

## — Interféromètre de Fabry-Pérot

On s'intéresse à l'interféromètre de Fabry-Pérot constitué de deux lames semi-réfléchissantes parallèles séparées d'une distance  $e$  ( le coefficient de réflexion des lames est voisin de 95% ). Les faces arrières ont subi un traitement anti-reflet de sorte qu'il n'y ait pas d'interférence induite par elles.

Un rayon qui entre entre les deux lames se réfléchit un très grand nombre de fois avant de sortir. A chaque réflexion, une portion  $R$  de l'intensité est réfléchiée et une portion  $(1 - R)$  est transmise ( $R$  est le coefficient de réflexion en intensité). Les rayons qui sortent interfèrent à l'infini ou dans le plan focal d'une lentille.

L'interférence multiple ne peut être constructive que si tous les rayons sont approximativement en phase et ceci d'autant plus que le nombre de rayons est important donc que  $R$  est grand. Les rayons ne sont en phase que pour certains angles  $\theta$  particuliers qui dépendent de  $\lambda$  et de  $e$ .

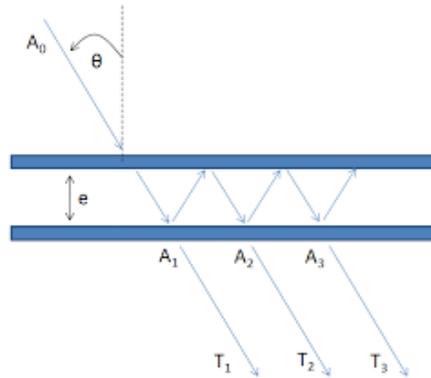


FIGURE 1 – Tracé des rayons à travers un Fabry-Pérot

Nous allons étudier quelques propriétés de cet interféromètre.

1. Déterminez la différence de marche induite  $\delta$  par le système entre 2 rayons consécutifs en fonction de  $e$  et de  $\theta$ .
2. Exprimez l'expression de l'amplitude complexe du rayon  $m$  en fonction  $s_0$ ,  $m$ ,  $R$  et  $\delta$ . Exprimez  $s_0$  en fonction de  $R$  et  $s_S$  l'amplitude du rayon incident (de la source).
3. Déduisez-en l'expression de l'intensité lumineuse totale sur l'écran en fonction de  $I_S$ ,  $R$ ,  $e$  et  $\theta$ .  
Montrez que la transmittance  $T$  en fonction de  $\theta$  s'écrit :

$$T(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi e \cos \theta}{\lambda}\right)}$$

4. Déterminez, pour  $\theta$  donné, les longueurs d'ondes transmises  $\lambda_i$  en fonction de  $\theta$ ,  $\lambda_0$ ,  $e$  et un entier relatif  $m$ .
5. La finesse  $F$  est par définition le rapport entre l'intervalle  $\delta\lambda$  entre deux  $\lambda_i$  successifs pour le même  $\theta$  et la largeur  $\Delta\lambda$  à mi-hauteur d'une raie.  
Montrez que la finesse prend la forme, pour un  $R$  assez grand :

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

6. On considère que la résolution d'un interféromètre est la capacité à discerner deux pics successifs. Il s'agit de l'intervalle de longueurs d'onde à mi-hauteur  $\Delta\lambda$  minimal observable. Donnez une valeur de cette résolution pour  $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$ ,  $\theta = 5^\circ$  et  $R = 95\%$ . Commentez.
7. Expliquez pourquoi toute la lumière incidente ressort du système malgré les miroirs de coefficient  $R$  très élevé.

≡

Correction :

1. On peut vite remarquer que la démonstration est la même que pour un Michelson en lame d'air.

$$\delta = 2e \cos \theta$$

2. L'amplitude du rayon incident vaut  $s_0$ , à chaque réflexion/transmission, son amplitude varie d'un coefficient  $\sqrt{R}$  ou  $\sqrt{1-R}$ , on obtient donc pour le  $m$ -ième rayon,

$$s_m = s_0(\sqrt{1-R})^2(\sqrt{R})^{2m} e^{jm \frac{2\pi\delta}{\lambda}}$$

3. On somme les scalaires de tous les rayons (avec  $m$  très grand) :

$$s_{tot} = \sum_{m=1}^{+\infty} s_0(\sqrt{1-R})^2(\sqrt{R})^{2m} e^{jm \frac{2\pi\delta}{\lambda}} = s_0 \frac{1-R}{1-Re^{j \frac{2\pi\delta}{\lambda}}}$$

L'intensité lumineuse vaut donc :

$$I_{tot} = |s_{tot}|^2 = s_{tot} \overline{s_{tot}} = s_0^2 \frac{(1-R)^2}{1+R(e^{-j\Delta\varphi} - e^{j\Delta\varphi}) + R^2} = s_0^2 \frac{(1-R)^2}{1+2R \cos \Delta\varphi + R^2}$$

La relation de trigo  $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$ , on peut écrire :

$$I_{tot} = s_0^2 \frac{(1-R)^2}{1+2R \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}\right) + R^2}$$

On identifie le carré et on obtient :

$$I_{tot} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 - 4R \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

L'expression de la transmittance  $T = I_{tot}/I_0$  est immédiate.

4. On remarque que si  $R$  est très proche de 1, le terme en sinus écrase le rapport pour toute valeur de  $\lambda$  qui ne l'annule pas. Les pics de transmittance seront donc très piqués (en fonction de  $R$  bien sûr) autour des longueurs d'onde d'annulation du sinus.

