.

Il est évident que le schéma peut être avantageusement simplifié en fonction de la valeur de Z_{L} comparée à l'impédance caractéristi-

que de la ligne. Ainsi, quand $|Z_L| \ll Z_c$, la capacité C_{eq} peut être éliminée, inversement, quand $|Z_L| \gg Z_c$, l'inductance L_{eq} s'efface.

Ces propriétés seront confirmées par le formalisme de l'impédance d'entrée développé au § 5.1.

Il est important de noter que la fréquence de résonance du circuit, soit $f_{\rm eq} = 1/(2\pi \sqrt{L_{\rm eq}C_{\rm eq}})$, est étrangère à la fréquence de résonance fondamentale f_0 de la ligne telle qu'établie par la relation $f_0 = v_0/4L_0$ formulée au § 3.1.3.

L'article [D 1 321] comporte des applications d'usage des circuits équivalents.



Figure 9 – Circuit équivalent d'une ligne de transmission pour les grandes longueurs d'ondes comparées à la dimension longitudinale de la ligne $\lambda \gg L_0$

3.3 Concept de coefficients de réflexion

L'avantage procuré par les *coefficients de réflexion* réside principalement dans la substitution aux impédances usuelles Z_0 et Z_L de coefficients complexes. Contrairement aux impédances, les coefficients de réflexion sont dépourvus d'unités physiques et restreints à une dynamique de variations situées dans les intervalles [0 1] pour les valeurs absolues et [$-\pi + \pi$] pour les arguments.

3.3.1 Définition des coefficients de réflexion

Dans ce contexte aux impédances Z_0 et Z_L figurant sur les schémas de la figure **7**, on fait correspondre les **coefficients de réflexion** ρ_0 et ρ_L définis comme suit :

$$\rho_{v} = \frac{Z_{v} - Z_{c}}{Z_{v} + Z_{c}} = \left| \rho_{v} \right| e^{j\phi_{\rho_{v}}} \text{ avec } v \equiv 0 \text{ ou } v \equiv L$$
(66)

S'il s'agit de résistances R_0 ou R_L , ρ_v est une quantité purement

réelle située dans l'intervalle $-1 \le \rho_v \le +1$.

La relation (66) montre que, pour les valeurs particulières $Rv = Z_c$, $R_v = 0$ et $R_v \rightarrow \infty$, les coefficients de réflexion prennent pour valeurs remarquables $\rho_v = 0$, $\rho_v = -1$ et $\rho_v = +1$.

Le concept de coefficient de réflexion est utilisé pour construire l'abaque de Smith, cet aspect sortant du cadre de l'article ne sera pas évoqué. Toutefois, nous retrouverons les coefficients de réflexion lors de la formulation des fonctions génératrices I(z) et V(z), puis beaucoup plus loin dans le pargraphe 5.3 consacré au formalisme symbolique.

3.3.2 Formes générales des solutions complexes de l'équation d'onde

Dans le déroulement de ce paragraphe dédié à l'usage des coefficients de réflexion, figurent en première partie les formules des fonctions génératrices I(z) et V(z) adaptées au cadre général de la ligne configurée à la figure **7**. On procédera à quelques transformations algébriques permettant de substituer aux constantes A et B, figurant dans les solutions (35) et (36), des combinaisons linéaires des paramètres E_0 , Z_c , ρ_0 et ρ_L . En seconde partie, les expressions précédentes seront transformées sous la forme de séries mieux adaptées au formalisme symbolique abordé au § 5.3. La troisième partie sera consacrée à l'onde stationnaire partielle.

Formulation analytique compacte de I (z) et V(z)

Du système linéaire tiré de l'application des conditions en extrémités de ligne décrites au § 2.2.3, équation (37), on parvient suite à quelques transformations aux formules générales des fonctions génératrices I(z) et V(z), soit :

$$I(z) = \frac{E_0}{Z_c + Z_0} \left(\frac{e^{-jkz} - \rho_c e^{-2jkL_0} e^{+jkz}}{1 - \rho_0 \rho_c e^{-2jkL_0}} \right)$$
(67)

$$V(z) = E_0 \frac{Z_c}{Z_c + Z_0} \left(\frac{e^{-jkz} + \rho_c e^{-2jkL_0} e^{+jkz}}{1 - \rho_0 \rho_c e^{-2jkL_0}} \right)$$
(68)

Il est important de rappeler que Z_0 représente l'impédance interne de la source de fem E_0 , que ρ_0 et ρ_L s'apparentent aux coefficients de réflexion présentés par la source et la charge. S'il s'agit d'impédances complexes, les coefficients de réflexion seront présentés sous la forme polaire (66). On observe aux numérateurs de ces deux expressions que l'amplitude de l'onde rétrograde est coordonée par le facteur $-\rho_i e^{-2jkL_0}$, c'est-à-dire par une source virtuelle dépendante du coefficient de réflexion imposé par l'impédance de charge $Z_{\rm L}.$

Formulation de *I* (*z*) et *V* (*z*) par une série

Exception faite du cas particulier d'une ligne ouverte alimentée par une source de fem pure, où $Z_L \rightarrow \infty$ et $Z_0 = 0$, le produit $\rho_0 \rho_L$ sera une quantité de valeur absolue inférieure à l'unité $|\rho_0 \rho_L| < 1$.

Sachant que l'exponentielle e-2jkL0 prend pour valeur absolue

l'unité, le terme $1/(1-\rho_0 \rho_c e^{-2jkL_0})$ peut être développé selon une série géométrique libellée comme suit :

$$S(\rho_0, \rho_{\perp}, k, L_0) = \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_{\perp} e^{-2jkL_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_0 \rho_{\perp})^n e^{-2njkL_0}$$
(69)

L'insertion de la série dans les expressions (67) et (68) prouve que le courant et la tension en toute coordonnée *z* d'une ligne désadaptée aux deux extrémités sera constituée de la superposition d'une infinité de solutions élémentaires pondérées par $(\rho_0 \rho_L)^n e^{-2njkL_0}$. Cet aspect de la théorie sera approfondi dans le paragraphe 5.3.

Illustration d'une onde stationnaire partielle

Considérons la relation (67) exprimant la fonction génératrice I(z). On suppose la ligne alimentée par une source de fem E_0 possédant une impédance interne adaptée $Z_0 = Z_c$. L'extrémité opposée de la ligne est connectée sur une résistance R_L de valeur $R_L = 3 Z_c$. Sous ces conditions, la détermination des coefficients de réflexion figurant dans l'équation (67) et calculés selon la relation (66) mène aux valeurs $\rho_0 = 0$ et $\rho_L = 0,5$.

Dans ce cas particulier, la fonction génératrice *I* (*z*) prend pour expression :

$$I(z) = \frac{E_0}{2Z_c} (e^{-jkz} - 0.5 e^{-2jkL_0} e^{+2jkz})$$

lmaginons que la fréquence d'alimentation de la ligne *f* procure une longueur d'onde telle que $kL_0 = 2\pi (L_0/\lambda) = 3\pi/2$. Dans ce cas, la fonction précédente prend pour expression spécifique :

$$I(z) = \frac{E_0}{2Z_c} (e^{-jkz} + 0.5 e^{+jkz})$$

Après insertion de la fonction harmonique $e_0(t) = E_0 e^{j\omega t}$, la solution *i* (*z*, *t*) s'exprime :

$$i(z, t) = \frac{E_0}{2Z_c} e^{-jk(z-v_0t)} + \frac{E_0}{4Z_c} e^{+jk(z+v_0t)}$$

relation que l'on peut également présenter en recherchant la composition algébrique d'une onde progressive et d'une onde stationnaire pleine telle que formulée ci-dessous :

$$i(z, t) = \left[\frac{E_0}{2Z_c}\cos(kz) + \frac{E_0}{4Z_c}e^{-jkz}\right]e^{j\omega t} = I(z)e^{j\omega t}$$
(70)

L'amplitude absolue de I(z) prend alors pour valeur :

$$|I(z)| = \frac{E_0}{2Z_c} \sqrt{2,25[\cos(kz)]^2 + 0,25[\sin(kz)]^2}$$
(71)

Cette formule montre immédiatement que l'onde stationnaire partielle ne comporte plus de nœuds ni de ventres, mais des minimums et maximums fixés par les critères suivants :

$$\cos(kz_{\rm m}) = 0 \Rightarrow |I(z_{\rm m})|_{\rm mini} = 0.25 \frac{E_0}{Z_{\rm c}}$$
$$\sin(kz_{\rm M}) = 0 \Rightarrow |I(z_{\rm M})|_{\rm maxi} = 0.75 \frac{E_0}{Z_{\rm c}}$$

Les positions des maximums et minimums sont alors définies par les critères $z_{\rm M} = M (\lambda/2)$ et $z_{\rm m} = (2m + 1) \lambda/4$, les indices M et m représentent des entiers positifs.

3.4 Transmission ou entretien de la puissance dans une ligne

Cette dernière partie aborde la question de la puissance installée ou transmise dans une ligne de transmission dépourvue de pertes. On regardera successivement le cas d'une ligne adaptée propageant une onde progressive, d'une ligne où s'établit une onde stationnaire pleine, puis une ligne où se manifeste une onde stationnaire partielle.

Pour conclure, le fonctionnement d'une ligne en régime d'onde stationnaire partielle sera caractérisé par le rapport d'onde stationnaire (ROS).

3.4.1 Puissance transportée par une onde progressive

La puissance transportée par l'onde progressive peut être élaborée simplement en soumettant une ligne adaptée en extrémité à une fem pure d'amplitude efficace E_0 . Sous ces conditions, la fonction génératrice de tension prend pour expression $V(z) = E_0 e^{-jkz}$, cette relation néglige les dissipations en ligne. La fonction génératrice du courant prenant pour expression $I(z) = (E_0/Z_c) e^{-jkz}$, on calcule aisément la puissance P transportée dans la ligne en formant le produit de V(z) et de l'expression conjuguée de I(z), soit :

$$P = V(z) I^*(z) = \frac{(E_0)^2}{Z_c}$$

La puissance transportée est donc indépendante de la variable longitudinale z. Toute l'énergie transmise par la source est finalement dissipée dans la résistance de charge strictement égale à l'impédance caractéristique de la ligne. Dans l'impossibilité physique de réaliser des sources de fem pure ($Z_L = 0$), ce résultat prouve qu'une source possédant une impédance interne strictement égale à Z_c procurerait un transfert énergétique optimal vers la charge. La configuration de la ligne serait alors simultanément adaptée en propagation et en transfert énergétique.

Les sources d'émissions hautes fréquences connectées aux antennes via un feeder réalisent cet optimum.

3.4.2 Puissance entretenue par une onde stationnaire pleine

Revenons sur l'exemple de la ligne ouverte alimentée par une source de fem adaptée ($R_0 = Z_c$) et sur les expressions (55) et (56) des fonctions génératrices I(z) et V(z) converties sous formes complexes :

$$I(z) = j \frac{E_0}{Z_c} e^{-jkL_0} \sin[k(L_0 - z)]$$
$$V(z) = E_0 e^{-jkL_0} \cos[k(L_0 - z)]$$

Précisons que le terme E_0 représente comme précédemment l'amplitude efficace de la fem.

La puissance en un point de coordonnée que lconque z de la ligne s'exprime alors :

$$P = V(z) I^{*}(z) = -j \frac{(E_{0})^{2}}{Z_{c}} \cos[k(L_{0} - z)] \sin[k(L_{0} - z)]$$

Après quelques transformations, cette relation devient :

$$P = -j\frac{1}{2}\frac{(E_0)^2}{Z_c}\sin[2k(L_0 - z)]$$
(72)

L'expression (72) révèle une puissance essentiellement réactive dont l'amplitude et le signe évoluent en fonction de la variable longitudinale z. Sachant que $k = 2\pi/\lambda$, la relation montre que la puissance électrique dotée d'un signe négatif et la puissance magnétique d'un signe positif alternent avec une période rigoureusement égale à $\lambda/4$. On peut donc conclure que l'onde stationnaire pleine ne transporte pas de puissance au sens usuel, mais entretient dans la ligne une puissance réactive. En revanche, la ligne ouverte consomme de la puissance active dissipée dans la résistance interne R_0 de la source de fem, cette puissance s'exprime :

$$P_0 = R_0 |I(0)|^2 = R_0 \left(\frac{E_0}{Z_c}\right)^2 [\sin(kL_0)]^2 \text{ où } R_0 = Z_c$$

Sachant que $k = \omega/v_0$, la puissance sera maximale aux fréquences f_r , vérifiant les conditions :

$$f_{\rm r} = (2r+1) \frac{v_0}{4L_0}$$

Ces fréquences particulières coïncident rigoureusement avec les fréquences de résonances analysées au § 3.1.3.

3.4.3 Puissances reliées à une onde stationnaire partielle

L'exemple illustré au § 3.3.2 et plus spécialement la relation (70) rappelée ci-dessous montrait qu'une onde stationnaire partielle se manifeste par la superposition d'une onde progressive et d'une onde stationnaire pleine :

$$i(z, t) = \left[\frac{E}{2Z_{\rm c}}\cos(kz) + \frac{E}{4Z_{\rm c}}e^{-jkz}\right]e^{-j\omega t}$$

Sans entrer dans les détails du calcul de la puissance en toute coordonnée longitudinale z, l'intuition incite à dire que l'on obtient la composition d'une puissance active portée par l'onde progressive, et d'une puissance réactive entretenue par l'onde stationnaire pleine.

Si l'on procède au bilan de la puissance active, même sous les conditions de cette ligne alimentée par une source adaptée en propagation ($R_0 = Z_c$), le transfert de puissance active vers la charge de valeur $R_L = 3Z_c$ n'est pas optimal. En effet, d'une manière analogue à la ligne ouverte simulée précédemment, l'impédance interne de la source doit dissiper une puissance supplémentaire engendrée par le courant porteur de l'onde stationnaire pleine. L'exemple confirme donc que l'adaptation de puissance ne peut être convenablement réalisée qu'avec Z_0 et Z_L rigoureusement adaptées sur Z_c .

3.4.4 Rapport d'onde stationnaire (ROS)

Définition du ROS

Le **rapport d'onde stationnaire** portant l'abréviation ROS n'est autre que la traduction de la locution anglophone *standing wave ratio* (SWR). Il faut toutefois rappeler que dans les ouvrages de langue française antérieurs aux années 1970, on adoptait le terme « taux d'onde stationnaire » (TOS).

Le rapport d'onde stationnaire portant le symbole S_{ROS} s'adresse surtout aux ondes stationnaires partielles, car pour calculer le ROS, on forme le rapport des amplitudes maximales et minimale des fonctions génératrices I(z) ou V(z). Par exemple, si l'on sélectionne le courant, le ROS prend pour définition :

$$S_{\text{ROS}} = \frac{|I(z_{\text{M}})|_{\text{maxi}}}{|I(z_{\text{m}})|_{\text{mini}}} \rightarrow S_{\text{ROS}} \in [1 + \infty[$$
(73)

Pour une ligne connectée sur une charge Z_L adaptée $S_{ROS} = 1$, en revanche, pour une ligne ouverte en extrémité ou court-circuitée, les ondes stationnaires pleines impliquent, $S_{ROS} \rightarrow \infty$.

Pour éviter la confusion avec la matrice de répartition S étudiée plus loin, on adopte pour le ROS la notation S_{ROS} . Il est évident que le calcul du ROS réalisé sur la tension V(z) donne strictement le même résultat qu'avec le courant.

Pour l'exemple illustré au § 3.3.2, nous avions :

$$|I(z_{\rm M})|_{\rm maxi} = 0.75 (E/Z_{\rm c}) \text{ et } |I(z_{\rm m})|_{\rm mini} = 0.25 (E/Z_{\rm c}), \text{ soit } S_{\rm ROS} = 3$$

Lien entre le ROS et le coefficient de réflexion p_L de la charge Z_L

L'analyse du numérateur de la fonction génératrice I(z) telle qu'établie dans l'équation (67) permet de faire le lien entre le rapport d'onde stationnaire S_{ROS} et le coefficient de réflexion ρ_L .

Appelons N ce numérateur présenté pour la circonstance sous la forme suivante :

$$N = e^{jk(L_0-z)} - \rho e^{-jk(L_0-z)}$$

Si l'on admet que $Z_{\rm L}$ représente une résistance $R_{\rm L}$, le coefficient de réflexion $\rho_{\rm L}$ sera une quantité réelle. Sous ces conditions, quand l'argument figurant en exposant prend pour valeur $k(L_0 - z) = 2\pi$, on obtient $N_1 = 1 - \rho_{\rm L}$, inversement, quand $k(L_0 - z) = \pi/2$, $N_2 = j(1 + \rho_{\rm L})$. Si l'on considère $\rho_{\rm L}$ positif, on déduit immédiatement de cet exemple que le ROS prend pour valeur $S_{\rm ROS} = |N_2|/N_1$.

Le raisonnement peut être étendu à toute valeur complexe de Z_L , donc de ρ_L , en formulant S_{ROS} par la relation suivante :

$$S_{\text{ROS}} = \frac{1+|\rho_{\text{L}}|}{1-|\rho_{\text{L}}|}$$
(74)

Pour l'exemple illustré au § 3.3.2, nous avions pour valeur du coefficient de réflexion $\rho_L = 0.5$, l'usage de la relation (74) donne $S_{\text{ROS}} = 3$, résultat tout à fait concordant, avec les calculs de $|I(z_M)|_{\text{maxi}}$ et $|I(z_m)|_{\text{mini}}$ entrepris précédemment.

4. Insertion des dissipations d'énergie en ligne

À l'exception des pertes d'énergies dans la résistance interne des sources et des impédances de charge, les dissipations de puissance dans une ligne de transmission sont en relation directe avec la conductivité électrique des conducteurs et l'imperfection des matériaux diélectriques adoptés comme isolant primaire. En effet, on rencontre dans les diélectriques deux causes possibles de dissipation d'énergie, l'une provient des courants de conduction engendrés dans certains isolants, la seconde de pertes thermiques provoquées par les oscillations dipolaires forcées des molécules composant les polymères.

Si l'on admet que rapportées à l'unité de dimension, ces pertes restent faibles par rapport à la puissance locale transportée ou installée dans une ligne, on parvient à corriger les paramètres primaires par l'addition d'une résistance et d'une conductance linéique. L'équation d'onde ainsi transformée fait alors apparaître une constante de propagation complexe dont la partie réelle représente l'atténuation des signaux rapportée à l'unité de dimension longitudinale.

Ce quatrième paragraphe subdivisé en deux parties comportera successivement le descriptif théorique menant aux paramètres primaires corrigés, puis une analyse plus approfondie des nouveaux paramètres secondaires de la ligne.

4.1 Aménagement des paramètres primaires de la ligne

On regardera tout d'abord l'entrée de la résistance linéique R puis la conductance linéique G dans le schéma illustrant un tronçon élémentaire Δz de la ligne. On procédera ensuite aux calculs de R et G restreints au cas particulier d'une ligne coaxiale telle que décrite au § 1.2.1. Quelques conclusions seront finalement formulées quant aux comportements de la résistance linéique avec la fréquence des signaux transmis dans la ligne.

4.1.1 Insertion de la résistance linéique *R* et de la conductance linéique *G*

Revenons sur le schéma de la figure **6** décrivant un tronçon élémentaire de ligne de dimension Δz . Dans la perspective de l'insertion des pertes d'énergie, ajoutons en série avec l'inductance ΔL , l'élément de résistance ΔR et, en parallèle sur la capacité ΔC , l'élément de conductance ΔG . La figure **10** restitue le résultat de cet aménagement.

On peut donc écrire, $\Delta R = R \Delta z$ et $\Delta G = G \Delta z$. Il est bien évident que R et G doivent respecter les critères exigés par une ligne uniforme tels que définis au § 1.1.1.

La résistance linéique prend pour unité le ohm par mètre (Ω /m) et la conductance linéique siemens par mètre (S/m).

4.1.2 Calcul de la résistance linéique

Nous nous concentrons ici sur une ligne coaxiale portant les paramètres géométriques de la figure **3***a*. En toute rigueur, on extrait la résistance linéique du calcul de l'impédance de surface effectué par la théorie des ondes cylindriques. Généralement, une approximation des formules rigoureuses est souvent suffisante pour le cadre d'application envisagé dans l'article. Cette approche allégée utilise le concept d'onde plane élaboré dans l'article [D 1 325]. Nous nous limitons ici à reproduire une expression simplifiée de la résistance de surface de la ligne coaxiale.

Il est utile de préciser qu'à la résistance s'associe une réactance dont la contribution modifie sensiblement la vitesse de propagation des ondes, mais qui sera présentement négligée.

Les formules adoptées par la suite utilisent la profondeur de pénétration δ de l'onde dans le métal de grande conductivité électrique composant le conducteur intérieur et le conducteur extérieur, δ prend pour expression analytique :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu_r\sigma_m}}$$
(75)

Dans cette relation figurent successivement, la perméabilité magnétique absolue $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, la conductivité électrique σ_m , (pour le cuivre, $\sigma_m = 5.8 \times 10^7$ S/m), la pulsation ω des signaux harmoniques transportés dans la ligne ($\omega = 2\pi f$). On trouve également dans cette formule la perméabilité magnétique relative μ_r , normalement ce paramètre prend pour valeur 1, sauf pour les conducteurs dotés de propriétés ferromagnétiques.

À titre indicatif, la profondeur de pénétration des ondes dans le cuivre a été calculée dans le tableau **1**, pour huit décades de fréquences allant de 10 Hz à 1 GHz.

Tant que la profondeur de pénétration est inférieure au rayon d/2 du conducteur intérieur, ainsi qu'à l'épaisseur *e* du conducteur extérieur, on adopte pour expression de *R*:

$$\delta < d \text{ et } e \to R = \frac{1}{\pi \sigma_{\rm m} \delta} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)$$
 (76)

sinon, c'est la formule usuelle de la résistance valable pour le courant continu, car établie selon l'hypothèse d'un courant statique.



Figure 10 - Aménagement des paramètres primaires de la ligne par insertion de la résistance linéique R et de la conductance linéique G

Tableau 1 – Valeurs numériques de la profondeur de pénétration des ondes électromagnétiques dans le cuivre										
f	10 Hz	100 Hz	1 kHz	10 kHz	100 kHz	1 MHz	10 MHz	100 MHz	1 GHz	
δ	20 mm	6,4 mm	2 mm	0,64 mm	0,02 mm	64 µm	20 µm	6,4 μm	2 µm	
$z = 5.0 \pm 10^7$ S/m at nour built décadées de fréquences commisses entre 10 Hz at 1 CHz										

 $\sigma_{\rm m}$ = 5,8 × 10' S/m et pour huit décadées de fréquences comprises entre 10 Hz et 1 GHz.

4.1.3 Calcul de la conductance linéique

Quand la dissipation d'énergie du diélectrique a pour seule origine les courants de conduction occasionnés par la conductivité électrique très faible mais non nulle du matériau isolant, la conductance linéique *G* d'une ligne coaxiale s'exprime :

$$G = \frac{2\pi\sigma_1}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$
(77)

Dans ce cas, la conductivité σ_1 de l'isolant est généralement très inférieure à 0,01 S/m.

Lorsque les pertes dans le diélectrique surviennent *via* les vibrations moléculaires engendrées par le champ électrique pénétrant l'isolant, on adopte le concept de permittivité relative complexe $\varepsilon_{\mathbf{r}}^* = \varepsilon_{\mathbf{r}}^- - j\varepsilon_{\mathbf{r}}^"$.

La conductance linéique G et la capacité linéique C restituant ces phénomènes s'expriment alors par les relations :

$$G = \frac{2\pi\omega\varepsilon_r^r}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad \text{avec } C = \frac{2\pi\omega\varepsilon_r^r}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$
(78)

Il est évident que les propriétés physiques relatées pour la ligne coaxiale sont transposables à d'autres structures de lignes, au prix d'aménagements spécifiques.

4.2 Constante de propagation complexe

La terminologie retenue « constante de propagation » est liée à la traduction directe de l'expression anglophone propagation constant. En toute rigueur, le vocabulaire académique de la langue française reconnaît comme terme officiel « exposant linéique de propagation ». Bien que cette locution soit beaucoup plus précise que la précédente, nous adopterons quand même constante de propagation pour des questions de facilités textuelles.

Dans la progression de l'exposé, nous procéderons au calcul de l'expression complète de la constante de propagation, puis à l'analyse d'une forme approchée entrant dans la plupart des cas d'intérêt pratique.

4.2.1 Transformation de l'équation d'onde et formulation de γ

Transformation de l'équation d'onde

L'aménagement du tronçon de ligne élémentaire tel qu'envisagé à la figure **10** a pour conséquence immédiate de modifier l'équation des télégraphistes. Ainsi, les équations complexes primitives (26) et (27) prennent, dans le contexte des dissipations d'énergie, les formes suivantes :

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = (R + jL\omega)I \tag{79}$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = (G + jC\omega)V \tag{80}$$

Après développement, on parvient à l'équation d'onde en courant formulée ci-dessous :

$$\frac{d^2I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0 \tag{81}$$

Formulation complète de γ

Les solutions de l'équation d'onde (81) prennent donc pour forme générale :

$$I(z) = A e^{-\gamma z} + B e^{+\gamma z}$$
(82)

On retrouve les constantes inconnues A et B et en exposant le produit γz où le coefficient γs 'est substitué au produit *jk* figurant sur les lignes sans pertes. La constante de propagation γ est donc représentée par la quantité complexe ci-dessous :

$$\gamma = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}$$
(83)

Par opposition aux expressions allégées puis approchées qui seront développées par la suite, la formule (80) s'intitule **expression complète de** γ . En effet, on montre sans difficulté que le calcul de la racine carrée du produit figurant sous le radical peut être dissocié en une partie réelle α et une partie imaginaire β présentées sous les conventions d'écriture des nombres complexes, soit :

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{84}$$

L'insertion de (84) dans les solutions générales (82) indique tout de suite que les fonctions exponentielles $e^{\pm \gamma z}$ prennent la forme d'un produit, car $e^{\pm \gamma z} = e^{\pm \alpha z} e^{\pm \beta z}$.

Nous verrons ultérieurement que α et β représentent des nombres réels positifs ayant un impact majeur sur le comportement physique des signaux transportés dans la ligne. En effet, on observe que le paramètres α atténue l'amplitude de l'onde progressive, mais accentue l'amplitude de l'onde rétrograde, alors que β joue le rôle du nombre d'ondes. Nous intitulerons **constante linéique d'atténuation** α et **constante linéique de phase** β .

En pratique, l'usage de l'expression complète de γ étant restreint à des conditions très particulières de fonctionnement des lignes, on adopte pour α et β des expressions simplifiées détermiinées sur la base d'approximations.

Expressions allégées et simplifiées de α et β

On fera abstraction de la conductance linéique G = 0, l'hypothèse est tout à fait acceptable aux fréquences inférieures au gigahertz.

L'expression (82) se réduit par conséquent à la formule allégée :

$$\gamma = \sqrt{jC\omega \left(R + jL\omega\right)} \tag{85}$$

Si la pulsation ω est suffisamment grande pour admettre $L\omega >> R$ l'expression (85) peut être transposée sous une forme alternative prête à la mise en place d'approximations :

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{1+\frac{R}{jL\omega}}$$

Sachant que $L\omega >> R$, le second radical peut être développé au second ordre, d'où :

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R}{jL\omega} + ...\right)$$

Finalement, on trouve :

$$\alpha \cong \frac{R}{2Z_{\rm c}} \text{ et } \beta \cong k = \omega \sqrt{LC}$$
(86)

Un retour sur l'équation (76) exprimant la résistance linéique montre que α évolue avec une loi proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. La constante linéique d'atténuation ainsi exprimée prend pour unité le Neper par mètre (Np/m). Quant à la constante linéique de phase β , elle est ici confondue avec le nombre d'ondes *k*.

Problème de l'impédance caractéristique

La démonstration produite ci-après montre que l'impédance caractéristique d'une ligne dotée de pertes linéiques cesse d'être un nombre réel, elle prend pour forme $Z_c = R_c + jX_c$. Toutefois, dès qu'une évaluation très précise de Z_c n'est pas exigée, la contribution de X_c peut être négligée car, aux fréquences usuelles,

 $|X_{c}|$ est très inférieure à $\sqrt{L/C}$, et consécutivement sans grande influence sur les propriétés physiques de la ligne.

Expression simplifiée de l'impédance caractéristique complexe

Un retour sur la fonction I(z) établie en (82) et sur l'équation des télégraphistes (83) donne pour V(z) la solution suivante :

$$V(z) = -\frac{1}{G + jC\omega} \frac{dI}{dz} = Z_{c} (A e^{-\gamma z} - B e^{+\gamma z})$$

On constate immédiatement que l'impédance caractéristique Z_c prend la forme d'une quantité complexe fournie par l'expression :

$$Z_{\rm c} = \sqrt{\frac{R+jL\omega}{G+jC\omega}} = R_{\rm c} + jX_{\rm c}$$

Si l'on néglige la contribution de la conductance linéique de la ligne et que l'on admet la pulsation suffisante pour satisfaire la condition $L\omega >> R$, Z_c prend pour forme approchée :

$$Z_{\rm c} = R_{\rm c} + j X_{\rm c} \cong \sqrt{\frac{L}{C}} - j \frac{R}{L\omega} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La partie réelle de cette expression n'est autre que la valeur de $Z_{\rm c}$ adoptée pour les lignes sans pertes.

En conséquence, aux fréquences de fonctionnement usuelles où $L\omega \gg R$, cette relation montre que $|X_c| << R_c$ et qu'il est ainsi légitime de maintenir pour Z_c que la partie réelle, soit $Z_c \cong \sqrt{L/C}$.

4.2.2 Constante linéique d'atténuation libellée en dB

Soit une ligne adaptée en extrémité ($Z_L = Z_c$), nous savons que dans ce cas particulier, seule l'onde progressive sera sélectionnée conformément au premier terme de la solution (82) du courant I(z), d'où :

$$Z_{\rm L} = Z_{\rm c} \rightarrow I(z) \cong {\rm Ae}^{-(\alpha + jk)z}$$

Pour un observateur situé en extrémité de ligne ($z = L_0$), l'atténuation engendrée par la propagation du signal harmonique et désignée par le symbole A_{ℓ} s'exprimera par la valeur absolue du rapport $I(L_0)/I(0)$, soit :

$$A_{\ell} = \left| \frac{I(L_0)}{I(0)} \right| = e^{-\alpha L_0}$$

L'indice ℓ signifie que A_ℓ s'exprime dans une échelle linéaire.

D'autre part, la conversion de A_{ℓ} sur une échelle logarithmique libellée en dB s'effectue selon la convention rappelée ci-dessous :

$$A_{\rm dB} = 20 \log A_{\ell} = -20 \alpha L_0 \log e$$

Après calcul de log *e*, cette expression se transpose succinctement en (87) :

$$A_{\rm dB} = -8,69\alpha L_0 \tag{87}$$

La constante linéique d'atténuation α_{dB} libellée en décibel par mètre (dB/m) est donc donnée par le rapport $\alpha_{dB} = A_{dB}/L_0$, soit $\alpha_{dB} = -8,69 \alpha$.

Exemple de calcul d'atténuation d'une ligne

Prenons la ligne coaxiale étudiée au § 1.2.3, ayant pour paramètres géométriques D = 4 mm et d = 1 mm et pour paramètres primaires L = 277 nH/m et C = 94 pF/m. Cette ligne possède donc pour impédance caractéristique $Z_c = 54 \Omega$. Les conducteurs en cuivre $\sigma_m = 5,8 \times 10^7$ S/m, sous une fréquence de 100 MHz, donnent pour profondeur de pénétration, $\delta = 6,4 \mu$ m. De l'expression (73), on tire immédiatement la valeur de la résistance linéique, soit $R = 1 \Omega/m$. Sachant qu'à la fréquence de 100 MHz, L $\omega = 174 \Omega$, l'approximation $\alpha \equiv R/2 Z_c$ est parfaitement validée, donc $\alpha = 9,2 \times 10^{-3}$ Np/m ou $\alpha_{dB} = 0,08$ dB/m.

Une ligne coaxiale ayant pour dimension longitudinale $L_0 = 100 \text{ m}$ produit sous ces conditions de fonctionnement une atténuation $A_{\rm dB} = -8 \text{ dB}$, soit $A_\ell \cong 0.4$. Pour une ligne de 1 000 m, l'atténuation passe à $A_{\rm dB} = -80 \text{ dB}$, ce qui est manifestement prohibitif, car -80 dB équivaut en échelle linéaire à $A_\ell = 10^{-4}$. Bien que très importante, l'atténuation A_ℓ n'entre pas en contradiction avec l'hypothèse de propagation quasi TEM. En effet, en extrémité de ligne quand z = 999 m, la perte relative de signal constatée pour atteindre L_0 est très proche du produit $A_\ell \alpha$, soit 9.2×10^{-7} , donc très inférieure à 10^{-4} .

