

1

Horloges atomiques
et
Atomes froids

Matthieu Dupont-Klout
4 janvier 2021

Introduction

Qu'est ce qu'une horloge atomique ?

Une horloge atomique c'est deux éléments principaux :

- Un oscillateur local oscillant avec une pulsation ω qui est susceptible de dériver dans le temps.
- Un résonnateur atomique constitué d'une espèce atomique présentant deux niveaux atomiques, $|a\rangle$ et $|b\rangle$, séparés par une énergie $E_0 = \hbar\omega_0$, de préférence l'énergie E_0 de la transition atomique est stable dans le temps.

Périodiquement la pulsation ω de l'oscillateur est comparée à la pulsation ω_0 de la transition atomique à l'aide d'un protocole d'interrogation (un protocole d'interrogation de type Ramsey est le sujet de ce cours). Ce protocole permet d'obtenir un signal d'erreur dépendant de $\omega - \omega_0$ qui est utilisé ~~pour~~ pour corriger la pulsation de l'oscillateur local et le forcer à osciller à ω_0 .

Plan de ce cours

Dans un premier chapitre nous ferons un rappel sur des oscillations de Rabi puis nous décrirons la séquence de Ramsey permettant de réaliser des horloges atomiques. Nous appliquerons cela à une horloge à jet thermique. Nous

introduisons la notion de variance d'Allan pour caractériser cette horloge. Nous introduisons aussi la notion de matrice densité pour caractériser l'effet de la température des atomes sur cette horloge.

Dans un deuxième chapitre nous parlerons de refroidissement par laser et introduisons la notion de piège magnéto-optique. Nous appliquerons cela à un autre modèle d'horloge atomique: la fontaine de Zacharias à atomes froids.

Dans un troisième et dernier chapitre, nous introduisons les notions de refroidissement de Sisyphus, de piège magnétique et de refroidissement par évaporation. Nous appliquerons cela aux horloges sur puces atomiques.

Chapitre 1

Horloge atomique : la séquence de Ramsey

Considérons un système atomique de deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ séparés d'une pulsation ω_0 . L'hamiltonien de ce système est :

$$H = \hbar \omega_0 |b\rangle\langle b| + \hbar \times 0 \cdot |a\rangle\langle a|$$

$$= \hbar \omega_0 |b\rangle\langle b|$$

car nous avons pris l'origine des énergies sur le niveau $|a\rangle$.

Le système est excité par un champ électrique $\vec{E} \cos(\omega t + \phi)$ de pulsation ω . Ce champ couple les niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ via le potentiel suivant :

$$V = - \frac{\vec{d} \cdot \vec{E}}{2} \cos(\omega t + \phi) (|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|)$$

où $\vec{d}$ est le dipole électrique de la transition. Notons $\hbar \Omega_R = -\vec{d} \cdot \vec{E} / 2$ où Ω_R est appelé pulsation de Rabi et caractérise la force du couplage.

1) Les oscillations de Rabi

C'est l'oscillation de l'état de l'atome entre $|a\rangle$ et $|b\rangle$ en fonction du temps sous l'effet du couplage.

a) Hamiltonien du système et résolution

L'hamiltonien de notre système est:

$$H = \hbar \omega_0 |b\rangle\langle b| + \hbar \Omega_R \cos(\omega t + \phi) \{ |a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a| \}$$

nous cherchons l'évolution temporelle d'un état initial du système $c_a(0)|a\rangle + c_b(0)|b\rangle$ sous la forme $|\psi\rangle = c_a(t)|a\rangle + c_b(t)|b\rangle$.
L'équation de Schrödinger s'écrit:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

elle peut se réduire sous la forme de deux équations complexes pour $c_a(t)$ et $c_b(t)$:

$$\begin{cases} i\dot{c}_a = c_b \Omega_R \cos(\omega t + \phi) \\ i\dot{c}_b = c_a \Omega_R \cos(\omega t + \phi) + \omega_0 c_b \end{cases}$$

On utilise le changement de variable:

$$c_a = c_a' \quad \text{et} \quad c_b = e^{-i\omega_0 t} c_b'$$

donc:

$$\begin{cases} i\dot{c}_a' = c_b' \Omega_R \cos(\omega t + \phi) e^{-i\omega_0 t} \\ i\dot{c}_b' e^{-i\omega_0 t} + \omega_0 e^{-i\omega_0 t} c_b' = c_a' \Omega_R \cos(\omega t + \phi) + \omega_0 e^{-i\omega_0 t} c_b' \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} i\dot{c}_a' = c_b' \Omega_R \cos(\omega t + \phi) e^{-i\omega_0 t} \\ i\dot{c}_b' = c_a' \Omega_R \cos(\omega t + \phi) e^{+i\omega_0 t} \end{cases}$$

on peut réécrire le cosinus sous forme exponentielle :

$$\begin{cases} i\dot{c}_a' = c_b' \frac{\Omega_R}{2} \left\{ e^{i(\omega-\omega_0)t+i\phi} + e^{-i(\omega+\omega_0)t-i\phi} \right\} \\ i\dot{c}_b' = c_a' \frac{\Omega_R}{2} \left\{ e^{i(\omega+\omega_0)t+i\phi} + e^{-i(\omega-\omega_0)t-i\phi} \right\} \end{cases}$$

lors de l'intégration le terme en $e^{i(\omega+\omega_0)t}$ donne $\frac{e^{i(\omega+\omega_0)t}}{\omega+\omega_0}$, le terme en $e^{i(\omega-\omega_0)t}$

donne $\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{\omega-\omega_0}$. Nous sommes dans le

cas où l'onde excitatrice est proche de la résonance atomique donc $\frac{|\omega-\omega_0|}{|\omega+\omega_0|} \ll 1$