Pour annuler le sinus, on écrit pour un entier  $k$  :

$$\frac{2\pi e \cos \theta}{\lambda_i} = k\pi$$

$k$  peut être décomposé en un terme central  $k_0$  et un terme  $n$  de décompte des anneaux depuis le centre.

Si on ruse et que l'on prend les valeurs numériques de la fin de l'exercice on remarque que  $k \stackrel{\text{AN}}{=} 169$ , ce qui est très grand devant  $n$ , on voit quelle approximation faire!!

$$\lambda_1 = \frac{2e \cos \theta}{(k_0 + n)} \underset{k_0 \gg n}{\approx} \frac{2e \cos \theta}{k_0} - \frac{2en \cos \theta}{k_0^2}$$

On peut alors écrire les longueurs d'onde :

$$\lambda_i = \lambda_0 \left(1 - \frac{n}{k_0}\right)$$

On obtient l'écart entre deux pics  $\delta\lambda$  avec la relation précédente :

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_0}{k_0} = \frac{\lambda_0^2}{2e \cos \theta}$$

5. La longueur d'onde telle que l'intensité est divisée par deux est, d'après la définition de la largeur à mi-hauteur :  $\lambda = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$

Par définition, on se place donc, pour faire apparaître ce paramètre, à mi-hauteur des pics.

$$T = \frac{1}{2} \implies \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left( \frac{2e \cos \theta}{\lambda} \right) = 1$$

On exprime ce  $\lambda$  et on factorise par  $\lambda_0$ . Le terme en  $\Delta\lambda/\lambda_0$  est très faible devant 1, on fait un développement limité, on obtient :

$$\sin \left( \frac{2e \cos \theta}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0} \right) \right) = \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$$

Il est immédiat d'éliminer le terme correspondant à la longueur d'onde centrale (terme multiple de  $2\pi$ ).

Le terme dans le sinus est très faible devant l'unité, on peut chercher à effectuer un développement limité au premier ordre.

On injecte l'expression de  $\lambda_0$  en fonction de  $\delta\lambda$  dans la relation et on obtient :

$$F = \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

(intérêt : Pour un  $R$  très proche de 1, Michelson se fait éclater avec son  $F = 2$ )

6. On peut écrire

$$\Delta\lambda = \frac{\delta\lambda}{F} \stackrel{\text{AN}}{=} 5.7.10^{-10}\text{m}$$

7. Regardons la lame du dessous (la même chose se passe pour celle du dessus).

Le premier rayon se réfléchit une fois sur la lame à une interface air-verre, donc avec un déphasage de  $\pi$ , son amplitude vaut :  $A_1 = \sqrt{R}A_0e^{j\pi} = -\sqrt{R}A_0$ .

La somme des amplitudes des autres rayons se réfléchissant vaut :  $A_2 = \frac{A_0\sqrt{R}(1-R)}{1-Re^{j\Delta\varphi}}$

A la résonance,  $\Delta\varphi = 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , d'où,  $A_2 = \sqrt{R}A_0$

La superposition du premier rayon et des suivants donne :  $A = A_1 + A_2 = 0$

Aucune intensité n'est réfléchi à la résonance. En faisant le même raisonnement sur la lame du dessus, on peut affirmer que la lumière passe totalement à la résonance, quelle que soit la valeur de  $R$ . C'est contre-intuitif mais ça marche.

∩

## 二 Retour au temple Jedi ❀ ❀ ❀

Vous arrivez au Temple Jedi avec un stormtrooper, vous ne sentez pas d'autre présence dans l'enceinte. Vous cherchez mais ne pouvez constater qu'une chose : les documents ont bien disparus du registre Jedi. Le clone vous demande alors : "Il n'y a que les Jedi qui ont accès au registre?". Un jedi doit déposer son sabre laser et celui-ci est analysé avant d'octroyer l'accès au registre. Vous allez voir ce que la machine peut vous dire.

Vous savez que chaque sabre laser possède un cristal Kyber unique identifiable à un couple {couleur, largeur spectrale} (le cristal Kyber du sabre produit un rayonnement qui ressemble à un paquet d'onde).

Voici le document :

*On se place en lame d'air au contact optique à  $t = 0$ . On translate à ce moment, le miroir  $M_1$  à vitesse constante  $v_0 = 1.10^{-6} m.s^{-1}$ .*

*La largeur spectrale à mi-hauteur obtenue est  $\Delta\sigma = 1.02.10^6 m^{-1}$ . On donne le graphe du courant électrique fourni par le capteur placé au centre optique de la lentille en fonction du déplacement du miroir  $M_1$  :*

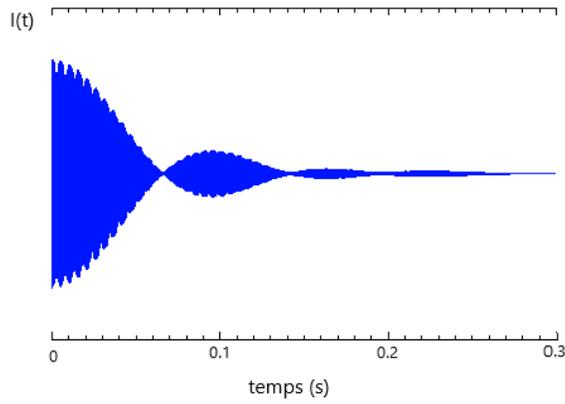


FIGURE 2 – Graphe de l'intensité du cristal délivrée  $i$  en fonction du temps de déplacement

Le clone vous dit que le registre annonce 3 possibilités pour l'identité du Jedi avec cette valeur de largeur spectrale : Les chevaliers Sha Koon (qui a un sabre vert) et Kento Marek (qui a un sabre orange) ou le maître Ylenic It'kla (qui a un sabre bleu).