5. Autres formulations de la théorie des lignes

La théorie des lignes peut être abordée par d'autres approches que celles examinées jusqu'à présent dans l'article et que l'on propose d'exposer brièvement dans ce paragraphe. On s'intéressera tout d'abord au formalisme de l'impédance d'entrée dont l'objectif consiste à déduire certaines propriétés physiques des lignes au moyen d'une formule compacte. Cette relation permet de restituer l'évolution de l'impédance vue de l'entrée d'une ligne connectée en sortie sur une impédance quelconque Z_L. Dans une seconde partie, une ligne sera assimilée à un quadripôle électrique afin d'y intégrer naturellement la contribution des phénomènes de propagation. On procédera au calcul des coefficients de la matrice chaîne, ainsi qu'à l'illustration de quelques exemples adoptant cette approche. La troisième partie, la plus conséquente, aborde la résolution des lignes par le calcul symbolique. L'avantage procuré par le calcul symbolique permet d'accéder assez simplement aux réponses d'une ligne soumise à une source de signaux transitoires. Sur la base de simulations théoriques prenant l'exemple d'une source de fem délivrant un échelon de tension, puis un échelon de signal sinusoïdal, on procédera à une analyse physique détaillées dissociant les régimes transitoires et entretenus. Pour conclure, une dernière partie sera consacrée à l'élaboration des paramètres S, ainsi qu'à la mise en place de la matrice répartition d'une ligne. Cette approche également illustrée par quelques simulations devrait faciliter la caractérisation d'une ligne effectuée suivant ce protocole.

5.1 Formalisme adoptant l'impédance d'entrée

Dans ce paragraphe, on examinera successivement la définition de l'impédance d'entrée d'une ligne, ainsi que les principales propriétés de ce paramètre. Des formules approchées seront aussi établies sous l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes.

5.1.1 Définition de l'impédance d'entrée d'une ligne

En se reportant au schéma de la figure **7**, l'impédance d'entrée d'une ligne désignée par le symbole Z_E provient du rapport des fonctions génératrices V(z) et I(z) évaluées dans le plan d'entrée de la ligne localisé en z = 0, d'où :

$$Z_E = \frac{V(0)}{I(0)}$$
(88)

avec Z_L connectée.

Des solutions complètes (67) et (68) assorties de quelques transformations algébriques mineures, on tire l'expression de $Z_{\rm E}$ établie ci-dessous :

$$Z_{\rm E} = Z_{\rm c} \frac{Z_{\rm L} + j Z_{\rm c} \tan{(kL_0)}}{Z_{\rm c} + j Z_{\rm L} \tan{(kL_0)}}$$
(89)

On retrouve dans cette formule les paramètres secondaires de la ligne tels que l'impédance caractéristique Z_c , le nombre d'ondes k auxquels se combine l'impédance Z_L connectée en extrémité $(z = L_0)$.

5.1.2 Principales propriétés de l'impédance d'entrée

Pour une ligne ouverte en extrémité $Z_{L} \rightarrow \infty$, l'impédance d'entrée prend donc, pour forme asymptotique $Z_{E} = -jZ_{c}/\tan (kL_{0})$. Cette relation montre qu'aux fréquences de résonance f_{r} définies

au § 3.1.3, Z_{E} s'annule, car $(|\tan(kL_0)|_{f=f_r} \to \infty)$.

En conséquence, alimentée par une source de fem pure ($Z_0 = 0$), le courant I(0) absorbé en entrée de ligne prend une amplitude infinie quand $f = f_r$.

Inversement, pour une ligne connectée sur un court-circuit $Z_{\rm L} = 0$, l'impédance d'entrée s'exprime $Z_{\rm E} = jZ_{\rm c} \tan{(kL_0)}$, on trouve qu'aux fréquences de résonance $f_{\rm r}$, $Z_{\rm E}$ prend une valeur infiniment

grande, soit $(Z_{\mathsf{E}})_{f=f_r} \to \infty$. La ligne sur court-circuit est donc bien la configuration duale d'une ligne ouverte. En effet, si l'on imagine la ligne alimentée par une source de courant dépourvue d'admittance interne, on trouve aux fréquences de résonance du (a).

$$(|V(0)|)_{f=f_r} \rightarrow \infty$$
.

De plus, l'équation (89) confirme bien qu'une ligne connectée sur sa propre impédance caractéristique ($Z_L = Z_c$) donne pour impédance d'entrée $Z_E = Z_c$. Dans ce cas, la ligne adopte le comportement d'un quadripôle itératif.

5.1.3 Formules approchées de Z_E aux grandes longueurs d'ondes

Rappelons que le terme grandes longueurs d'ondes signifie que la longueur d'onde imposée dans le fonctionnement de la ligne est très supérieure à la dimension longitudinale, soit $\lambda >> L_0$. Dans

ce cas, $kL_0 \ll 1$, il est donc possible de confondre la fonction tangente figurant dans (89) avec le développement au premier ordre formulé ci-dessous :

$$kL_0 \ll 1 \Rightarrow \tan(kL_0) \cong kL_0 + \dots$$

Cette simplification mène aux formes approchées de Z_E . Ainsi, à l'aide des calculs aux limites, il est aisé de montrer qu'en connectant en sortie une impédance Z_L de valeur très inférieure à Z_c , on obtient pour formule approchée de Z_E :

$$|Z_{\rm L}| \ll Z_{\rm c} \rightarrow Z_{\rm E} \cong Z_{\rm L} + j \, L \omega \, L_0 + \dots \tag{90}$$

Inversement, si l'on connecte une impédance Z_L de valeur très supérieure à Z_c , on obtient pour formule approchée de l'admittance d'entrée Y_E de la ligne :

$$|Z_{L}| \gg Z_{c} \rightarrow Y_{E} \cong Y_{L} + jC \omega L_{0} + \dots \text{ où } Y_{L} = 1/Z_{L}$$
(91)

Le retour sur le paragraphe 3.2.2 indique tout de suite que l'équation (90) restreint le circuit de la figure **9** à l'inductance LL_0 connectée en série avec Z_L , alors que l'équation (91) correspond à Z_L connectée en parallèle sur la capacité CL_0 .

5.2 Formalisme matriciel des quadripôles

Comme nous l'avions préalablement mentionné au § 3.2.2, une ligne de transmission fonctionnant sous le régime des grandes longueurs d'ondes peut être convertie sous un circuit localisé assimilable à un quadripôle. Le concept de quadripôle peut être évidemment étendu pour toute fréquence de fonctionnement de la ligne où interviennent les phénomènes de propagation. Dans cette problématique, il est généralement plus facile de convertir les calculs de ligne dans le langage matriciel. Pour des raisons justifiées sur la base d'exemples on procédera au calcul et à l'usage des matrices chaînes. Néanmoins, le lecteur n'éprouvera aucune difficulté à étendre le concept aux matrices impédance ou admittance, d'une utilisation tout de même plus rare pour ces applications.

5.2.1 Formation de la matrice chaîne d'une ligne de transmission

L'examen du schéma de la figure **7** permet l'assimilation du tronçon de ligne de dimension L_0 à un quadripôle linéaire. En effet, si l'on conserve les conventions d'orientations des courants et tensions dans les plans d'entrée et de sortie, tels que déterminés sur la figure **7**, on procède aux changements de notations portés ci-dessous :

$$I_{\rm E} = I$$
 (0), $V_{\rm E} = V$ (0), $I_{\rm S} = I$ (L_0), $V_{\rm S} = V$ (L_0)

Les paramètres $V_{\rm E}$, $I_{\rm E}$ et $V_{\rm S}$, $I_{\rm S}$ composent les vecteurs ($X_{\rm E}$) et ($X_{\rm S}$) ayant pour formes transposées :

$${}^{t}(X_{E}) = (V_{E}) (I_{E}) \text{ et } {}^{t}(X_{S}) = (V_{S}) (I_{S})$$

Vecteur d'entrée (X_E) et vecteur de sortie (X_S) sont alors reliés par la matrice prenant le symbole (\pounds) et désignée ci-après, **matrice chaîne** de la ligne :

$$(X_{\rm S}) = (\mathcal{L}) (X_{\rm E})$$

Équation à laquelle doit évidemment correspondre l'expression développée :

$$\begin{pmatrix} V_{\rm S} \\ I_{\rm S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\rm E} \\ I_{\rm E} \end{pmatrix}$$
 (92)

Les coefficients ℓ_{ij} de la matrice chaîne constituent donc une nouvelle classe de paramètres secondaires de la ligne, car ils intègrent directement les phénomènes de propagation.

5.2.2 Expressions analytiques des paramètres ℓ_{ij} de la ligne

Des calculs algébriques développés plus loin, on déduit aisément les formules analytiques des paramètres ℓ_{ii} , soit :

$$\ell_{11} = \cos(kL_0) \quad \ell_{12} = -jZ_c \sin(kL_0)$$
$$\ell_{21} = \frac{1}{jZ_c} \sin(kL_0) \quad \ell_{22} = \cos(kL_0)$$

Ces relations montrent immédiatement la présence des paramètres secondaires de la ligne concrétisés par l'impédance caractéristique Z_c et le nombre d'ondes k. Les phénomènes de propagation figurent directement par la présence des fonctions sin (kL_0) et cos (kL_0).

Aux grandes longueurs d'ondes, ces expressions prennent pour valeurs approchées :

$$\lambda \gg L_0 \to \ell_{11} \cong 1 \quad \ell_{12} \cong -jL\omega L_0$$
$$\lambda \gg L_0 \to \ell_{12} \cong -jC\omega L_0 \quad \ell_{22} \cong 1$$

En formant le produit $(X_S) = (\mathcal{L})(X_E)$, on vérifie que la matrice chaîne ainsi simplifiée est bien cohérente avec le quadripôle de la figure **9**, car $L_{eq}C_{eq}\omega^2 = (kL_0)^2 \ll 1$.

Calcul des coefficients l_{ii} de la matrice chaîne

Les fonctions génératrices I(z) et V(z) déterminées par les solutions complexes établies en § 2.3.3 peuvent s'exprimer sous des formes matricielles. On entre le vecteur ^t(AB) comprenant pour composantes les constantes inconnues A et B, soit :

$$\begin{pmatrix} V_{\mathsf{E}} \\ I_{\mathsf{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\mathsf{c}} & -Z_{\mathsf{c}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mathsf{S}} \\ I_{\mathsf{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\mathsf{c}}q^{-1} & -Z_{\mathsf{c}}q \\ q^{-1} & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \end{pmatrix}$$

Expressions dans lesquelles, le complexe q prend pour valeur :

$$q = e^{+jkL_0}$$

Une transformation algébrique élémentaire permet d'écrire $(X_S) = (\mathcal{L}) (X_E)$, d'où :

$$\begin{pmatrix} V_{\rm S} \\ I_{\rm S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\rm c}q^{-1} & -Z_{\rm c}q \\ q^{-1} & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\rm c} & -Z_{\rm c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_{\rm E} \\ I_{\rm E} \end{pmatrix}$$

Après inversion de la matrice et calcul du produit, on obtient :

$$\begin{pmatrix} V_{\rm S} \\ I_{\rm S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL_0) & -jZ_{\rm c}\sin(kL_0) \\ -j(Z_{\rm c})^{-1}\sin(kL_0) & \cos(kL_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\rm E} \\ I_{\rm E} \end{pmatrix}$$

Après identification avec $(X_S) = (\mathcal{L})(X_E)$, on déduit aisément les coefficients ℓ_{ii} , car :

$$(X_{\mathsf{S}}) = (\mathscr{L}) (X_{\mathsf{E}}) \to \begin{pmatrix} V_{\mathsf{S}} \\ I_{\mathsf{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mathsf{E}} \\ I_{\mathsf{E}} \end{pmatrix}$$

5.2.3 Exemples d'applications du calcul matriciel

Revenons sur le schéma de la figure **7** en attribuant à l'impédance interne de la source de fem la valeur particulière $Z_0 = 0,1 Z_c$ et en maintenant l'extrémité de la ligne ouverte, soit $Z_L \rightarrow \infty$. On propose de calculer l'amplitude de la tension en extrémité $V(L_0)$.

Par combinaison du calcul de l'impédance d'entrée Z_E de la ligne et du calcul matriciel, on trouve aisément $V(L_0)$. En effet, sachant que pour la ligne ouverte en extrémité, l'impédance d'entrée prend pour expression :

$$Z_{\rm E} = -j \frac{Z_{\rm c}}{\tan{(kL_0)}}$$

On déduit immédiatement les valeurs de la tension et du courant en entrée de la ligne, soit :

$$I(0) = I_{\rm E} = \frac{E_0}{0.1Z_{\rm c} + Z_{\rm E}}$$
 et $V(0) = V_{\rm E} = \frac{Z_{\rm E}}{0.1Z_{\rm c} + Z_{\rm E}}E_0$

Après usage du produit matriciel (92) et sortie de la première ligne, on extrait $V(L_0)$:

$$V(L_0) = V_{\rm S} = \frac{\ell_{11}Z_{\rm E} + \ell_{12}}{0, 1Z_{\rm c} + Z_{\rm E}} E_0$$

L'insertion des formes analytiques de ℓ_{11} et ℓ_{12} mène finalement à l'expression :

$$V(L_0) = V_{\rm S} = \frac{Z_{\rm E} \cos(kL_0) - j Z_{\rm c} \sin(kL_0)}{0 \cdot 1 Z_{\rm c} + Z_{\rm F}} E_0$$
(93)

En règle générale, le déroulement du calcul selon ce procédé est beaucoup plus commode que le calcul direct par la relation (68) énoncée en § 3.3.2. De plus, l'expression (93) facilite l'analyse comportementale de $V(L_0)$ lors des résonances. En effet, quand $f = f_r$, on trouve immédiatement que $Z_E = 0$ et $|\sin (kL_0)| = 1$, d'où :

$$f = f_r \implies |V(L_0)| \rightarrow 10 E_0$$

Sous ce fonctionnement de la ligne, la tension en extrémité prend une amplitude dix fois supérieure à la fem appliquée en entrée. Il existe par conséquent une grande analogie avec les surtensions observées sur les circuits localisés excités sur leur propre fréquence de résonance.

En guise de seconde application, l'exemple traité ci-après aborde le calcul itératif menant à la résolution des lignes dotées de paramètres primaires non uniformes.

Propagation des signaux sur une ligne de transmission non uniforme

Considérons une ligne dont les paramètres primaires L et C évoluent selon la variable longitudinale z, condition qui équivaut à entrer les fonctions L(z) et C(z). Sur un tronçon de ligne de dimension Δz évidemment très inférieure à L_0 , ainsi qu'à la lon-

gueur d'onde λ , les coefficients de la matrice chaîne (\mathcal{L}_n) attribuée à ce tronçon élémentaire de ligne prennent pour valeurs :

$$\ell_{n11} \cong \mathbf{1}, \quad \ell_{n12} \cong -jL(z_n)\omega\Delta z$$

$$\ell_{n21} \cong jC(z_n)\omega\Delta z, \quad \ell_{n22} \cong \mathbf{1}$$

Le paramètre zn indique la position du tronçon de rang n définie par la relation :

$$z_n = (0,5+n)\Delta z$$
 où $\Delta z = L_0/N$

L'entier N détermine le nombre de tronçons composant la ligne.

Vecteurs d'entrée (X_E) et de sortie (X_S) de ligne sont alors reliés par le produit des N matrices formulé ci-dessous :

$$(X_{\mathsf{S}}) \!=\! (\mathcal{L}_0) \, (\mathcal{L}_1) \, (\mathcal{L}_2) \ldots \, (\mathcal{L}_n) \ldots \, (\mathcal{L}_{N-1}) \, (X_{\mathsf{E}}) \!=\! (\mathcal{L}) \, (X_{\mathsf{E}})$$

Sachant que $V_{\rm S} = Z_{\rm L} I_{\rm S}$, on obtient après inversion :

$$(X_{\mathsf{E}}) = (\mathcal{L})^{-1} (X_{\mathsf{S}}) \Longrightarrow \begin{pmatrix} V_{\mathsf{E}} \\ I_{\mathsf{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\mathsf{L}} \\ 1 \end{pmatrix} I_{\mathsf{S}}$$

Les paramètres *tij* représentent alors les coefficients de $(\mathcal{L})^{-1}$. On extrait la valeur de l'impédance d'entrée Z_{E} de la ligne en formant le rapport :

$$Z_{\rm E} = \frac{V_{\rm E}}{I_{\rm E}} = \frac{t_{11} Z_{\rm L} + t_{12}}{t_{21} Z_{\rm L} + t_{22}}$$

Finalement, la détermination de IE et VE est immédiate, car :

$$I_{\rm E} = \frac{E_0}{Z_{\rm E} + Z_0} V_{\rm E} = \frac{Z_{\rm E}}{Z_{\rm E} + Z_0} E_0$$

Un retour sur le produit matriciel exprimant (L) donne accès au vecteur de sortie :

$$\begin{pmatrix} V_{\rm S} \\ I_{\rm S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\rm E} \\ I_{\rm E} \end{pmatrix}$$

5.3 Formalisme symbolique

Ce paragraphe exclusivement consacré au formalisme symbolique aborde le problème des lignes de transmission en régime transitoire. Jusqu'alors, nous avions considéré la ligne en fonctionnement entretenu, c'est sous cette hypothèse qu'ont été établies les fonctions génératrices I(z) et V(z), ainsi que les expressions (67) et (68) en § 3.3.2. Nous verrons que la conversion de ces relations dans le langage symbolique et sous la forme de séries permet de reconstituer la réponse transitoires seront présentés en guise d'illustrations.

5.3.1 Conversion des solutions dans le domaine symbolique

Pour alléger l'exposé la démonstration sera restreinte au courant I(0) entrant dans la ligne et conformément aux notations du schéma de la figure **7**. De l'expression (67) établie en § 3.3.2, on extrait immédiatement I(0), soit :

$$I(0) = \frac{E_0}{Z_c + Z_0} \left(\frac{1 - \rho_L e^{-2jkL_0}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-2jkL_0}} \right)$$

Il était montré qu'une présentation strictement équivalente de cette formule consiste à mettre en place la série (69) menant à une expression de I (0) plus adaptée à la résolution par le calcul symbolique, d'où :

$$I(0) = \frac{E_0}{Z_c + Z_0} (1 - \rho_L e^{-2jkL_0}) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_0 \rho_L)^n e^{-2njkL_0}$$

Admettons que l'impédance interne de la source, ainsi que la charge soient constituées de résistances $Z_0 = R_0$ et $Z_L = R_L$. Sous cette simplification le nombre d'ondes sera l'unique paramètre contenant la pulsation ω , car $k = \omega/v_0$. Si *p* désigne la variable symbolique, on passe à la fonction symbolique *I* (0, *p*) en pratiquant la transformation $p = j\omega$.

La fonction symbolique I (0, p) s'exprime alors par la série :

$$I(0, p) = \frac{E_0(p)}{Z_c + R_0} (1 - \rho_L e^{-2p\theta}) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_0 \rho_L)^n e^{-2np\theta}$$
(94)

Dans (94) figure le temps de propagation en ligne déterminé par le rapport :

$$\theta = \frac{L_0}{v_0}$$

Précisons que la question du temps de propagation était initialement abordée en § 2.4.2.

D'autre part, la fonction symbolique $E_0(p)$ figurant au numérateur du premier terme de (94) n'est autre que la conversion symbolique de la fem délivrée par la source de signaux transitoires. En effet, la fem est une fonction de la variable temps donnée par $e_0(t)$, la fonction symbolique $E_0(p)$ est donc le résultat de la transformation directe de Laplace, notée TL, de e₀ (t), soit :

$$E(p) = \mathsf{TL}[e(t)] = \int_{0}^{+\infty} e(t) e^{-pt} dt$$
(95)

L'usage de l'intégrale (95) suppose la fonction $e_0(t)$ nulle quand *t* < 0.

5.3.2 Calcul de la réponse transitoire de la ligne

Le calcul sera allégé en adoptant la fonction symbolique auxiliaire $I_0(p)$ ci-dessous :

$$I_0(p) = \frac{E(p)}{Z_c + R_0} (1 - \rho_L e^{-2p\theta})$$

Sous cette convention d'écriture, il est facile de montrer que la réponse transitoire de i (0, t) provenant du calcul de transformée inverse de Laplace mène à la relation suivante :

$$i(0, t) = TL^{-1}[I_0(0, p)] = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_0 \rho_L)^n i_0(t - 2n\theta)$$
 (96)

La fonction $i_0(t)$ figurant dans cette expression correspond évidemment à la transformée inverse de Laplace de $I_0(p)$, c'est-à-dire :

$$i_0(t) = \mathsf{TL}^{-1}[I_0(\rho)] = \frac{1}{Z_c + R_0} [e(t) - \rho_{\mathsf{L}} e(t - 2\theta)]$$
(97)

Il apparaît que l'intégrale de Laplace (95) est surabondante, car sous l'hypothèse de charges réelles, la variable symbolique est absente des expressions de ρ_0 et ρ_L . Sinon, en dehors de cette hypothèse particulièrement simple, le calcul de E(p) est incontournable, tel sera le cas en § 5.3.5.

5.3.3 Réponse transitoire d'une ligne ouverte connectée sur une source adaptée

Formulation analytique

Les paramètres de charge aux deux extrémités de la ligne prennent pour valeurs :

$$Z_0 = Z_c$$
 et $Z_L \rightarrow \infty$

Le calcul des coefficients de réflexion tiré de la formule (66) définie en § 3.3.1 donne par conséquent pour ρ_0 et ρ_L :

$$\rho_0 = 0$$
 et $\rho_L = 1$

Puisque $\rho_0 = 0$, seul le premier terme de la série (96) intervient dans la poursuite du calcul. L'expression de i (0, t) se résume donc à l'unique fonction $i_0(t)$.

Si l'on admet que la source de fem délivre un échelon de tension d'amplitude E_0 , la fonction $e_0(t)$ prend pour forme analytique :

$$e_0(t) = E_0 \gamma(t) \tag{98}$$

Dans cette formule figure la fonction échelon telle que $\gamma(t) = 0$ pour t < 0 et $\gamma(t) = 1$ pour $t \ge 0$.

La réponse transitoire prend alors pour expression :

$$i(0,t) = \frac{E_0}{2Z_c} [\gamma(t) - \gamma(t-2\theta)]$$

relation que l'on peut également écrire en faisant apparaitre la fonction impulsion $w(2\theta, t)$ telle que $w(2\theta, t) = 1$, quand $0 \le t \le 0$ et w (20, t) = 0 à l'extérieur de cet intervalle, d'où :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} w(2\theta, t)$$

Le symbole w est en relation avec l'appellation de « fenêtre temporelle » réduite à « window ».

Interprétation physique

D'un point de vue phénoménologique, ce résultat signifie qu'à l'apparition de l'échelon, en t = 0, la source propage dans la ligne un front d'onde de courant d'amplitude $E_0/2Z_c$. À l'instant $t = \theta$, le courant parvient à l'extrémité ouverte de la ligne. Sachant que $i(L_0, t) = 0$ pour toute valeur de t, l'extrémité ouverte renvoie vers la source un front d'onde d'amplitude strictement opposée au front incident, soit $-E_0/2Z_c$ À l'instant $t=2\theta$, le front d'onde réfléchi parvient sur la source dotée d'une impédance interne adaptée, le front réfléchi ne peut donc être renvoyé vers la charge d'extrémité et i(0, t) = 0 pour $t > 2\theta$. Il s'agit donc bien d'une impulsion d'amplitude $E_0/2Z_c$ et du durée 20.

5.3.4 Réponse transitoire d'une ligne ouverte connectée à une source désadaptée

Deux configurations seront envisagées suivant que la résistance interne R_0 de la source est supérieure ou inférieure à l'impédance caractéristique $Z_{\rm c}$ de la ligne. La source de fem sera constituée de la fonction échelon (98).

Premier cas : $R_0 = 3Z_c$

Dans ce cas, le coefficient de réflexion présenté par la source prend pour valeur $\rho_0 = 0.5$. Pour faciliter la représentation graphique, on adopte une variable temps réduite t_r et une variable d'amplitude réduite i_r (0, t_r) telles que définies ci-dessous :

$$t_{\rm r} = \frac{t}{\theta} \,\,{\rm et}\,\,i_{\rm r}\,(0,t_{\rm r}) = \frac{Z_{\rm c}}{E_0}\,i\,(0,t_{\rm r})$$
 (99)

La variable t_r est ainsi rapportée au temps de propagation en ligne θ et l'amplitude réduite du courant normalisée sur la valeur E_0/Z_c .

La figure 11 reproduit la simulation de l'expression (96) dans

l'intervalle de temps $-4 \leq t_r \leq 16$.

La simulation montre que l'amplitude crête du courant à l'entrée de la ligne est concordante avec la valeur $I_{\rm maxi}$ = $E_0/4 Z_c$. L'amplitude obtenue vient de la combinaison de la résistance interne de la source et de l'impédance d'entrée de la ligne $Z_{\rm E}$, car $Z_{\rm E}$ est confondue avec $Z_{\rm c}$ tant que $t < 2\theta$. Ensuite, la réponse pré-sente une succession d'impulsions de durée individuelle 2 θ entachées d'une réduction d'amplitude fixée par le terme $(\rho_0)^n$ figurant dans l'équation (96). C'est un phénomène d'amortissement engendré par la dissipation d'énergie thermique dans la résistance interne de la source.

Second cas : R₀ = 0,33Z_c

Sous cette résistance interne, le coefficient de réflexion de la source prend la valeur négative, $\rho_0 = -0.5$. La simulation de la réponse déterminée suivant les prescriptions de l'équation (96) est reproduite sur la figure 12. Les variables réduites de temps et

Parution : février 2014 - Ce document a ete delivre pour le compte de 7200039662 - ens paris saclay // 195.221.160.4



Par contre, s'il s'agit d'une source de fem pure $Z_0 = 0$ et consécutivement $\rho_0 = -1$, la réponse de la ligne prend pour description analytique :

continue.



Lien avec les solutions du régime entretenu

On trouve un signal constitué d'impulsions d'amplitude E_0/Zc et de polarités alternées sous la période 20. La solution ainsi présentée ne converge pas vers le régime entretenu, car :

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow i (0, t) \rightarrow indéterminé$$

L'inconsistance physique du régime entretenu s'explique par le comportement de la solution i(0, t) formulée au-dessus, la présence du terme $(-1)^n$ exclut la convergence de la série, nous dirons qu'elle est absolument non convergente.

Pour dissocier le régime transitoire du régime entretenu, exprimons la réponse symbolique sous la forme suivante :

$$I(0, t) = \frac{E_0}{Z_c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W(2\theta, p) e^{-2n\alpha L_0} e^{-2n\theta p}$$

Dans cette relation, $W(2\theta, p)$ représente la transformée de Laplace de la fonction impulsion et α la constante d'atténuation de la ligne. Pour simplifier, nous admettons α indépendante de la fréquence et par voie de conséquence indépendante de la variable symbolique *p*.

Après détermination de la transformée de Laplace inverse, i(0, t) s'exprime :

$$F(0, t) = \frac{E_0}{Z_c} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-2\alpha L_0})^n w (2\theta, t - 2n\theta)$$

La série ainsi présentée montre que dans l'intervalle de temps $2(n-1)\theta \le t < 2n\theta$, l'amplitude prend pour valeur

 $i(0, t) = (E_0/Z_c)(-e^{-2\alpha L_0})^n$. En conséquence, $t \to \infty$ équivaut à poser $n \to \infty$. Sachant que l'atténuation linéique représente une quantité réelle et positive, le terme général de la série converge, car prenant une valeur nulle quand $t \to \infty$. Sachant, qu'il s'agit d'impulsions de durées 20, il en va de même pour i(0, t).

La démonstration prouve que la solution du régime entretenu de la ligne dissipative soumise à l'échelon de fem ne peut converger que vers une amplitude nulle.

5.3.5 Réponse d'une ligne connectée sur une impédance

Ce paragraphe sera consacré à l'analyse phénoménologique d'une ligne soumise à un échelon de fem $e_0(t) = E_0\gamma(t)$, et connectée en extrémité sur une impédance Z_L . L'impédance est constituée de la composition série d'une résisance R_L et d'une inductance L_L .





Figure 12 – Réponse transitoire d'une ligne ouverte en extrémité et connectée à une source de fem délivrant un échelon de tension d'amplitude E_0 et de résistance interne $R_0 = 0.33Z_c$

d'amplitude adoptent comme précédemment les critères de l'équation (99).

On vérifie que l'amplitude crête du courant prend pour valeur $I_{maxi} = E_0/1,33 Z_c$. Le signal résultant montre que le signe négatif du coefficient de réflexion a pour effet d'alterner la polarité des réflexions successives. Le signal est donc assimilable à une oscillation amortie.

Le régime entretenu de la ligne soumise à l'échelon de tension d'amplitude E_0 est dans ce cas particulier illustré par la solution

quasi statique, c'est-à-dire la réponse procurée par la ligne lorsque

 $t \rightarrow \infty$. On se rend compte que pour les configurations d'impédance interne a) et b) de la source telles que simulées précédem-

ment, $i(0, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Ce résultat s'accorde donc avec le comportement de la ligne alimentée par une source de tension

Cette disposition donne lieu à un coefficient de réflexion ρ_L symbolique, car la forme complexe de l'impédance $Z_L = R_L + jL_L\omega$ génère pour expression symbolique $Z_L = R_L + L_Lp$. Il est toutefois bon de rappeler que l'usage de la conversion $j\omega = p$ suppose que Z_L ne contienne pas préalablement de l'énergie, ce qui est le cas ici.

On ajoute l'hypothèse simplificatrice que l'impédance interne de la source est adaptée et qu'elle satisfait par conséquent la condition $Z_0 = Zc$. La réponse transitoire symbolique I(0, p) se résume donc au premier terme de la série (94) :

$$I(0, p) = \frac{1}{2Z_c} \frac{E_0}{p} (1 - \rho_L e^{-2\theta p}) \text{ où } \rho_L = \frac{R_L + L_L p - Z_c}{R_L + L_L p + Z_c}$$

On trouve dans le membre de gauche la transformée de Laplace de la fem $E(p) = E_0/p$ et dans le membre de droite le coefficient de réflexion symbolique joint à Z_L .

Le calcul de la transformée inverse de Laplace donne directement la réponse transitoire i(0, t) formulée ci-dessous :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} [\gamma(t) - \gamma(t - 2\theta)] + \frac{E_0}{Z_c + R_L} \left(1 - e^{-\frac{t - 2\theta}{\tau}} \right) \gamma(t - 2\theta)$$
(100)

Dans cette relation figure la constante de temps τ déterminée par le rapport :

$$\tau = \frac{L_{\rm L}}{Z_c + R_{\rm L}}$$

L'appel d'un exemple numérique devrait faciliter l'analyse des différents constituants de la relation (100).

Exemple numérique

La résistance $R_{\rm L}$ est telle que $R_{\rm L} = 0.1Z_{\rm c}$ et la valeur de l'inductance $L_{\rm L}$ est ajustée pour que la constante de temps τ respecte la condition $\tau = 3\theta$, où le paramètre θ représente le temps de propagation en ligne.

Comme nous l'avions pratiqué précédemment, la représentation graphique de *i* (0, *t*) s'adresse aux variables réduites de temps et d'amplitude établies selon les conventions (99). La figure **13** reproduit l'évolution de *i*_r (0, *t*_r) dans l'intervalle de temps *t*_r [-4 + 30].

La simulation révèle deux comportements bien distincts. En **1** (figure **13**) la présence d'une impulsion de durée 20 et d'amplitude $E_0/2Z_c$ est parfaitement concordante avec le premier terme de l'équation (100), car dans l'intervalle de temps [0 20], la ligne réagit comme une structure de dimension infinie. À l'instant immédiatement supérieur à 20, on observe que l'extrémité réagit de façon similaire à une ligne ouverte. Ce comportement est tout à fait logique, car la dualité temps fréquence incite à dire qu'aux transitions brutales et rapide δt de la variable temps, correspondent des fréquences très importantes de Z_L . Ainsi, en $t = 20 + \delta t$, l'observateur localisé en entrée de ligne reçoit temporairement la réponse d'une ligne ouverte.