Nous allons donc négliger les termes en $e^{i(\omega+\omega_0)t}$ (c'est l'approximation de l'onde tournante). Le système précédent devient donc :

$$\begin{cases} i\dot{c}_a' = c_b' \frac{\Omega_R e^{i\phi}}{2} e^{i\delta t} \\ i\dot{c}_b' = c_a' \frac{\Omega_R e^{-i\phi}}{2} e^{-i\delta t} \end{cases}$$

où nous avons posé $\delta = \omega - \omega_0$ qui est le désaccord de l'onde excitatrice par rapport à la résonance atomique.

La solution est :

$$\begin{cases} c_a' = e^{i\frac{\delta t}{2}} \left\{ \left(\cos \frac{\Omega_R t}{2} - i\frac{\delta}{\Omega_R} \sin \frac{\Omega_R t}{2} \right) c_a'(0) - i\frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} \sin \frac{\Omega_R t}{2} c_b'(0) \right\} \\ c_b' = e^{-i\frac{\delta t}{2}} \left\{ -i\frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} \sin \frac{\Omega_R t}{2} c_a'(0) + \left(\cos \frac{\Omega_R t}{2} + i\frac{\delta}{\Omega_R} \sin \frac{\Omega_R t}{2} \right) c_b'(0) \right\} \end{cases}$$

où nous avons posé $\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \delta^2}$ qui est la pulsation de Rabi généralisée.

Nous récrivons la solution dans nos variables du début $c_a(t)$ et $c_b(t)$:

$$\begin{cases} c_a = e^{i\delta t/2} \left\{ \left(\cos \frac{\Omega t}{2} - i\frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) c_a(0) - i\frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi} \sin \frac{\Omega t}{2} c_b(0) \right\} \\ c_b = e^{-i\omega_0 t} e^{-i\delta t/2} \left\{ -i\frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} \sin \frac{\Omega t}{2} c_a(0) + \left(\cos \frac{\Omega t}{2} + i\frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) c_b(0) \right\} \end{cases}$$

b) Analyse de la solution

Oscillations de Rabi en fonction du temps

Plaçons nous dans le cas $c_a(0) = 1$ et $c_b(0) = 0$. La population dans l'état $|a\rangle$ (respectivement $|b\rangle$) est P_a (respectivement P_b):

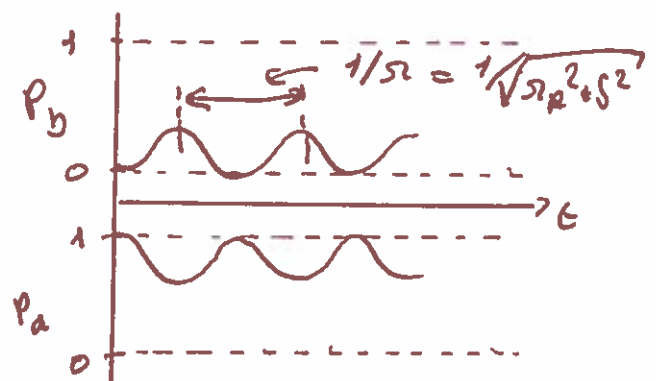
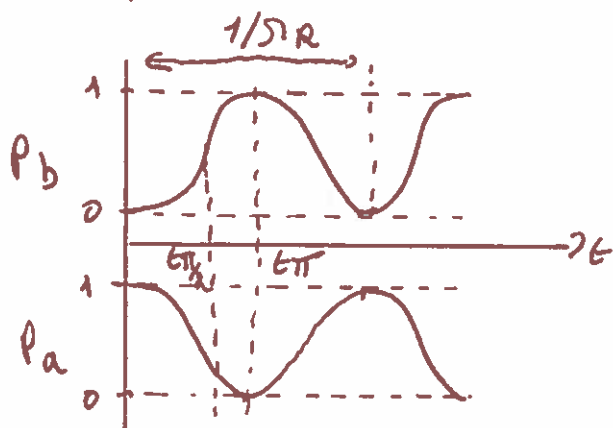
$$P_a = |c_a|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}$$

$$P_b = |c_b|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}$$

Sur la figure suivante nous traçons l'évolution temporelle de ces deux populations:

(a) $\delta = 0$

(b) $\delta \neq 0$



Sur la figure a il y a deux temps remarquables

• $t_{\pi/2}$ tel que $\Delta a t_{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{\pi/2} = \frac{\pi}{2\Delta a}$

• t_{π} tel que $\Delta a t_{\pi} = \pi \Rightarrow t_{\pi} = \frac{\pi}{\Delta a}$

Quand $\delta = 0$:

• à t_{π} l'état de l'atome est $|b\rangle$ alors qu'il était dans $|a\rangle$ à $t=0$