1. Déterminez l'expression de l'intensité au centre du capteur en faisant apparaître les deux variables  $\sigma$  et  $t$ .
2. Vous relevez le temps caractéristique de décroissance exponentielle  $\tau = 0.13s$ . Vérifiez donc d'abord si la valeur donnée par la machine pour  $\Delta\sigma$  est cohérente.
3. Déterminez la longueur d'onde centrale du paquet d'onde. Quel Jedi est le voleur ?

Données :

On supposera que l'intensité délivrée par le capteur au centre optique de la lentille est proportionnel à :

$$\exp\left(-\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a}\right)^2\right)$$

avec  $\lambda_0 = \frac{1}{\sigma_0}$  la longueur d'onde centrale et  $a \ll \sigma_0$ .

On donne également :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\pi\sigma\delta) e^{-\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a}\right)^2} d\sigma \propto a\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 a^2 \delta^2} \cos(2\pi\sigma_0\delta)$$

Connaissant l'identité du Jedi coupable, vous utilisez les données de la machine dans l'holocron sith pour le repérer.

≡

### 三 Lunette de Galilée

On veut réaliser une lunette de Galilée composée de deux lentilles. Une lentille convergente de distance focale  $f'_1 = 15\text{cm}$  et une lentille divergente de  $f'_2 = -5\text{cm}$ . Le système est afocal.

1. Quelle est la taille de la lunette? Commentez.
2. Tracez la marche d'un rayon parallèle à l'axe. Idem pour un rayon faisant un angle  $\alpha$  quelconque avec l'axe. Déduisez-en  $G$ , le grossissement de la lunette.
3. On cherche à observer deux cratères sur la Lune :
  - Copernic de 96km de diamètre.
  - Clavius de 240km de diamètre.
4. Peut-on les voir à l'œil nu? avec la lunette? On rappellera la distance Terre-Lune.



### 四 Biprisme de Fresnel

On se munit d'un prisme fait en verre d'indice  $n$ . On cherche une relation entre l'angle d'ouverture du prisme et la déviation des rayons en sortie dans le but de créer un dispositif interférentiel.

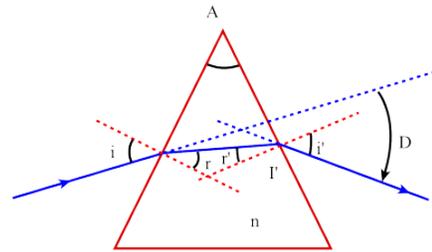


FIGURE 3 – Schéma de la déviation du rayon incident par un prisme d'ouverture  $A$

1. En travaillant dans le quadrilatère formé par les côtés du prisme partant de  $A$  et les normales à ces côtés, déterminez une relation entre  $r$ ,  $r'$  et  $A$ . Faites de même entre  $r$ ,  $r'$  et  $D$  dans le triangle supérieur.
2. Déduisez-en que  $D$  en fonction de  $i, i'$  et  $A$  :

$$D = i + i' - A = (n - 1)A$$

On décide de placer un prisme  $BCO$  de base  $CO$  tel que

$$\overline{CO} = 2\text{mm}, \quad \overline{BC} = 2\text{cm}, \quad n = 1.5, \quad \widehat{BCO} = 90^\circ, \quad \text{et} \quad \widehat{OCB} = A$$

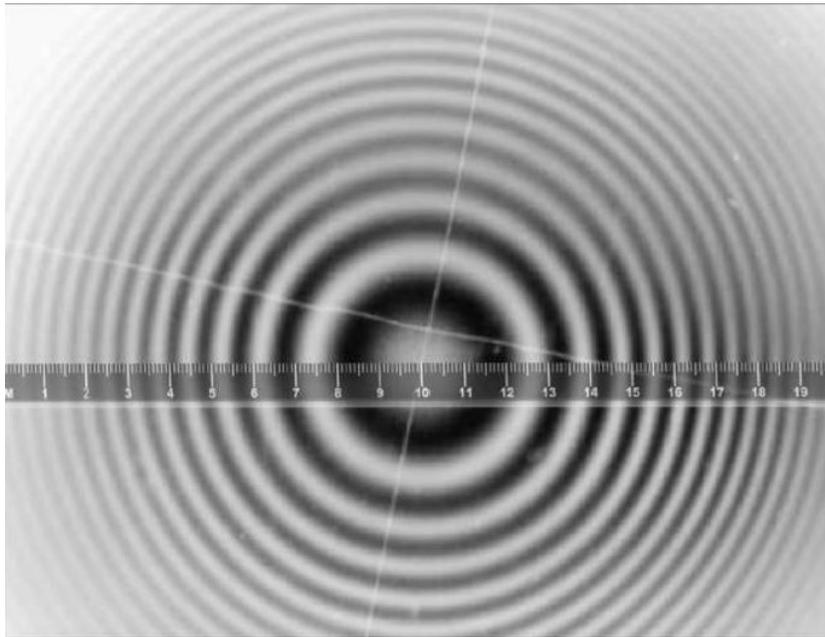
sur un axe à une distance  $d = 20\text{cm}$  d'une source lumineuse  $S$ . Un écran  $E$  est placé à une distance  $L = 1.8\text{m}$  derrière le point  $O$ .

3. Peut-on se placer dans l'approximation des petits angles?
4. Tracez un rayon provenant de  $S$  sur l'écran. Où est la source secondaire  $S_1$ ? Que vaut la distance  $SS_1$ ? On associe maintenant à ce prisme un second prisme symétrique par rapport à l'axe.
5. Peut-on obtenir des interférences? On attend une description du champ d'interférence, de la géométrie des franges et de l'interfrange.