Aux instants $t > 2\theta + \delta t$, l'observateur assiste à l'accroissement du courant selon une loi guidée par le mécanisme d'auto-induction imposé par la constante de temps τ définie plus haut. Il est évident qu'aux durées infinement grandes, le courant *i* (0, *t*) prend une amplitude asymptotique fixée par les conditions du régime statique, soit :

$$t \rightarrow \infty i (0, t) \rightarrow E_0 / (Z_c + R_l)$$

En présence d'une source d'impédance interne désadaptée, *i* (0, *t*) serait constituée de l'enchaînement de réflexions multiples pondérées par la quantité symbolique ($\rho_0 \rho_L$)^{*n*}. Dans ce cas, le calcul analytique de la transformée de Laplace inverse n'est plus envisageable, il faut recourir aux transformées de Fourier numériques.



Figure 13 – Réponse d'une ligne connectée sur une source adaptée délivrant un échelon de fem et chargée par une impédance réactive

5.3.6 Transitoires accompagnant la commutation d'une source de signaux sinusoïdaux

Problème de la commutation d'une source de signaux sinusoïdaux

Quand une ligne est soumise à une source de signaux harmoniques, l'instant t = 0 correspond à la commutation de la source sur la ligne, la fonction $e_0(t)$ prend alors pour forme :

$$e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t) \gamma(t)$$
(101)

expression dans laquelle on retrouve la fonction échelon définie plus haut par l'équation (98). La résolution rigoureuse de la théorie des lignes devrait donc considérer la source établie par la formule (101) et non l'expression (47) faisant abstraction de $\gamma(t)$ comme tel était le cas du § 3.1.

Le courant transitoire en entrée de ligne i(0, t) est donc déterminé par les relations (96) et (97) sous l'hypothèse évidemment préalable d'impédances Z_0 et Z_L purement réelles.

En guise d'illustration, trois exemples reprenant le cas de la ligne ouverte en extrémité permettront de dissocier régimes transitoires et entretenus. De plus, selon que l'impédance interne de la source de fem est adaptée ou nulle, deux options dimensionnelles L_0 seront explorées afin que la ligne entre ou non en résonance.

Les signaux simulés seront présentés sur une échelle de temps relative rapportée cette fois à la période T du signal sinusoïdal. L'échelle relative d'amplitude sera comme précédemment rapportée au courant E_{0m}/Z_c , soit :

$$t_r = \frac{t}{T}$$
 où $T = \frac{1}{f}$ et i_r (0, t_r) = $\frac{Z_c}{E_{0m}}i(0,t)$ (102)

Exemple 1 : ligne ouverte, source adaptée $\rho_0=0$, dimension L_0 quelconque

Il sera plus simple dans la poursuite des calculs de raisonner sur la fonction harmonique complexe, soit pour la source de fem considérée présentement :

$$e_0(t) = E_0 e^{j\omega t} \gamma(t)$$

Nous rappelons que E_0 correspond par convention à l'amplitude efficace $E_0=E_{0m}/\sqrt{2}$.

Dans ce contexte, la réponse transitoire complexe de la ligne alimentée par une source adaptée s'exprimera comme suit :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} [\gamma(t)e^{j\omega t} - \gamma(t - 2\theta)e^{j\omega(t - 2\theta)}]$$

Relation que l'on présentera autrement en faisant apparaître la fonction impulsion $w(2\theta, t)$ introduite au § 5.3.3 :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} e^{j\omega t} w(2\theta, t) + \frac{E_0}{2Z_c} (1 - e^{-j2\omega\theta}) e^{j\omega t} \gamma(t - 2\theta)$$

L'analyse de cette formule est intéressante car elle révèle trois séquences bien distinctes de la réponse. En **1** (figure **14**), pour t < 0, le courant en entrée de ligne est strictement nul, i(0, t) = 0.

En **2** (figure **14**), pour $0 \le t \le 2\theta$, le courant prend pour forme complexe :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} e^{j\omega t}$$

En **3** (figure **14**), pour $t > 2\theta$, la relation établie précédemment donne pour fonction complexe :

$$i(0,t) = \frac{E_0}{2Z_c} (1 - e^{-j2\omega\theta}) e^{j\omega t}$$

À l'aide des règles édifiées au § 2.1.2 on trouve pour expression du signal i(0, t):

$$i(0, t) = \frac{E_{0m}}{2Z_c} w(2\theta, t) \sin(\omega t) + \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin(kL_0) \cos(\omega t - kL_0) \gamma(t - 2\theta)$$
 (103)

Dans cette formule intégrant le lien $kL_0 = \omega \theta$, on se rend compte que l'amplitude de la fonction échelon figurant dans le second terme n'est autre que l'expression (55) de la solution en régime entretenu, formulée antérieurement en § 3.1.2.

ll est alors évident que le comportement asymptotique de l'équation (103) quand $t \rightarrow \infty$ évolue vers la solution du régime entretenu (55).

La simulation de la figure **14** est établie pour une ligne de dimension telle que θ =1,125 *T*, c'est-à-dire non résonante.

En trait pointillé figure la solution du régime entretenu donnée par l'équation (55). Le trait continu relate le tracé de la solution complète établie en (103). Sur le graphe (figure **14**) ont été marquées les séquences **1**, **2** et **3** discutées précédemment. On note en **3** la parfaite concordance entre la solution du régime entretenu et le comportement asymptotique de l'équation (103).

Exemple 2: ligne ouverte, source de fem pure $\rho_0=-1$, dimension L_0 quelconque

On retrouve dans ce deuxième exemple l'indétermination des valeurs asymptotiques de *i* (0, *t*) évoquée au § 5.3.1, car $\rho_0 = -1$ et $\rho_L = +1$. Pour étayer le raisonnement, exprimons la forme complexe de *i* (0, *t*) aux temps *t* contenus dans l'intervalle $2(N-1)\theta \le t < 2N\theta$ où *N* représente un entier positif :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{Z_c} e^{-2N\alpha L_0} w(2\theta, t - 2N\theta) e^{j\omega t} + \dots$$

$$\dots \frac{E_0}{Z_c} (1 - e^{-2\alpha L_0} e^{-j2\omega\theta}) e^{-j\omega t} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-2n\alpha L_0} e^{-j2n\omega\theta} \gamma(t - 2n\theta)$$
(104)

Dans la formule (104) figure la constante d'atténuation de la ligne assortie de l'invariance de α avec la fréquence des signaux.

Pour des durées infiniment grandes, cela équivaut à faire tendre *N* vers l'infini, soit :

$$t \to \infty \Rightarrow N \to \infty$$

Sous ces conditions, le premier terme du second membre de l'expression (104) tend vers zéro, alors que le second terme adopte le comportement d'une série absolument convergente prenant pour valeur asymptotique :

$$N \to \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-2n\alpha L_0} e^{-j2n\omega \theta} \gamma(t-2n\theta) = \frac{1}{1+e^{-2\alpha L_0} e^{-j2\omega \theta}} \gamma(t)$$

La forme complexe de i(0, t) prend donc pour expression :

$$t \to \infty \Longrightarrow i(0, t) \to \frac{E_0}{Z_c} \frac{1 - e^{-2\alpha L_0} e^{-j2\omega \theta}}{1 + e^{-2\alpha L_0} e^{-j2\omega \theta}} e^{-2j\omega t} \gamma(t)$$

Relation que l'on peut écrire sous une formule plus compacte utilisant la notation tangente hyperbolique et le lien $kL_0 = \omega \theta$, soit :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0, t) \to \frac{E_0}{Z_c} \tanh[(\alpha + jk)L_0]e^{-j\omega t}\gamma(t)$$
 (105)

S'il est admis que la fréquence est suffisamment élevée pour satisfaire la condition $k >> \alpha$, l'expression (105) se simplifie pour donner la relation :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0, t) \to j \frac{E_0}{Z_c} \tan (kL_0) e^{-j\omega t} \gamma(t)$$
 (106)

Convertie en signal sinusoïdal, i(0, t) prend finalement l'expression analytique (107) :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0, t) \to i_e(0, t) = \frac{E_{0m}}{Z_c} \tan(kL_0) \cos(\omega t) \gamma(t)$$
 (107)

Hormis la présence de la fonction échelon, la formule concorde parfaitement avec la solution du régime entretenu donné par l'équation (48) figurant au § 3.1.1.

La simulation reproduite sur la figure **15** a été obtenue avec une ligne sans perte $\alpha = 0$, et restreinte à six itérations, N = 5, selon le calcul de *i* (0, *t*) par les relations (96) et (97), soit :

$$i(0, t) = \sum_{n=0}^{b} (-1)^n i_0 (t - 2n\theta)$$
(108)

La fonction auxiliaire $i_0(t)$ adopte ici pour expression :

$$i_0(t) = \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin(\omega t) \gamma(t) - \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin[\omega(t-2\theta)] \gamma(t-2\theta)$$
(109)

La longueur de la ligne L_0 choisie hors condition de résonance est telle que θ = 1,85 T.

La courbe portée en traits pointillés (figure **15**) représente la solution $i_e(0, t)$ établie pour le régime entretenu par l'équation (48), la courbe en trait continu (figure **15**) reproduit l'évolution de i(0, t) calculé suivant les relations (108) et (109). La progression des réflexions transitoires est transcrite par les barres verticales colorées tracées en trait continu pour la première séquence n = 0, en trait pointillé pour les cinq séquences ultérieures (figure **15**).

Sachant que $\alpha = 0$, $\rho_0 = -1$ et $\rho_L = +1$, l'extinction du régime transitoire est impossible, en conséquence, quand $t \rightarrow \infty$ on peut affirmer que *i* (0, *t*) diffère de *i*_e (0, *t*).

Une seconde simulation concerne la ligne ouverte mais amortie par l'impédance interne de la source de fem sinusoïdale. La résistance interne de la source prend pour valeur $Z_0 = Z_c/4$, c'est-à-dire un coefficient de réflexion négatif tel que $\rho_0 = -0.6$.

La figure **16** rassemble les signaux produits par la simulation, en trait pointillé figure la solution en régime entretenu i_e (0, t) donnée par l'expression ci-dessous :

$$i_e(0, t) = 1,29 \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin(\omega t - 1,23)$$
 (110)

En trait continu figure la solution complète arrêtée comme précédemment à six itérations et selon le calcul direct donné par l'expression (111) :

$$i_e(0, t) = 0.8 \sum_{n=0}^{5} (-0, 6)^n i_0 (t - 2n\theta)$$
 (111)

La restitution graphique (figure **16**) est sans équivoque, car on observe dès la sixième itération la convergence de i(0, t) vers $i_e(0, t)$.

En règle générale, la contribution des phénomènes transitoires tels qu'illustrés dans cette section n'offre pas un grand intérêt pratique, car dans l'usage rationnel une ligne fonctionne en permanence sur le régime entretenu. Néanmoins, les raisonnements peuvent être étendus à d'autres configurations de lignes soumises à des commutations récurrentes ou aléatoires de leur impédance de charge. Les perturbations électromagnétiques engendrées par les convertisseurs statiques d'énergie électrique appartiennent à cette problématique. Le bruit rencontré sur les réseaux de transport d'énergie possède également pour origine physique ces phénomènes de commutation d'impédance. Le bruit est engendré par la variabilité aléatoire des conditions aux limites exprimées dans les équations (38) formulées au § 2.3.3. Les calculs de transmission sur ligne d'énergie par courants porteurs peuvent alors s'inspirer de cette approche.

Exemple 3 : ligne ouverte de dimension L_0 accordée sur la résonance de rang r = 3

Revenons sur l'expression (59) du paragraphe 3.1.3 restituant la valeur de la fréquence f_r de la résonance de rang r telle que rappelée ci-dessous :

$$f_r = (2r+1)\frac{v_0}{4L_0}$$
 ou $T_r = \frac{\theta}{0.25+0.5r}$ (112)

La formule portée à droite de (112) exprime alors le lien entre le temps de propagation en ligne θ et la période T_r de la source de fem sinusoïdale connectée sur la ligne. On observe que la résonance de rang 3, soit r = 3, mène à la relation $\theta = 1,75 T_r$, c'est-à-dire la condition de résonance la plus proche de $\theta = 1,85 T_r$ adoptée dans le déroulement du deuxième exemple.

Regardons immédiatement la solution du régime entretenu tenant compte de la constante d'atténuation α . Sachant qu'en condition de résonance, le produit kL_0 prend pour valeur :

$$r = 3 \rightarrow kL_0 = 3,5\pi$$

La solution complexe (105) du courant i(0, t) va donc suivre le comportement asymptotique :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0, t) \to \frac{E_0}{Z_c} \frac{1}{\tanh(\alpha L_0)} e^{-j\omega t} \gamma(t)$$
 (113)

La relation (114) transposée en signal sinusoïdal s'exprime alors :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0,t) \to \frac{E_{0m}}{Z_{c}} \frac{1}{\tanh(\alpha L_{0})} \sin(\omega t) \gamma(t)$$

Le courant en entrée de ligne est donc strictement l'homothétique de la fem. Pour une ligne sans pertes, la constante d'atténuation est strictement nulle et l'on obtient $\alpha = 0 \Rightarrow i(0, t) \rightarrow \infty$. Ce résultat rejoint pas conséguent la singularité discutée au 3.1.3.

La figure **17** comporte les signaux simulés en entrée de ligne stimulée par la commutation de la source sinusoïdale. Le trait continu reproduit le signal obtenu en présence d'une source de fem idéale, soit $Z_0 = 0$, le trait pointillé donne *i* (0, *t*) pour une source prenant pour résistance interne $Z_0 = Z_c/4$. Les échelles de temps et d'amplitude adoptent les grandeurs relatives t_r et i_r (0, t_r) considérées plus haut.

La montée en amplitude de la réponse non amortie s'explique aisément par l'accumulation synchrone des courants transitoires formés par la relation (108) rappelée ci-dessous :

$$i(0, t) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n i_0 (t - 2n\theta)$$
(114)

En effet, la fonction auxiliaire $i_0(t)$ s'exprime présentement :

$$i_{0}(t) = \frac{E_{0m}}{Z_{c}} [\gamma(t) + \gamma(t - 2\theta)] \sin(\omega t)$$
(115)

En conséquence, si I_n représente l'amplitude crête de i(0, t) lors de l'itération de rang n, on montre aisément que la combinaison des formules (114) et (115) mène à la relation de récurrence ci-dessous :

$$n = 0 \rightarrow I_0 = 1, n = 1 \rightarrow I_1 = 3..., n = N \rightarrow I_N = 1 + 2N$$
 (116)

Selon ce processus, quand $N \rightarrow \infty$, on obtient $I_N \rightarrow \infty$, résultat tout à fait concordant avec la solution du régime entretenu établie en (113) pour $\alpha \rightarrow 0$.

Le signal en trait pointillé (figure **17**) exprime la réponse de la ligne en condition de résonance, mais amortie par la résistance interne de la source. Le calcul réduit à l'itération de six termes est accompli suivant l'expression portée ci-dessous :

$$i(0,t) = 0.8 \frac{E_{0m}}{Z_c} \sum_{n=0}^{5} (-0,6)^n i_0 (t - 2n\theta)$$
(117)

La dimension de la ligne est accordée sur la résonance de rang 3, donc $\theta = 1,75$ *T*, hormis la progression de l'amplitude, le signal reproduit un rigoureux synchronisme avec le calcul pratiqué sans amortissement. On vérifie qu'à l'itération de rang n = 3, le signal simulé est pratiquement confondu avec la solution du régime entretenu i_e (0, *t*) donnée par la formule :

$$i_e(0,t) = 4\frac{E_{0m}}{Z_c}\sin(\omega t)$$
 (118)



Figure 14 – Simulation de la réponse transitoire d'une ligne ouverte soumise à une source de fem sinusoïdale d'impédance interne adaptée







Figure 16 – Simulation d'une ligne ouverte amortie par l'impédance interne d'une source délivrant une fem sinusoïdale, convergence vers la solution du régime entretenu



Figure 17 – Simulation des solutions générales i (0, t) d'une ligne ouverte soumise à une fem sinusoïdale sous la condition de résonance de rang r = 3

5.4 Formalisme des paramètres S

Ce paragraphe introduit le concept de paramètre S bien connu des utilisateurs d'analyseurs de réseaux. Il est évident que les lignes de transmissions font fréquemment l'objet de ce type de mesure, aussi était-il important de rappeler la définition des paramètres S. Leur lien avec la théorie des lignes de transmission sera ensuite établi pour aboutir aux expressions formulant les coefficient *sij* de la **matrice répartition** d'une ligne. Le paragraphe 5.4.4 venant clore cette section sera consacré à la présentation de trois exemples.

5.4.1 Définition des paramètres S

Considérons le quadripôle tel que décrit à la figure 18.

De part et d'autre des ports **1** et **2** (figure **18**) prennent place deux sources de tensions sinusoïdales de fem E_1 et E_2 possédant la même impédance interne Z_r , appelée par la suite impédance de référence. Le fonctionnement du circuit ainsi configuré engendre sur le **Port – 1** le courant I_1 , la tension V_1 et sur le **Port – 2**, le courant I_2 , la tension V_2 . L'examen du schéma de la figure **18** permet de former les équations suivantes :

$$E_1 = a_1 = V_1 + Z_r I_1 \tag{119}$$

$$E_2 = a_2 = V_2 + Z_r I_2 \tag{120}$$

Dans le formalisme des paramètres *S*, la fem E_1 s'identifie ici à l'onde entrante dans le **Port – 1** et prend pour symbole a_1 , la fem E_2 est l'onde entrante du **Port – 2** avec pour symbole a_2 . Inversement, au **Port – 1** va correspondre une onde sortante b_1 et au **Port – 2** une onde sortante b_2 répondant aux définitions rapportées ci-dessous :

$$b_1 = V_1 - Z_r I_1 \tag{121}$$

$$b_2 = V_2 - Z_r I_2 \tag{122}$$

L'orientation des flèches comme positionnées sur la figure **18** correspond aux sens de progression des ondes.

La matrice répartition (S) encore appelée en anglais, *scattering matrix*, relie le *vecteur onde entrante* (A) au *vecteur onde sortante* (B) par le produit (123) :

$$(B) = (S) (A) \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
(123)





5.4.2 Lien des paramètres *S* avec les mesures délivrées par un analyseur de réseaux

Lors de mesures pratiquées à l'analyseur de réseau, seule subsiste au **Port – 2** (figure **18**) l'impédance Z_r , donc $E_2 = 0$, on déduit immédiatement des équations précédentes que $a_2 = 0$. L'appareil va donc fournir les coefficients s_{11} et s_{21} produits respectivement par les rapports :

$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1}$$
 et $s_{21} = \frac{b_2}{a_1}$ avec $E_2 = 0$ (124)

Inversement, on détermine s_{12} et s_{22} en permutant la source et la charge, en règle générale la symétrie du quadripôle implique celle des coefficients $s_{11} = s_{22}$ et $s_{21} = s_{12}$.

5.4.3 Calcul de la matrice S d'une ligne de transmission

Revenons sur le schéma de la ligne de transmission présentée en figure **7**, les conventions de notations seront aménagées en vue de les adapter au contexte du quadripôle de la figure **18**, d'où :

$$\begin{split} E_0 = E_1, \ Z_0 = Z_r, \ Z_L = Z_r, \ E_2 = 0\\ I(0) = I_1, \ V(0) = V_1, \ I(L_0) = -I_2, \ V(L_0) = V_2 \end{split}$$

Après usage de la formule de l'impédance d'entrée Z_E donnée par la relation (89), on parvient sans difficulté aux calculs des ondes a_1 et b_1 telles que formulées en (119) et (121). Le paramètre s_{11} de la ligne fixé par le rapport (124) prend alors pour expression :

$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_E - Z_r}{Z_E + Z_r}$$
(125)

Quant au calcul du paramètre s_{21} , on procède aux combinaisons de l'impédance d'entrée Z_E et des paramètres ℓ_{ij} de la matrice chaîne, ces derniers étaient déterminés au § 5.2.2, soit :

$$s_{21} = \frac{(\ell_{11}Z_{\rm E} + \ell_{12}) + (\ell_{21}Z_{\rm E} + \ell_{22})Z_{\rm r}}{Z_{\rm E} + Z_{\rm r}}$$
(126)

La ligne de transmission possédant les propriétés d'un quadripôle symétrique, on pose $s_{11} = s_{22}$ et $s_{21} = s_{12}$.

5.4.4 Calcul des paramètres s_{ij} fondé sur trois exemples numériques

On considère successivement le cas des paramètres *sij* d'une ligne ayant une impédance caractéristique Z_c rigoureusement égale à l'impédance de référence Z_r , puis une ligne où Z_c diffère sensiblement, puis manifestement de Z_r .

Calcul des s_{11} et s_{21} quand $Z_c = Z_r$

Quand l'impédance caractéristique de la ligne Z_c est rigoureusement égale à l'impédance de référence Z_r , le calcul des coefficients se simplifie considérablement, les relations (125) et (126) prennent pour valeurs :

$$s_{11} = 0$$
 et $s_{21} = e^{-jkL_0} \rightarrow |s_{21}| = 1$

L'adaptation rigoureuse élimine l'onde sortante b_1 du **Port – 1**, alors que l'onde sortante b_2 du **Port – 2** prend une amplitude absolue strictement égale à l'onde entrante a_1 dans le **Port – 1**. Seul subsiste le déphasage kL_0 engendré par le retard de propagation en ligne.

Calcul des s_{11} et s_{21} quand $Z_c \cong Z_r$

La simulation numérique des relations (125) et (126) pratiquée pour une ligne d'impédance caractéristique très proche de l'impédance de référence impose l'adoption pour Z_r la valeur normalisée



Figure 19 – Simulation des paramètres s_{11} et s_{21} de lignes prenant pour impédances caractéristiques $Z_c = 54 \Omega$ et $Z_c = 75 \Omega$

de 50 Ω et $Z_c = 54 \Omega$. La dimension longitudinale de la ligne est fixée à $L_0 = 1$ m et la vitesse de propagation à $v_0 = (2/3)c$.

Les courbes tracées sur la figure **19** et présentées en couleur bleue par un trait épais montrent les variations des amplitudes absolues de s_{11} et s_{21} . La gamme de fréquence s'étend de 1 MHz à 1 GHz sous une graduation horizontale logarithmique, alors que l'axe vertical portant les valeurs numériques de $|s_{11}|$ et $|s_{21}|$ demeure en graduation linéaire.

On observe que le paramètre $|s_{21}|$ est pratiquement invariant avec la fréquence et très proche de l'unité alors que $|s_{11}|$ manifeste deux comportements bien distincts.

Au-dessous de 50 MHz, $|s_{11}|$ croît continûment avec la fréquence pour atteindre un maximum de 0,08. Au-dessus de 50 MHz, on enregistre des fluctuations d'amplitude périodiques passant alternativement d'une valeur nulle à 0,08 (figure **19**). De plus, un calcul montre qu'à la fréquence de 50 MHz délimitant ces deux comportements, la longueur d'onde dans la ligne est égale à $\lambda = 4 m$, soit $\lambda = 4L_0$, la fréquence de 50 MHz coïncide donc avec la fréquence de résonance fondamentale de la ligne.

Il est évident que dans ce contexte, l'équivalent d'une ligne ouverte ou court-circuitée n'a qu'une appréciation relative rapportée à l'impédance caractéristique. Dire que la ligne connectée sur Z_r normalisée à 50 Ω suit le comportement d'une ligne court-circuitée équivaut à admettre que $Z_c \rightarrow \infty$ et $|s_{11}| \rightarrow 1$. De ce constat, on déduit immédiatement que la valeur maximale de 0,08 atteint par $|s_{11}|$ est bien révélatrice du rapport $Z_c/Z_r = 1,08$.

De plus, l'examen des courbes montre que l'espacement en fréquence de zéros consécutifs (ou maximums) se situe exactement à 100 MHz, c'est-à-dire l'écart déterminé par deux résonances successives calculées par la relation (59) au § 3.1.3, soit $\Delta f = f_{r+1} - f_r = v_0/2L_0 = 100$ MHz. La restitution graphique du paramètre $|s_{11}|$ est donc bien synonyme de l'entretien d'une onde stationnaire partielle, car $|s_{11}| = 0.08 < 1$.

Calcul des s_{11} et s_{21} quand $Z_c = 1,5 Z_r$

La simulation précédente a été répétée en attribuant à la ligne de transmission une impédance caractéristique de valeur numérique $Z_c = 75 \Omega$. Les courbes tracées en rouge et en trait fin (figure **19**) superposées aux précédentes montrent que l'accroissement du rapport Z_c/Z_r ne modifie pas profondément la courbe réstituant s_{11} ,

hormis le maximum dont la valeur passe à 0,38. En revanche, l'examen du paramètre s_{21} fait apparaître des fluctuations d'amplitudes contenues entre une valeur minimale de 0,92 et maximale de 1. D'autre part, on observe que les minimas de s_{21} coïncident avec les maximums de s_{11} et que c'est exactement l'opposé pour les maximas. Ce comportement est donc en relation avec l'onde stationnaire partielle entretenue sous ce fonctionnement, mais aux fluctuations d'amplitudes amplifiées par l'accroissement du rapport Z_c/Z_r .

Finalement, la simulation numérique apporte de solides arguments sur l'usage et la mesure des paramètres S quant à la recherche des propriétés et comportements des paramètres secondaires d'une ligne de transmission.

Nous aurions également pu perfectionner l'analyse par l'insertion des dissipations d'énergie de la ligne afin d'intégrer la contribution de l'atténuation α et de la composante réactive X_c de l'impédance caractéristique discutées au § 4.2.1.

6. Conclusion

Pour compléter cet article consacré aux éléments de théorie des lignes, il paraît intéressant d'énoncer en conclusion quatre problèmes académiques venant étendre et approfondir la portée des formalismes précédents.

Le premier problème concerne le traitement des lignes de transmission reliées à des charges aux comportements non linéaires. Il faut savoir que la difficile question du **fonctionnement non linéaire** peut être assez bien élucidée par le calcul des courants et tensions développés sur une ligne chargée par une diode ou par une résistance variant cycliquement dans le temps. Dans la première configuration, on tente d'évaluer les conditions de résonance de la ligne soumise à des signaux harmoniques. Dans la seconde, on recherche le spectre des courants et tensions de la ligne alimentée par une source de tension continue. Ce problème académique, en apparence simple, est en relation avec les perturbations électromagnétiques produites par des convertisseurs d'énergie sur les réseaux d'énergie. Le problème intéresse également le comportement des diodes de protection des circuits intégrés exposées à des interférences montement des diodes de protection des circuits intégrés exposées à des interférences d'ultra haute fréquence.

Dans une toute autre perspective, la **propagation des signaux sur des lignes multifilaires constituées de** *N* **conducteurs** rapportés à une référence commune exige une révision des raisonnements classiques suivis dans l'article. Cette fois, le problème s'adresse à *N lignes couplées* auxquelles il faut joindre des vecteurs courants et tensions prenant place dans une équation d'onde matricielle ; équation dont les dimensions s'accordent rigoureusement sur la taille *N*. La résolution fait alors émerger la propagation modale et consécutivement de nouvelles propriétés physiques associées aux lignes couplées.

Le troisième problème, d'un caractère plus formel concerne la résolution des lignes par l'usage de l'impédance d'entrée. Cette méthode peut être encore améliorée par l'adoption d'une transformation homographique aboutissant sur l'abaque de Smith. La conversion graphique du raisonnement, intensément utilisée par les spécialistes des circuits micro-ondes ou plus généralement par les utilisateurs d'analyseurs de réseaux, apporte également un intéressant complément aux approches analytiques usuelles.

Le quatrième problème consiste à **étendre la théorie des lignes au domaine de la propagation des ondes acoustiques**. Selon la nature du support, on fait alors correspondre aux paramètres primaires de la ligne d'autres quantités macroscopiques tributaires des propriétés physiques de ce milieu. Ainsi, selon le cas, on fera appel aux propriétés mécaniques de la matière condensée ou aux propriétés thermodynamiques des fluides. Cette évolution du sujet fortement inspirée des techniques d'analogie électromécanique ouvre incontestablement de nouveaux champs d'applications à la théorie des lignes.



Figure 2 - Convention de représentation des courants et tensions en un point de coordonnée longitudinale z quelconque



Figure 3 - Illustration des paramètres géométriques, des courants et tensions des champs magnétique et électrique attachés à une ligne coaxiale

conforme à l'orientation choisie sur la figure **2**. Le signal courant déterminé par la fonction i(z, t) sera fixé et orienté selon la flèche portée sur le conducteur **1**. Le retour du courant s'effectue par le second conducteur **2** avec une orientation évidemment opposée à la précédente, mais absente de la figure **2**.

Toutes ces définitions préliminaires étant admises, le contenu du prochain paragraphe sera exclusivement consacré à la ligne coaxiale.

1.2 Cas particulier de la ligne coaxiale

La symétrie de révolution de la ligne coaxiale facilite considérablement l'analyse physique en vue de la détermination de l'inductance linéique et de la capacité linéique. À cet argument s'ajoute l'usage très répandu de la ligne coaxiale en tant que composant destiné à transmettre des signaux de fréquences très élevées, pouvant atteindre et même dépasser quelques gigahertz.

1.2.1 Description géométrique et physique

La figure **3** comporte trois épures géométriques d'une ligne coaxiale relatant les paramètres dimensionnels (figure **3***a*), les

conventions d'orientation des courants et tensions (figure **3***b*), l'orientation du champ magnétique H_{θ} lié au courant *i*(*z*, *t*) et du champ électrique E_{ρ} lié à la tension *v*(*z*, *t*) (figure **3***c*).

Analyses détaillées des paramètres géométriques

L'élément prenant l'indice **1** constitue le conducteur intérieur de diamètre *d*, l'élément **2** concentrique au précédent, le conducteur extérieur où retourne le courant. Le conducteur extérieur possède pour diamètre interne *D* et pour épaisseur *e*. L'orientation choisie pour la tension (figure **3b**) signifie que l'élément **2** forme la référence de potentiel.

Il sera admis pour l'instant que l'espace entre les conducteurs est exempt de tout matériau diélectrique.

On procédera au calcul du **champ magnétique** H_{θ} et du **champ électrique** E_{ρ} en tout point **P** intérieur au domaine cylindrique vide entre **1** et **2**. Les résultats du calcul seront utiles pour la détermination de l'inductance linéique *L* et de la capacité linéique *C*.

Calcul du champ magnétique H_{Θ}

Considérons le fonctionnement en régime statique attribuant au courant une valeur $i(z, t) = I_0$ invariante dans le temps et dans la direction longitudinale. Sachant que le conducteur extérieur est constitué d'un tube homogène dépourvu d'ouvertures, le champ

magnétique engendré par le courant de retour dans **2** sera strictement nul. Ce comportement physique suppose évidemment une densité de courant uniforme dans toute la section du conducteur. En conséquence, il ne subsiste dans la ligne coaxiale que le champ magnétique produit par le courant circulant sur le conducteur intérieur **1**. Le courant I_0 va donc générer une composante angulaire H_{θ} de champ magnétique répondant au critère de *symétrie de révolution*, c'est-à-dire invariante avec la variable angulaire θ précisée à la figure **3***c*. Le régime statique autorise alors l'usage du théorème d'Ampère formulé ci-dessous :

$$\int_{0}^{2\pi} H_{\theta} \rho d\theta = I_{0} \rightarrow H_{\theta} = \frac{I_{0}}{2\pi\rho}$$
(1)

Le calcul de l'intégrale étant immédiat, on extrait l'expression de H_{θ} figurant à droite de l'équation (1).

Calcul du champ électrique *E*_p

L'hypothèse statique consiste cette fois à soumettre la ligne à une tension invariante avec z et t, c'est-à-dire, v (z, t) = V₀. Pour un tronçon de ligne coaxiale de dimension unité, $L_0 = 1$ m, V_0 engendre sur le conducteur intérieur **1** la quantité de charges électriques Q_1 . On relie Q_1 à la capacité linéique C de la ligne par le produit, $Q_1 = CV_0$. La tension V_0 et la composante de champ électrique E_ρ orientée suivant la direction radiale ρ étant liées par le théorème de Gauss, les orientations choisies pour V_0 et E_ρ permettent d'écrire :

$$\int_{0}^{2\pi} E_{\rho} \rho d\theta = -\frac{Q_{1}}{\varepsilon_{0}} \rightarrow E_{\rho} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_{0}} \frac{CV_{0}}{\rho}$$
(2)

Les propriétés de symétries de révolution du champ électrique amenant une résolution immédiate de l'intégrale, $E_{\rm p}$ est donc déterminé par la formule figurant à droite de l'équation (2). Dans cette expression apparaît la permittivité absolue du vide prenant pour valeur approchée $\varepsilon_0 \cong (1/36\pi) \times 10^{-9}$ F/m.