• à $t_{\pi/2}$ l'état de l'atome est :

$$\begin{aligned} & c_a(t_{\pi/2}) |a\rangle + c_b(t_{\pi/2}) |b\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |a\rangle - i e^{-i(\omega_0 t_{\pi/2} + \phi)} |b\rangle \right\} \quad \text{si } c_a(0)=1 \text{ et } c_b(0)=0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -i e^{i\phi} |a\rangle + e^{-i\omega_0 t_{\pi/2}} |b\rangle \right\} \quad \text{si } c_a(0)=0 \text{ et } c_b(0)=1 \end{aligned}$$

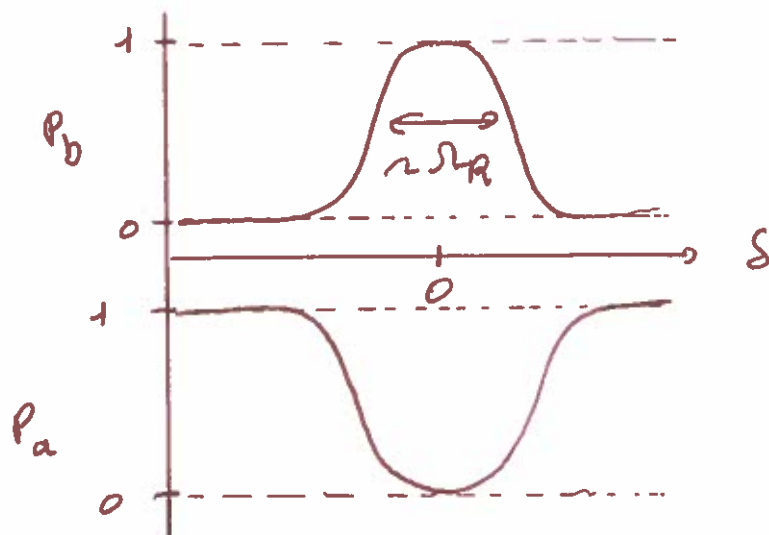
Oscillations de Rabi en fonction de δ

À $t = t_{\pi/2}$, nous avons pour les populations de $|a\rangle$ et $|b\rangle$ en fonction de δ :

$$p_a = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{\delta}{\Delta a}\right)^2}$$

$$p_a = \frac{1}{1 + \left(\frac{\delta}{\Delta a}\right)^2}$$

nous trouvons deux Lorentziennes de largeur Δa . Elles sont tracées sur la figure suivante.



Nous remarquons immédiatement qu'une oscillation de Rabi en fonction du désaccord δ constitue un moyen de savoir si l'oscillateur local a une pulsation proche de la pulsation atomique ω_0 ou non.

La largeur de la courbe nous donne en ordre de grandeur la précision que nous pouvons obtenir sur la mesure du décalage de ω par rapport à ω_0 . Cette largeur est ici de l'ordre de la fréquence de Rabi Ω_R .

Dans la suite nous allons voir comment aller bien au-delà de cette limite : c'est la séquence d'interférométrie de Ramsey.

2) La séquence de Ramsey

a) Qu'est qu'une séquence de Ramsey ?

i) Une première impulsion de Rabi, dite $\pi/2$, de durée $\tau = \pi/2\Omega_R$ à résonance $\delta=0$, issue de l'oscillateur local.

ii) Une évolution libre du système atomique et de l'oscillateur local pendant un certain temps T_R appelé temps de Ramsey.

iii) Une deuxième impulsion de Rabi $\pi/2$ de même durée $\tilde{\tau} = \pi/2\Omega_R$ que la première, aussi à résonnance, $\delta = 0$, et issue du même oscillateur local (il est important qu'il n'y ait pas de saut de phase sur l'oscillateur local entre les deux impulsions : cela sera visible dans les calculs suivants).

b) Calcul du réseau de franges de Ramsey

Considérons un premier cas simple, on néglige la durée de l'impulsion de Rabi $\tilde{\tau}$ par rapport à la durée de Ramsey T_R : $\tilde{\tau} \ll T_R$

Considérons qu'avant la première impulsion de Rabi l'état du système atomique est $|a\rangle$

D'après nos calculs précédents l'effet de l'impulsion de Rabi transforme le système en

$$\frac{|a\rangle - ie^{-i\phi}|b\rangle}{\sqrt{2}}$$

où ϕ est la phase de l'oscillateur local à l'instant de l'impulsion.

Après le temps de Ramsey sous l'effet de l'hamiltonien

$$H = \hbar\omega_0 |b\rangle\langle b|$$

L'état du système est:

$$\frac{|a\rangle + e^{-i\omega_0 T_A - i\phi} |b\rangle}{\sqrt{2}}$$

On fait agir la seconde impulsion de Rabi sur notre système, à l'instant de cette deuxième impulsion la phase de l'oscillation local est $\phi' = \phi + \omega T_A$, donc, d'après les calculs de la première partie, notre système est:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ |a\rangle -ie^{-i\phi - i\omega T_A} |b\rangle -ie^{-i\omega_0 T_A - i\phi} [-ie^{i\phi + i\omega T_A} |a\rangle + |b\rangle] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1 - e^{-i(\omega_0 - \omega) T_A}) |a\rangle + (-ie^{-i\phi - i\omega T_A} -ie^{-i\omega_0 T_A - i\phi}) |b\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1 - e^{-i(\omega_0 - \omega) T_A}) |a\rangle + (-ie^{-i\phi - i\omega T_A}) (1 + e^{-i(\omega_0 - \omega) T_A}) |b\rangle \right\} \end{aligned}$$

