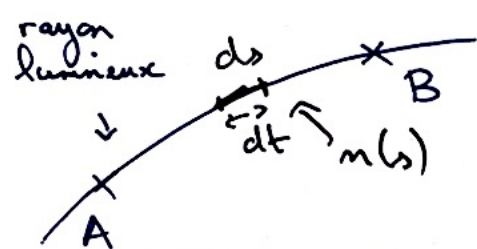


I) Principe de Fermat : $\rightarrow$ Introduction : minimisation du temps de trajet.

1°) Rappels sur le chemin optique :



Vitesse de phase de l'onde :

$$v_p = \frac{c}{n} = \frac{ds}{dt} \quad \left| \begin{array}{l} \text{variation d'abscisse} \\ \text{curviligne par rapport} \\ \text{au temps} \end{array} \right.$$

$$t_{AB} = \int_{AB} dt = \int_{AB} \frac{n ds}{c} \Rightarrow \boxed{t_{AB} = \frac{1}{c} L_{AB}}$$

où $\boxed{L_{AB} = \int_{AB} n ds}$ chemin optique

$\rightarrow$ Interprétation : la lumière parcourt dans le vide pendant t_{AB} ce qu'il a fallu pour parcourir AB dans le milieu d'indice $n(s)$. (Moulin)

2°) Principe de Fermat :

"Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B correspond à une valeur stationnaire (extremale) du chemin optique par rapport aux trajets fictifs allant de A à B"

* minimale ou maximale

$\rightarrow$ On cherche donc à minimiser L_{AB} ou t_{AB} !

maximiser $\rightarrow dL_{AB}, dt_{AB} = 0$

3°) Propagation rectiligne et retour inverse lumière : (BFR)

Pour un milieu homogène d'indice n constant, on a

$$L_{AB} = \int_A^B n ds = n \int_A^B ds. \quad \text{Si } L_{AB} \text{ est stationnaire alors l'intégrale l'est aussi}$$

$\rightarrow$ l'intégrale est minimale si la distance AB est une droite $\Rightarrow \boxed{L_{AB} = AB \times n} \rightarrow$ propagation rectiligne géométrique.

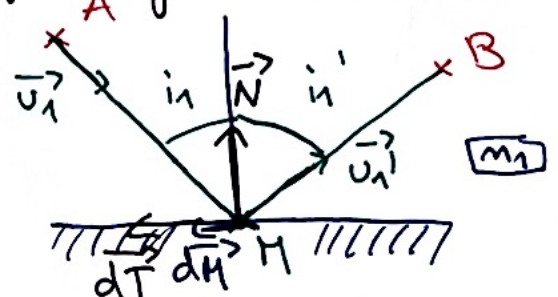
Et il est évident que $\boxed{L_{AB} = L_{BA}} \rightarrow$ loi retour inverse.

II) Loi de Snell Descartes :

(Syst agrég 2007), (BFR)

1°) Loi de la réflexion :

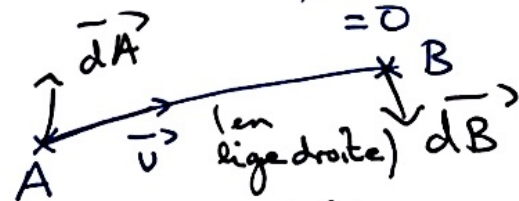
Schéma du cadre de l'étude :



On note $AB = \vec{AB} \cdot \vec{u}$ et $d\vec{A}, d\vec{B}$ des déplacements élémentaires en A et B (Etude préliminaire)

$$\rightarrow dAB = d\vec{AB} \cdot \vec{u} + \vec{AB} \cdot d\vec{u} = d\vec{AB} \cdot \vec{u} + \vec{AB} \cdot \underbrace{d\vec{u}}_{=0}$$

$$\rightarrow dAB = d\vec{AB} \cdot \vec{u} = (d\vec{B} - d\vec{A}) \cdot \vec{u} \quad (1)$$



Retour à l'étude :

$$LAB = LAM + LMB = n_1(AM + MB) \quad \left| \begin{array}{l} \text{propagation rectiligne,} \\ \text{voir avant.} \end{array} \right.$$

A et B sont fixes, et pour tout déplacement M sur la surface on veut $dLAB = 0 \Rightarrow dLAB = n_1[dAM + dMB] = 0$

or d'après (1) $\rightarrow dLAB = n_1[\vec{u}_1 - \vec{u}_2] \cdot d\vec{M} = 0$

$d\vec{M}$ est selon $d\vec{T} \Rightarrow \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \alpha \vec{N} \rightarrow$ même plan d'incidence

$\rightarrow$ Si on projette sur $\vec{T}$ on a $\vec{u}_1 \cdot \vec{T} = \vec{u}_2 \cdot \vec{T} \Rightarrow \sin(i_1) = \sin(i_2)$