1.2.2 Calcul de l'inductance linéique de la ligne coaxiale

Appelons Φ le **flux magnétique** engendré sur l'unité de dimension longitudinale par la composante de champ magnétique intérieure à la ligne coaxiale. L'inductance linéique *L* sera donc reliée au courant I_0 défini précédemment par la loi de l'auto-induction $\Phi = LI_0$.

Après usage de l'expression (1) fournissant ${\it H}_{\rm \theta},$ on parvient à l'intégrale :

$$\Phi = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi} \int_{d/2}^{D/2} \frac{d\rho}{\rho} = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \rightarrow L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$
(3)

La détermination de la primitive étant immédiate, on déduit aisément l'expression de l'inductance linéique *L* portée à droite de l'équation (3). Dans le résultat apparaît la perméabilité magnétique absolue du vide prenant pour valeur $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

1.2.3 Calcul de la capacité linéique de la ligne coaxiale

La tension statique V_0 appliquée entre le conducteur extérieur **2** et le conducteur intérieur **1** de la ligne coaxiale peut être reliée à la composante radiale E_{ρ} de champ électrique par deux expressions distinctes. La première établie par l'application du théorème de

Gauss figure dans l'équation (2). La seconde expression n'est autre que la définition de la différence de potentiel établie par l'intégrale :

$$V_0 = -\int_{d/2}^{D/2} E_{\rho} d\rho = \frac{CV_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$
(4)

De ce calcul, on extrait sans peine la valeur de la capacité linéique figurant à droite de l'équation (4).

Quand la ligne coaxiale est remplie d'un isolant homogène, ce qui est forcément le cas lors de l'utilisation rationnelle de câbles coaxiaux, il peut être montré que la capacité linéique *C* prend pour valeur :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$
(5)

Au numérateur de la formule figure la permittivité électrique relative ϵ_r du diélectrique constituant l'isolant.

Exemple de valeurs numériques de L et C

Prenons un câble coaxial ayant pour caractéristiques géométriques D = 4 mm et d = 1 mm, l'isolant est constitué de polyéthylène prenant pour permittivité électrique relative $\varepsilon_r = 2,35$. De la relation (3), on en déduit L = 277 nH/m pour l'inductance linéique, l'expression (5) donne C = 94 pF/m pour la capacité linéique.

Dualité des relations exprimant L et C

En formant le produit des relations (3) et (4), les logarithmes contenant les paramètres géométriques transversaux de la ligne s'éliminent pour ne laisser, que le produit des constantes physiques μ_0 , ϵ_0 , soit :

$$LC = \mu_0 \varepsilon_0 \tag{6}$$

Pour lier une propriété fondamentale des lignes à cette relation, exprimons la valeur approchée de la vitesse de la lumière c dans le vide (air) établie selon la formule (7) :

$$c \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m/s}$$
 où $\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{36 \,\pi} \times 10^{-9} \,\mathrm{F/m}$ (7)

La confrontation avec la relation (6) montre tout de suite que le produit *LC* n'est autre que l'inverse de la célérité *c* élevée au carré, soit $LC \cong 1/c^2$. Nous reviendrons sur cette question au cours du prochain paragraphe consacré à la résolution de l'équation d'onde.

1.3 Autres configurations de lignes

Les lignes composées de deux conducteurs parallèles ou torsadés généralement destinées au transport de l'énergie électrique sont d'un usage très répandu. Bien que le transport de l'énergie sous fréquence industrielle de 50 Hz permette de négliger les phénomènes de propagation, cette approximation n'est plus du tout acceptable quand se superposent aux courants forts et aux tensions élevées des signaux hautes fréquences. Ces phénomènes ont généralement diverses origines physiques, ils peuvent être la conséquence de perturbations entretenues par des convertisseurs d'énergie connectées au réseau. Il peut également s'agir de signaux hautes fréquences volontairement injectés sur les lignes d'énergie par des procédés de télécommunications à courants porteurs. Ces raisons incitent par conséquent à préciser les paramètres primaires de la ligne bifilaire et de la ligne monofilaire constituée d'un conducteur localisé à proximité d'un plan métallique. Le paragraphe 1.3 abordera également le rôle des gaines diélectriques constituant l'isolement de ces lignes.



Figure 4 - Description géométrique transversale de la ligne bifilaire

1.3.1 Ligne bifilaire

La figure **4** donne une coupe transversale de la ligne bifilaire constituée de conducteurs de diamètres d_1 et d_2 espacés de d_{12} . Il s'agit de conducteurs parallèles exempts de gaines isolantes.

Il sera plus commode d'exprimer *L* et *C* en fonction des rayons $r_1 = d_1/2$ et $r_2 = d_2/2$.

Formule de l'inductance linéique L

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[\frac{(d_{12} - r_1) (d_{12} - r_2)}{r_1 r_2} \right]$$
(8)

Formule de la capacité linéique C

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\frac{(d_{12} - r_1)(d_{12} - r_2)}{r_1 r_2}\right]}$$
(9)

Notons qu'en présence de deux conducteurs de diamètres identiques, le rayon et le terme comprenant le logarithme s'expriment respectivement r = d/2 et 2 ln $[(d_{12} - r)/r]$.

On retrouve la dualité des expressions (8) et (9) en formant le produit $LC = \mu_0 \varepsilon_0$, cette propriété est commune à toute ligne de transmission immergée dans un milieu homogène.

Recommandation d'usage des formules

Les formules (8) et (9) établies sous l'hypothèse de conducteurs dotés d'une conductivité électrique infinie demandent en pratique quelques précautions d'usage. En réalité, il s'agit de conducteurs composés de matériaux de grande conductivité électrique σ mais non idéalement infinie, tel est le cas du cuivre et de ses alliages où : $\sigma = 5,8 \times 10^{-7}$ S/m. Dans ces conditions réelles d'utilisation, s'il s'avère que les conducteurs sont très proches, c'est-à-dire à une distance comparable à $r_1 + r_2$, la répartition de la densité de courant dans la section des conducteurs cesse d'être uniforme pour se concentrer sur les zones de proximité marquées par les cercles en pointillés rouges de la figure **4**. Cet effet de proximité peut donc contribuer à introduire une dérive des valeurs de *L* et *C* telles qu'établies par les formules (8) et (9).

En conséquence, pour réduire l'erreur systématique due au phénomène de proximité, l'usage des relations (8) et (9) ne s'applique qu'aux lignes composées de conducteurs de faibles rayons r_1 et r_2

rapportés à leur distance mutuelle d_{12} , soit $r_1r_2 \ll d_{12}$.

1.3.2 Conducteur parallèle à un plan métallique

La coupe transversale de la figure **5** donne la structure géométrique d'une ligne composée d'un conducteur cylindrique parallèle à un plan métallique. Le plan est admis de dimensions idéalement infinies.



Figure 5 – Coupe transversale d'une ligne de transmission constituée d'un conducteur cylindrique parallèle à un plan métallique de dimensions infinies

Dans ce contexte, le plan métallique **2** forme la référence de potentiel et assure le retour du courant. Le calcul de l'inductance linéique et de la capacité linéique peut être entrepris à l'aide de la théorie des images électriques exposée dans l'article [E 1 020]. Dans ce cas, la transcription des relations (8) et (9) de la ligne bifilaire fournit directement les valeurs de *L* et *C* du conducteur parallèle au plan métallique, comme présenté sur la figure **5**.

Formule de l'inductance linéique L

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{4h-d}{d}\right) \tag{10}$$

Formule de la capacité linéique C

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{4h-d}{d}\right)}$$
(11)

On vérifie que le produit de ces nouvelles expressions conserve la propriété de dualité :

 $LC = \mu_0 \varepsilon_0$

Les précautions d'usage de ces relations nécessitent également le respect de la condition $d \ll h$.

Les pistes de circuits imprimés déposées sur un substrat diélectrique adossé à un plan de masse s'approchent de la configuration de la figure **5**. La mise en place d'expressions analytiques donnant L et C peut être également envisagée au prix d'aménagements tenant compte de la section rectangulaire du conducteur et de la présence du substrat.

Il est important de mentionner que l'assimilation du plan métallique à une surface infinie relève d'une commodité théorique imposée par l'usage des images électriques. En pratique, le plan peut être admis infini dès que sa dimension transversale l_0 portée sur la figure **5** est très supérieure à l'altitude *h* du conducteur. Cette approximation suppose également le conducteur éloigné des bordures du plan.

Une ligne de transmission répondant aux critères géométriques de la figure **5** s'appelle parfois « ligne monofilaire ».

1.3.3 Influence des gaines diélectriques

En règle générale, les conducteurs composant les lignes bifilaires ou monofilaires étudiées en sections précédentes sont revêtus d'une gaine isolante d'épaisseur extrêmement variable. Si le calcul de l'inductance linéique tel que formulé plus haut au paragraphe 1.2.2 demeure inchangé par la gaine isolante, il en va tout autrement pour la capacité linéique.

$$\varepsilon_{\rm req} = \frac{C_n}{2\pi\varepsilon_0} \ln K$$
 (12)

Le paramètre *Cn* correspond ainsi à la valeur de la capacité calculée numériquement et *K* aux rapports des dimensions géométriques transversales telles que libellées dans les expressions (9) ou (11). La propriété de dualité du produit *LC* s'exprime cette fois :

 $LC = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{req}$

Quand les conducteurs sont immergés dans un diélectrique homogène infiniment étendu, de permittivité relative ε_r , il suffit d'introduire directement ε_r dans les relations (9) et (11).

1.4 Restrictions imposées par la propagation TEM

Comme le prouvent les développements effectués pour la ligne coaxiale, les courants et tensions transportés dans une ligne de transmission sont naturellement liés au transport des champs électromagnétiques dans l'espace confiné entre les conducteurs **1** et **2**.

En absence de lignes, ou plus généralement de supports de propagation, le rayonnement d'une source d'énergie électromagnétique se manifeste par des ondes sphériques dispersées dans l'espace à la vitesse de la lumière dans le vide, l'article [E 1 020] restitue ce contexte physique.

Si l'on se limite pour l'instant à une source délivrant des champs animés de variations d'amplitude sinusoïdales telles que $e(t) = Em \sin(\omega t)$ pour le champ électrique et $h(t) = Hm \sin(\omega t)$ pour le champ magnétique et de pulsation ω . On peut joindre aux champs la fréquence f telle que $\omega = 2\pi f$, ainsi que la longueur d'onde λ émanant du rapport $\lambda = c/f$, où c représente la vitesse de la lumière dans le vide, un chiffre proche de 3×10^8 m/s.

L'hypothèse de la **propagation transverse électromagnétique**, désignée par l'abréviation TEM, signifie que le transport des champs électromagnétiques sur un support quelconque, mais rectiligne, ne peut se produire que selon la direction longitudinale. Cette condition élimine évidemment toute composante de champ électrique ou de champ magnétique parallèle à la direction longitudinale du support, soit pour les conventions adoptées sur la figure **3***c Ez* = 0 et *Hz* = 0. La propriété de l'onde TEM ainsi énoncée élimine au sens strict toute onde radiale.

Une ligne de transmission doit satisfaire ce critère. Néanmoins, en fonction de la fréquence de la source et de la géométrie, la propagation peut s'éloigner de ce modèle TEM idéal. Nous allons ci-après analyser qualitativement l'influence des dimensions transversales et des dissipations d'énergie sur la propagation TEM.

1.4.1 Incidence des dimensions transversales de la ligne

Revenons sur la ligne coaxiale de la figure **3a** en faisant abstraction du conducteur intérieur. Sous ce régime, il peut être montré que la propagation des champs E_{ρ} et H_{θ} dans la direction longitudinale Oz n'est possible qu'au-dessus d'une fréquence minimale. Celle-ci est imposée par les conditions de propagation de l'onde radiale dirigée dans la direction du repère O_{ρ} .

Dans ces circonstances, il apparaît que la propagation selon Oz est entretenue dès la mise en résonance de l'onde radiale susmentionnée. Ce phénomène se manifeste quand la longueur d'onde λ satisfait la condition :

$\lambda/2 \cong D$

où D diamètre interne du conducteur tubulaire.

Par la théorie des ondes cylindriques exprimant les champs sous la forme de fonctions de Bessel, on montre que l'entretien de la propagation de l'onde longitudinale dans le tube donne naissance à une composante de champ électrique E_z ou magnétique H_z orientée selon Oz. Le champ longitudinal prend l'amplitude maximale sur l'axe du tube, c'est-à-dire pour r = 0. Ce fonctionnement est donc manifestement étranger à la propagation TEM définie plus haut. On observe une propagation transverse électrique (TE) quand $E_z = 0$ et $H_z \neq 0$, ou transverse magnétique (TM) quand $H_z = 0$ et $E_z \neq 0$. Une analyse plus approfondie montre que les champs, ainsi distribués, dans la section tubulaire de ce guide d'onde sont incompatibles avec l'usage des théorèmes d'Ampère ou de Gauss uniquement applicables aux champs magnétiques et électriques.

Malgré la sévérité de cette restriction, nous allons montrer que la ligne coaxiale satisfait les critères de la propagation TEM pour des fréquences pouvant atteindre et même dépasser le gigahertz.

Introduisons le conducteur intérieur dans le tube de diamètre *D*, sachant qu'il s'agit d'un conducteur parfait, la composante de champ électrique E_z sera forcément nulle sur la surface du conducteur, il en va de même pour H_z . Cela ne signifie pas pour autant l'absence d'onde radiale, car la théorie des ondes cylindriques étendue au guide coaxial révèle la présence des deux composantes E_z et H_z , prenant l'amplitude maximale à une position équidistante du conducteur intérieur et du conducteur extérieur. Toutefois, tant que la longueur d'onde reste très supérieure au diamètre du conducteur extérieur $\lambda \gg D$, la théorie indique que $E_z << E_\rho$. De plus, la propagation de l'onde longitudi-

nale accompagnant le critère $\lambda >> D$ n'est plus tributaire d'une fréquence minimale présentement confondue avec la fréquence nulle, c'est-à-dire le régime statique.

Ce préalable étant satisfait, la ligne coaxiale répond aux conditions de la propagation TEM. Cette propriété peut être transposée sur la ligne bifilaire décrite à la figure **4** ou la ligne monofilaire de la figure **5**. Dans ce cas, la propagation TEM exige

les conditions $\lambda \gg d_{12}$ et $\lambda \gg h$. Il est évident que les diamètres des conducteurs doivent être également très inférieurs à λ .

1.4.2 Incidence des dissipations d'énergie

La question des **dissipations d'énergie** introduite dans la ligne fait l'objet d'approfondissements abordés au paragraphe 4.

Auparavant, essayons d'anticiper la compréhension de ces phénomènes pour établir leur lien avec la condition de propagation TEM. Il est certain que la dissipation thermique engendrée dans la résistance électrique non nulle des conducteurs composant la ligne va compromettre la propagation TEM. Les théories électromagnétiques montrent que la dissipation d'énergie dans les conducteurs composant une ligne coaxiale équivaut à transporter dans la matière une onde orientée suivant la direction radiale, c'est-à-dire dotée d'une composante de champ électrique E_z orientée suivant l'axe Oz. Inversement, le diélectrique faisant office d'isolant de la ligne coaxiale peut faire l'objet de dissipations d'énergie contribuant à l'atténuation des signaux suivant la direction longitudinale Oz. Sous ces conditions, l'énergie transportée dans la ligne coaxiale n'est plus uniformément confinée entre le conducteur intérieur et le conducteur extérieur, la propagation TEM n'est donc plus respectée.

On fera un constat analogue avec la ligne bifilaire ou la ligne monofilaire définie plus haut. Il peut être montré que ces structures ouvertes adoptent un comportement intermédiaire situé entre une antenne rayonnante et un guide d'ondes. Néanmoins, tant qu'il peut être prouvé que la puissance rayonnée par la ligne rapportée à l'unité de dimension longitudinale reste très inférieure à la puissance transportée ou entretenue dans la ligne, l'approximation de la propagation TEM reste acceptable, on parle alors de **propagation quasi TEM**. En présence d'une ligne bifilaire ou mono-

filaire, cette condition rejoint les critères $\lambda \gg d_{12}$ et $\lambda \gg h$.

2. Équation d'onde et présentation des solutions

Dans le prolongement du paragraphe précédent, le second paragraphe aborde d'autres questions d'ordre fondamental sur le fonctionnement des lignes de transmission. Nous procéderons à la mise en place de l'**équation des télégraphistes** dont la formulation mène naturellement à l'**équation d'onde**. La résolution de l'équation d'onde apportera quelques éclaircissements quant au rôle imparti à la source et à la charge prenant place aux deux extrémités de la ligne. Nous verrons l'intérêt stratégique apporté par la formulation complexe des équations et des solutions. Pour conclure, l'analyse se tournera vers les paramètres secondaires de la ligne, ainsi que sur les concepts d'onde progressive et d'onde rétrograde.

2.1 Équation des télégraphistes

On examinera tout d'abord une démonstration permettant le passage du concept de circuits localisés aux circuits répartis et menant directement à un couple d'équations aux dérivées partielles, communément appelé équation des télégraphistes. Après quelques considérations sur l'élaboration des signaux harmoniques représentés par une fonction complexe, l'équation des télégraphistes sera libellée sous la forme usuelle complexe.

2.1.1 Passage des circuits localisés aux circuits répartis

Un retour sur la figure **2** illustrant un tronçon de ligne de dimension longitudinale L_0 permet d'extraire un sous-tronçon de longueur Δz évidemment très inférieure à L_0 , soit $\Delta z \ll L_0$.



$$\Delta L = L \Delta z \quad \text{et} \quad \Delta C = C \Delta z \tag{13}$$

La transcription de ce raisonnement peut être portée dans le schéma de la figure **6** sur lequel ont été ajoutées les fonctions i(z, t) et v(z, t) afférentes au signal transporté sur la ligne.

Sous ces conditions, la théorie des circuits électriques mène à la détermination de la chute de tension $\Delta v_{\rm L}$ produite dans l'inductance ΔL , ainsi qu'au courant $\Delta i_{\rm c}$ dérivé dans la capacité ΔC .

La démonstration développée au-dessous montre que la résolution du problème par la théorie des circuits assortie de propriétés mathématiques adéquates mène aux équations des télégraphistes. Nous savons d'après les relations (13) que $\Delta L = L \Delta z$ et $C = C \Delta z$, l'entrée de ces quantités dans les équations précédentes permet d'éliminer le paramètre indéterminé Δz . De plus, la démonstration pouvant être étendue à toute valeur de la variable z_0 située entre z = 0 et $z = L_0$, cette dernière peut être confondue avec z. On parvient alors à la forme temporelle de l'équation des télégraphistes donnée par les relations (20) et (21).

Mise en place de l'équation des télégraphistes

La résolution du circuit de la figure **6** demande la formulation de l'équation des mailles présentement réduite à la relation :

$$\Delta v_{\rm L} = v (z_0, t) - v (z_0 + \Delta z, t)$$
(14)

expression à laquelle correspond l'équation des nœuds :

$$\Delta i_{\rm C} = i (z_0, t) - i (z_0 + \Delta z, t)$$
(15)

Sachant que la dimension du sous-tronçon Δz est très inférieure à la position z_0 de l'observateur, les fonctions $v(z_0 + \Delta z, t)$ et $i(z_0 + \Delta z, t)$ peuvent faire l'objet d'un développement suivant le théorème des accroissements finis, d'où :

$$v(z_0 + \Delta z, t) \cong v(z_0, t) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=z_0} \Delta z + \dots$$
 (16)

$$i(z_0 + \Delta z, t) \cong i(z_0, t) + \left(\frac{\partial i}{\partial z}\right)_{z=z_0} \Delta z + \dots$$
(17)



Figure 6 – Assimilation d'un tronçon de ligne de dimension Δz à un quadripôle

De plus, la tension $\Delta v_{\rm L}$ développée sur l'inductance et le courant $\Delta i_{\rm c}$ dérivé par la capacité sont naturellement liés à la variable temps *t* par les lois de l'induction relatées ci-dessous :

$$\Delta v_{\rm L} = \Delta L \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_{z=z_0} \quad \Delta i_{\rm c} = \left(\frac{\partial \Delta q_{\rm c}}{\partial t}\right)_{z=z_0} \tag{18}$$

Sachant que la quantité de charges Δq_c figurant dans (18) est reliée simplement à $v(z_0, t)$ et ΔC par l'expression $\Delta q_c = v\Delta C$, on pose :

$$\Delta i_{\rm c} = \Delta C \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{z=z_0}$$
(19)

La fusion des relations (14) et (19) mène aux équations portées ci-dessous :

 $-\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right)_{z=z_0} \Delta z = \Delta L \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)_{z=z_0}$ $-\left(\frac{\partial i}{\partial z}\right)_{z=z_0} \Delta z = \Delta C \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{z=z_0}$

Sachant que $\Delta C = C\Delta z$ et $\Delta L = L\Delta z$, le paramètre indéterminé Δz s'élimine et l'on parvient à la forme temporelle des équations des télégraphistes présentée ci-dessous.

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$
(20)

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial v}{\partial t}$$
(21)

Il s'agit d'un couple indissociable d'équations aux dérivées partielles.

2.1.2 Fonctions harmoniques complexes

Jusqu'alors, aucune hypothèse n'était formulée quant aux sources de signaux connectées en extrémité de ligne. Sachant que tout signal récurrent ou non peut faire l'objet d'une conversion spectrale, le calcul de la réponse d'une ligne soumise à des signaux sinusoïdaux de pulsation ω , paraît dans ce contexte tout à fait opportun. Admettons qu'il s'agisse d'un générateur délivrant une fem prenant pour expression $e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t)$. Il va être montré que la formulation de la théorie des lignes à l'aide des nombres complexes facilite singulièrement les analyses ultérieures. Dans cette perspective, les principales propriétés des fonctions harmoniques complexes seront introduites. Appelons $e^{j\omega t}$ la fonction harmonique complexe de pulsation ω , la fonction sinusoïdale $e_0(t)$ précédente peut alors s'écrire :

$$e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t) = \ln [E_{0m} e^{j\omega t}]$$
 où $j = \sqrt{-1}$

La notation Im signifie que l'on sélectionne la partie imaginaire de la fonction exponentielle figurant dans cette expression, car la formule de Moivre implique la relation :

 $\mathrm{e}^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$

Sachant que la ligne est connectée à des impédances aux comportements linéaires, les signaux i(z, t) et v(z, t) restitueront des fonctions sinusoïdales de pulsation ω d'amplitude absolue

|I(z)| pour le courant et |V(z)| pour la tension. Les signaux seront dotés d'un terme de phase φ_i pour le courant et φ_v pour la tension, d'où :

$$i(z,t) = |I(z)|\sin(\omega t + \varphi_i)$$
(22)

$$\mathbf{v}(z,t) = |\mathbf{V}(z)|\sin(\omega t + \varphi_{v})$$
(23)

Les fonctions i(z, t) et v(z, t) données dans les relations (22) et (23) représentent alors la réponse de la ligne en régime entretenu. En réalité, on doit ajouter à ces relations la réponse transitoire de la ligne. Dans la poursuite de l'exposé, nous ferons abstraction de ce phénomène, toutefois au cours du paragraphe 5.3 et, plus particulièrement au § 5.3.6, la question sera approfondie.

Sous le respect de la seule contribution du régime entretenu, rien n'empêche de convertir (22) et (23) en expressions complexes suivantes :

$$i(z,t) = I(z)e^{j\omega t}$$
⁽²⁴⁾

$$\mathbf{v}(z,t) = \mathbf{V}(z)\mathbf{e}^{j\omega t} \tag{25}$$

Dans ces nouvelles formules, I(z) et V(z) représentent deux fonctions complexes que l'on peut éventuellement écrire sous les formes polaires faisant apparaître les termes de phase φ_i et φ_v introduits précédemment :

$$I(z) = |I(z)|e^{j\varphi_i} \quad V(z) = |V(z)|e^{j\varphi_v}$$

2.1.3 Forme complexe de l'équation des télégraphistes

Après entrée dans les équations initiales (20) et (21) des fonctions complexes i(z, t) et v(z, t) établies en (24) et (25), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = jL\omega I \tag{26}$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = jC\omega V \tag{27}$$

Ces nouvelles relations donnent les formes complexes de l'équation des télégraphistes.

Dans la suite, quelques transformations algébriques complémentaires appliquées aux équations (20) et (21) ou (26) et (27) vont mener aux formes temporelles ou complexes de l'équation d'onde.

2.2 Équation d'onde

Cette partie est exclusivement consacrée à la mise en place des phénomènes de propagation engendrés dans une ligne de transmission. Les calculs aboutissent selon l'approche adoptée à isoler i(z, t) ou v(z, t) dans une équation aux dérivées partielles du second ordre initulée **équation d'onde spatio-temporelle**; sinon, si l'on s'adresse aux fonctions complexes $I(z) e^{j\omega t}$ ou $V(z) e^{j\omega t}$, on parvient à une équation d'inde de descond ordre encore appelée forme complexe de l'équation d'onde.

2.2.1 Forme spatio-temporelle de l'équation d'onde

Procédons sur la seconde équation des télégraphistes, établie en (21), à une dérivée des deux membres suivant la variable *z*, soit :

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = C \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Sachant que lors d'une inversion de l'ordre des dérivées, le résultat demeure inchangé, l'insertion dans le membre de droite de la seconde équation (20) élimine la fonction v(z, t), soit :

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = C \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = -CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

En conséquence, on rassemble l'équation des télégraphistes établie en (20) et (21) dans une seule équation aux dérivées partielles du second ordre figurant ci-dessous et appelée **équation d'onde spatio-temporelle** :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

Présentation usuelle de l'équation d'onde spatio-temporelle

L'équation d'onde établie précédemment peut être présentée sous la forme usuelle (28) contenant le paramètre v_0 homogène à une vitesse, car prenant pour unité physique le mètre par seconde :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{(v_0)^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$
(28)

On déduit immédiatement l'expression de v_0 en procédant au calcul de l'inverse de la racine carrée du produit *LC*, soit :

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
(29)

On remarquera que l'équation (28) appartient à la famille d'équations des cordes vibrantes où la fonction i(z, t) s'apparente au déplacement vertical des vibrations d'une corde et v_0 la vitesse de propagation des ondes acoustiques. Dans ce cas, v_0 est reliée à la masse volumique de la corde, mais également à la force de traction mécanique. En ce qui concerne la ligne de transmission, nous allons montrer ci-dessous et grâce à la propriété de *dualité* des paramètres primaires que v_0 n'est autre que la célérité.

Lien de l'équation d'onde avec la vitesse v₀ des ondes électromagnétiques

Un retour sur la relation (6) établie en § 1.2.3 rappelle que le produit *LC* prend pour valeur *LC* = $\mu_0 \epsilon_0$. La vitesse de propagation figurant dans la relation (29) est donc fixée par la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, car :

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{30}$$

Si l'on choisit pour ϵ_0 la valeur $(1/36\pi)\times 10^{-9}$ F/m, on trouve $v_0=3\times 10^8$ m/s. En réalité, il s'agit d'une valeur approchée, car la célérité a été décrétée en 1983 rigoureusement égale à 299 792 458 m/s. En effet, cette valeur de référence est aujourd'hui adoptée pour définir le mètre étalon à partir de la mesure extrêmement stable de la seconde fixée par les horloges atomiques.

En conséquence, pour retrouver par l'équation (30) la valeur officielle de la célérité, il faut adopter pour la permittivité électrique absolue ϵ_0 = 8,854187 \times 10 $^{-12}$ F/m. Il est évident que la valeur de la constante de perméabilité magnétique absolue demeure inchangée à μ_0 = 4 π \times 10 $^{-7}$ H/m.

Sauf nécessité de précision, on adopte généralement la valeur approchée de la célérité, c'est sous cette approximation que seront effectués les calculs de longueur d'onde λ entrepris dans la suite de l'article.

Lorsque la ligne est immergée dans un diélectrique homogène de permittivité électrique relative ϵ_r , la vitesse de propagation éta-

blie par l'équation (29) prend pour valeur $v_0 = c/\sqrt{\varepsilon_r}$.

Inversement, en présence d'une ligne bifilaire ou monofilaire comportant une ou deux gaines diélectriques, on trouve

 $v_0 = c/\sqrt{\epsilon_{req}}$. La permittivité électrique relative équivalente figurant dans cette relation est alors déterminée selon les critères fixés par la relation (12) en § 1.3.3.

Il faut cependant souligner que la valeur de la permittivité électrique relative pouvant évoluer avec la fréquence, il n'est pas rare d'observer une dérive de v_0 , notamment aux fréquences supérieures à 100 MHz.

Équation d'onde duale

Le déroulement du calcul menant à l'équation d'onde aurait pu tout aussi bien se faire en procédant à la dérivée $\partial/\partial z$ de la première équation des télégraphistes (20). Dans ce cas, on parvient à l'équation d'onde (31), duale de la relation (28), car comportant la fonction v(z, t):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{(v_0)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$
(31)

En réalité, il n'existe qu'une seule famille de solutions provenant de l'équation génératrice (28) ou de son équation duale (30). Dans la poursuite de l'article, on adoptera l'équation d'onde (28).

2.2.2 Forme complexe de l'équation d'onde

Rappelons les transcriptions harmoniques complexes de i(z, t) et v(z, t) restreintes au seul régime entretenu de la ligne, soit :

$$i(z,t) = I(z)e^{j\omega t}$$
 et $v(z,t) = V(z)e^{j\omega t}$ (32)

Après insertion de (32) dans l'équation (28), on parvient à l'équation d'onde complexe (33) :

$$\frac{d^2I}{dz^2} + k^2I = 0 \quad \text{où} \quad k = \frac{\omega}{v_0}$$
(33)

C'est une équation différentielle du second ordre dans laquelle figure le nombre d'ondes *k* exprimé par le rapport ω/v_0 .

La forme complexe duale de l'équation (33) s'exprime alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} + k^2 V = 0$$

Les fonctions complexes I(z) et V(z) solutions de l'équation (33) sont par la suite intitulées, fonctions génératrices, car relatant la distribution d'amplitude des courants et tensions selon la coordonnée longitudinale z.

2.3 Solutions de l'équation d'onde

La résolution de l'équation d'onde va donc demander la sélection de l'équation (28) ou de l'équation (33) donnant toutes deux la priorité au courant.

Dans l'immédiat, nous distinguerons les solutions directes du domaine spatio-temporel livrant i(z, t) et v(z, t) et les solutions complexes relatant les fonctions génératrices I(z) et V(z). On se limitera présentement aux formes les plus générales des solutions.

Toutefois, au cours du paragraphe 5 venant conclure l'article, on évoquera d'autres formalismes découlant de propriétés physiques telles que l'impédance d'entrée de la ligne ou de propriétés algébriques empruntées au calcul symbolique ou au calcul matriciel.

2.3.1 Solutions spatio-temporelles directes

On montre facilement que l'équation d'onde en courant présentée sous la forme spatio-temporelle (28) possède pour **solutions générales** :

$$i(z, t) = i_A (z - v_0 t) + i_B (z + v_0 t)$$
 (34)

Le premier terme du membre de droite $i_A (z - v_0 t)$ désigne l'onde progressive de courant, le second terme $i_B (z + v_0 t)$, l'onde rétrograde de courant. Les indices A et B trouveront leur utilité lors du passage aux solutions complexes examinées au prochain paragraphe.

La nature mathématique des fonctions i_A et i_B est pour l'instant inconnue, car dépendante de la source génératrice des signaux. Le passage aux tensions s'effectue simplement par la substitution des symboles v_A et v_B aux symboles i_A et i_B .

D'autres solutions de l'équation d'onde temporelle sont possibles, notamment, par la méthode de séparation de variables menant au calcul des valeurs propres du nombre d'ondes *k*. Cette approche est généralement adoptée dans la résolution de l'équation des cordes vibrantes, car la source génératrice des signaux se situe en un point quelconque de la corde illustrée par exemple, par la position des doigts d'un harpiste ou de l'archet d'un violoncelle. L'ouvrage sur les chambres réverbérantes [12] aborde la résolution aux valeurs propres appropriée aux lignes de transmission. Présentement, la recherche des valeurs propres offre peu d'intérêt, car les sources et charges seront toujours connectées en extrémités de ligne.

2.3.2 Formes complexes des solutions

L'équation différentielle du second ordre (33) possède pour solutions en courant :

$$I(z) = Ae^{-jkz} + Be^{+jkz}$$
(35)

Dans cette expression figure le nombre d'ondes k défini en (33), ainsi que deux constantes A et B pour l'instant indéterminées, on

retrouve le nombre imaginaire $j = \sqrt{-1}$.