Nous pouvons calculer la population dans l'état $|a\rangle$ (respectivement $|b\rangle$) P_a (respectivement P_b):

$$P_a = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos[(\omega_0 - \omega) T_A] \right\}$$

$$P_b = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos[(\omega_0 - \omega) T_A] \right\}$$

Une mesure des deux populations nous permet de connaître la différence entre ω_0 et ω modulo $2\pi/T_R$. On va voir comment s'affranchir de cette limite dans la suite.

c) Les franges de Ramsey avec leur enveloppe

Nous allons procéder en trois étapes comme dans la partie précédente.

Avant la première impulsion le système est $|a\rangle$

Après la première impulsion de Rabi

$$e^{i\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \frac{\Omega T}{2} - i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) |a\rangle + e^{-i\omega_0 T} e^{-i\frac{\delta T}{2}} \left(-i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) |b\rangle$$

Après l'évolution libre pendant le temps de Ramsey T_R , le système est :

$$e^{i\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \frac{\Omega T}{2} - i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) |a\rangle + e^{-i\omega_0 (T+T_R)} e^{-i\frac{\delta T}{2}} \left(-i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) |b\rangle$$

Après la seconde impulsion de Rabi, au début de cette deuxième impulsion la phase de l'oscillation est $\phi' = \phi + \omega(T+T_R)$, le système est :

$$\begin{aligned}
 |a\rangle & \left\{ e^{i\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \frac{\Omega T}{2} - i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) e^{i\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \frac{\Omega T}{2} - i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) \right. \\
 & + e^{-i\omega_0(T+T_R)} e^{-i\frac{\delta T}{2}} \left(-i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) \\
 & \left. \times e^{i\frac{\delta T}{2}} \left(-i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi + i\omega(T_R+T)} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) \right\} \\
 & + |b\rangle \{ \dots \}
 \end{aligned}$$

La population dans l'état $|a\rangle$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 P_a = & \left| e^{i\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \frac{\Omega T}{2} - i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega T}{2} \right) \right|^2 \\
 & + e^{-i\omega_0(T+T_R)} e^{i\omega(T+T_R)} \left(-i \right)^2 \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega T}{2} \Bigg|^2
 \end{aligned}$$

$$P_a = \left| \left(\cos \frac{\Omega T}{2} - i \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega T}{2} \right)^2 - e^{i\delta T_R} \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega T}{2} \right|^2$$

Analysons la dernière expression trouvée en la considérant comme une fonction de δ .

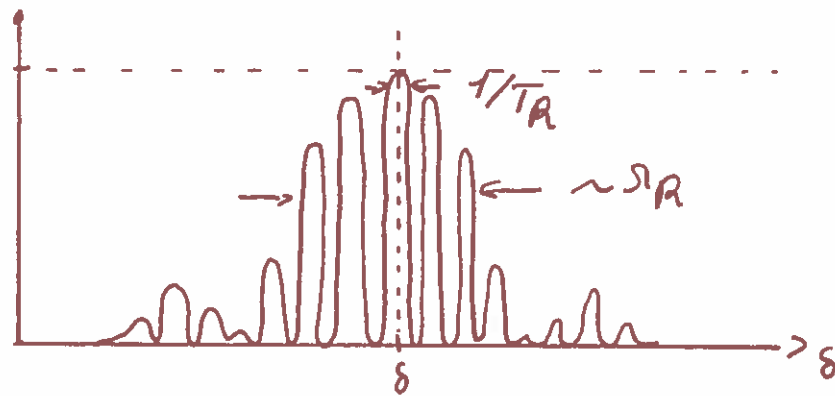
Pour le terme en $e^{i\delta T_R}$, il oscille en $1/T_R$, c'est-à-dire très rapidement, c'est les franges de notre patte précédente.

Pour les termes en $\cos \frac{\Omega T}{2}$ ou $\sin \frac{\Omega T}{2}$ avec $T = \pi / 2\Omega_R$, l'argument $\Omega T / 2$ passe de 0 à 2π pour δ passant de 0 à environ $8\pi\Omega_R$. Ils varient donc très lentement avec δ .

Pour le terme $\frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} = \frac{\Omega_R^2}{\delta^2 + \Omega_R^2}$, c'est une

lorentzienne qui varie lentement avec δ mais plus rapidement que les termes en $\cos \frac{\Delta E}{2}$ et en $\frac{\Delta E}{2}$: ce terme donne grossièrement la forme de l'enveloppe de la courbe.