## 五 Figure d'interférence

On considère la photo suivante obtenue avec une source lumineuse étendue de longueur d'onde dominante  $\lambda = 589\text{nm}$ .



1. Quel appareil (et quel montage) permet d'obtenir une telle figure? Décrivez brièvement le protocole pour parvenir à une telle figure.
2. A l'aide du graphe, déterminez l'épaisseur de la lame d'air correspondante sachant que l'image est observée après projection avec une lentille de focale  $f' = 1\text{m}$ . Évaluez l'incertitude associée.

⇒

## 六 Bilentille de Meslin

Meslin a envisagé un montage optique pour montrer qu'un rayon passant par le foyer d'une lentille subissait une avance de phase de  $\pi$ .

Une lentille de distance focale  $f$  et de rayon  $R$ , coupée en deux selon un diamètre est éclairée par une source monochromatique à l'infini. Les demi-lentilles résultantes  $L_1$  et  $L_2$  sont écartées dans la direction de l'axe optique de sorte que  $\overline{F_1F_2} = 2e$ . On posera  $d_1$  le retard de phase des rayons dans le champ d'interférence par rapport à  $F_1$  et  $d_2$  l'avance de phase par rapport à  $F_2$ .

On observera les interférences dans le plan contenant  $OH$  avec  $O$  le milieu de  $F_1F_2$  et  $H$  le point d'intersection des rayons extrêmes traversant les deux lentilles.

1. Faites un schéma du montage envisagé. Décrivez et le champ d'interférence. Dessinez l'interférogramme correspondant.
2. Déterminez la forme des surfaces équiphases dans l'espace d'interférence.
3. Déterminez l'expression de la différence de marche en un point  $M$  du champ d'interférence en fonction du rayon des anneaux. Déduisez-en l'expression du rayon des anneaux en fonction de  $e$ ,  $\lambda$  et d'un entier  $k$ .

⇒

Correction :

1. Le schéma doit ressembler à ça.

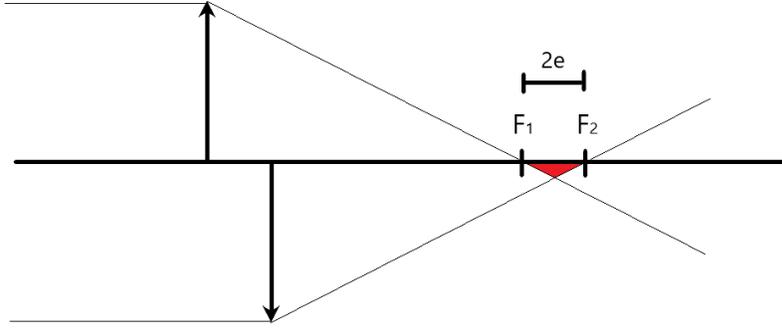


FIGURE 4 – Schéma du bilentille de Meslin, la champ d'interférence est représenté en rouge. La distance entre les 2 demi-lentilles est  $2e$  (c'est une même lentille été coupée en 2).

Tous les rayons provenant de  $L_1$  (la lentille du haut) sont en phase en  $F_1$ . De même, tous les rayons provenant de  $L_2$  sont en phase en  $F_2$ . La différence de marche pour un rayon passant par l'axe optique est donc  $2e$ . En définissant  $d_1$  et  $d_2$  par  $\overline{F_1M}$  et  $\overline{F_2M}$  respectivement, les surfaces équiphase sont définies par  $d_1 + d_2 = cste$ . La symétrie de révolution imposée par les deux demi-lentilles impose que les plans équiphase soient des hyperboloïdes de révolution de foyer  $F_1$  et  $F_2$  et, dans le plan perpendiculaire à l'axe optique, des anneaux concentriques.

2. La question elle est vite répondue.
3. Au point M dans le champ d'interférence, le retard de phase par rapport à  $F_1$  est  $d_1$  et l'avance de phase par rapport à  $F_2$  est  $d_2$ , ce qui donne un "retard" par rapport à  $F_1$  de  $2e - d_2$ . Ceci permet de donner la différence de marche  $\delta = d_1 + d_2 - 2e + \frac{\lambda}{2}$  (un rayon passant par le foyer est déphasé de  $\frac{\lambda}{2}$ ).

Si on introduit le rayon des anneaux, on doit introduire l'emplacement du plan dans lequel on observe les anneaux. Disons que la distance, sur l'axe optique de l'écran d'observation  $E$  est fixé, connu, et exprimé par  $F_1E = l$ .

On peut alors écrire, par le théorème de Pythagore :  $d_1 = \sqrt{l^2 + r^2}$  et  $d_2 = \sqrt{(2e - l)^2 + r^2}$ .

Si on considère que le rayon des anneaux est très faible devant la distance  $l$  et  $2e - l$ , on fait un DL au premier ordre (on se place "loin" des foyers" pour lesquels on aura un champ d'interférence très petit). On pourrait se placer en  $d_1 = d_2$  mais on va pas trop se simplifier la vie non plus (même si c'est quelque chose qu'un examinateur accepterait s'il ne reste pas beaucoup de temps dans l'oral).