2°) Loi de la transmission (sur slide, exemple du nageur)
 analogie

On peut faire le même raisonnement que précédemment mais on peut le voir de façon géométrique avec une analogie :

$$\text{On a } t_{AB} = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} = \frac{\sqrt{x_A^2 + y^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(y_B - y)^2 + x_B^2}}{v_2}$$

On cherche $\frac{dt_{AB}}{dy} = 0$ (Fermat)

$$\hookrightarrow \frac{dt_{AB}}{dy} = \frac{y}{v_1(x_A^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{(y_B - y)}{v_2[(y_B - y)^2 + x_B^2]^{1/2}} = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{dt_{AB}}{dy} = \frac{y}{v_1 AI} - \frac{(y_B - y)}{v_2 IB} = \frac{\sin(i)}{v_1} - \frac{\sin(r)}{v_2} = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\sin(i)}{v_1} = \frac{\sin(r)}{v_2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Pour une onde } v_{1/2} = \frac{c}{n_{1/2}} \\ \rightarrow n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r) \end{array} \right)$$

Jusqu'ici $\rightarrow$ milieu homogène $\rightarrow$ que se passe-t-il si $n \neq \text{cte}$?

III) Propagation milieu inhomogène :

1°) Démonstration équation rayons lumineux

Cette fois on applique le principe de Fermat à un milieu inhomogène :

$$L_{AB} = \int_A^B n(x, y, z) ds \quad \left| \begin{array}{l} \text{On relie } ds \text{ aux différentielles de } \\ x, y, z \\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \times dx = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \times dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{arbitraire} \\ \text{de factoriser} \\ \text{par } dx \end{array} \right.)$$

$$\hookrightarrow L_{AB} = \int_A^B n(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{On cherche } dL_{AB} = 0 \\ \text{On admet la relation} \\ \text{sur le diapo} \\ \text{et on identifie} \end{array} \right.)$$

Ici $f = n(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$

$$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'}$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial y} \times \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{d}{dx} \frac{n y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \\ \frac{\partial n}{\partial z} \times \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{d}{dx} \frac{n z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \end{array} \right| \quad \left(\begin{array}{l} \text{Si on reprend} \\ \text{l'expression} \\ \text{de } ds \\ \text{on a :} \\ (+ y' = \frac{dy}{dx} \dots) \end{array} \right.)$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right)}$$

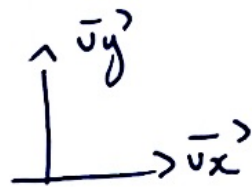
(De même pour x , il suffit de multiplier par dx ou dz)

$$\rightarrow \text{En vectoriel} \rightarrow \boxed{\vec{\text{grad}} n = \frac{d}{ds} (n \vec{u})} \quad \text{où } \vec{u} \text{ vecteur unitaire tangent au rayon}$$

$$\text{et } \vec{u} = \frac{dx}{ds} \vec{u}_x + \frac{dy}{ds} \vec{u}_y + \frac{dz}{ds} \vec{u}_z$$

2°) Application aux mirages :

Cette fois $n = n(y) \rightarrow$ dépend juste de l'altitude



$$L_{AB} = \int_A^B n(y) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B n(y) \sqrt{1 + x'^2} dy$$

$$f = n(y) \sqrt{1 + x'^2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dy} \left(\frac{nx'}{\sqrt{1 + x'^2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{nx'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \text{cte} = n_0 y_0$$

$\downarrow$ On élève au carré

$$\hookrightarrow x' = \pm \frac{n_0}{\sqrt{n^2 - n_0^2}}$$

$$\text{et } n^2 = n_0^2 + \left(\frac{nh^2 - n_0^2}{l - y_0} \right) x(y - y_0)$$

(A partir d'une certaine couche d'altitude l $n_0 \rightarrow nh$)

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} = \pm \frac{n_0}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{\sqrt{y - y_0}} \rightarrow x - x_0 = \pm \frac{2n_0}{\sqrt{a}} \sqrt{y - y_0}$$

$$\rightarrow y = y_0 + \frac{a}{4n_0^2} (x - x_0)^2$$

Parabole qui dépend du signe de a !

de ce qui

3°) Application fibre optique à gradient d'indice : interprète mal les signaux courbes
(que sur slide + animation) $\hookrightarrow$ élargit l'impulsion
(à voir pour l'enlèvement) (saut d'indice $\rightarrow$ ne sort pas tout au même moment)

ouverture : Lagrangien, mécanique analytique, fonctionnelles et principe de moindre action.

Eikonale: $E(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i(\omega t - k_0 S(\vec{r}))}$ fonction eikonale
 $\rightarrow$ Maxwell $\rightarrow$ grad $S = n\vec{v}$

Fermat : 1600-1665 $\rightarrow$ magistrat, mathématicien
Toulouse