Tracons P_b en fonction de δ sur la figure suivante :



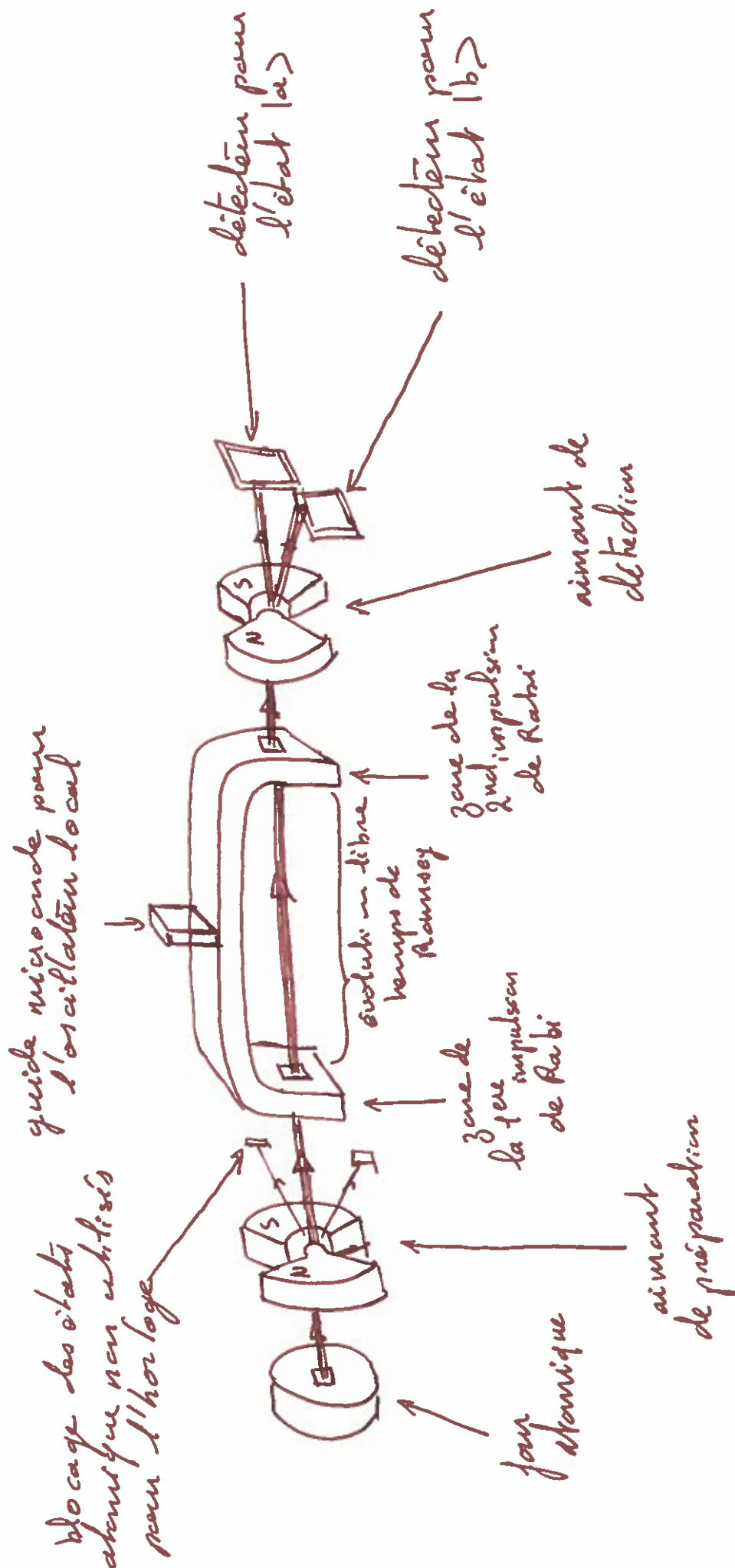
L'avantage de l'interrogation de Ramsey par rapport à l'interrogation de Rabi pour faire une horloge atomique est que la largeur des franges est $1/T_A$ et non plus Δ_R . Cela donne un gain en précision sur la détermination de $\omega_0 - \omega$.

On peut résoudre l'incertitude modulo $2\pi/T_A$ sur la détermination de δ (voir le paragraphe précédent) en traçant l'ensemble des franges de Ramsey (c'est-à-dire la figure précédente) et en cherchant la frange centrale.

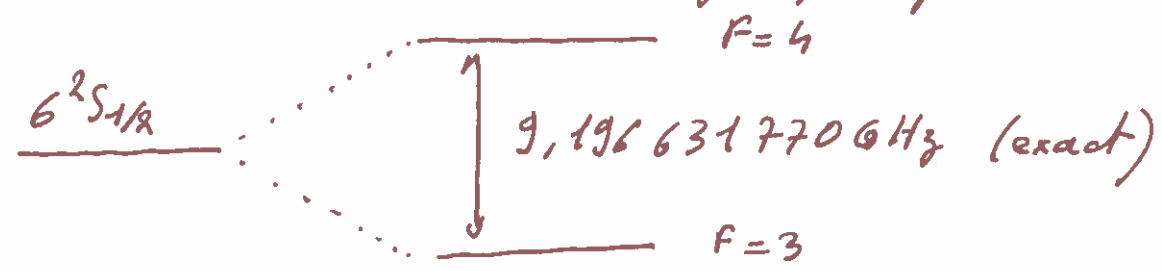
3) Application à l'horloge à jet thermique