Les solutions en tensions V(z) s'obtiennent par la seconde équation des télégraphistes établie en (27), d'où :

$$V(z) = -\frac{1}{jC\omega}\frac{dI}{dz} = \frac{k}{C\omega}(Ae^{-jkz} - Be^{+jkz})$$

L'examen de l'équation indique que le rapport $k/C\omega$ est homogène à une impédance. Un retour sur l'équation (33) et la fusion

avec $k = \omega \sqrt{LC}$ permet d'introduire l'impédance caractéristique de la ligne Z_c calculée par la racine carée du rapport de l'inductance linéique *L* et de la capacité linéique *C*:

$$V(z) = Z_{c} (Ae^{-jkz} - Be^{+jkz}) \quad \text{où} \quad Z_{c} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
(36)

Bien qu'il s'agisse d'une quantité réelle, le symbole Z sera par convention maintenu.

Nous verrons en § 2.4.2 et dans d'autres parties du texte que l'impédance caractéristique joue un rôle fondamental dans le fonctionnement physique des lignes de transmission.

2.3.3 Configuration d'une ligne connectée à une source de signaux

La figure **7** comporte la représentation typique d'une ligne utilisée dans la fonction adoptée pour le transport de signaux. Présentement la ligne est configurée selon l'usage des fonctions génératrices (35) et (36), solutions de l'équation d'onde complexe.

La source de fem E_0 ayant pour impédance interne Z_0 est donc située dans le plan d'entrée de la ligne en z = 0, la charge déterminée par l'impédance Z_1 est localisée dans le plan de sortie en $z = L_0$. La terminologie alternative pour désigner le plan d'entrée ou **Port-1** (figure **7**) et le plan de sortie ou **Port-2** (figure **7**), concernera plus particulièrement l'usage des paramètres S examinés à l'issue du paragraphe 5. Il est également utile de préciser que la fem ici libellée par le symbole E_0 s'adresse à l'amplitude efficace et non à l'amplitude maximale comme tel était le cas en § 2.1.2 où figurait le symbole E_{0m} .



Figure 7 - Ligne de transmission véhiculant des signaux d'une source vers une charge

Méthode générale de calcul des constantes inconnues A et B

Les constantes inconnues A et B entrant dans les solutions générales (35) et (36) résultent de la résolution d'un système d'équations linéaires provenant des conditions de continuité des courants et tensions rencontrées aux deux extrémités de la ligne, soit :

$$V(0) = E_0 - Z_0 I(0)$$
 et $V(L_0) = Z_L I(L_0)$ (37)

Exemple : calcul des solutions I(z) et V(z) pour une ligne ouverte en extrémité

Prenons une source de fem dépourvue d'impédance interne $(Z_0 = 0)$ et une ligne ouverte en extrémité $(Z_L \rightarrow \infty)$. Dans ce cas particulièrement simple, le système (37) s'exprime :

$$V(0) = Z_{c} (A - B) = E_{0}$$
$$I(L_{0}) = A e^{-jkL_{0}} + B e^{+jkL_{0}} = 0$$

La seconde équation permet d'établir un lien entre A et B, soit $B = -Ae^{-2jkL_0}$. L'entrée de B dans la première équation permet

ensuite d'extraire A, d'où $A = (E_0/Z_c)/(1 - e^{-2jkL_0})$.

Après quelques transformations triviales, on parvient aux expressions compactes :

$$I(z) = j \frac{E_0}{Z_c} \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)}$$
(38)

$$V(z) = E_0 \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)}$$
(39)

L'analyse physique entreprise au prochain paragraphe insistera plus particulièrement sur les relations liant ces expressions aux phénomènes d'ondes stationnaires.

Conversion temporelle des solutions complexes

L'insertion de la variable temps dans les solutions générales formulées en (35) et (36) donne pour expressions :

$$\begin{split} &i(z,t) = I(z)\mathrm{e}^{j\omega t} = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-jk(z-v_0t)} + \mathrm{B}\mathrm{e}^{+jk(z+v_0t)} \\ &v(z,t) = V(z)\mathrm{e}^{j\omega t} = Z_{\mathrm{c}}[\mathrm{A}\mathrm{e}^{-jk(z-v_0t)} - \mathrm{B}\mathrm{e}^{+jk(z+v_0t)}] \end{split}$$

Pour les besoins de l'interprétation physique, le produit kv_0 a été substitué à la pulsation ω .

En effet, la confrontation de la première expression avec les solutions spatio-temporelles établies en (34) permet d'écrire :

$$i_{\Delta}(z - v_0 t) \equiv A e^{-jk(z - v_0 t)}$$
 et $i_{B}(z + v_0 t) \equiv B e^{+jk(z + v_0 t)}$

L'examen de ces deux formules confirme que les fonctions déterminant l'onde progressive et l'onde rétrograde de courant sont bien tributaires de la nature de la fonction générant la source des signaux, présentement c'est la fonction harmonique $ej\omega t$.

2.4 Paramètres secondaires d'une ligne

Les paramètres secondaires de la ligne directement issus des paramètres primaires L et C seront représentés par le nombre d'ondes k et l'impédance caractéristique Z_c de la ligne. Nous verrons dans les étapes ultérieures de l'article que ces paramètres secondaires jouent un rôle majeur dans la compréhension des phénomènes de propagation. Ainsi, au nombre d'ondes et à la fréquence s'associe la longueur d'onde λ prenant pour unité physique le mètre. Pour cette raison, il sera avantageux de

substituer dans bien des cas la longueur d'onde à la fréquence des signaux. On fera la même constatation à propos de l'impédance caractéristique où il paraîtra occasionnellement intéressant de rapporter les impédances Z_0 et Z_L rencontrées en extrémités de ligne à Z_c .

2.4.1 Nombre d'onde et longueur d'onde

Dans les fonctions génératrices complexes I(z) et V(z) figurent les expressions $e^{\pm jkz}$ où l'exposant de la fonction exponentielle s'apparente à un argument exprimé en radians. Rien ne s'oppose alors à poser $kz = 2\pi (z/\lambda)$ où le scalaire λ , homogène à l'unité de dimension longitudinale est appelé longueur d'onde. La longueur d'onde ainsi définie est donc reliée simultanément à la fréquence *f*, ainsi qu'à la vitesse de propagation v_0 par quatre expressions énoncées ci-dessous :

$$k = \frac{\omega}{v_0} = \omega \sqrt{LC} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{v_0}{f}$$
(40)

Sachant que la longueur d'onde diminue avec l'accroissement de la fréquence des signaux, nous verrons plus loin que des valeurs particulières du rapport L_0/λ liant la dimension de la ligne à la longueur d'onde permettent de sélectionner des classes de fonctionnement de la ligne en régime d'ondes stationnaires.

2.4.2 Impédance caractéristique de la ligne

Génération de l'onde progressive

Revenons sur le schéma de la ligne établi sur la figure **7** en choisissant pour impédance de charge l'impédance caractéristique, soit $Z_L = Z_c$. L'impédance interne de la source étant nulle $Z_0 = 0$, les conditions aux limites (39) deviennent :

$$Z_{c} (A - B) = E_{0}$$
$$Z_{c} (A e^{-jkL_{0}} - Be^{+jkL_{0}}) = Z_{c} (A e^{-jkL_{0}} + Be^{+jkL_{0}})$$

On trouve immédiatement que B = 0 et $A = E_0/Z_c$, les fonctions génératrices I(z) et V(z) prennent alors pour expressions respectives :

$$I(z) = \frac{E_0}{Z_c} e^{-jkz} \quad \text{et} \quad V(z) = E_0 e^{-jkz}$$
(41)

Converties dans le domaine temporel, les solutions précédentes mènent aux fonctions :

$$i(z, t) = \frac{E_0}{Z_c} e^{-jk(z-v_0t)} \quad \text{et} \quad v(z, t) = E_0 e^{-jk(z-v_0t)}$$
(42)

La charge Z_{L} constituée par l'impédance caractéristique de la ligne a donc pour conséquence de sélectionner l'onde progressive. On peut alors affirmer qu'en éliminant l'onde rétrograde, l'impédance caractéristique adapte la propagation. Nous verrons que l'impédance de charge Z_{L} ainsi adaptée élimine les ondes stationnaires et consécutivement les mécanismes de résonances étudiés lors du prochain paragraphe.

Notion de front d'onde et de temps de propagation

On appelle **front d'onde** l'amplitude de l'onde progressive de courant ou de la tension acquise aux origines des variables *z* et *t*, soit en *z* = 0 et *t* = 0. Pour le courant établi par la relation (42), le front d'onde prend pour amplitude $I_0 = E_0/Z_c$.

À l'instant $t = t_1$ et pour un observateur situé en $z = z_1$ où

 $0 \leqslant \! z_1 \! \leqslant \! L_0$, l'onde de courant prend l'amplitude complexe :

$$i(z_1, t_1) = I_0 e^{-jk(z_1 - v_0 t_1)}$$

L'observateur situé en z_1 va donc retrouver l'amplitude I_0 du front d'onde à l'instant $t = \theta_1$ vérifiant la condition minimale :

$$z_1 - v_0 \theta_1 = 0 \rightarrow \theta_1 = \frac{z_1}{v_0} \tag{43}$$

Le paramètre θ_1 représente par conséquent le temps de propagation de l'onde de courant pour atteindre la coordonnée z_1 . Corrélativement, on déduit que le rapport $\theta = L_0/v_0$ représente le temps de propagation en ligne.

2.4.3 Problème académique de la ligne de dimension infinie

Avant d'aborder la question de la ligne de dimension infinie, revenons sur la configuration de la ligne adaptée en extrémité afin d'opposer les concepts physiques d'onde progressive et d'onde rétrograde.

Concept physique d'onde rétrograde

Dans le contexte de la ligne connectée sur impédance caractéristique, permutons les positions du générateur idéal de fem E_0 et de charge Z_c . Appelons O'z' un nouveau repère prenant pour origine l'extrémité de la ligne antérieurement connectée sur Z_c , c'est-à-dire, dans l'ancien repère, la position $z = L_0$. Sous ces nouvelles conventions, un observateur situé en z' reçoit une onde progressive prenant pour description analytique :

$$i'(z', t) = (E_0/Z_c)e^{-k(z'-v_0t)}$$

Procédons au changement de variable longitudinale $z' = L_0 - z$, l'expression précédente devient :

$$i'(z,t) = I_0' e^{k(z+v_0t)}$$
 où $I_0' = \frac{E_0}{Z_c} e^{-jkL_0}$ (44)

La relation obtenue répond par conséquent à la définition de l'onde rétrograde introduite dans l'expression primitive (34) tirée de la résolution spatio-temporelle de l'équation d'onde.

Ainsi, le terme Be⁺*jk*(*z*+*v*₀*t*) figurant dans les solutions générales sous excitation harmonique n'est autre que l'onde rétrograde venant d'une *source virtuelle* localisée à l'extrémité de la ligne en *z* = L_0 .

Ligne de dimension infinie

Des considérations précédentes établies sur le concept d'onde rétrograde, on se rend compte immédiatement qu'en présence d'une ligne idéalement infinie, $L_0 \rightarrow \infty$, le front de l'onde rétrograde met une durée infiniment grande pour parvenir à la coordonnée quelconque *z*, car la source virtuelle est rejetée à $L_0 \rightarrow \infty$. En conséquence, pour une ligne infinie le concept d'onde rétrograde est dénué de tout sens physique, on élimine la constante B, d'où :

$$L_0 \to \infty \Rightarrow B = 0$$
 (45)

Suivant ce préalable, seule les ondes progressives telles qu'établies par les expressions (46) concernent une ligne idéalement infinie :

$$i(z, t) = Ae^{-jk(z-v_0t)}$$
 et $v(z,t) = Z_c Ae^{-jk(z-v_0t)}$ (46)

On peut donc conclure que dans l'intervalle $0 \le z \le L_0$ une ligne de dimension L_0 chargée par sa propre impédance caractéristique adopte le comportement d'une ligne de dimension infinie.

Nous verrons dans le § 5.3 que le courant transitoire observé à l'entrée d'une ligne ouverte de dimension finie s'apparente au transitoire observé sur une ligne de dimension infinie. Le phénomène n'est toutefois perceptible qu'aux instants inférieurs à 2 θ , où θ représente le temps de propagation en ligne.

3. Génération des ondes stationnaires

Les ondes stationnaires résultent des interférences engendrées par l'onde progressive et l'onde rétrograde entretenues par une source délivrant des signaux sinusoïdaux. Nous verrons dans ce paragraphe divers aspects du sujet des ondes stationnaires allant de l'examen de leurs propriétés les plus élémentaires jusqu'à des fonctionnements spécifiques de lignes. On abordera la question de la mise en résonance des lignes et, dans une orientation strictement opposée, leur fonctionnement aux longueurs d'ondes très supérieures à leur dimension longitudinale. Pour conclure, la question de la puissance transportée ou entretenue dans une ligne sera abordée, ainsi que les concepts de coefficients de réflexion et de rapport d'onde stationnaire.

3.1 Description et propriétés des ondes stationnaires

Soit une source de fem $e_0(t)$ sinusoïdale connectée dans le plan d'entrée de la ligne selon la disposition de la figure **7** :

$$e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t) \tag{47}$$

Bien entendu, rien ne s'oppose à introduire dans cette expression un terme de phase arbitraire ou à envisager l'usage de la fonction $\cos(\omega t)$.

Les développements des prochains paragraphes déterminent en priorité les liens mis en place entre les mécanismes d'ondes stationnaires et les impédances Z_0 et Z_L rencontrées aux deux extrémités de la ligne.

3.1.1 Influence de l'impédance de charge de la ligne

Pour simplifier l'approche physique, on restreint le descriptif à la configuration d'une ligne ouverte en extrémité ($Z_{\perp} \rightarrow \infty$) alimentée par une source dépourvue d'impédance interne ($Z_0 = 0$).

Dans une seconde phase de l'analyse, l'extrémité de la ligne sera court-circuitée ($Z_L = 0$). Nous verrons que ces deux dispositions créent des ondes stationnaires dotées de propriétés remarquables.

Ligne ouverte en extrémité $Z_{L} \rightarrow \infty$

Il s'agit de l'exemple illustré au § 2.3.3 et aboutissant à la fonction génératrice I(z) établie en (38). Après quelques transformations, on parvient à l'expression spatio-temporelle complexe de i(z, t), soit :

$$i(z, t) = j \frac{E_0}{2Z_c \cos(kL_0)} [e^{jkL_0}e^{-jk(z-v_0t)} - e^{-jkL_0}e^{+jk(z+v_0t)}]$$

Cette relation montre que la quantité contenue dans les crochets traduit parfaitement l'interférence de l'onde progressive et de l'onde rétrograde ayant pour amplitudes complexes e^{jkL_0} et e^{-jkL_0} , soit deux quantités absolues strictement égales à l'unité, car $|e^{\pm jkL_0}| = 1$.

La question est donc de convertir l'expression précédente sous la forme d'une fonction représentant un signal d'amplitude réelle. L'application des critères établis au § 2.1.2 suggère de passer I(z) sous la forme polaire, soit $I(z) = |I(z)|e^{j\varphi_i}$. L'examen de la relation (38) montre que $\varphi_i = \pi/2 + \text{sg}(z)\pi$. Selon ces conventions

de notations, la fonction sg (z) est nulle quand le signe de sin $[k (L_0 - z)]$ est positif, inversement sg (z) prend pour valeur 1 dans le cas contraire, le signal courant *i* (z, t) peut alors s'écrire :

$$i(z,t) = \frac{E_{0m}}{Z_c} \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)} \cos(\omega t)$$
(48)

Analyse de l'onde stationnaire de courant sur la ligne ouverte

La formule établie dans l'expression précédente montre immédiatement que les vibrations sinusoïdales du courant sont en quadrature avance par rapport à la formule de la fem posée en (47).

De plus, la fonction sin $[k (L_0 - z)]$ figurant au numérateur de l'équation (48) a pour rôle de moduler l'amplitude du courant selon la position z d'un observateur situé le long de la ligne. Cette fonction, donc i(z, t), passe par des amplitudes nulles appelées « zéros » ou « nœuds de courant » pour toutes les positions z_n vérifiant les conditions suivantes :

$$\sin[k(L_0 - z_n)] = 0 \rightarrow z_n = L_0 - n\frac{\pi}{k}$$
 où $n \in \mathbb{N}^+$ (49)

Sachant que z_n ne peut être qu'une quantité positive, l'équation (49) exige $k > n (\pi/L_0)$. Conditions que l'on peut transcrire suivant la fréquence f ou la longueur d'onde λ sous les critères strictement équivalents exprimés ci-dessous :

$$f \ge n \frac{v_0}{2L_0} \text{ ou } \lambda \le \frac{2L_0}{n}$$
(50)

Le nombre entier *n* fixe l'ordre des nœuds de courant. L'intervalle $z_{n+1} - z_n$ délimitant deux nœuds consécutifs comporte en zone médiane un extremum ou « ventre » d'amplitude prenant pour valeur absolue :

$$|i(z_m,t)|_{\max} = \frac{E_{0m}}{Z_c} \frac{1}{|\cos(kL_0)|}$$
 (51)

Il est aisé de montrer que les extremums sont positionnés en $z_m = z_n + \lambda/4$, car la distance entre deux nœuds consécutifs est strictement égale à la demi-longueur d'onde, soit $z_{n+1} - z_n = \lambda/2$.

Ainsi pour décrire le cycle complet d'une onde stationnaire il faut au minimum trois nœuds :

$$n=2 \to f \geq \frac{v_0}{L_0}$$

c'est-à-dire une ligne de dimension L_0 supérieure ou au moins égale à la longueur d'onde.

Nous verrons que la fonction $\cos (kL_0)$ figurant au dénominateur des expressions (48) et (51) joue un rôle majeur dans les mécanismes de résonances traités au § 3.1.3.

Par opposition à l'onde stationnaire partielle analysée au § 3.3.2, l'onde stationnaire pleine (*full standing wave*) représentée par l'expression (48) prend une amplitude nulle aux positions z_n calculées en (49). Une onde stationnaire pleine est donc indissociable de la présence des nœuds.

Onde stationnaire de tension sur la ligne ouverte

Par un raisonnement similaire aux calculs entrepris précédemment, l'onde stationnaire de tension entretenue sur la ligne ouverte en extrémité et alimentée par la source de fem pure s'exprime :

$$v(z,t) = E_{0m} \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)} \sin(\omega t)$$
(52)

Cette relation montre que l'onde stationnaire de tension demeure en phase avec la fem, alors que la répartition des nœuds et ventres de tension est en quadrature, c'est-à-dire décalée d'un quart de longueur d'onde (λ /4) par rapport au courant relaté dans (48).

Exemple : représentation graphique d'une onde stationnaire

La ligne est formée d'un conducteur de diamètre d = 4 mm situé à une distance h = 1 m d'un plan conducteur. La ligne ainsi constituée est ouverte en extrémité $Z_L \rightarrow \infty$ et alimentée par une source de fem délivrant un signal sinusoïdal $e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t)$ de fréquence f = 12 MHz. La source est dépourvue d'impédance interne $Z_0 = 0$, et la ligne possède pour dimension longitudinale $L_0 = 28$ m.

On propose de réaliser une illustration graphique de l'onde stationnaire pleine établie sur la ligne en régime entretenu et pour la fonction représentative du courant, soit i(z, t).

La détermination de la longueur d'onde donne $\lambda = c/f = 25$ m, en prenant $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Le courant *i* (*z*, *t*) établi par la relation (48) s'exprimera donc :

$$i(z, t) = I_{0m} \sin(\varphi_i - kz) \cos(2\pi f t)$$

relation dans laquelle I_{0m} et φ_i prennent pour valeurs :

$$I_{0m} = \frac{E_{0m}}{Z_c} \frac{1}{\cos(kL_0)}$$
 et $\varphi_i = kL_0 = 7,03$ rad

Le calcul des paramètres primaires par les relations (10) et (11) donne L = 1,38 µH/m et C = 8 pF/m, d'où la valeur de l'impédance caractéristique Z_c = 415 Ω .

Si l'on normalise l'amplitude de I_{0m} à une fem unité, soit $E_{0m} = 1 \text{ V}$, on trouve pour amplitude maximale du courant en entrée de ligne i (0, 0) = $I_{0m} \sin \varphi_i = 1,64 \text{ mA}$.

Pour la représentation graphique, il sera plus commode de traiter des variables réduites de distance, de temps et d'amplitude, respectivement rapportée à la longueur d'onde λ , à la période T du signal source et à l'amplitude maximale I_{0m} du courant, soit :

$$z_{\rm r} = \frac{z}{\lambda} t_{\rm r} = \frac{t}{T} \text{ où } T = \frac{1}{f} i_{\rm r} (z, t_{\rm r}) = \frac{i(z, t)}{I_{0m}}$$

Le graphe de la figure **8** produit une représentation en trois dimensions de l'onde stationnaire pleine extraite du calcul précédent. La variable réduite de temps t_r évolue entre 0 et 10, soit sur dix périodes. La variable réduite longitudinale z_r couvre toute la dimension L_0 de la ligne soit, en coordonnées réduites z_r , l'intervalle [0 1,12].

Le repère **1** (figure **8**) indique l'amplitude du courant en t = 0 et z = 0, soit $i_r(0, 0) = \sin \varphi_i = 0,68$.

Les repères $N_1,\,N_2$ et N_3 (figure 8) donnent les positions des trois **nœuds** présentement contenus dans l'intervalle [01,12], car la dimension de la ligne couvre un peu plus d'une longueur d'onde.

Les repères V_1 et V_2 (figure **8**) donnent les positions des **ventres** de l'onde stationnaire pleine renouvelés cycliquement au rythme de la période *T* du signal sinusoïdal.

En règle générale, la représentation de l'onde stationnaire sera facilitée en limitant le graphe aux seules fonctions génératrices I(z) et V(z) décrites en amplitudes absolues.

Ligne court-circuitée en extrémité Z_L = 0

Les développements mènent pour i(z, t) et v(z, t) aux expressions suivantes :

$$i(z,t) = -\frac{E_{0m}}{Z_c} \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\sin(kL_0)} \cos(\omega t)$$
(53)

$$v(z,t) = E_{0m} \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\sin(kL_0)} \sin(\omega t)$$
(54)



Figure 8 - Illustration en trois dimensions d'une onde de courant stationnaire pleine engendrée sur une ligne ouverte en extrémité

Par rapport à la ligne ouverte, on se rend compte que le courant se manifeste en opposition de phase et sous une loi de distribution en quadrature. La tension évolue selon la même phase, mais la distribution selon la variable z s'effectue également en quadrature.

On peut donc dire que le passage de l'extrémité ouverte à l'extrémité court-circuitée génère des relations i(z, t) et v(z, t) mutuellement duales.

3.1.2 Incidence de l'impédance interne de la source

Considérons une ligne ouverte alimentée par une source possédant une impédance interne strictement égale à l'impédance caractéristique de la ligne ($Z_0 = Z_c$), on parle alors de source adaptée.

Dans ce cas, les signaux harmoniques i(z, t) et v(z, t) prennent pour expressions :

$$i(z, t) = \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin[k(L_0 - z)] \cos(\omega t - kL_0)$$
(55)

$$v(z, t) = E_{0m} \cos [k(L_0 - z)] \sin (\omega t - kL_0)$$
 (56)

Hormis l'élimination de la fonction $\cos (kL_0)$ située préalablement au dénominateur et l'apparition du terme de phase kL_0 , les propriétés des ondes stationnaires de courant et de tension demeurent similaires à la ligne alimentée par la fem idéale. Il s'agit d'une onde stationnaire pleine présentant des nœuds de courant aux positions z_n spécifiées en (49) et (50).

Les positions z_m des extremums d'amplitude seront également les mêmes, mais leur amplitude change pour la valeur portée ci-dessous :

$$\left|i\left(z_{m},t\right)\right|_{\text{maxi}} = \frac{E_{0m}}{Z_{c}}$$
(57)

L'interprétation physique des formules (51) et (57) livrant l'amplitude des extremums sera approfondie ci-après.

3.1.3 Modes de résonances d'une ligne

Poursuivons l'investigation amorcée au § 3.1.1 et précédemment sur le comportement de l'onde de courant engendrée sur une ligne ouverte.

Le calcul de la ligne soumise à une source de fem pure donnait pour amplitude des extremums de courant (ou ventres) :

$$|i(z_{\rm m}, t)|_{\rm maxi} = \frac{E_{0m}}{Z_{\rm c}} \frac{1}{|\cos(kL_0)|}$$

L'analyse de cette expression exhibe des singularités imposées par le passage à zéro de la fonction $\cos (kL_0)$. Ces conditions donnent lieu à une valeur $|i(z_m, t)|_{maxi}$ infinie, la ligne entre en résonance. Les résonances de la ligne sont donc définies par les valeurs particulières de l'argument kL_0 amenant $\cos (kL_0) = 0$, soit :

$$\cos (kL_0) = 0 \to k_r L_0 = (2r+1)\frac{\pi}{2} \text{ où } r \in \mathbb{N}^+$$
(58)

On trouve sans difficulté les fréquences de résonances $f_{\rm r}$ calculée par la relation :

$$f_{\rm r} = (2r+1)\frac{v_0}{4L_0} \tag{59}$$

Contrairement aux circuits localisés composés d'une inductance et d'une capacité en série, ou en parallèle, où l'on trouve qu'une seule fréquence de résonance, les lignes présentent un spectre infini de résonances espacées de l'intervalle fréquentiel $\Delta f = f_{r+1} - fr = v_0/2L_0$.

Copyright © – Techniques de l'Ingénieur – Tous droits réservés

On appelle fréquence de résonance fondamentale la résonance de rang *r* le plus bas, soit selon l'expression (59), $r = 0 \rightarrow f_0 = v_0/4L_0$. Sachant que la longueur d'onde s'exprime par le rapport $\lambda = v_0/f$, la résonance fondamentale implique le respect de la condition $r = 0 \rightarrow L_0 = \lambda/4$. Cela signifie que la ligne ouverte entre en résonance dès que la dimension L_0 s'accorde sur le quart de la longueur d'onde. Par exemple, une ligne coaxiale d'une dimension $L_0 = 10$ m où la vitesse de propagation des ondes prend pour valeur $v_0 = 2 \times 10^8$ m/s entre en résonance fondamentale (r = 0) pour une longueur d'onde $\lambda = 4L_0$, soit $\lambda = 40$ m, c'est-à-dire une fréquence de valeur $f_0 = v_0/\lambda = 5$ MHz.

L'origine physique de l'amplitude infinie sera justifiée au § 5.3.6.

Cependant, l'intuition incite à penser que l'amplitude des résonances ne peut être infinie à cause de la contribution des dissipations d'énergie jusqu'ici ignorées. On peut alors attribuer aux lignes de transmission un coefficient de qualité tout à fait similaire aux définitions adoptées pour les circuits localisés. Cet aspect physique sort du cadre de cet article d'initiation au sujet, le lecteur trouvera dans [12], qui traite des chambres réverbérantes à brassage de modes, quelques précisions complémentaires sur le calcul du coefficient de qualité des lignes.

Les dissipations d'énergie dans les matériaux constituant les lignes ne sont pas les seuls facteurs contribuant à limiter l'amplitude des résonances, voire à les éliminer totalement. Tel est le cas de la ligne ouverte alimentée par une source adaptée où la fonction $\cos (kL_0)$ a disparu des relations (55) à (56) établies plus haut. On parle alors d'une impédance interne adaptée.

3.2 Approximation des grandes longueurs d'ondes

L'approximation des grandes longueurs d'ondes, encore appelées fonctionnement des lignes aux basses fréquences ou « lignes électriquement petites », signifie que la fréquence des signaux transportés sur la ligne correspond à une longueur d'onde très supérieure à la dimension longitudinale L_0 , soit $\lambda >> L_0$. Sous ces conditions, les formules générales établies précédemment adoptent des expressions simplifiées auxquelles on peut joindre des circuits équivalents facilitant diverses interprétations physiques.

En d'autres termes, l'approximation des grandes longueurs d'ondes fait abstraction des phénomènes de propagation, tout en demeurant dans le domaine de validité du concept de circuit uniformément réparti.

3.2.1 Calcul approché des fonctions génératrices *I* (*z*) et *V* (*z*)

Ligne ouverte en extrémité

Revenons sur la ligne ouverte alimentée par la source de fem dépourvue d'impédance interne. Considérons les fonctions génératrices I(z) et V(z) données en (38) et (39) et rappelées ci-dessous :

$$I(z) = j \frac{E_0}{Z_c} \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)}$$
$$V(z) = E_0 \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\cos(kL_0)}$$

Ainsi, l'approximation des grandes longueurs d'ondes admet la quantité $kL_0 = 2\pi (L_0/\lambda)$ très inférieure à l'unité, ce qui équivaut à écrire $\lambda \gg L_0$. Il peut donc être fait usage des développements

limités au premier ordres des fonctions circulaires figurant dans (38) et (39), d'où :

$$kL_0 <<1 \rightarrow \sin[k \ (L_0 - z)] \cong k(L_0 - z) + \dots$$

$$kL_0 <<1 \rightarrow \cos(kL_0) \cong 1 + \dots$$

Les fonctions génératrices I(z) et V(z) prennent alors pour formes approchées :

$$kL_0 << 1 \rightarrow I(z) \cong I_0\left(1 - \frac{z}{L_0}\right) \text{ où } I_0 = j \frac{E_0}{Z_c} kL_0$$
(60)

$$kL_0 \ll 1 \rightarrow V(z) \cong E_0 \tag{61}$$

Ligne sur court-circuit

Pour la ligne en court-circuit, les fonctions complexes I(z) et V(z) s'expriment :

$$I(z) = -j \frac{E_0}{Z_c} \frac{\cos[k(L_0 - z)]}{\sin(kL_0)}$$
$$V(z) = E_0 \frac{\sin[k(L_0 - z)]}{\sin(kL_0)}$$

On reconnaît les expressions duales de (38) et (39).

Ces relations prennent pour formes limites aux grandes longueurs d'ondes :

$$kL_0 << 1 \rightarrow V(z) \cong E_0 \left(1 - \frac{z}{L_0} \right)$$
(62)

$$kL_0 << 1 \rightarrow I(z) = I_0 \text{ où } I_0 = -j \frac{E_0}{Z_c} \frac{1}{kL_0}$$
 (63)

Conclusion

Nous retrouvons dans les expressions (60) à (63) établies pour les grandes longueurs d'ondes les propriétés de *dualité* entre la ligne ouverte ou court-circuitée en extrémité. Ainsi, pour la ligne ouverte, la tension est indépendante de la position longitudinale; pour la ligne court-circuitée, cette propriété appartient au courant. Inversement, la ligne ouverte montre une évolution linéaire du courant rapportée à la variable *z*, pour la ligne court-circuitée, on observe ce comportement sur la tension. En réalité, l'évolution linéaire ne peut pas être expliquée par la contribution des phénomènes de propagation, mais par les propriétés des circuits à paramètres uniformément répartis. En effet, la condition $\lambda \gg L_0$ équivaut à dire que la période *T* inverse de la fréquence *f* des signaux harmoniques est très supérieure au temps de propagation 0. Cette remarque signifie que, sous l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes, le transit d'une période du courant ou de la tension dans la ligne est quasi instantané.

3.2.2 Assimilation de la ligne à un circuit localisé

L'impédance caractéristique Z_c et le nombre d'ondes k étant reliés aux paramètres primaires de la ligne par les expressions $Z_c = \sqrt{L/C}$ et $k = \omega \sqrt{LC}$ établis en (36) et (40), il est facile de prouver qu'une ligne ouverte peut être représentée par une capacité de valeur C_{eq} et une ligne court-circuitée par une inductance L_{eq} que l'on propose de déterminer.

Capacité équivalente à une ligne ouverte C_{eq}

Après entrée de Z_c et k, un retour sur l'expression (60) montre tout de suite que le courant I_0 à l'entrée de la ligne ouverte peut s'écrire :

$$I_0 = jE \frac{kL_0}{Z_c} = jEC_{eq} \omega \text{ où } C_{eq} = CL_0$$
(64)

La ligne ouverte fonctionnant aux grandes longueurs est donc équivalente à une capacité $C_{\rm eq}$ donnée par le produit de la capacité linéique C et de la dimension longitudinale L_0 .

Inductance équivalente à une ligne court-circuitée L_{eq}

Par une démarche tout à fait similaire à la précédente, le courant I_0 dans la ligne court-circuitée tel qu'établi dans l'équation (63) peut s'écrire :

$$I_0 = -j\frac{E}{Z_c}\frac{1}{kL_0} = \frac{E}{jL_{eq}\omega} \text{ où } L_{eq} = LL_0$$
(65)

Aux grandes longueurs d'ondes, la ligne court-circuitée est donc équivalente à une inductance L_{eq} déterminée par le produit de l'inductance linéique L et de la dimension longitudinale L_0 .