Ceci permet d'écrire la différence de marche  $\delta$  :

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + l \left( 1 + \frac{r^2}{2l^2} \right) + (2e - l) \left( 1 + \frac{r^2}{2(2e - l)^2} \right) - 2e$$

En séparant le troisième terme, en mettant au même dénominateur et en factorisant par  $\frac{r^2}{e}$  afin de rendre le terme entre parenthèse adimensionné, on obtient :

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + \frac{r^2}{e} \left( \frac{2e^3}{l(2e - l)^2} - \frac{e^2}{(2e - l)^2} \right)$$

On peut même faire apparaître l'écart au cas "parfait"  $d_1 = d_2$  :

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + \frac{r^2}{e} \left( \frac{e^2}{(2e - l)^2} \left( \frac{2e}{l} - 1 \right) \right)$$

L'ordre d'interférence est entier pour une raie brillante, on peut alors écrire :

$$p = k \implies k = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{\lambda e} \left( \frac{e^2}{(2e - l)^2} \left( \frac{2e}{l} - 1 \right) \right)$$

Ce qui donne en appelant le terme adimensionné  $C$  :

$$r = \sqrt{\frac{\lambda e}{C} \left(k - \frac{1}{2}\right)}$$

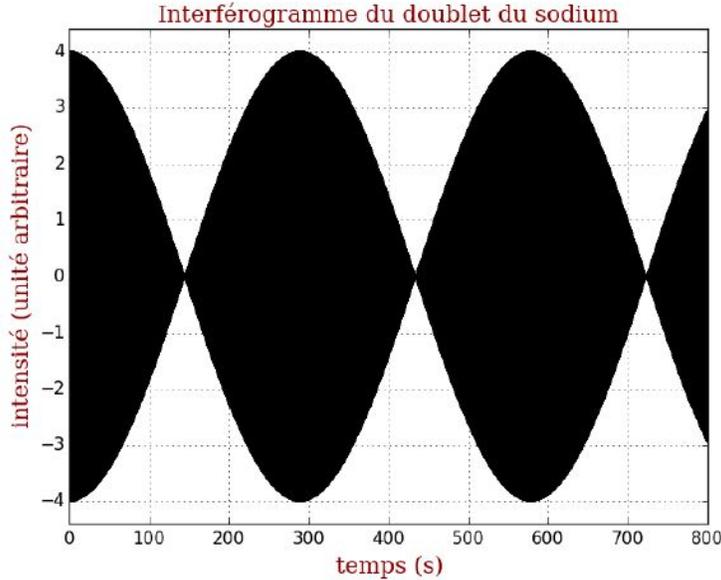
Dans la cas "parfait", on trouve  $C = 1$ , donc  $r = \sqrt{\lambda e \left(k - \frac{1}{2}\right)}$

⇒

## 七 Doublet du sodium

On considère une interféromètre de Michelson réglé en lame d'air avec une lampe au sodium telle que  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  et  $\lambda_m = \sqrt{\lambda_2\lambda_1} = 589.3\text{nm}$ .

A  $t = 0$ , on translate le miroir 2 à une vitesse constante  $v_0 = 1\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . L'écran est remplacé par un capteur CCD. on obtient le graphe suivant :

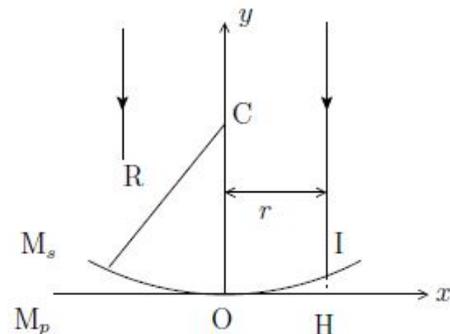


1. Faites un schéma détaillé du montage utilisé pour obtenir un tel graphe.
2. Déterminez  $\Delta\lambda$ .



## 八 Miroir de Newton

On considère le dispositif suivant constitué d'un miroir partiellement réfléchissant  $M_s$ , d'épaisseur négligeable, de rayon  $R$  et de centre  $C$  reposant en  $O$  sur un miroir plan  $M_p$ . On l'éclaire avec une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  parallèlement à  $(Oy)$ .



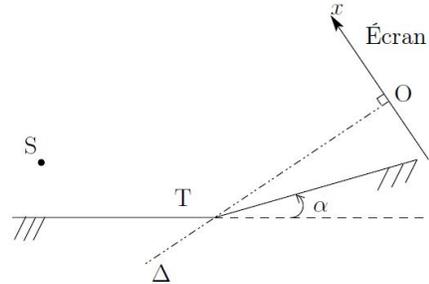
1. Expliquez comment fonctionne cet interféromètre. Déterminez la différence de marche en un point situé sur  $M_s$  à une distance  $r$  de l'axe.
2. Quel type d'interférence est observé par cet interféromètre ?
3. Déterminez la différence de marche en fonction de  $R$  et  $r$ . Déduisez-en le rayon des anneaux observés.
4. On éclaire le dispositif en lumière blanche. Comment est modifiée la figure d'interférence ? Quel est l'ordre du premier anneau pour lequel les longueurs d'onde  $\lambda_1 = 450\text{nm}$  et  $\lambda_2 = 650\text{nm}$  sont éteintes.



## 九 Miroir de Fresnel

On considère le montage ci-dessous.  $S$  est une source ponctuelle,  $\Delta$  sépare le champ d'interférence en deux équitablement et  $(Ox)$  est perpendiculaire à  $\Delta$ . On donne  $\alpha = 0.1^\circ$ ,  $\overline{TO} = 1.8\text{m}$ ,  $\overline{ST} = 0.2\text{m}$ ,  $\lambda_m = 589\text{nm}$  et  $\Delta\lambda = 0.7\text{nm}$ .