a) Description du système

C'est le premier modèle d'horloge atomique

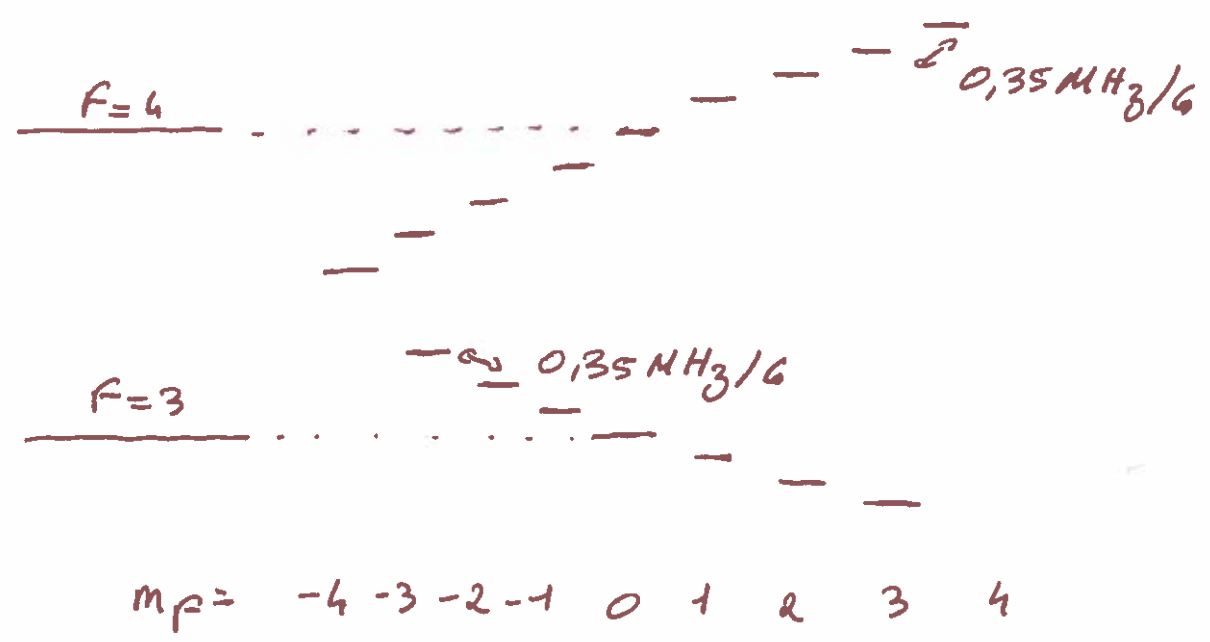


développée dans les années 1950 (voir P. Forman, IEEE, 73, 9 p 1181-1204, 1985 pour un peu d'histoire).
On utilise du Césium 133. Cet atome présente deux niveaux hyperfins fondamentaux:



Structure hyperfine du Césium 133

Les deux niveaux $F=4$ et $F=3$ précédents ont respectivement 9 et 7 sous niveaux Zeeman



Dégénérescence Zeeman des niveaux $F=4$ et $F=3$ du Césium 133.

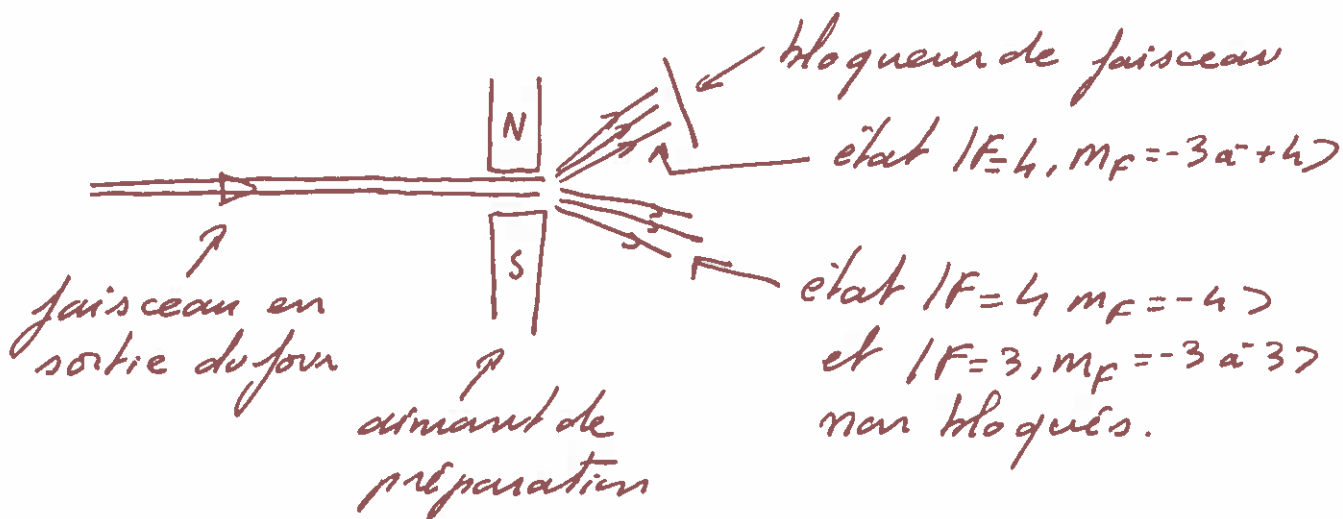
La différence entre les deux niveaux $|F=3, m_F=0\rangle$ et $|F=4, m_F=0\rangle$ correspond à la définition de la seconde.

Une seconde c'est la durée de 9192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux $16^2S_{1/2}, F=3, m_F=0$ et $18^2S_{1/2}, F=4, m_F=0$ de l'atome de Césium 133.