Concept de circuit équivalent étendu à une impédance de charge quelconque Z_L

Considérons maintenant une ligne connectée en extrémité sur une impédance quelconque Z_L et selon le schéma général de la figure **7**. Aux grandes longueurs d'ondes c'est-à-dire $\lambda \gg L_0$, capacité et inductance équivalentes telles que calculées en (64) et (65) peuvent prendre place dans le schéma synthétique de la figure **9**.

Il est évident que le schéma peut être avantageusement simplifié en fonction de la valeur de Z_{L} comparée à l'impédance caractéristi-

que de la ligne. Ainsi, quand $|Z_L| \ll Z_c$, la capacité C_{eq} peut être éliminée, inversement, quand $|Z_L| \gg Z_c$, l'inductance L_{eq} s'efface.

Ces propriétés seront confirmées par le formalisme de l'impédance d'entrée développé au § 5.1.

ll est important de noter que la fréquence de résonance du circuit, soit $f_{eq} = 1/(2\pi \sqrt{L_{eq}C_{eq}})$, est étrangère à la fréquence de résonance fondamentale f_0 de la ligne telle qu'établie par la relation $f_0 = v_0/4L_0$ formulée au § 3.1.3.

L'article [D 1 321] comporte des applications d'usage des circuits équivalents.



Figure 9 – Circuit équivalent d'une ligne de transmission pour les grandes longueurs d'ondes comparées à la dimension longitudinale de la ligne $\lambda \gg L_0$

3.3 Concept de coefficients de réflexion

L'avantage procuré par les *coefficients de réflexion* réside principalement dans la substitution aux impédances usuelles Z_0 et Z_L de coefficients complexes. Contrairement aux impédances, les coefficients de réflexion sont dépourvus d'unités physiques et restreints à une dynamique de variations situées dans les intervalles [0 1] pour les valeurs absolues et [$-\pi + \pi$] pour les arguments.

3.3.1 Définition des coefficients de réflexion

Dans ce contexte aux impédances Z_0 et Z_L figurant sur les schémas de la figure **7**, on fait correspondre les **coefficients de réflexion** ρ_0 et ρ_L définis comme suit :

$$\rho_{v} = \frac{Z_{v} - Z_{c}}{Z_{v} + Z_{c}} = \left| \rho_{v} \right| e^{j\phi_{\rho_{v}}} \text{ avec } v \equiv 0 \text{ ou } v \equiv L$$
(66)

S'il s'agit de résistances R_0 ou R_L , ρ_v est une quantité purement

réelle située dans l'intervalle $-1 \le \rho_v \le +1$.

La relation (66) montre que, pour les valeurs particulières $Rv = Z_c$, $R_v = 0$ et $R_v \rightarrow \infty$, les coefficients de réflexion prennent pour valeurs remarquables $\rho_v = 0$, $\rho_v = -1$ et $\rho_v = +1$.

Le concept de coefficient de réflexion est utilisé pour construire l'abaque de Smith, cet aspect sortant du cadre de l'article ne sera pas évoqué. Toutefois, nous retrouverons les coefficients de réflexion lors de la formulation des fonctions génératrices I(z) et V(z), puis beaucoup plus loin dans le pargraphe 5.3 consacré au formalisme symbolique.

3.3.2 Formes générales des solutions complexes de l'équation d'onde

Dans le déroulement de ce paragraphe dédié à l'usage des coefficients de réflexion, figurent en première partie les formules des fonctions génératrices I(z) et V(z) adaptées au cadre général de la ligne configurée à la figure **7**. On procédera à quelques transformations algébriques permettant de substituer aux constantes A et B, figurant dans les solutions (35) et (36), des combinaisons linéaires des paramètres E_0 , Z_c , ρ_0 et ρ_L . En seconde partie, les expressions précédentes seront transformées sous la forme de séries mieux adaptées au formalisme symbolique abordé au § 5.3. La troisième partie sera consacrée à l'onde stationnaire partielle.

Formulation analytique compacte de I (z) et V(z)

Du système linéaire tiré de l'application des conditions en extrémités de ligne décrites au § 2.2.3, équation (37), on parvient suite à quelques transformations aux formules générales des fonctions génératrices I(z) et V(z), soit :

$$I(z) = \frac{E_0}{Z_c + Z_0} \left(\frac{e^{-jkz} - \rho_c e^{-2jkL_0} e^{+jkz}}{1 - \rho_0 \rho_c e^{-2jkL_0}} \right)$$
(67)

$$V(z) = E_0 \frac{Z_c}{Z_c + Z_0} \left(\frac{e^{-jkz} + \rho_c e^{-2jkL_0} e^{+jkz}}{1 - \rho_0 \rho_c e^{-2jkL_0}} \right)$$
(68)

Il est important de rappeler que Z_0 représente l'impédance interne de la source de fem E_0 , que ρ_0 et ρ_L s'apparentent aux coefficients de réflexion présentés par la source et la charge. S'il s'agit d'impédances complexes, les coefficients de réflexion seront présentés sous la forme polaire (66). On observe aux numérateurs de ces deux expressions que l'amplitude de l'onde rétrograde est coordonée par le facteur $-\rho_i e^{-2jkL_0}$, c'est-à-dire par une source virtuelle dépendante du coefficient de réflexion imposé par l'impédance de charge $Z_{\rm L}.$

Formulation de *I* (*z*) et *V* (*z*) par une série

Exception faite du cas particulier d'une ligne ouverte alimentée par une source de fem pure, où $Z_L \rightarrow \infty$ et $Z_0 = 0$, le produit $\rho_0 \rho_L$ sera une quantité de valeur absolue inférieure à l'unité $|\rho_0 \rho_L| < 1$.

Sachant que l'exponentielle e-2jkL0 prend pour valeur absolue

l'unité, le terme $1/(1-\rho_0 \rho_c e^{-2jkL_0})$ peut être développé selon une série géométrique libellée comme suit :

$$S(\rho_0, \rho_{\perp}, k, L_0) = \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_{\perp} e^{-2jkL_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_0 \rho_{\perp})^n e^{-2njkL_0}$$
(69)

L'insertion de la série dans les expressions (67) et (68) prouve que le courant et la tension en toute coordonnée *z* d'une ligne désadaptée aux deux extrémités sera constituée de la superposition d'une infinité de solutions élémentaires pondérées par $(\rho_0 \rho_L)^n e^{-2njkL_0}$. Cet aspect de la théorie sera approfondi dans le paragraphe 5.3.

Illustration d'une onde stationnaire partielle

Considérons la relation (67) exprimant la fonction génératrice I(z). On suppose la ligne alimentée par une source de fem E_0 possédant une impédance interne adaptée $Z_0 = Z_c$. L'extrémité opposée de la ligne est connectée sur une résistance R_L de valeur $R_L = 3 Z_c$. Sous ces conditions, la détermination des coefficients de réflexion figurant dans l'équation (67) et calculés selon la relation (66) mène aux valeurs $\rho_0 = 0$ et $\rho_L = 0,5$.

Dans ce cas particulier, la fonction génératrice *I* (*z*) prend pour expression :

$$I(z) = \frac{E_0}{2Z_c} (e^{-jkz} - 0.5 e^{-2jkL_0} e^{+2jkz})$$

lmaginons que la fréquence d'alimentation de la ligne *f* procure une longueur d'onde telle que $kL_0 = 2\pi (L_0/\lambda) = 3\pi/2$. Dans ce cas, la fonction précédente prend pour expression spécifique :

$$I(z) = \frac{E_0}{2Z_c} (e^{-jkz} + 0.5 e^{+jkz})$$

Après insertion de la fonction harmonique $e_0(t) = E_0 e^{j\omega t}$, la solution *i* (*z*, *t*) s'exprime :

$$i(z, t) = \frac{E_0}{2Z_c} e^{-jk(z-v_0t)} + \frac{E_0}{4Z_c} e^{+jk(z+v_0t)}$$

relation que l'on peut également présenter en recherchant la composition algébrique d'une onde progressive et d'une onde stationnaire pleine telle que formulée ci-dessous :

$$i(z, t) = \left[\frac{E_0}{2Z_c}\cos(kz) + \frac{E_0}{4Z_c}e^{-jkz}\right]e^{j\omega t} = I(z)e^{j\omega t}$$
(70)

L'amplitude absolue de I(z) prend alors pour valeur :

$$|I(z)| = \frac{E_0}{2Z_c} \sqrt{2,25[\cos(kz)]^2 + 0,25[\sin(kz)]^2}$$
(71)

Cette formule montre immédiatement que l'onde stationnaire partielle ne comporte plus de nœuds ni de ventres, mais des minimums et maximums fixés par les critères suivants :

$$\cos(kz_{\rm m}) = 0 \Rightarrow |I(z_{\rm m})|_{\rm mini} = 0.25 \frac{E_0}{Z_c}$$
$$\sin(kz_{\rm M}) = 0 \Rightarrow |I(z_{\rm M})|_{\rm maxi} = 0.75 \frac{E_0}{Z_c}$$

Les positions des maximums et minimums sont alors définies par les critères $z_{\rm M} = M (\lambda/2)$ et $z_{\rm m} = (2m + 1) \lambda/4$, les indices M et m représentent des entiers positifs.

3.4 Transmission ou entretien de la puissance dans une ligne

Cette dernière partie aborde la question de la puissance installée ou transmise dans une ligne de transmission dépourvue de pertes. On regardera successivement le cas d'une ligne adaptée propageant une onde progressive, d'une ligne où s'établit une onde stationnaire pleine, puis une ligne où se manifeste une onde stationnaire partielle.

Pour conclure, le fonctionnement d'une ligne en régime d'onde stationnaire partielle sera caractérisé par le rapport d'onde stationnaire (ROS).

3.4.1 Puissance transportée par une onde progressive

La puissance transportée par l'onde progressive peut être élaborée simplement en soumettant une ligne adaptée en extrémité à une fem pure d'amplitude efficace E_0 . Sous ces conditions, la fonction génératrice de tension prend pour expression $V(z) = E_0 e^{-jkz}$, cette relation néglige les dissipations en ligne. La fonction trice du courant prenant pour expression $I(z) = (E_0/Z_c) e^{-jkz}$, on calcule aisément la puissance P transportée dans la ligne en formant le produit de V(z) et de l'expression conjuguée de I(z), soit :

$$P = V(z) I^*(z) = \frac{(E_0)^2}{Z_c}$$

La puissance transportée est donc indépendante de la variable longitudinale z. Toute l'énergie transmise par la source est finalement dissipée dans la résistance de charge strictement égale à l'impédance caractéristique de la ligne. Dans l'impossibilité physique de réaliser des sources de fem pure ($Z_L = 0$), ce résultat prouve qu'une source possédant une impédance interne strictement égale à Z_c procurerait un transfert énergétique optimal vers la charge. La configuration de la ligne serait alors simultanément adaptée en propagation et en transfert énergétique.

Les sources d'émissions hautes fréquences connectées aux antennes via un feeder réalisent cet optimum.

3.4.2 Puissance entretenue par une onde stationnaire pleine

Revenons sur l'exemple de la ligne ouverte alimentée par une source de fem adaptée ($R_0 = Z_c$) et sur les expressions (55) et (56) des fonctions génératrices I(z) et V(z) converties sous formes complexes :

$$I(z) = j \frac{E_0}{Z_c} e^{-jkL_0} \sin[k(L_0 - z)]$$
$$V(z) = E_0 e^{-jkL_0} \cos[k(L_0 - z)]$$

Précisons que le terme E_0 représente comme précédemment l'amplitude efficace de la fem.

La puissance en un point de coordonnée que lconque z de la ligne s'exprime alors :

$$P = V(z) I^{*}(z) = -j \frac{(E_0)^2}{Z_c} \cos[k(L_0 - z)] \sin[k(L_0 - z)]$$

Après quelques transformations, cette relation devient :

$$P = -j\frac{1}{2}\frac{(E_0)^2}{Z_c}\sin[2k(L_0 - z)]$$
(72)

L'expression (72) révèle une puissance essentiellement réactive dont l'amplitude et le signe évoluent en fonction de la variable longitudinale z. Sachant que $k = 2\pi/\lambda$, la relation montre que la puissance électrique dotée d'un signe négatif et la puissance magnétique d'un signe positif alternent avec une période rigoureusement égale à $\lambda/4$. On peut donc conclure que l'onde stationnaire pleine ne transporte pas de puissance au sens usuel, mais entretient dans la ligne une puissance réactive. En revanche, la ligne ouverte consomme de la puissance active dissipée dans la résistance interne R_0 de la source de fem, cette puissance s'exprime :

$$P_0 = R_0 |I(0)|^2 = R_0 \left(\frac{E_0}{Z_c}\right)^2 [\sin(kL_0)]^2 \text{ où } R_0 = Z_c$$

Sachant que $k = \omega/v_0$, la puissance sera maximale aux fréquences f_r , vérifiant les conditions :

$$f_{\rm r} = (2r+1) \frac{v_0}{4L_0}$$

Ces fréquences particulières coïncident rigoureusement avec les fréquences de résonances analysées au § 3.1.3.

3.4.3 Puissances reliées à une onde stationnaire partielle

L'exemple illustré au § 3.3.2 et plus spécialement la relation (70) rappelée ci-dessous montrait qu'une onde stationnaire partielle se manifeste par la superposition d'une onde progressive et d'une onde stationnaire pleine :

$$i(z, t) = \left[\frac{E}{2Z_{\rm c}}\cos(kz) + \frac{E}{4Z_{\rm c}}e^{-jkz}\right]e^{-j\omega t}$$

Sans entrer dans les détails du calcul de la puissance en toute coordonnée longitudinale *z*, l'intuition incite à dire que l'on obtient la composition d'une puissance active portée par l'onde progressive, et d'une puissance réactive entretenue par l'onde stationnaire pleine.

Si l'on procède au bilan de la puissance active, même sous les conditions de cette ligne alimentée par une source adaptée en propagation ($R_0 = Z_c$), le transfert de puissance active vers la charge de valeur $R_L = 3Z_c$ n'est pas optimal. En effet, d'une manière analogue à la ligne ouverte simulée précédemment, l'impédance interne de la source doit dissiper une puissance supplémentaire engendrée par le courant porteur de l'onde stationnaire pleine. L'exemple confirme donc que l'adaptation de puissance ne peut être convenablement réalisée qu'avec Z_0 et Z_L rigoureusement adaptées sur Z_c .

3.4.4 Rapport d'onde stationnaire (ROS)

Définition du ROS

Le **rapport d'onde stationnaire** portant l'abréviation ROS n'est autre que la traduction de la locution anglophone *standing wave ratio* (SWR). Il faut toutefois rappeler que dans les ouvrages de langue française antérieurs aux années 1970, on adoptait le terme « taux d'onde stationnaire » (TOS).

Le rapport d'onde stationnaire portant le symbole S_{ROS} s'adresse surtout aux ondes stationnaires partielles, car pour calculer le ROS, on forme le rapport des amplitudes maximales et minimale des fonctions génératrices *I*(*z*) ou *V*(*z*). Par exemple, si l'on sélectionne le courant, le ROS prend pour définition :

$$S_{\text{ROS}} = \frac{|I(z_{\text{M}})|_{\text{maxi}}}{|I(z_{\text{m}})|_{\text{mini}}} \rightarrow S_{\text{ROS}} \in [1 + \infty[$$
(73)

Pour une ligne connectée sur une charge $Z_{\rm L}$ adaptée $S_{\rm ROS}$ = 1, en revanche, pour une ligne ouverte en extrémité ou court-circuitée, les ondes stationnaires pleines impliquent, $S_{\rm ROS} \rightarrow \infty$.

Pour éviter la confusion avec la matrice de répartition S étudiée plus loin, on adopte pour le ROS la notation S_{ROS} . Il est évident que le calcul du ROS réalisé sur la tension V(z) donne strictement le même résultat qu'avec le courant.

Pour l'exemple illustré au § 3.3.2, nous avions :

$$|I(z_{\rm M})|_{\rm maxi} = 0.75 (E/Z_{\rm c}) \text{ et } |I(z_{\rm m})|_{\rm mini} = 0.25 (E/Z_{\rm c}), \text{ soit } S_{\rm ROS} = 3$$

Lien entre le ROS et le coefficient de réflexion ρ_L de la charge Z_L

L'analyse du numérateur de la fonction génératrice I(z) telle qu'établie dans l'équation (67) permet de faire le lien entre le rapport d'onde stationnaire S_{ROS} et le coefficient de réflexion ρ_L .

Appelons N ce numérateur présenté pour la circonstance sous la forme suivante :

$$N = e^{jk(L_0 - z)} - \rho e^{-jk(L_0 - z)}$$

Si l'on admet que $Z_{\rm L}$ représente une résistance $R_{\rm L}$, le coefficient de réflexion $\rho_{\rm L}$ sera une quantité réelle. Sous ces conditions, quand l'argument figurant en exposant prend pour valeur $k(L_0 - z) = 2\pi$, on obtient $N_1 = 1 - \rho_{\rm L}$, inversement, quand $k(L_0 - z) = \pi/2$, $N_2 = j(1 + \rho_{\rm L})$. Si l'on considère $\rho_{\rm L}$ positif, on déduit immédiatement de cet exemple que le ROS prend pour valeur $S_{\rm ROS} = |N_2|/N_1$.

Le raisonnement peut être étendu à toute valeur complexe de Z_L , donc de ρ_L , en formulant S_{ROS} par la relation suivante :

$$S_{\text{ROS}} = \frac{1+|\rho_{\text{L}}|}{1-|\rho_{\text{L}}|}$$
(74)

Pour l'exemple illustré au § 3.3.2, nous avions pour valeur du coefficient de réflexion $\rho_L = 0.5$, l'usage de la relation (74) donne $S_{\text{ROS}} = 3$, résultat tout à fait concordant, avec les calculs de $|I(z_M)|_{\text{maxi}}$ et $|I(z_m)|_{\text{mini}}$ entrepris précédemment.

4. Insertion des dissipations d'énergie en ligne

À l'exception des pertes d'énergies dans la résistance interne des sources et des impédances de charge, les dissipations de puissance dans une ligne de transmission sont en relation directe avec la conductivité électrique des conducteurs et l'imperfection des matériaux diélectriques adoptés comme isolant primaire. En effet, on rencontre dans les diélectriques deux causes possibles de dissipation d'énergie, l'une provient des courants de conduction engendrés dans certains isolants, la seconde de pertes thermiques provoquées par les oscillations dipolaires forcées des molécules composant les polymères.

Si l'on admet que rapportées à l'unité de dimension, ces pertes restent faibles par rapport à la puissance locale transportée ou installée dans une ligne, on parvient à corriger les paramètres primaires par l'addition d'une résistance et d'une conductance linéique. L'équation d'onde ainsi transformée fait alors apparaître une constante de propagation complexe dont la partie réelle représente l'atténuation des signaux rapportée à l'unité de dimension longitudinale.

Ce quatrième paragraphe subdivisé en deux parties comportera successivement le descriptif théorique menant aux paramètres primaires corrigés, puis une analyse plus approfondie des nouveaux paramètres secondaires de la ligne.

4.1 Aménagement des paramètres primaires de la ligne

On regardera tout d'abord l'entrée de la résistance linéique R puis la conductance linéique G dans le schéma illustrant un tronçon élémentaire Δz de la ligne. On procédera ensuite aux calculs de R et G restreints au cas particulier d'une ligne coaxiale telle que décrite au § 1.2.1. Quelques conclusions seront finalement formulées quant aux comportements de la résistance linéique avec la fréquence des signaux transmis dans la ligne.

4.1.1 Insertion de la résistance linéique *R* et de la conductance linéique *G*

Revenons sur le schéma de la figure **6** décrivant un tronçon élémentaire de ligne de dimension Δz . Dans la perspective de l'insertion des pertes d'énergie, ajoutons en série avec l'inductance ΔL , l'élément de résistance ΔR et, en parallèle sur la capacité ΔC , l'élément de conductance ΔG . La figure **10** restitue le résultat de cet aménagement.

On peut donc écrire, $\Delta R = R \Delta z$ et $\Delta G = G \Delta z$. Il est bien évident que R et G doivent respecter les critères exigés par une ligne uniforme tels que définis au § 1.1.1.

La résistance linéique prend pour unité le ohm par mètre (Ω /m) et la conductance linéique siemens par mètre (S/m).

4.1.2 Calcul de la résistance linéique

Nous nous concentrons ici sur une ligne coaxiale portant les paramètres géométriques de la figure **3***a*. En toute rigueur, on extrait la résistance linéique du calcul de l'impédance de surface effectué par la théorie des ondes cylindriques. Généralement, une approximation des formules rigoureuses est souvent suffisante pour le cadre d'application envisagé dans l'article. Cette approche allégée utilise le concept d'onde plane élaboré dans l'article [D 1 325]. Nous nous limitons ici à reproduire une expression simplifiée de la résistance de surface de la ligne coaxiale.

Il est utile de préciser qu'à la résistance s'associe une réactance dont la contribution modifie sensiblement la vitesse de propagation des ondes, mais qui sera présentement négligée.

Les formules adoptées par la suite utilisent la profondeur de pénétration δ de l'onde dans le métal de grande conductivité électrique composant le conducteur intérieur et le conducteur extérieur, δ prend pour expression analytique :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu_r\sigma_m}}$$
(75)

Dans cette relation figurent successivement, la perméabilité magnétique absolue $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, la conductivité électrique σ_m , (pour le cuivre, $\sigma_m = 5.8 \times 10^7$ S/m), la pulsation ω des signaux harmoniques transportés dans la ligne ($\omega = 2\pi f$). On trouve également dans cette formule la perméabilité magnétique relative μ_r , normalement ce paramètre prend pour valeur 1, sauf pour les conducteurs dotés de propriétés ferromagnétiques.

À titre indicatif, la profondeur de pénétration des ondes dans le cuivre a été calculée dans le tableau **1**, pour huit décades de fréquences allant de 10 Hz à 1 GHz.

Tant que la profondeur de pénétration est inférieure au rayon d/2 du conducteur intérieur, ainsi qu'à l'épaisseur *e* du conducteur extérieur, on adopte pour expression de *R*:

$$\delta < d \text{ et } e \to R = \frac{1}{\pi \sigma_{\rm m} \delta} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)$$
 (76)

sinon, c'est la formule usuelle de la résistance valable pour le courant continu, car établie selon l'hypothèse d'un courant statique.



Figure 10 – Aménagement des paramètres primaires de la ligne par insertion de la résistance linéique R et de la conductance linéique G

Tableau 1 – Valeurs numériques de la profondeur de pénétration des ondes électromagnétiques dans le cuivre										
f	10 Hz	100 Hz	1 kHz	10 kHz	100 kHz	1 MHz	10 MHz	100 MHz	1 GHz	
δ	20 mm	6,4 mm	2 mm	0,64 mm	0,02 mm	64 µm	20 µm	6,4 μm	2 µm	

 $\sigma_m = 5.8 \times 10^7$ S/m et pour huit décadées de fréquences comprises entre 10 Hz et 1 GHz.

4.1.3 Calcul de la conductance linéique

Quand la dissipation d'énergie du diélectrique a pour seule origine les courants de conduction occasionnés par la conductivité électrique très faible mais non nulle du matériau isolant, la conductance linéique G d'une ligne coaxiale s'exprime :

$$G = \frac{2\pi\sigma_1}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$
(77)

Dans ce cas, la conductivité σ_1 de l'isolant est généralement très inférieure à 0,01 S/m.

Lorsque les pertes dans le diélectrique surviennent *via* les vibrations moléculaires engendrées par le champ électrique pénétrant l'isolant, on adopte le concept de permittivité relative complexe $\varepsilon_{\mathbf{r}}^* = \varepsilon_{\mathbf{r}}^- - j\varepsilon_{\mathbf{r}}^"$.

La conductance linéique G et la capacité linéique C restituant ces phénomènes s'expriment alors par les relations :

$$G = \frac{2\pi\omega\varepsilon_r^r}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad \text{avec } C = \frac{2\pi\omega\varepsilon_r^r}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$
(78)

Il est évident que les propriétés physiques relatées pour la ligne coaxiale sont transposables à d'autres structures de lignes, au prix d'aménagements spécifiques.

4.2 Constante de propagation complexe

La terminologie retenue « constante de propagation » est liée à la traduction directe de l'expression anglophone propagation constant. En toute rigueur, le vocabulaire académique de la langue française reconnaît comme terme officiel « exposant linéique de propagation ». Bien que cette locution soit beaucoup plus précise que la précédente, nous adopterons quand même constante de propagation pour des questions de facilités textuelles.

Dans la progression de l'exposé, nous procéderons au calcul de l'expression complète de la constante de propagation, puis à l'analyse d'une forme approchée entrant dans la plupart des cas d'intérêt pratique.

4.2.1 Transformation de l'équation d'onde et formulation de γ

Transformation de l'équation d'onde

L'aménagement du tronçon de ligne élémentaire tel qu'envisagé à la figure **10** a pour conséquence immédiate de modifier l'équation des télégraphistes. Ainsi, les équations complexes primitives (26) et (27) prennent, dans le contexte des dissipations d'énergie, les formes suivantes :

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = (R + jL\omega)I \tag{79}$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = (G + jC\omega)V \tag{80}$$

Après développement, on parvient à l'équation d'onde en courant formulée ci-dessous :

$$\frac{d^2I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0 \tag{81}$$

Formulation complète de γ

Les solutions de l'équation d'onde (81) prennent donc pour forme générale :

$$I(z) = A e^{-\gamma z} + B e^{+\gamma z}$$
(82)

On retrouve les constantes inconnues A et B et en exposant le produit γz où le coefficient γs 'est substitué au produit *jk* figurant sur les lignes sans pertes. La constante de propagation γ est donc représentée par la quantité complexe ci-dessous :

$$\gamma = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}$$
(83)

Par opposition aux expressions allégées puis approchées qui seront développées par la suite, la formule (80) s'intitule **expression complète de** γ . En effet, on montre sans difficulté que le calcul de la racine carrée du produit figurant sous le radical peut être dissocié en une partie réelle α et une partie imaginaire β présentées sous les conventions d'écriture des nombres complexes, soit :

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{84}$$

L'insertion de (84) dans les solutions générales (82) indique tout de suite que les fonctions exponentielles $e^{\pm \gamma z}$ prennent la forme d'un produit, car $e^{\pm \gamma z} = e^{\pm \alpha z} e^{\pm \beta z}$.

Nous verrons ultérieurement que α et β représentent des nombres réels positifs ayant un impact majeur sur le comportement physique des signaux transportés dans la ligne. En effet, on observe que le paramètres α atténue l'amplitude de l'onde progressive, mais accentue l'amplitude de l'onde rétrograde, alors que β joue le rôle du nombre d'ondes. Nous intitulerons **constante linéique d'atténuation** α et **constante linéique de phase** β .

En pratique, l'usage de l'expression complète de γ étant restreint à des conditions très particulières de fonctionnement des lignes, on adopte pour α et β des expressions simplifiées détermiinées sur la base d'approximations.

Expressions allégées et simplifiées de α et β

On fera abstraction de la conductance linéique G = 0, l'hypothèse est tout à fait acceptable aux fréquences inférieures au gigahertz.

L'expression (82) se réduit par conséquent à la formule allégée :

$$\gamma = \sqrt{jC\omega \left(R + jL\omega\right)} \tag{85}$$

Si la pulsation ω est suffisamment grande pour admettre $L\omega >> R$ l'expression (85) peut être transposée sous une forme alternative prête à la mise en place d'approximations :

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{1+\frac{R}{jL\omega}}$$

Sachant que $L\omega >> R$, le second radical peut être développé au second ordre, d'où :

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R}{jL\omega} + \dots\right)$$

Finalement, on trouve :

$$\alpha \cong \frac{R}{2Z_{\rm c}} \text{ et } \beta \cong k = \omega \sqrt{LC}$$
(86)

Un retour sur l'équation (76) exprimant la résistance linéique montre que α évolue avec une loi proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. La constante linéique d'atténuation ainsi exprimée prend pour unité le Neper par mètre (Np/m). Quant à la constante linéique de phase β , elle est ici confondue avec le nombre d'ondes *k*.

Problème de l'impédance caractéristique

La démonstration produite ci-après montre que l'impédance caractéristique d'une ligne dotée de pertes linéiques cesse d'être un nombre réel, elle prend pour forme $Z_c = R_c + jX_c$. Toutefois, dès qu'une évaluation très précise de Z_c n'est pas exigée, la contribution de X_c peut être négligée car, aux fréquences usuelles,

 $|X_{c}|$ est très inférieure à $\sqrt{L/C}$, et consécutivement sans grande influence sur les propriétés physiques de la ligne.

Expression simplifiée de l'impédance caractéristique complexe

Un retour sur la fonction I(z) établie en (82) et sur l'équation des télégraphistes (83) donne pour V(z) la solution suivante :

$$V(z) = -\frac{1}{G + jC\omega} \frac{dI}{dz} = Z_{c} (Ae^{-\gamma z} - Be^{+\gamma z})$$

On constate immédiatement que l'impédance caractéristique Z_c prend la forme d'une quantité complexe fournie par l'expression :

$$Z_{\rm c} = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} = R_{\rm c} + jX_{\rm c}$$

Si l'on néglige la contribution de la conductance linéique de la ligne et que l'on admet la pulsation suffisante pour satisfaire la condition $L\omega >> R$, Z_c prend pour forme approchée :

$$Z_{\rm c} = R_{\rm c} + j X_{\rm c} \cong \sqrt{\frac{L}{C}} - j \frac{R}{L\omega} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La partie réelle de cette expression n'est autre que la valeur de $Z_{\rm c}$ adoptée pour les lignes sans pertes.

En conséquence, aux fréquences de fonctionnement usuelles où $L\omega \gg R$, cette relation montre que $|X_c| << R_c$ et qu'il est ainsi légitime de maintenir pour Z_c que la partie réelle, soit $Z_c \cong \sqrt{L/C}$.

4.2.2 Constante linéique d'atténuation libellée en dB

Soit une ligne adaptée en extrémité ($Z_L = Z_c$), nous savons que dans ce cas particulier, seule l'onde progressive sera sélectionnée conformément au premier terme de la solution (82) du courant I(z), d'où :

$$Z_{\rm L} = Z_{\rm c} \rightarrow I(z) \cong {\rm Ae}^{-(\alpha + jk)z}$$

Pour un observateur situé en extrémité de ligne ($z = L_0$), l'atténuation engendrée par la propagation du signal harmonique et désignée par le symbole A_{ℓ} s'exprimera par la valeur absolue du rapport $I(L_0)/I(0)$, soit :

$$A_{\ell} = \left| \frac{I(L_0)}{I(0)} \right| = e^{-\alpha L_0}$$

L'indice ℓ signifie que A_ℓ s'exprime dans une échelle linéaire.

D'autre part, la conversion de A_{ℓ} sur une échelle logarithmique libellée en dB s'effectue selon la convention rappelée ci-dessous :

$$A_{\rm dB} = 20 \log A_{\ell} = -20 \alpha L_0 \log e$$

Après calcul de log *e*, cette expression se transpose succinctement en (87) :

$$A_{\rm dB} = -8,69\alpha L_0 \tag{87}$$

La constante linéique d'atténuation α_{dB} libellée en décibel par mètre (dB/m) est donc donnée par le rapport $\alpha_{dB} = A_{dB}/L_0$, soit $\alpha_{dB} = -8,69 \alpha$.

Exemple de calcul d'atténuation d'une ligne

Prenons la ligne coaxiale étudiée au § 1.2.3, ayant pour paramètres géométriques D = 4 mm et d = 1 mm et pour paramètres primaires L = 277 nH/m et C = 94 pF/m. Cette ligne possède donc pour impédance caractéristique $Z_c = 54 \Omega$. Les conducteurs en cuivre $\sigma_m = 5,8 \times 10^7$ S/m, sous une fréquence de 100 MHz, donnent pour profondeur de pénétration, $\delta = 6,4 \mu$ m. De l'expression (73), on tire immédiatement la valeur de la résistance linéique, soit $R = 1 \Omega/m$. Sachant qu'à la fréquence de 100 MHz, L $\omega = 174 \Omega$, l'approximation $\alpha \equiv R/2 Z_c$ est parfaitement validée, donc $\alpha = 9,2 \times 10^{-3}$ Np/m ou $\alpha_{dB} = 0,08$ dB/m.