1. Mettez en évidence le système équivalent. Déterminez alors la largeur du champ d'interférence  $C$ .
2. Déterminez la différence de marche en un point quelconque  $M$  du champ. Quelle est la forme de la figure d'interférence.
3. Déterminez l'interfrange et le nombre de franges visibles sur le champ.
4. Observe-t-on des interférences sur tout le champ théorique  $C$ ? Donnez l'expression du contraste et la condition pour avoir brouillage.
5. On élargit la source en une fente fine, dans quelle direction peut-on le faire sans danger?
6. On se place en  $x = 3\text{mm}$ , quelles sont les longueurs d'onde éteinte?

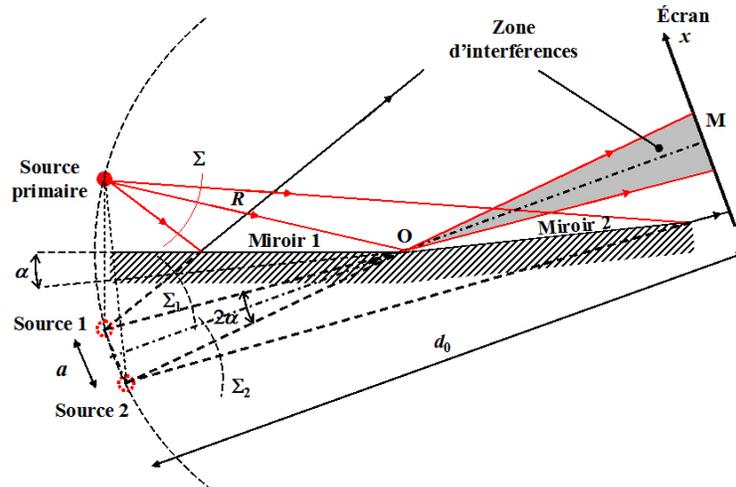


≡

Correction :

1. On commence par tracer les rayons extrêmes sur chacun des miroirs. Au point T, les deux rayons correspondants aux deux miroirs peuvent être prolongés et donner les sources secondaires  $S'$  et  $S''$  (symétriques de  $S$  par rapport à chacun des miroirs). Ce système est le système équivalent au fentes d'Young. En repérant un angle  $\alpha$  entre la droite  $\Delta$  et un rayon extrême, on peut rapidement voir que

$$C = 2 \tan(\alpha) \overline{TO} \stackrel{\text{AN}}{=} 36\text{cm}$$



2. Maintenant que le système équivalent est donné, on oublie le système réel et on travaille sur le système de trous d'Young :

Le cours nous donne pour un point  $M(x)$  de l'écran :

$$\delta = \frac{\overline{S'S''}x}{L + \overline{TO}}$$

avec  $L$  la distance entre le point T et le milieu du segment  $S'S''$ .

Si on se place dans l'approximation des petits angles (justifiable aisément avec la valeur de  $\alpha$ ), on obtient :

$$\delta = \frac{2\alpha \overline{ST}x}{\overline{TO} + \overline{ST}}$$

avec  $\overline{S'S''} = 2 \tan \alpha \overline{ST}$  et  $L = \overline{ST} \cos \alpha$

On obtient des raies sur la figure d'interférence (avec des sources cohérentes etc).

3. On a l'ordre d'interférence  $p$  défini comme :  $p = \frac{\delta}{\lambda}$  qui est entier pour des interférences parfaitement constructives ou destructives.

On peut écrire :

$$\Delta p = 1 \iff \Delta x = i$$

avec  $i$  l'interfrange.

On en tire :

$$i = \frac{\lambda(\overline{TO} + \overline{ST})}{2\alpha \overline{TO}} \stackrel{\text{AN}}{=} 2.94.10^{-5} \text{m}$$

On observerait

$$N = \frac{C}{i} = \frac{4\alpha^2 \overline{TO} \overline{ST}}{\lambda(\overline{TO} + \overline{ST})} \stackrel{\text{AN}}{=} 1,2.10^5$$

franges sur l'écran si tout va bien.

4. On éclaire avec une lampe au sodium, la largeur spectrale entrainera un brouillage si on dépasse la taille associée à  $\Delta\lambda$ ... Prenons la modélisation habituelle, le doublet est considéré comme 2 longueurs d'ondes centrées sur  $\lambda_m$  et séparée de  $\Delta\lambda$ .

D'où, d'après la formule de Fresnel, les intensités s'ajoutent (incohérence) :

$$I = 4I_0 + 2I_0 \left( \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right) \right)$$

Soit,

$$I = 4I_0 \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m}\right) \right)$$

On identifie le contraste  $C_0$  :

$$C_0 = \left| \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\right) \right|$$

L'annulation de l'enveloppe se fait donc pour un  $\delta$  valant :

$$\delta = \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda} \implies x_{max} = \frac{(\overline{TO} + \overline{ST})\lambda_m^2}{4\Delta\lambda\alpha\overline{ST}} \stackrel{\text{AN}}{=} 1,2.10^{-2} \text{m}$$

Le champ d'interférence sera donc partiellement obstrué par des pertes de contraste.

5. cf cours sur l'élargissement des sources.  
6. cf spectre cannelé en TP Michelson.

⇒

## † On pourrait croire que la fée Morgane y est pour quelque chose !

De nombreuses légendes de marins parlent de bateaux fantômes aperçus en mer. Certains sont terrifiants comme le bateau de Davy-Jones dans *Pirates des Caraïbes* mais sont juste très rapides, d'autres VOLENT!! Regardons comment expliquer pourquoi les marins ne sont parfois pas totalement marseillais quand ils parlent de bateaux volants.