Le système est représenté sur la page 15. Un four atomique permet de créer un faisceau d'atome de Césium. Un premier aimant (aimant de préparation) permet de séparer le faisceau en différents faisceaux. Chaque faisceau ainsi créé contient un et un seul état atomique.

Pour cela nous utilisons l'effet Stern et Gerlach, chaque état atomique ayant un moment magnétique différent, l'angle de déflexion dépend alors de l'état atomique.

Seul les états $|F=3, m_F=-3 \text{ à } 3\rangle$ et $|F=4, m_F=-4 \text{ à } 4\rangle$ passent l'aimant et ne sont pas bloqués.



Le faisceau passe dans une première zone d'interaction à l'intérieur d'un guide d'onde (zone de la première impulsion

de Rabi) puis continue sans être parcourus dans une zone sans champ (correspondant à l'évolution libre du Ramsey) avant de repasser dans une deuxième zone d'interaction à l'intérieur d'un guide d'onde (zone de la seconde impulsion de Rabi).

Le faisceau d'atomes passe par un second aimant (l'aimant de détection) et seul l'état $|F=4, m_F=0\rangle$ passe. En suite le nombre d'atomes dans cet état est détecté, ce qui permet de voir les franges de Ramsey.

b) Dimensionnement rapide du système

Les atomes sortent du four à environ $400K$ soit à une vitesse d'environ $v_{th} \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \sim 200 m/s$

Prenons une cavité de longueur typique $L = 50 cm$ (c'est le cas du premier modèle conçu, les modèles commerciaux actuels sont un peu plus courts) cela donne un temps de Ramsey de $T_R = L/v_{th} \sim 2,5 ms$ la frange centrale fait donc $400 Hz$ de large.

Dimensionnement du guide micro-onde et donc de la zone d'interaction: On est à $9,1926 Hz$ c'est-à-dire dans la bande X, dans cette bande de fréquence les guides micro-ondes ont une dimension de $23 \times 10 mm$ (pour la section). Disons donc que notre zone d'interaction fait $L_{int} = 23 mm$ de longueur.

la durée correspondante pour faire une impulsion de Rabi est :

$$t \frac{\pi}{2} = \frac{L_{int}}{v_{th}} = \frac{\pi}{2\Omega_R}$$

donc

$$\Omega_R = \frac{\pi v_{th}}{2L_{int}} \sim 2\pi \times 2,2 \text{ kHz}$$

L'enveloppe de nos franges sera donc de 2,2 kHz de large. Calculons la puissance micro-onde correspondante pour savoir si elle est réalisable. Le champ magnétique correspondant est :

$$B \sim \frac{\hbar \Omega_R}{\mu_B} \sim 140 \text{ nT}$$

où $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ est le magnéton de Bohr. L'intensité du champ est alors

$$I \sim \frac{\mu_0 \hbar^2 \Omega_R^2}{4\pi} \frac{1}{\mu_0} \sim 4,7 \text{ W/m}^2$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ est la perméabilité magnétique du vide et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ la vitesse de la lumière et donc la puissance.

$$P \sim I \times \text{Section du guide} \sim 1 \text{ mW}$$

cette puissance est largement atteignable y compris en 1950 lors des premières expériences d'horloge atomique.

c) Caractérisation de cette horloge :
la variance d'Allan

Pour caractériser la stabilité de la mesure de fréquence d'une horloge, l'outil couramment utilisé est la variance d'Allan. Elle peut être utilisée pour caractériser la stabilité de mesure de n'importe quel capteur.

Supposons que nous disposons d'un ensemble de N mesures de fréquence $(y_i)_{i=1 \dots N}$ espacées toutes d'un même interval temporel τ_0 . La variance d'Allan est alors donnée par :

$$\sigma^2(\tau = n \tau_0) = \frac{1}{2(M_n - 1)} \sum_{i=1}^{M_n - 1} \left[\bar{y}_{in+1}^n - \bar{y}_{(i-1)n+1}^n \right]^2$$

avec :

$$\bar{y}_{j+m}^n = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n+j-1} y_{k+m} \quad \text{et} \quad M_n = E\left(\frac{N}{n}\right)$$

où E est la partie entière.

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{M_n - 1} \sum_{i=1}^{M_n - 1} \left[\left(\bar{y}_{in+1}^n - \frac{\bar{y}_{in+1}^n + \bar{y}_{(i-1)n+1}^n}{2} \right)^2 + \left(\bar{y}_{(i-1)n+1}^n - \frac{\bar{y}_{in+1}^n + \bar{y}_{(i-1)n+1}^n}{2} \right)^2 \right]$$

On reconnaît la moyenne sur i des écart-types deux à deux de $\bar{y}_{in+1}^n$ et $\bar{y}_{(i-1)n+1}^n$.