Une ligne coaxiale ayant pour dimension longitudinale $L_0 = 100 \text{ m}$ produit sous ces conditions de fonctionnement une atténuation $A_{\rm dB} = -8 \text{ dB}$, soit $A_\ell \cong 0.4$. Pour une ligne de 1 000 m, l'atténuation passe à $A_{\rm dB} = -80 \text{ dB}$, ce qui est manifestement prohibitif, car -80 dB équivaut en échelle linéaire à $A_\ell = 10^{-4}$. Bien que très importante, l'atténuation A_ℓ n'entre pas en contradiction avec l'hypothèse de propagation quasi TEM. En effet, en extrémité de ligne quand z = 999 m, la perte relative de signal constatée pour atteindre L_0 est très proche du produit $A_\ell \alpha$, soit 9.2×10^{-7} , donc très inférieure à 10^{-4} .

5. Autres formulations de la théorie des lignes

La théorie des lignes peut être abordée par d'autres approches que celles examinées jusqu'à présent dans l'article et que l'on propose d'exposer brièvement dans ce paragraphe. On s'intéressera tout d'abord au formalisme de l'impédance d'entrée dont l'objectif consiste à déduire certaines propriétés physiques des lignes au moyen d'une formule compacte. Cette relation permet de restituer l'évolution de l'impédance vue de l'entrée d'une ligne connectée en sortie sur une impédance quelconque Z_L. Dans une seconde partie, une ligne sera assimilée à un quadripôle électrique afin d'y intégrer naturellement la contribution des phénomènes de propagation. On procédera au calcul des coefficients de la matrice chaîne, ainsi qu'à l'illustration de quelques exemples adoptant cette approche. La troisième partie, la plus conséquente, aborde la résolution des lignes par le calcul symbolique. L'avantage procuré par le calcul symbolique permet d'accéder assez simplement aux réponses d'une ligne soumise à une source de signaux transitoires. Sur la base de simulations théoriques prenant l'exemple d'une source de fem délivrant un échelon de tension, puis un échelon de signal sinusoïdal, on procédera à une analyse physique détaillées dissociant les régimes transitoires et entretenus. Pour conclure, une dernière partie sera consacrée à l'élaboration des paramètres S, ainsi qu'à la mise en place de la matrice répartition d'une ligne. Cette approche également illustrée par quelques simulations devrait faciliter la caractérisation d'une ligne effectuée suivant ce protocole.

5.1 Formalisme adoptant l'impédance d'entrée

Dans ce paragraphe, on examinera successivement la définition de l'impédance d'entrée d'une ligne, ainsi que les principales propriétés de ce paramètre. Des formules approchées seront aussi établies sous l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes.

5.1.1 Définition de l'impédance d'entrée d'une ligne

En se reportant au schéma de la figure **7**, l'impédance d'entrée d'une ligne désignée par le symbole Z_E provient du rapport des fonctions génératrices V(z) et I(z) évaluées dans le plan d'entrée de la ligne localisé en z = 0, d'où :

$$Z_E = \frac{V(0)}{I(0)}$$
(88)

avec Z_L connectée.

Des solutions complètes (67) et (68) assorties de quelques transformations algébriques mineures, on tire l'expression de $Z_{\rm E}$ établie ci-dessous :

$$Z_{\rm E} = Z_{\rm c} \frac{Z_{\rm L} + j Z_{\rm c} \tan{(kL_0)}}{Z_{\rm c} + j Z_{\rm 1} \tan{(kL_0)}}$$
(89)

On retrouve dans cette formule les paramètres secondaires de la ligne tels que l'impédance caractéristique Z_c , le nombre d'ondes k auxquels se combine l'impédance Z_L connectée en extrémité $(z = L_0)$.

5.1.2 Principales propriétés de l'impédance d'entrée

Pour une ligne ouverte en extrémité $Z_{L} \rightarrow \infty$, l'impédance d'entrée prend donc, pour forme asymptotique $Z_{E} = -jZ_{c}/\tan (kL_{0})$. Cette relation montre qu'aux fréquences de résonance f_{r} définies

au § 3.1.3, Z_{E} s'annule, car $(|\tan(kL_0)|_{f=f_r} \to \infty)$.

En conséquence, alimentée par une source de fem pure ($Z_0 = 0$), le courant I(0) absorbé en entrée de ligne prend une amplitude infinie quand $f = f_r$.

Inversement, pour une ligne connectée sur un court-circuit $Z_{\rm L} = 0$, l'impédance d'entrée s'exprime $Z_{\rm E} = jZ_{\rm c} \tan{(kL_0)}$, on trouve qu'aux fréquences de résonance $f_{\rm r}$, $Z_{\rm E}$ prend une valeur infiniment

grande, soit $(Z_{\mathsf{E}})_{f=f_r} \to \infty$. La ligne sur court-circuit est donc bien la configuration duale d'une ligne ouverte. En effet, si l'on imagine la ligne alimentée par une source de courant dépourvue d'admittance interne, on trouve aux fréquences de résonance du (a).

$$(|V(0)|)_{f=f_r} \rightarrow \infty$$
.

De plus, l'équation (89) confirme bien qu'une ligne connectée sur sa propre impédance caractéristique ($Z_L = Z_c$) donne pour impédance d'entrée $Z_E = Z_c$. Dans ce cas, la ligne adopte le comportement d'un quadripôle itératif.

5.1.3 Formules approchées de Z_E aux grandes longueurs d'ondes

Rappelons que le terme grandes longueurs d'ondes signifie que la longueur d'onde imposée dans le fonctionnement de la ligne est très supérieure à la dimension longitudinale, soit $\lambda >> L_0$. Dans

ce cas, $kL_0 \ll 1$, il est donc possible de confondre la fonction tangente figurant dans (89) avec le développement au premier ordre formulé ci-dessous :

$$kL_0 \ll 1 \Rightarrow \tan(kL_0) \cong kL_0 + \dots$$

Cette simplification mène aux formes approchées de Z_E . Ainsi, à l'aide des calculs aux limites, il est aisé de montrer qu'en connectant en sortie une impédance Z_L de valeur très inférieure à Z_c , on obtient pour formule approchée de Z_E :

$$|Z_{\rm L}| \ll Z_{\rm c} \rightarrow Z_{\rm E} \cong Z_{\rm L} + j \, L \omega \, L_0 + \dots \tag{90}$$

Inversement, si l'on connecte une impédance Z_L de valeur très supérieure à Z_c , on obtient pour formule approchée de l'admittance d'entrée Y_E de la ligne :

$$|Z_{L}| \gg Z_{c} \rightarrow Y_{E} \cong Y_{L} + jC \omega L_{0} + \dots \text{ où } Y_{L} = 1/Z_{L}$$
(91)

Le retour sur le paragraphe 3.2.2 indique tout de suite que l'équation (90) restreint le circuit de la figure **9** à l'inductance LL_0 connectée en série avec Z_L , alors que l'équation (91) correspond à Z_L connectée en parallèle sur la capacité CL_0 .

5.2 Formalisme matriciel des quadripôles

Comme nous l'avions préalablement mentionné au § 3.2.2, une ligne de transmission fonctionnant sous le régime des grandes longueurs d'ondes peut être convertie sous un circuit localisé assimilable à un quadripôle. Le concept de quadripôle peut être évidemment étendu pour toute fréquence de fonctionnement de la ligne où interviennent les phénomènes de propagation. Dans cette problématique, il est généralement plus facile de convertir les calculs de ligne dans le langage matriciel. Pour des raisons justifiées sur la base d'exemples on procédera au calcul et à l'usage des matrices chaînes. Néanmoins, le lecteur n'éprouvera aucune difficulté à étendre le concept aux matrices impédance ou admittance, d'une utilisation tout de même plus rare pour ces applications.

5.2.1 Formation de la matrice chaîne d'une ligne de transmission

L'examen du schéma de la figure **7** permet l'assimilation du tronçon de ligne de dimension L_0 à un quadripôle linéaire. En effet, si l'on conserve les conventions d'orientations des courants et tensions dans les plans d'entrée et de sortie, tels que déterminés sur la figure **7**, on procède aux changements de notations portés ci-dessous :

$$I_{\rm E} = I$$
 (0), $V_{\rm E} = V$ (0), $I_{\rm S} = I$ (L_0), $V_{\rm S} = V$ (L_0)

Les paramètres $V_{\rm E},~I_{\rm E}$ et $V_{\rm S},~I_{\rm S}$ composent les vecteurs ($X_{\rm E})$ et ($X_{\rm S})$ ayant pour formes transposées :

$${}^{t}(X_{E}) = (V_{E}) (I_{E}) \text{ et } {}^{t}(X_{S}) = (V_{S}) (I_{S})$$

Vecteur d'entrée (X_E) et vecteur de sortie (X_S) sont alors reliés par la matrice prenant le symbole (\pounds) et désignée ci-après, **matrice chaîne** de la ligne :

$$(X_{\rm S}) = (\mathcal{L}) (X_{\rm E})$$

Équation à laquelle doit évidemment correspondre l'expression développée :

$$\begin{pmatrix} V_{\rm S} \\ I_{\rm S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\rm E} \\ I_{\rm E} \end{pmatrix}$$
(92)

Les coefficients ℓ_{ij} de la matrice chaîne constituent donc une nouvelle classe de paramètres secondaires de la ligne, car ils intègrent directement les phénomènes de propagation.

5.2.2 Expressions analytiques des paramètres ℓ_{ij} de la ligne

Des calculs algébriques développés plus loin, on déduit aisément les formules analytiques des paramètres ℓ_{ii} , soit :

$$\ell_{11} = \cos(kL_0) \quad \ell_{12} = -jZ_c \sin(kL_0)$$
$$\ell_{21} = \frac{1}{jZ_c} \sin(kL_0) \quad \ell_{22} = \cos(kL_0)$$

Ces relations montrent immédiatement la présence des paramètres secondaires de la ligne concrétisés par l'impédance caractéristique Z_c et le nombre d'ondes k. Les phénomènes de propagation figurent directement par la présence des fonctions sin (kL_0) et cos (kL_0).

Aux grandes longueurs d'ondes, ces expressions prennent pour valeurs approchées :

$$\lambda \gg L_0 \to \ell_{11} \cong 1 \quad \ell_{12} \cong -jL\omega L_0$$
$$\lambda \gg L_0 \to \ell_{12} \cong -jC\omega L_0 \quad \ell_{22} \cong 1$$

En formant le produit $(X_S) = (\mathcal{L})(X_E)$, on vérifie que la matrice chaîne ainsi simplifiée est bien cohérente avec le quadripôle de la figure **9**, car $L_{eq}C_{eq}\omega^2 = (kL_0)^2 \ll 1$.

Calcul des coefficients l_{ii} de la matrice chaîne

Les fonctions génératrices I(z) et V(z) déterminées par les solutions complexes établies en § 2.3.3 peuvent s'exprimer sous des formes matricielles. On entre le vecteur ${}^{t}(AB)$ comprenant pour composantes les constantes inconnues A et B, soit :

$$\begin{pmatrix} V_{\mathsf{E}} \\ I_{\mathsf{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\mathsf{c}} & -Z_{\mathsf{c}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mathsf{S}} \\ I_{\mathsf{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\mathsf{c}}q^{-1} & -Z_{\mathsf{c}}q \\ q^{-1} & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \end{pmatrix}$$

Expressions dans lesquelles, le complexe q prend pour valeur :

$$q = e^{+jkL_0}$$

Une transformation algébrique élémentaire permet d'écrire $(X_S) = (\mathcal{L}) (X_E)$, d'où :

$$\begin{pmatrix} V_{\rm S} \\ I_{\rm S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\rm c}q^{-1} & -Z_{\rm c}q \\ q^{-1} & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\rm c} & -Z_{\rm c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_{\rm E} \\ I_{\rm E} \end{pmatrix}$$

Après inversion de la matrice et calcul du produit, on obtient :

$$\begin{pmatrix} V_{\rm S} \\ I_{\rm S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL_0) & -jZ_{\rm c}\sin(kL_0) \\ -j(Z_{\rm c})^{-1}\sin(kL_0) & \cos(kL_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\rm E} \\ I_{\rm E} \end{pmatrix}$$

Après identification avec $(X_S) = (\mathcal{L})(X_E)$, on déduit aisément les coefficients ℓ_{ii} , car :

$$(X_{\mathsf{S}}) = (\mathscr{L}) (X_{\mathsf{E}}) \to \begin{pmatrix} V_{\mathsf{S}} \\ I_{\mathsf{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mathsf{E}} \\ I_{\mathsf{E}} \end{pmatrix}$$

5.2.3 Exemples d'applications du calcul matriciel

Revenons sur le schéma de la figure **7** en attribuant à l'impédance interne de la source de fem la valeur particulière $Z_0 = 0,1 Z_c$ et en maintenant l'extrémité de la ligne ouverte, soit $Z_L \rightarrow \infty$. On propose de calculer l'amplitude de la tension en extrémité $V(L_0)$.

Par combinaison du calcul de l'impédance d'entrée Z_E de la ligne et du calcul matriciel, on trouve aisément $V(L_0)$. En effet, sachant que pour la ligne ouverte en extrémité, l'impédance d'entrée prend pour expression :

$$Z_{\rm E} = -j \frac{Z_{\rm c}}{\tan{(kL_0)}}$$

On déduit immédiatement les valeurs de la tension et du courant en entrée de la ligne, soit :

$$I(0) = I_{\rm E} = \frac{E_0}{0.1Z_{\rm c} + Z_{\rm E}}$$
 et $V(0) = V_{\rm E} = \frac{Z_{\rm E}}{0.1Z_{\rm c} + Z_{\rm E}}E_0$

Après usage du produit matriciel (92) et sortie de la première ligne, on extrait $V(L_0)$:

$$V(L_0) = V_{\rm S} = \frac{\ell_{11}Z_{\rm E} + \ell_{12}}{0.1Z_{\rm c} + Z_{\rm E}}E_0$$

L'insertion des formes analytiques de ℓ_{11} et ℓ_{12} mène finalement à l'expression :

$$V(L_0) = V_{\rm S} = \frac{Z_{\rm E} \cos(kL_0) - j Z_{\rm c} \sin(kL_0)}{0 \cdot 1 Z_{\rm c} + Z_{\rm F}} E_0$$
(93)

En règle générale, le déroulement du calcul selon ce procédé est beaucoup plus commode que le calcul direct par la relation (68) énoncée en § 3.3.2. De plus, l'expression (93) facilite l'analyse comportementale de $V(L_0)$ lors des résonances. En effet, quand $f = f_r$, on trouve immédiatement que $Z_E = 0$ et $|\sin (kL_0)| = 1$, d'où :

$$f = f_r \Rightarrow |V(L_0)| \rightarrow 10E_0$$

Sous ce fonctionnement de la ligne, la tension en extrémité prend une amplitude dix fois supérieure à la fem appliquée en entrée. Il existe par conséquent une grande analogie avec les surtensions observées sur les circuits localisés excités sur leur propre fréquence de résonance.

En guise de seconde application, l'exemple traité ci-après aborde le calcul itératif menant à la résolution des lignes dotées de paramètres primaires non uniformes.

Propagation des signaux sur une ligne de transmission non uniforme

Considérons une ligne dont les paramètres primaires L et C évoluent selon la variable longitudinale z, condition qui équivaut à entrer les fonctions L(z) et C(z). Sur un tronçon de ligne de dimension Δz évidemment très inférieure à L_0 , ainsi qu'à la lon-

gueur d'onde λ , les coefficients de la matrice chaîne (\mathcal{L}_n) attribuée à ce tronçon élémentaire de ligne prennent pour valeurs :

$$\ell_{n11} \cong \mathbf{1}, \quad \ell_{n12} \cong -jL(z_n)\omega\Delta z$$

$$\ell_{n21} \cong jC(z_n)\omega\Delta z, \quad \ell_{n22} \cong \mathbf{1}$$

Le paramètre zn indique la position du tronçon de rang n définie par la relation :

$$z_n = (0,5+n)\Delta z$$
 où $\Delta z = L_0/N$

L'entier N détermine le nombre de tronçons composant la ligne.

Vecteurs d'entrée (X_E) et de sortie (X_S) de ligne sont alors reliés par le produit des N matrices formulé ci-dessous :

$$(X_{\mathsf{S}}) \!=\! (\mathcal{L}_0) \, (\mathcal{L}_1) \, (\mathcal{L}_2) \ldots \, (\mathcal{L}_n) \ldots \, (\mathcal{L}_{N-1}) \, (X_{\mathsf{E}}) \!=\! (\mathcal{L}) \, (X_{\mathsf{E}})$$

Sachant que $V_{\rm S} = Z_{\rm L} I_{\rm S}$, on obtient après inversion :

$$(X_{\mathsf{E}}) = (\mathcal{L})^{-1} (X_{\mathsf{S}}) \Longrightarrow \begin{pmatrix} V_{\mathsf{E}} \\ I_{\mathsf{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\mathsf{L}} \\ 1 \end{pmatrix} I_{\mathsf{S}}$$

Les paramètres *tij* représentent alors les coefficients de $(\mathcal{L})^{-1}$. On extrait la valeur de l'impédance d'entrée Z_{E} de la ligne en formant le rapport :

$$Z_{\rm E} = \frac{V_{\rm E}}{I_{\rm E}} = \frac{t_{11} Z_{\rm L} + t_{12}}{t_{21} Z_{\rm L} + t_{22}}$$

Finalement, la détermination de IE et VE est immédiate, car :

$$I_{\rm E} = \frac{E_0}{Z_{\rm E} + Z_0} V_{\rm E} = \frac{Z_{\rm E}}{Z_{\rm E} + Z_0} E_0$$

Un retour sur le produit matriciel exprimant (L) donne accès au vecteur de sortie :

$$\begin{pmatrix} V_{\rm S} \\ I_{\rm S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\rm E} \\ I_{\rm E} \end{pmatrix}$$

5.3 Formalisme symbolique

Ce paragraphe exclusivement consacré au formalisme symbolique aborde le problème des lignes de transmission en régime transitoire. Jusqu'alors, nous avions considéré la ligne en fonctionnement entretenu, c'est sous cette hypothèse qu'ont été établies les fonctions génératrices I(z) et V(z), ainsi que les expressions (67) et (68) en § 3.3.2. Nous verrons que la conversion de ces relations dans le langage symbolique et sous la forme de séries permet de reconstituer la réponse transitoires d'une ligne. Quelques exemples simulant des réponses transitoires seront présentés en guise d'illustrations.

5.3.1 Conversion des solutions dans le domaine symbolique

Pour alléger l'exposé la démonstration sera restreinte au courant I(0) entrant dans la ligne et conformément aux notations du schéma de la figure **7**. De l'expression (67) établie en § 3.3.2, on extrait immédiatement I(0), soit :

$$I(0) = \frac{E_0}{Z_c + Z_0} \left(\frac{1 - \rho_L e^{-2jkL_0}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-2jkL_0}} \right)$$

Il était montré qu'une présentation strictement équivalente de cette formule consiste à mettre en place la série (69) menant à une expression de *I* (0) plus adaptée à la résolution par le calcul symbolique, d'où :

$$I(0) = \frac{E_0}{Z_c + Z_0} (1 - \rho_L e^{-2jkL_0}) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_0 \rho_L)^n e^{-2njkL_0}$$

Admettons que l'impédance interne de la source, ainsi que la charge soient constituées de résistances $Z_0 = R_0$ et $Z_L = R_L$. Sous cette simplification le nombre d'ondes sera l'unique paramètre contenant la pulsation ω , car $k = \omega/v_0$. Si *p* désigne la variable symbolique, on passe à la fonction symbolique *I* (0, *p*) en pratiquant la transformation $p = j\omega$.

La fonction symbolique I (0, p) s'exprime alors par la série :

$$I(0, p) = \frac{E_0(p)}{Z_c + R_0} (1 - \rho_L e^{-2p\theta}) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_0 \rho_L)^n e^{-2np\theta}$$
(94)

Dans (94) figure le temps de propagation en ligne déterminé par le rapport :

$$\theta = \frac{L_0}{v_0}$$

Précisons que la question du temps de propagation était initialement abordée en § 2.4.2.

D'autre part, la fonction symbolique $E_0(p)$ figurant au numérateur du premier terme de (94) n'est autre que la conversion symbolique de la fem délivrée par la source de signaux transitoires. En effet, la fem est une fonction de la variable temps donnée par $e_0(t)$, la fonction symbolique $E_0(p)$ est donc le résultat de la transformation directe de Laplace, notée TL, de e₀ (t), soit :

$$E(p) = \mathsf{TL}[e(t)] = \int_{0}^{+\infty} e(t) e^{-pt} dt$$
(95)

L'usage de l'intégrale (95) suppose la fonction $e_0(t)$ nulle quand *t* < 0.

5.3.2 Calcul de la réponse transitoire de la ligne

Le calcul sera allégé en adoptant la fonction symbolique auxiliaire $I_0(p)$ ci-dessous :

$$I_0(p) = \frac{E(p)}{Z_c + R_0} (1 - \rho_L e^{-2p\theta})$$

Sous cette convention d'écriture, il est facile de montrer que la réponse transitoire de i (0, t) provenant du calcul de transformée inverse de Laplace mène à la relation suivante :

$$i(0, t) = TL^{-1}[I_0(0, p)] = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_0 \rho_L)^n i_0(t - 2n\theta)$$
 (96)

La fonction $i_0(t)$ figurant dans cette expression correspond évidemment à la transformée inverse de Laplace de $I_0(p)$, c'est-à-dire :

$$i_0(t) = \mathsf{TL}^{-1}[I_0(\rho)] = \frac{1}{Z_c + R_0} [e(t) - \rho_{\mathsf{L}} e(t - 2\theta)]$$
(97)

Il apparaît que l'intégrale de Laplace (95) est surabondante, car sous l'hypothèse de charges réelles, la variable symbolique est absente des expressions de ρ_0 et ρ_L . Sinon, en dehors de cette hypothèse particulièrement simple, le calcul de E(p) est incontournable, tel sera le cas en § 5.3.5.

5.3.3 Réponse transitoire d'une ligne ouverte connectée sur une source adaptée

Formulation analytique

Les paramètres de charge aux deux extrémités de la ligne prennent pour valeurs :

$$Z_0 = Z_c$$
 et $Z_L \rightarrow \infty$

Le calcul des coefficients de réflexion tiré de la formule (66) définie en § 3.3.1 donne par conséquent pour ρ_0 et ρ_L :

$$\rho_0 = 0$$
 et $\rho_L = 1$

Puisque $\rho_0 = 0$, seul le premier terme de la série (96) intervient dans la poursuite du calcul. L'expression de i (0, t) se résume donc à l'unique fonction $i_0(t)$.

Si l'on admet que la source de fem délivre un échelon de tension d'amplitude E_0 , la fonction $e_0(t)$ prend pour forme analytique :

$$e_0(t) = E_0 \gamma(t) \tag{98}$$

Dans cette formule figure la fonction échelon telle que $\gamma(t) = 0$ pour t < 0 et $\gamma(t) = 1$ pour $t \ge 0$.

La réponse transitoire prend alors pour expression :

$$i(0,t) = \frac{E_0}{2Z_c} [\gamma(t) - \gamma(t-2\theta)]$$

relation que l'on peut également écrire en faisant apparaitre la fonction impulsion $w(2\theta, t)$ telle que $w(2\theta, t) = 1$, quand $0 \le t \le 0$ et w (20, t) = 0 à l'extérieur de cet intervalle, d'où :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} w(2\theta, t)$$

Le symbole w est en relation avec l'appellation de « fenêtre temporelle » réduite à « window ».

Interprétation physique

D'un point de vue phénoménologique, ce résultat signifie qu'à l'apparition de l'échelon, en t = 0, la source propage dans la ligne un front d'onde de courant d'amplitude $E_0/2Z_c$. À l'instant $t = \theta$, le courant parvient à l'extrémité ouverte de la ligne. Sachant que $i(L_0, t) = 0$ pour toute valeur de t, l'extrémité ouverte renvoie vers la source un front d'onde d'amplitude strictement opposée au front incident, soit $-E_0/2Z_c$ À l'instant $t=2\theta$, le front d'onde réfléchi parvient sur la source dotée d'une impédance interne adaptée, le front réfléchi ne peut donc être renvoyé vers la charge d'extrémité et i(0, t) = 0 pour $t > 2\theta$. Il s'agit donc bien d'une impulsion d'amplitude $E_0/2Z_c$ et du durée 20.

5.3.4 Réponse transitoire d'une ligne ouverte connectée à une source désadaptée

Deux configurations seront envisagées suivant que la résistance interne R_0 de la source est supérieure ou inférieure à l'impédance caractéristique $Z_{\rm c}$ de la ligne. La source de fem sera constituée de la fonction échelon (98).

Premier cas : $R_0 = 3Z_c$

Dans ce cas, le coefficient de réflexion présenté par la source prend pour valeur $\rho_0 = 0.5$. Pour faciliter la représentation graphique, on adopte une variable temps réduite t_r et une variable d'amplitude réduite i_r (0, t_r) telles que définies ci-dessous :

$$t_{\rm r} = \frac{t}{\theta} \,\,{\rm et}\,\,i_{\rm r}\,\,(0,t_{\rm r}) = \frac{Z_{\rm c}}{E_0}\,i\,(0,t_{\rm r})$$
 (99)

La variable t_r est ainsi rapportée au temps de propagation en ligne θ et l'amplitude réduite du courant normalisée sur la valeur E_0/Z_c .

La figure 11 reproduit la simulation de l'expression (96) dans

l'intervalle de temps $-4 \leq t_r \leq 16$.

La simulation montre que l'amplitude crête du courant à l'entrée de la ligne est concordante avec la valeur $I_{\rm maxi}$ = $E_0/4 Z_c$. L'amplitude obtenue vient de la combinaison de la résistance interne de la source et de l'impédance d'entrée de la ligne $Z_{\rm E}$, car $Z_{\rm E}$ est confondue avec $Z_{\rm c}$ tant que $t < 2\theta$. Ensuite, la réponse pré-sente une succession d'impulsions de durée individuelle 2 θ entachées d'une réduction d'amplitude fixée par le terme $(\rho_0)^n$ figurant dans l'équation (96). C'est un phénomène d'amortissement engendré par la dissipation d'énergie thermique dans la résistance interne de la source.

Second cas : R₀ = 0,33Z_c

Sous cette résistance interne, le coefficient de réflexion de la source prend la valeur négative, $\rho_0 = -0.5$. La simulation de la réponse déterminée suivant les prescriptions de l'équation (96) est reproduite sur la figure 12. Les variables réduites de temps et

Parution : février 2014 - Ce document a ete delivre pour le compte de 7200039662 - ens paris saclay // 195.221.160.4



Par contre, s'il s'agit d'une source de fem pure $Z_0 = 0$ et consécutivement $\rho_0 = -1$, la réponse de la ligne prend pour description analytique :

continue.

$$i(0,t) = \frac{E_0}{Z_c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w (2\theta, t-2n\theta)$$

Le régime entretenu de la ligne soumise à l'échelon de tension d'amplitude E_0 est dans ce cas particulier illustré par la solution

quasi statique, c'est-à-dire la réponse procurée par la ligne lorsque

 $t \rightarrow \infty$. On se rend compte que pour les configurations d'impédance interne a) et b) de la source telles que simulées précédem-

ment, $i(0, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Ce résultat s'accorde donc avec le comportement de la ligne alimentée par une source de tension

Lien avec les solutions du régime entretenu

On trouve un signal constitué d'impulsions d'amplitude E_0/Zc et de polarités alternées sous la période 20. La solution ainsi présentée ne converge pas vers le régime entretenu, car :

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow i (0, t) \rightarrow indéterminé$$

L'inconsistance physique du régime entretenu s'explique par le comportement de la solution i(0, t) formulée au-dessus, la présence du terme $(-1)^n$ exclut la convergence de la série, nous dirons qu'elle est absolument non convergente.

Pour dissocier le régime transitoire du régime entretenu, exprimons la réponse symbolique sous la forme suivante :

$$I(0, t) = \frac{E_0}{Z_c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W(2\theta, p) e^{-2n\alpha L_0} e^{-2n\theta p}$$

Dans cette relation, $W(2\theta, p)$ représente la transformée de Laplace de la fonction impulsion et α la constante d'atténuation de la ligne. Pour simplifier, nous admettons α indépendante de la fréquence et par voie de conséquence indépendante de la variable symbolique *p*.

Après détermination de la transformée de Laplace inverse, i(0, t) s'exprime :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{Z_c} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-2\alpha L_0})^n w (2\theta, t - 2n\theta)$$

La série ainsi présentée montre que dans l'intervalle de temps $2(n-1)\theta \le t < 2n\theta$, l'amplitude prend pour valeur

 $i(0, t) = (E_0/Z_c)(-e^{-2\alpha L_0})^n$. En conséquence, $t \to \infty$ équivaut à poser $n \to \infty$. Sachant que l'atténuation linéique représente une quantité réelle et positive, le terme général de la série converge, car prenant une valeur nulle quand $t \to \infty$. Sachant, qu'il s'agit d'impulsions de durées 20, il en va de même pour i(0, t).

La démonstration prouve que la solution du régime entretenu de la ligne dissipative soumise à l'échelon de fem ne peut converger que vers une amplitude nulle.

5.3.5 Réponse d'une ligne connectée sur une impédance

Ce paragraphe sera consacré à l'analyse phénoménologique d'une ligne soumise à un échelon de fem $e_0(t) = E_0\gamma(t)$, et connectée en extrémité sur une impédance Z_L . L'impédance est constituée de la composition série d'une résisance R_L et d'une inductance L_L .





Figure 12 – Réponse transitoire d'une ligne ouverte en extrémité et connectée à une source de fem délivrant un échelon de tension d'amplitude E_0 et de résistance interne $R_0 = 0.33Z_c$

d'amplitude adoptent comme précédemment les critères de l'équation (99).

On vérifie que l'amplitude crête du courant prend pour valeur $I_{maxi} = E_0/1,33 Z_c$. Le signal résultant montre que le signe négatif du coefficient de réflexion a pour effet d'alterner la polarité des réflexions successives. Le signal est donc assimilable à une oscillation amortie.

Cette disposition donne lieu à un coefficient de réflexion ρ_L symbolique, car la forme complexe de l'impédance $Z_L = R_L + jL_L\omega$ génère pour expression symbolique $Z_L = R_L + L_Lp$. Il est toutefois bon de rappeler que l'usage de la conversion $j\omega = p$ suppose que Z_L ne contienne pas préalablement de l'énergie, ce qui est le cas ici.

On ajoute l'hypothèse simplificatrice que l'impédance interne de la source est adaptée et qu'elle satisfait par conséquent la condition $Z_0 = Zc$. La réponse transitoire symbolique I(0, p) se résume donc au premier terme de la série (94) :

$$I(0, p) = \frac{1}{2Z_c} \frac{E_0}{p} (1 - \rho_L e^{-2\theta p}) \text{ où } \rho_L = \frac{R_L + L_L p - Z_c}{R_L + L_L p + Z_c}$$

On trouve dans le membre de gauche la transformée de Laplace de la fem $E(p) = E_0/p$ et dans le membre de droite le coefficient de réflexion symbolique joint à Z_L .

Le calcul de la transformée inverse de Laplace donne directement la réponse transitoire i(0, t) formulée ci-dessous :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} [\gamma(t) - \gamma(t - 2\theta)] + \frac{E_0}{Z_c + R_L} \left(1 - e^{-\frac{t - 2\theta}{\tau}}\right) \gamma(t - 2\theta)$$
(100)

Dans cette relation figure la constante de temps τ déterminée par le rapport :

$$\tau = \frac{L_{\rm L}}{Z_c + R_{\rm L}}$$

L'appel d'un exemple numérique devrait faciliter l'analyse des différents constituants de la relation (100).

Exemple numérique

La résistance $R_{\rm L}$ est telle que $R_{\rm L} = 0.1Z_{\rm c}$ et la valeur de l'inductance $L_{\rm L}$ est ajustée pour que la constante de temps τ respecte la condition $\tau = 3\theta$, où le paramètre θ représente le temps de propagation en ligne.

Comme nous l'avions pratiqué précédemment, la représentation graphique de *i* (0, *t*) s'adresse aux variables réduites de temps et d'amplitude établies selon les conventions (99). La figure **13** reproduit l'évolution de *i*_r (0, *t*_r) dans l'intervalle de temps *t*_r [-4 + 30].