1. Quel est le nom du bateau de Davy-Jones ?
2. Expliquez le principe physique du mirage supérieur.
3. En considérant que l'air est une superposition de couches d'indice  $n(z)$ , faites un schéma du système.
4. Utilisez la géométrie du système pour écrire :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1 - \sin^2(i(z))}{\sin^2(i(z))}$$

5. Utilisez les lois de Descartes pour démontrer :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{n(z)^2 - \alpha^2}{\alpha^2}$$

6. Avec  $n(z) = n_0 \sqrt{1 + \frac{z}{z_0}}$ , déterminez  $z = f(x)$ . Commentez.

On se propose de retrouver ce résultat en utilisant une méthode plus générale.

On cherche à minimiser la quantité

$$\mathbb{L}(z) = \int_A^B \frac{ds}{v(z)}$$

entre les points A (d'émission) et B (de réception).

7. Quelle principe physique justifie de minimiser cette relation ?
8. Donnez l'expression de cette intégrale en fonction de  $z$  et  $\frac{dz}{dx}$ ,  $n_0$  et  $c$ .

On appelle l'intégrande "Lagrangien" et on le note  $\mathcal{L}(z, z')$ . Il vérifie l'équation d'Euler-Lagrange invariante par translation :

$$\mathcal{L}(z, z') - z' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'}(z, z') = k$$

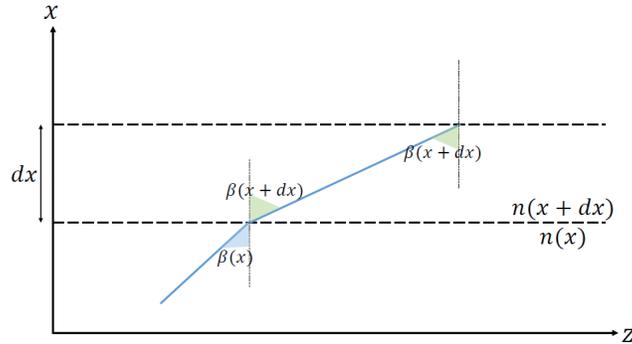
avec  $k$  une constante.

9. Retrouvez le résultat précédemment établi.
10. En posant le système correctement, simplifiez l'équation, résolvez-la en un point particulier (en  $A(x = a, z = h)$ ) et calculez  $\mathbb{L}(z)$ . (Attention, autant donner le résultat)
11. Quelle solution garder ? Proposez une façon de faire.
12. Commentez le phénomène étudié à la lumière de cette solution.

Correction :

⇒

1. Le bateau de Davy-Jones s'appelle le Hollandais volant (Flying Dutchman).
2. A cause du changement d'indice de l'air, la lumière est courbée et des éléments au delà de l'horizon apparaissent au dessus de l'horizon. Schéma!
3. Prenons d'abord une approche discrète du problème :



4. Géométriquement, on observe que :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\tan(i(z))}$$

or :

$$\frac{1}{\tan(i(z))} = \frac{\cos(i(z))}{\sin(i(z))} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2(i(z))}}{\sin(i(z))}$$

D'où le résultat demandé.

5. On peut ensuite écrire Snell-Descartes :

$$n(z) \sin(i(z)) = n(z + dz) \sin(i(z + dz))$$

La quantité  $n(z) \sin(i(z))$  se conserve et vaut une valeur initiale  $\alpha$ .

On peut remplacer dans l'expression précédente, on a :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(z) - \alpha^2}{\alpha^2}$$

6. On injecte l'expression de  $n(z)$  donnée :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{n_0^2}{\alpha^2} \left(1 + \frac{z}{z_0} - \frac{\alpha^2}{n_0^2}\right)$$

Ce qui donne, en passant à la racine :

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{z}{z_0} - \left(\frac{\alpha}{n_0}\right)^2}} = \frac{n_0}{\alpha}$$

On primitive cette horreur et on obtient la relation :

$$2z_0 \sqrt{1 + \frac{z}{z_0} - \left(\frac{\alpha}{n_0}\right)^2} = \frac{n_0}{\alpha} x + \underbrace{2z_0}_C \quad \text{pour simplifier}$$

Ce qui donne la relation sur  $z$  :

$$\boxed{\frac{z}{z_0} = \left( \frac{n_0}{2z_0\alpha} x + C \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{n_0} \right)^2 - 1}$$

Cette équation est une équation de parabole! Si le système est symétrique (ce qui est le cas) on a  $C = 0$ !

7. Le principe qui nous intéresse ici est le principe de Fermat, la lumière emprunte le chemin le plus court en temps entre deux points! Il convient de minimiser le temps de trajet, ce qui revient à minimiser  $t = d/c$ .
8. La difficulté ici est l'abscisse curviligne  $ds$  :

on peut écrire facilement :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} dx$$

Avec l'expression de  $n(z)$ , sachant que  $v = c/n$ , l'action devient :

$$\mathbb{L}(z) = \int_A^B \frac{ds}{v(z)} = \int_A^B \frac{n_0}{c} \sqrt{1 + \frac{z}{z_0}} \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} dx$$

9. On utilise l'équation fournie, on injecte l'intégrande et on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} = \frac{n_0}{c} \sqrt{1 + \frac{z}{z_0}} \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2}}$$

D'où Euler-Lagrange devient :

$$\mathcal{L}(z, z') - z' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'}(z, z') = k \implies \frac{n_0}{c} \sqrt{1 + \frac{z}{z_0}} \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} \left( 1 + \frac{\left( \frac{dz}{dx} \right)^2}{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2} \right) = k$$

Soit :

$$\frac{n_0}{c} \sqrt{1 + \frac{z}{z_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2}} = k$$

Ce qui permet d'écrire la relation finale :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{n_0}{ck} \sqrt{1 + \frac{z}{z_0} - \left( \frac{ck}{n_0} \right)^2}$$

Qui est la même relation qu'à la question 6). Elle s'intègre de la même manière. Le lien entre  $k$  et  $\alpha$  est  $ck = \alpha$ .