La simulation révèle deux comportements bien distincts. En **1** (figure **13**) la présence d'une impulsion de durée 20 et d'amplitude $E_0/2Z_c$ est parfaitement concordante avec le premier terme de l'équation (100), car dans l'intervalle de temps [0 20], la ligne réagit comme une structure de dimension infinie. À l'instant immédiatement supérieur à 20, on observe que l'extrémité réagit de façon similaire à une ligne ouverte. Ce comportement est tout à fait logique, car la dualité temps fréquence incite à dire qu'aux transitions brutales et rapide δt de la variable temps, correspondent des fréquences très importantes de Z_L . Ainsi, en $t = 20 + \delta t$, l'observateur localisé en entrée de ligne reçoit temporairement la réponse d'une ligne ouverte.

Aux instants $t > 2\theta + \delta t$, l'observateur assiste à l'accroissement du courant selon une loi guidée par le mécanisme d'auto-induction imposé par la constante de temps τ définie plus haut. Il est évident qu'aux durées infinement grandes, le courant *i* (0, *t*) prend une amplitude asymptotique fixée par les conditions du régime statique, soit :

$$t \rightarrow \infty i (0, t) \rightarrow E_0 / (Z_c + R_l)$$

En présence d'une source d'impédance interne désadaptée, *i* (0, *t*) serait constituée de l'enchaînement de réflexions multiples pondérées par la quantité symbolique ($\rho_0 \rho_L$)^{*n*}. Dans ce cas, le calcul analytique de la transformée de Laplace inverse n'est plus envisageable, il faut recourir aux transformées de Fourier numériques.



Figure 13 – Réponse d'une ligne connectée sur une source adaptée délivrant un échelon de fem et chargée par une impédance réactive

5.3.6 Transitoires accompagnant la commutation d'une source de signaux sinusoïdaux

Problème de la commutation d'une source de signaux sinusoïdaux

Quand une ligne est soumise à une source de signaux harmoniques, l'instant t = 0 correspond à la commutation de la source sur la ligne, la fonction $e_0(t)$ prend alors pour forme :

$$e_0(t) = E_{0m} \sin(\omega t) \gamma(t)$$
(101)

expression dans laquelle on retrouve la fonction échelon définie plus haut par l'équation (98). La résolution rigoureuse de la théorie des lignes devrait donc considérer la source établie par la formule (101) et non l'expression (47) faisant abstraction de $\gamma(t)$ comme tel était le cas du § 3.1.

Le courant transitoire en entrée de ligne i(0, t) est donc déterminé par les relations (96) et (97) sous l'hypothèse évidemment préalable d'impédances Z_0 et Z_L purement réelles.

En guise d'illustration, trois exemples reprenant le cas de la ligne ouverte en extrémité permettront de dissocier régimes transitoires et entretenus. De plus, selon que l'impédance interne de la source de fem est adaptée ou nulle, deux options dimensionnelles L_0 seront explorées afin que la ligne entre ou non en résonance.

Les signaux simulés seront présentés sur une échelle de temps relative rapportée cette fois à la période T du signal sinusoïdal. L'échelle relative d'amplitude sera comme précédemment rapportée au courant E_{0m}/Z_c , soit :

$$t_r = \frac{t}{T}$$
 où $T = \frac{1}{f}$ et i_r (0, t_r) = $\frac{Z_c}{E_{0m}}i(0,t)$ (102)

Exemple 1 : ligne ouverte, source adaptée $\rho_0=0$, dimension L_0 quelconque

Il sera plus simple dans la poursuite des calculs de raisonner sur la fonction harmonique complexe, soit pour la source de fem considérée présentement :

$$e_0(t) = E_0 e^{j\omega t} \gamma(t)$$

Nous rappelons que E_0 correspond par convention à l'amplitude efficace $E_0=E_{0m}/\sqrt{2}$.

Dans ce contexte, la réponse transitoire complexe de la ligne alimentée par une source adaptée s'exprimera comme suit :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} [\gamma(t)e^{j\omega t} - \gamma(t - 2\theta)e^{j\omega(t - 2\theta)}]$$

Relation que l'on présentera autrement en faisant apparaître la fonction impulsion $w(2\theta, t)$ introduite au § 5.3.3 :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} e^{j\omega t} w(2\theta, t) + \frac{E_0}{2Z_c} (1 - e^{-j2\omega\theta}) e^{j\omega t} \gamma(t - 2\theta)$$

L'analyse de cette formule est intéressante car elle révèle trois séquences bien distinctes de la réponse. En **1** (figure **14**), pour t < 0, le courant en entrée de ligne est strictement nul, i(0, t) = 0.

En **2** (figure **14**), pour $0 \le t \le 2\theta$, le courant prend pour forme complexe :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{2Z_c} e^{j\omega t}$$

En **3** (figure **14**), pour $t > 2\theta$, la relation établie précédemment donne pour fonction complexe :

$$i(0,t) = \frac{E_0}{2Z_c} (1 - e^{-j2\omega\theta}) e^{j\omega t}$$

À l'aide des règles édifiées au § 2.1.2 on trouve pour expression du signal i(0, t):

$$i(0, t) = \frac{E_{0m}}{2Z_c} w(2\theta, t) \sin(\omega t) + \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin(kL_0) \cos(\omega t - kL_0) \gamma(t - 2\theta)$$
 (103)

Dans cette formule intégrant le lien $kL_0 = \omega \theta$, on se rend compte que l'amplitude de la fonction échelon figurant dans le second terme n'est autre que l'expression (55) de la solution en régime entretenu, formulée antérieurement en § 3.1.2.

ll est alors évident que le comportement asymptotique de l'équation (103) quand $t \rightarrow \infty$ évolue vers la solution du régime entretenu (55).

La simulation de la figure **14** est établie pour une ligne de dimension telle que θ =1,125 *T*, c'est-à-dire non résonante.

En trait pointillé figure la solution du régime entretenu donnée par l'équation (55). Le trait continu relate le tracé de la solution complète établie en (103). Sur le graphe (figure **14**) ont été marquées les séquences **1**, **2** et **3** discutées précédemment. On note en **3** la parfaite concordance entre la solution du régime entretenu et le comportement asymptotique de l'équation (103).

Exemple 2: ligne ouverte, source de fem pure $\rho_0=-1$, dimension L_0 quelconque

On retrouve dans ce deuxième exemple l'indétermination des valeurs asymptotiques de *i* (0, *t*) évoquée au § 5.3.1, car $\rho_0 = -1$ et $\rho_L = +1$. Pour étayer le raisonnement, exprimons la forme complexe de *i* (0, *t*) aux temps *t* contenus dans l'intervalle $2(N-1)\theta \le t < 2N\theta$ où *N* représente un entier positif :

$$i(0, t) = \frac{E_0}{Z_c} e^{-2N\alpha L_0} w(2\theta, t - 2N\theta) e^{j\omega t} + \dots$$

$$\dots \frac{E_0}{Z_c} (1 - e^{-2\alpha L_0} e^{-j2\omega \theta}) e^{-j\omega t} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-2n\alpha L_0} e^{-j2n\omega \theta} \gamma(t - 2n\theta)$$
(104)

Dans la formule (104) figure la constante d'atténuation de la ligne assortie de l'invariance de α avec la fréquence des signaux.

Pour des durées infiniment grandes, cela équivaut à faire tendre *N* vers l'infini, soit :

$$t \to \infty \Rightarrow N \to \infty$$

Sous ces conditions, le premier terme du second membre de l'expression (104) tend vers zéro, alors que le second terme adopte le comportement d'une série absolument convergente prenant pour valeur asymptotique :

$$N \to \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-2n\alpha L_0} e^{-j2n\omega \theta} \gamma(t-2n\theta) = \frac{1}{1+e^{-2\alpha L_0} e^{-j2\omega \theta}} \gamma(t)$$

La forme complexe de i(0, t) prend donc pour expression :

$$t \to \infty \Longrightarrow i(0, t) \to \frac{E_0}{Z_c} \frac{1 - e^{-2\alpha L_0} e^{-j2\omega \theta}}{1 + e^{-2\alpha L_0} e^{-j2\omega \theta}} e^{-2j\omega t} \gamma(t)$$

Relation que l'on peut écrire sous une formule plus compacte utilisant la notation tangente hyperbolique et le lien $kL_0 = \omega \theta$, soit :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0, t) \to \frac{E_0}{Z_c} \tanh[(\alpha + jk)L_0]e^{-j\omega t}\gamma(t)$$
 (105)

S'il est admis que la fréquence est suffisamment élevée pour satisfaire la condition $k >> \alpha$, l'expression (105) se simplifie pour donner la relation :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0, t) \to j \frac{E_0}{Z_c} \tan (kL_0) e^{-j\omega t} \gamma(t)$$
 (106)

Convertie en signal sinusoïdal, i(0, t) prend finalement l'expression analytique (107) :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0, t) \to i_e(0, t) = \frac{E_{0m}}{Z_c} \tan(kL_0) \cos(\omega t) \gamma(t)$$
 (107)

Hormis la présence de la fonction échelon, la formule concorde parfaitement avec la solution du régime entretenu donné par l'équation (48) figurant au § 3.1.1.

La simulation reproduite sur la figure **15** a été obtenue avec une ligne sans perte $\alpha = 0$, et restreinte à six itérations, N = 5, selon le calcul de *i* (0, *t*) par les relations (96) et (97), soit :

$$i(0, t) = \sum_{n=0}^{b} (-1)^n i_0 (t - 2n\theta)$$
(108)

La fonction auxiliaire $i_0(t)$ adopte ici pour expression :

$$i_0(t) = \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin(\omega t) \gamma(t) - \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin[\omega(t-2\theta)] \gamma(t-2\theta)$$
(109)

La longueur de la ligne L_0 choisie hors condition de résonance est telle que θ = 1,85 T.

La courbe portée en traits pointillés (figure **15**) représente la solution $i_e(0, t)$ établie pour le régime entretenu par l'équation (48), la courbe en trait continu (figure **15**) reproduit l'évolution de i(0, t) calculé suivant les relations (108) et (109). La progression des réflexions transitoires est transcrite par les barres verticales colorées tracées en trait continu pour la première séquence n = 0, en trait pointillé pour les cinq séquences ultérieures (figure **15**).

Sachant que $\alpha = 0$, $\rho_0 = -1$ et $\rho_L = +1$, l'extinction du régime transitoire est impossible, en conséquence, quand $t \rightarrow \infty$ on peut affirmer que *i* (0, *t*) diffère de *i*_e (0, *t*).

Une seconde simulation concerne la ligne ouverte mais amortie par l'impédance interne de la source de fem sinusoïdale. La résistance interne de la source prend pour valeur $Z_0 = Z_c/4$, c'est-à-dire un coefficient de réflexion négatif tel que $\rho_0 = -0.6$.

La figure **16** rassemble les signaux produits par la simulation, en trait pointillé figure la solution en régime entretenu i_e (0, t) donnée par l'expression ci-dessous :

$$i_e(0, t) = 1,29 \frac{E_{0m}}{Z_c} \sin(\omega t - 1,23)$$
 (110)

En trait continu figure la solution complète arrêtée comme précédemment à six itérations et selon le calcul direct donné par l'expression (111) :

$$i_e(0, t) = 0.8 \sum_{n=0}^{5} (-0, 6)^n i_0 (t - 2n\theta)$$
 (111)

La restitution graphique (figure **16**) est sans équivoque, car on observe dès la sixième itération la convergence de i(0, t) vers $i_e(0, t)$.

En règle générale, la contribution des phénomènes transitoires tels qu'illustrés dans cette section n'offre pas un grand intérêt pratique, car dans l'usage rationnel une ligne fonctionne en permanence sur le régime entretenu. Néanmoins, les raisonnements peuvent être étendus à d'autres configurations de lignes soumises à des commutations récurrentes ou aléatoires de leur impédance de charge. Les perturbations électromagnétiques engendrées par les convertisseurs statiques d'énergie électrique appartiennent à cette problématique. Le bruit rencontré sur les réseaux de transport d'énergie possède également pour origine physique ces phénomènes de commutation d'impédance. Le bruit est engendré par la variabilité aléatoire des conditions aux limites exprimées dans les équations (38) formulées au § 2.3.3. Les calculs de transmission sur ligne d'énergie par courants porteurs peuvent alors s'inspirer de cette approche.

Exemple 3 : ligne ouverte de dimension L_0 accordée sur la résonance de rang r = 3

Revenons sur l'expression (59) du paragraphe 3.1.3 restituant la valeur de la fréquence f_r de la résonance de rang r telle que rappelée ci-dessous :

$$f_r = (2r+1)\frac{V_0}{4L_0}$$
 ou $T_r = \frac{\theta}{0.25+0.5r}$ (112)

La formule portée à droite de (112) exprime alors le lien entre le temps de propagation en ligne θ et la période T_r de la source de fem sinusoïdale connectée sur la ligne. On observe que la résonance de rang 3, soit r = 3, mène à la relation $\theta = 1,75 T_r$, c'est-à-dire la condition de résonance la plus proche de $\theta = 1,85 T_r$ adoptée dans le déroulement du deuxième exemple.

Regardons immédiatement la solution du régime entretenu tenant compte de la constante d'atténuation α . Sachant qu'en condition de résonance, le produit kL_0 prend pour valeur :

$$r = 3 \rightarrow kL_0 = 3,5\pi$$

La solution complexe (105) du courant i(0, t) va donc suivre le comportement asymptotique :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0, t) \to \frac{E_0}{Z_c} \frac{1}{\tanh(\alpha L_0)} e^{-j\omega t} \gamma(t)$$
 (113)

La relation (114) transposée en signal sinusoïdal s'exprime alors :

$$t \to \infty \Rightarrow i(0,t) \to \frac{E_{0m}}{Z_{c}} \frac{1}{\tanh(\alpha L_{0})} \sin(\omega t) \gamma(t)$$

Le courant en entrée de ligne est donc strictement l'homothétique de la fem. Pour une ligne sans pertes, la constante d'atténuation est strictement nulle et l'on obtient $\alpha = 0 \Rightarrow i(0, t) \rightarrow \infty$. Ce résultat rejoint pas conséguent la singularité discutée au 3.1.3.

La figure **17** comporte les signaux simulés en entrée de ligne stimulée par la commutation de la source sinusoïdale. Le trait continu reproduit le signal obtenu en présence d'une source de fem idéale, soit $Z_0 = 0$, le trait pointillé donne *i* (0, *t*) pour une source prenant pour résistance interne $Z_0 = Z_c/4$. Les échelles de temps et d'amplitude adoptent les grandeurs relatives t_r et i_r (0, t_r) considérées plus haut.

La montée en amplitude de la réponse non amortie s'explique aisément par l'accumulation synchrone des courants transitoires formés par la relation (108) rappelée ci-dessous :

$$i(0, t) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n i_0 (t - 2n\theta)$$
(114)

En effet, la fonction auxiliaire $i_0(t)$ s'exprime présentement :

$$i_{0}(t) = \frac{E_{0m}}{Z_{c}} [\gamma(t) + \gamma(t - 2\theta)] \sin(\omega t)$$
(115)

En conséquence, si I_n représente l'amplitude crête de i(0, t) lors de l'itération de rang n, on montre aisément que la combinaison des formules (114) et (115) mène à la relation de récurrence ci-dessous :

$$n = 0 \rightarrow I_0 = 1, n = 1 \rightarrow I_1 = 3..., n = N \rightarrow I_N = 1 + 2N$$
 (116)

Selon ce processus, quand $N \rightarrow \infty$, on obtient $I_N \rightarrow \infty$, résultat tout à fait concordant avec la solution du régime entretenu établie en (113) pour $\alpha \rightarrow 0$.

Le signal en trait pointillé (figure **17**) exprime la réponse de la ligne en condition de résonance, mais amortie par la résistance interne de la source. Le calcul réduit à l'itération de six termes est accompli suivant l'expression portée ci-dessous :

$$i(0,t) = 0.8 \frac{E_{0m}}{Z_c} \sum_{n=0}^{5} (-0,6)^n i_0 (t - 2n\theta)$$
(117)

La dimension de la ligne est accordée sur la résonance de rang 3, donc $\theta = 1,75$ *T*, hormis la progression de l'amplitude, le signal reproduit un rigoureux synchronisme avec le calcul pratiqué sans amortissement. On vérifie qu'à l'itération de rang n = 3, le signal simulé est pratiquement confondu avec la solution du régime entretenu i_e (0, *t*) donnée par la formule :

$$i_e(0,t) = 4\frac{E_{0m}}{Z_c}\sin(\omega t)$$
 (118)



Figure 14 – Simulation de la réponse transitoire d'une ligne ouverte soumise à une source de fem sinusoïdale d'impédance interne adaptée







Figure 16 – Simulation d'une ligne ouverte amortie par l'impédance interne d'une source délivrant une fem sinusoïdale, convergence vers la solution du régime entretenu



Figure 17 – Simulation des solutions générales i (0, t) d'une ligne ouverte soumise à une fem sinusoïdale sous la condition de résonance de rang r = 3

5.4 Formalisme des paramètres S

Ce paragraphe introduit le concept de paramètre S bien connu des utilisateurs d'analyseurs de réseaux. Il est évident que les lignes de transmissions font fréquemment l'objet de ce type de mesure, aussi était-il important de rappeler la définition des paramètres S. Leur lien avec la théorie des lignes de transmission sera ensuite établi pour aboutir aux expressions formulant les coefficient *sij* de la **matrice répartition** d'une ligne. Le paragraphe 5.4.4 venant clore cette section sera consacré à la présentation de trois exemples.

5.4.1 Définition des paramètres S

Considérons le quadripôle tel que décrit à la figure 18.

De part et d'autre des ports **1** et **2** (figure **18**) prennent place deux sources de tensions sinusoïdales de fem E_1 et E_2 possédant la même impédance interne Z_r , appelée par la suite impédance de référence. Le fonctionnement du circuit ainsi configuré engendre sur le **Port** – **1** le courant I_1 , la tension V_1 et sur le **Port** – **2**, le courant I_2 , la tension V_2 . L'examen du schéma de la figure **18** permet de former les équations suivantes :

$$E_1 = a_1 = V_1 + Z_r I_1 \tag{119}$$

$$E_2 = a_2 = V_2 + Z_r I_2 \tag{120}$$

Dans le formalisme des paramètres *S*, la fem E_1 s'identifie ici à l'onde entrante dans le **Port – 1** et prend pour symbole a_1 , la fem E_2 est l'onde entrante du **Port – 2** avec pour symbole a_2 . Inversement, au **Port – 1** va correspondre une onde sortante b_1 et au **Port – 2** une onde sortante b_2 répondant aux définitions rapportées ci-dessous :

$$b_1 = V_1 - Z_r I_1 \tag{121}$$

$$b_2 = V_2 - Z_r I_2 \tag{122}$$

L'orientation des flèches comme positionnées sur la figure **18** correspond aux sens de progression des ondes.

La matrice répartition (S) encore appelée en anglais, scattering matrix, relie le vecteur onde entrante (A) au vecteur onde sortante (B) par le produit (123) :

$$(B) = (S) (A) \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
(123)





5.4.2 Lien des paramètres *S* avec les mesures délivrées par un analyseur de réseaux

Lors de mesures pratiquées à l'analyseur de réseau, seule subsiste au **Port – 2** (figure **18**) l'impédance Z_r , donc $E_2 = 0$, on déduit immédiatement des équations précédentes que $a_2 = 0$. L'appareil va donc fournir les coefficients s_{11} et s_{21} produits respectivement par les rapports :

$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1}$$
 et $s_{21} = \frac{b_2}{a_1}$ avec $E_2 = 0$ (124)

Inversement, on détermine s_{12} et s_{22} en permutant la source et la charge, en règle générale la symétrie du quadripôle implique celle des coefficients $s_{11} = s_{22}$ et $s_{21} = s_{12}$.

5.4.3 Calcul de la matrice S d'une ligne de transmission

Revenons sur le schéma de la ligne de transmission présentée en figure **7**, les conventions de notations seront aménagées en vue de les adapter au contexte du quadripôle de la figure **18**, d'où :

$$E_0 = E_1, Z_0 = Z_r, Z_L = Z_r, E_2 = 0$$

I (0) = I₁, V (0) = V₁, I (L₀) = -I₂, V (L₀) = V₂

Après usage de la formule de l'impédance d'entrée Z_E donnée par la relation (89), on parvient sans difficulté aux calculs des ondes a_1 et b_1 telles que formulées en (119) et (121). Le paramètre s_{11} de la ligne fixé par le rapport (124) prend alors pour expression :

$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_E - Z_r}{Z_E + Z_r}$$
(125)

Quant au calcul du paramètre s_{21} , on procède aux combinaisons de l'impédance d'entrée Z_E et des paramètres ℓ_{ij} de la matrice chaîne, ces derniers étaient déterminés au § 5.2.2, soit :

$$s_{21} = \frac{(\ell_{11}Z_{\rm E} + \ell_{12}) + (\ell_{21}Z_{\rm E} + \ell_{22})Z_{\rm r}}{Z_{\rm E} + Z_{\rm r}}$$
(126)

La ligne de transmission possédant les propriétés d'un quadripôle symétrique, on pose $s_{11} = s_{22}$ et $s_{21} = s_{12}$.

5.4.4 Calcul des paramètres s_{ij} fondé sur trois exemples numériques

On considère successivement le cas des paramètres *sij* d'une ligne ayant une impédance caractéristique Z_c rigoureusement égale à l'impédance de référence Z_r , puis une ligne où Z_c diffère sensiblement, puis manifestement de Z_r .

Calcul des s_{11} et s_{21} quand $Z_c = Z_r$

Quand l'impédance caractéristique de la ligne Z_c est rigoureusement égale à l'impédance de référence Z_r , le calcul des coefficients se simplifie considérablement, les relations (125) et (126) prennent pour valeurs :

$$s_{11} = 0$$
 et $s_{21} = e^{-jkL_0} \rightarrow |s_{21}| = 1$

L'adaptation rigoureuse élimine l'onde sortante b_1 du **Port – 1**, alors que l'onde sortante b_2 du **Port – 2** prend une amplitude absolue strictement égale à l'onde entrante a_1 dans le **Port – 1**. Seul subsiste le déphasage kL_0 engendré par le retard de propagation en ligne.

Calcul des s_{11} et s_{21} quand $Z_c \cong Z_r$

La simulation numérique des relations (125) et (126) pratiquée pour une ligne d'impédance caractéristique très proche de l'impédance de référence impose l'adoption pour Z_r la valeur normalisée



Figure 19 – Simulation des paramètres s_{11} et s_{21} de lignes prenant pour impédances caractéristiques $Z_c = 54 \Omega$ et $Z_c = 75 \Omega$

de 50 Ω et $Z_c = 54 \Omega$. La dimension longitudinale de la ligne est fixée à $L_0 = 1$ m et la vitesse de propagation à $v_0 = (2/3)c$.

Les courbes tracées sur la figure **19** et présentées en couleur bleue par un trait épais montrent les variations des amplitudes absolues de s_{11} et s_{21} . La gamme de fréquence s'étend de 1 MHz à 1 GHz sous une graduation horizontale logarithmique, alors que l'axe vertical portant les valeurs numériques de $|s_{11}|$ et $|s_{21}|$ demeure en graduation linéaire.

On observe que le paramètre $|s_{21}|$ est pratiquement invariant avec la fréquence et très proche de l'unité alors que $|s_{11}|$ manifeste deux comportements bien distincts.

Au-dessous de 50 MHz, $|s_{11}|$ croît continûment avec la fréquence pour atteindre un maximum de 0,08. Au-dessus de 50 MHz, on enregistre des fluctuations d'amplitude périodiques passant alternativement d'une valeur nulle à 0,08 (figure **19**). De plus, un calcul montre qu'à la fréquence de 50 MHz délimitant ces deux comportements, la longueur d'onde dans la ligne est égale à $\lambda = 4 m$, soit $\lambda = 4L_0$, la fréquence de 50 MHz coïncide donc avec la fréquence de résonance fondamentale de la ligne.

Il est évident que dans ce contexte, l'équivalent d'une ligne ouverte ou court-circuitée n'a qu'une appréciation relative rapportée à l'impédance caractéristique. Dire que la ligne connectée sur Z_r normalisée à 50 Ω suit le comportement d'une ligne court-circuitée équivaut à admettre que $Z_c \rightarrow \infty$ et $|s_{11}| \rightarrow 1$. De ce constat, on déduit immédiatement que la valeur maximale de 0,08 atteint par $|s_{11}|$ est bien révélatrice du rapport $Z_c/Z_r = 1,08$.

De plus, l'examen des courbes montre que l'espacement en fréquence de zéros consécutifs (ou maximums) se situe exactement à 100 MHz, c'est-à-dire l'écart déterminé par deux résonances successives calculées par la relation (59) au § 3.1.3, soit $\Delta f = f_{r+1} - f_r = v_0/2L_0 = 100$ MHz. La restitution graphique du paramètre $|s_{11}|$ est donc bien synonyme de l'entretien d'une onde stationnaire partielle, car $|s_{11}| = 0.08 < 1$.

Calcul des s_{11} et s_{21} quand $Z_c = 1,5 Z_r$

La simulation précédente a été répétée en attribuant à la ligne de transmission une impédance caractéristique de valeur numérique $Z_c = 75 \Omega$. Les courbes tracées en rouge et en trait fin (figure **19**) superposées aux précédentes montrent que l'accroissement du rapport Z_c/Z_r ne modifie pas profondément la courbe réstituant s_{11} ,

hormis le maximum dont la valeur passe à 0,38. En revanche, l'examen du paramètre s_{21} fait apparaître des fluctuations d'amplitudes contenues entre une valeur minimale de 0,92 et maximale de 1. D'autre part, on observe que les minimas de s_{21} coïncident avec les maximums de s_{11} et que c'est exactement l'opposé pour les maximas. Ce comportement est donc en relation avec l'onde stationnaire partielle entretenue sous ce fonctionnement, mais aux fluctuations d'amplitudes amplifiées par l'accroissement du rapport Z_c/Z_r .

Finalement, la simulation numérique apporte de solides arguments sur l'usage et la mesure des paramètres S quant à la recherche des propriétés et comportements des paramètres secondaires d'une ligne de transmission.

Nous aurions également pu perfectionner l'analyse par l'insertion des dissipations d'énergie de la ligne afin d'intégrer la contribution de l'atténuation α et de la composante réactive X_c de l'impédance caractéristique discutées au § 4.2.1.

6. Conclusion

Pour compléter cet article consacré aux éléments de théorie des lignes, il paraît intéressant d'énoncer en conclusion quatre problèmes académiques venant étendre et approfondir la portée des formalismes précédents.

Le premier problème concerne le traitement des lignes de transmission reliées à des charges aux comportements non linéaires. Il faut savoir que la difficile question du **fonctionnement non linéaire** peut être assez bien élucidée par le calcul des courants et tensions développés sur une ligne chargée par une diode ou par une résistance variant cycliquement dans le temps. Dans la première configuration, on tente d'évaluer les conditions de résonance de la ligne soumise à des signaux harmoniques. Dans la seconde, on recherche le spectre des courants et tensions de la ligne alimentée par une source de tension continue. Ce problème académique, en apparence simple, est en relation avec les perturbations électromagnétiques produites par des convertisseurs d'énergie sur les réseaux d'énergie. Le problème intéresse également le comportement des diodes de protection des circuits intégrés exposées à des interférences moutes par des signaux d'ultra haute fréquence.

Dans une toute autre perspective, la **propagation des signaux sur des lignes multifilaires constituées de** *N* **conducteurs** rapportés à une référence commune exige une révision des raisonnements classiques suivis dans l'article. Cette fois, le problème s'adresse à *N lignes couplées* auxquelles il faut joindre des vecteurs courants et tensions prenant place dans une équation d'onde matricielle ; équation dont les dimensions s'accordent rigoureusement sur la taille *N*. La résolution fait alors émerger la propagation modale et consécutivement de nouvelles propriétés physiques associées aux lignes couplées.

Le troisième problème, d'un caractère plus formel concerne la résolution des lignes par l'usage de l'impédance d'entrée. Cette méthode peut être encore améliorée par l'adoption d'une transformation homographique aboutissant sur l'abaque de Smith. La conversion graphique du raisonnement, intensément utilisée par les spécialistes des circuits micro-ondes ou plus généralement par les utilisateurs d'analyseurs de réseaux, apporte également un intéressant complément aux approches analytiques usuelles.

Le quatrième problème consiste à **étendre la théorie des lignes au domaine de la propagation des ondes acoustiques**. Selon la nature du support, on fait alors correspondre aux paramètres primaires de la ligne d'autres quantités macroscopiques tributaires des propriétés physiques de ce milieu. Ainsi, selon le cas, on fera appel aux propriétés mécaniques de la matière condensée ou aux propriétés thermodynamiques des fluides. Cette évolution du sujet fortement inspirée des techniques d'analogie électromécanique ouvre incontestablement de nouveaux champs d'applications à la théorie des lignes.

Éléments sur la théorie des lignes de transmission

par Bernard DÉMOULIN

Sources bibliographiques

- [6] METZGER (G.) et VABRE (J.P.). Électronique des impulsions. Tome II Éditions Masson (1970).
- [7] DÉMOULIN (B.). Enseignement élémentaire sur la propagation des ondes. Tome I Cours polycopié de licence, Édition de 2003, Université Lille 1, rubrique publications en ligne (2003) http://www.iemn-telice
- [8] UZAN (J.P.) et LEHOUCQ (R.). Les constantes fondamentales. Éditions Belin, Paris (2005).
- [9] KONÉ (L.), RAZAFFERSON (R.), DÉMOULIN (B.), MOULIN (F.), GAUTHIER (F.) et ZEDDAM (A.). – Analyses et mesures du rayonnement électromagnétique engendré par des com-

À lire également dans nos bases

- DÉMOULIN (B.). Liens physiques des câbles blindés aux réseaux de terre. [D 1 321] Convertisseurs et machines électriques (2010).
- DÉMOULIN (B.) et KONÉ (L.). Mesure de l'atténuation procurée par des blindages. [D 1 325] Convertisseurs et machines électriques (2012).

munications haut débit sur des lignes d'éner-

gie. Annales des télécommunications, vol. 60, nº 9-10, p. 1169-1197, sep.-oct. 2005.

PAUL (C.R.). - Introduction to electromagne-

tic compatibility. Second edition, publisher

d'un électricien. Chapitres, 4, 5, 6, 7 Cours

polycopié de licence, rubrique publications

bres réverbérantes en électromagnétisme. Éditions Hermes Lavoisier, 2010, Handbook

available in English with ISTE, Willey pu-

[11] DÉMOULIN (B.). – Mémoires mathématiques

[12] DÉMOULIN (B.) et BESNIER (P.), - Les cham-

[10]

Willey (2006).

blisher (2011).

en ligne, sept. 2006

http://www.iemn-telice

- SHELKUNOFF (S.A.). The electromagnetic theory of coaxial transmission lines and cylindrical shields. Bell Sytems Technical Journal, p. 533-579, oct. 1934.
- [2] COLLIN (R.E.). Field theory of guided waves. Ed. MacGraw-Hill, New York (1960).
- [3] HARRINGTON (R.F.). Time harmonic electromagnetic fields. Ed. MacGraw-Hill, New York (1961).
- [4] GRIVET (P.). Physique des lignes de hautes fréquences et d'ultra hautes fréquences. Tome I Édition Masson (1969).
- [5] GABILLARD (R.). Vibrations et phénomènes de propagation. Éditions Dunod (1970).
- PACAUD (A.). Circuits électriques linéaires, représentation paramétrique. [E 104] Électronique (2011).
- NEY (M.). Bases de l'électromagnétisme. [E 1 020] Électronique (2004).

Copyright © – Techniques de l'Ingénieur – Tous droits réservés

Professeur émérite Université Lille 1, Groupe Telice de l'IEMN, UMR CNRS 8520



GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre, leurs compléments et mises à jour,**

et bénéficiez des **services inclus.**



- + de 350 000 utilisateurs
 + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- > 15 domaines d'expertise
 - \bigcirc Automatique Robotique
 - Biomédical Pharma
 - Construction et travaux publics
 - Électronique Photonique
 - ⊖ Énergies
 - O Environnement Sécurité
 - ⊖ Génie industriel
 - O Ingénierie des transports
- \bigcirc Innovation
- Matériaux
- Mécanique
- O Mesures Analyses
- O Procédés chimie Bio Agro
- Sciences fondamentales
- Technologies de l'information

Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier, découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com



LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur



Accès illimité aux articles en HTML Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



Téléchargement des articles au format PDF Pour un usage en toute liberté



Consultation sur tous les supports numériques Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles



Questions aux experts* Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



Archives Technologies anciennes et versions antérieures des articles



Articles Découverte La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



Impression à la demande Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



Dictionnaire technique multilingue 45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



Alertes actualisations Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

ILS NOUS FONT CONFIANCE



www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT: Tél.: + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax: +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail: infos.clients@teching.com