10. Le système est symétrique, on prend  $C = 0$ , on se place en  $x = a$  et  $z = h$  (en  $A$ ) :

$$\frac{h}{z_0} = \frac{n_0^2}{4z_0^2\alpha^2} a^2 + \left( \frac{\alpha}{n_0} \right)^2 - 1$$

On pose  $M = \frac{c^2 k^2}{n_0^2} = \frac{\alpha^2}{n_0^2}$

d'où :

$$\frac{h}{z_0} = \frac{1}{4z_0^2 M} a^2 + M - 1 \implies 4z_0^2 M^2 - 4z_0 M(z_0 + h) + a^2 = 0$$

On doit avoir des solutions réelles (sinon on observe rien...) cette condition s'exprime :

$$\Delta \geq 0 \iff z_0 + h \geq a$$

La seconde condition, non exploitée ici est que  $M > 1$  pour l'existence du mirage, sinon le gradient de d'indice est trop important et on observe pas de rayon provenant de  $A$ .

On trouve deux solutions pour  $M$  :

$$M_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{h}{z_0} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{h}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{a}{z_0}\right)^2} \right)$$

On réinjecte dans  $z(x)$  :

$$\frac{z}{z_0} = \frac{1}{4z_0^2 M_{\pm}} x^2 + M_{\pm} - 1$$

on a aussi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2z_0^2 M_{\pm}} x$$

D'où l'action devient :

$$\mathbb{L}(z) = \int_A^B \frac{n_0}{c} \sqrt{\frac{1}{4z_0^2 M_{\pm}} x^2 + M_{\pm}} \sqrt{1 + \frac{1}{4z_0^4 M_{\pm}^2} x^2} dx$$

On factorise un  $M_{\pm}$  dans le premier terme, on développe le produit (à cause de la puissance de  $z_0$  qui perturbe la factorisation) :

$$\mathbb{L}(z) = \int_A^B \frac{n_0}{c} \sqrt{M_{\pm}} \sqrt{1 + \frac{1}{4z_0^2 M_{\pm}} x^2 \left(1 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \frac{1}{16z_0^6 M_{\pm}^4} x^4} dx$$

Le terme en  $x^4$  est négligeable devant les deux premiers termes, on obtient :

$$\mathbb{L}(z) = \int_A^B \frac{n_0}{c} \sqrt{M_{\pm}} \sqrt{1 + \frac{1}{4z_0^2 M_{\pm}} x^2 \left(1 + \frac{1}{z_0^2}\right)} dx$$

Comme on a négligé le terme d'ordre 4, on développe celui d'ordre 2 :

$$\mathbb{L}(z) = \frac{n_0}{c} \sqrt{M_{\pm}} \int_A^B 1 + \frac{1}{8z_0^2 M_{\pm}} \left(1 + \frac{1}{z_0^2}\right) x^2 dx$$

Ce qui donne le résultat, entre  $-a$  et  $a$  :

$$\mathbb{L}(z) = \frac{n_0}{c} \sqrt{M_{\pm}} \left( 2a + \frac{3}{4z_0^2 M_{\pm}} \left(1 + \frac{1}{z_0^2}\right) a^3 \right)$$

11. La façon de faire peut être de faire le rapport  $\frac{\mathbb{L}^+}{\mathbb{L}^-}(a)$  et d'observer les variations!

On observe que la dérivée de cette quantité est positive,  $\mathbb{L}^+$  est plus faible, on garde  $M_+$ .

12. On a exprimé le temps de parcours du rayon lumineux, c'est cool!

## 十一 Lentille gravitationnelle ✿ ✿



1. On considère un rayon lumineux arrivant depuis l'infini sur une lentille de distance focale  $f'_0$ . Ce rayon frappe la lentille à une distance  $r_0$  du centre optique. Déterminez la déviation angulaire  $\delta\phi$  du rayon, en considérant  $r_0 \ll f'_0$ .
2. On observe depuis la Terre une galaxie supposée à l'infini. Sur la ligne de visée se trouve un amas galactique de masse  $M$ . La relativité générale prédit la déviation des rayons lumineux à proximité de ce corps massif : c'est le phénomène de lentille gravitationnelle. On peut modéliser cet effet par une lentille convergente dont la distance focale dépend de la position du rayon lumineux suivant la relation

$$\delta\phi = \frac{4GM}{c^2 r_0}$$

où  $r_0$  est la distance du rayon lumineux au centre de la lentille et  $G$  la constante de gravitation.

Déterminez la distance focale associée au rayon qui frappe la lentille à une distance  $r_0$  du centre optique.

3. On suppose la lentille à une distance  $D$  de la Terre. Déterminez le paramètre  $r_0$  des rayons qui sont effectivement observés depuis la planète.
4. En déduire l'ouverture angulaire sous lequel l'objet est vu. Pour une source ponctuelle située à l'infini, expliquez pourquoi on observe un anneau (dit anneau d'Einstein)
5. On mesure un anneau d'ouverture angulaire  $\alpha = 2.10^{-6}$  amplifié par une lentille distante de  $D = 10^9$  al. Déterminez la masse de la lentille. On prendra  $1\text{al} = 9.10^{15}\text{m}$ .