Preons pour exemple $\tau = 3\tau_0$

- la série de mesures $\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6 \quad \tau_7 \quad \tau_8 \quad \tau_9 \quad \tau_{10} \quad \tau_{11}$
est
- moyennage de la sorte sur une durée $3\tau_0$
 $\underbrace{\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3}_{\bar{\tau}_1^3} \quad \underbrace{\tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6}_{\bar{\tau}_4^3} \quad \underbrace{\tau_7 \quad \tau_8 \quad \tau_9}_{\bar{\tau}_7^3} \quad \underbrace{\tau_{10} \quad \tau_{11}}_{\bar{\tau}_{10}^3}$
- calcul des écart-types deux à deux
 $\underbrace{\frac{(\bar{\tau}_1^3 - \bar{\tau}_4^3)^2}{2}} \quad \underbrace{\frac{(\bar{\tau}_4^3 - \bar{\tau}_7^3)^2}{2}} \quad \underbrace{\frac{(\bar{\tau}_7^3 - \bar{\tau}_{10}^3)^2}{2}}$
- moyenne des écart-types
 $\left\langle \frac{(\bar{\tau}_k^3 - \bar{\tau}_{k+1}^3)^2}{2} \right\rangle$

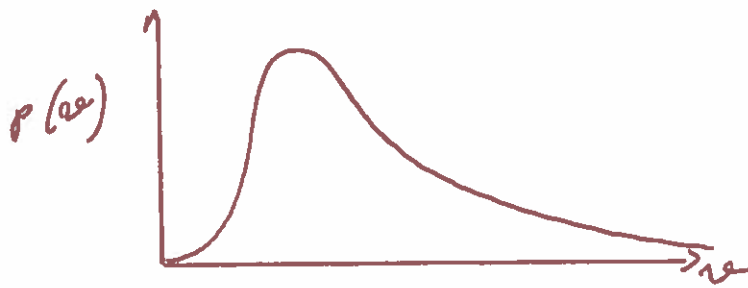
Ainsi nous obtenons la moyenne de l'écart-type d'une série de mesures moyennées sur un temps τ .

Pour un modèle commercial d'horloge à jet thermique, nous obtenons l'écart-type d'Allan suivant où nous représentons l'écart sur la fréquence normalisée par la fréquence de la transition considérée du Césium 133.

4) Effet de la température sur les franges de Ramsey

Dans notre horloge à jet le temps de Ramsey est fixé par la longueur de la cavité L et par la vitesse des atomes.

Nous avons un gaz thermique où tous les atomes n'ont pas la même vitesse mais suivent une distribution de vitesse de Boltzmann telle que représentée sur la figure suivante:



Pour différents atomes, nous avons donc différentes vitesses et donc différents temps de Ramsey donc l'espacement des franges est différent pour chaque classe de vitesses. Ainsi plusieurs jeux de franges vont se superposer et se brouiller (un peu comme lors d'interférences en lumière blanche). Comment modéliser cela?

a) Matrice densité et équation de Bloch optique

Au lieu de décrire un système atomique avec une fonction d'onde, on le décrit à l'aide d'une matrice. Par exemple pour notre système à deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ il est décrit par la matrice suivante (dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$):

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix}$$

- où :
- ρ_{aa} et ρ_{bb} sont les populations respectivement dans les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$
 - $\rho_{ab} = \rho_{ba}^*$ est la cohérence entre les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$, si $|\rho_{ab}| = 1$, les états sont parfaitement cohérents et interfèrent entre eux. Si $|\rho_{ab}| = 0$

les deux états sont incohérents et n'interfèrent pas entre eux.

$\hat{\rho}$ a les propriétés suivantes:

- $\hat{\rho}$ est hermitien $\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger}$
- $\hat{\rho}$ est normalisé tel que $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$
- $\hat{\rho}$ est positive
- la valeur moyenne de l'observable $\hat{A}$ sur le système décrit par $\hat{\rho}$ est

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})$$

- $\hat{\rho}$ obéit à l'équation de Bloch optique (ou équation de Lindblad):

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}]$$

Quelques exemples de matrice densité:

i) Pour un état pur $|\psi\rangle$ la matrice densité est donnée par $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$

~~Ex~~

Si nous prenons $|\psi\rangle = \frac{|a\rangle + e^{i\phi}|b\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{2} \left\{ |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| + e^{-i\phi} |a\rangle\langle b| + e^{i\phi} |b\rangle\langle a| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la population dans l'état $|a\rangle$ est donnée par $\text{Tr}(|a\rangle\langle a| \hat{\rho}) = \frac{1}{2}$

ii) Pour mélange statistique d'état où p_i est la probabilité d'un état $|\psi_i\rangle$ d'énergie E_i

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

Si nous prenons pour exemple un gaz thermique $p_i = \frac{e^{-E_i/kT}}{Z}$ avec $Z = \sum_i e^{-E_i/kT}$

$$\hat{\rho} = \sum_i \frac{e^{-E_i/kT}}{Z} |\psi_{E_i}\rangle \langle \psi_{E_i}|$$

b) Application à la dépendance thermique des franges de Ramsey

La distribution de la norme des vitesses des atomes de notre jet thermique suivent une loi de Boltzmann.

$$p(v) = v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \frac{1}{Z}$$

où Z est un facteur de normalisation tel que $\int p(v) dv = 1$

Notons $|\phi_v\rangle$ l'état d'un atome de vitesse v , l'état d'un atome du jet dans l'état $|a\rangle$ à la vitesse v est alors décrit par $|a\rangle |\phi_v\rangle$ (idem pour un atome dans $|b\rangle$).

Avant la première impulsion de Ramsey l'état du système est:

$$\hat{\rho} = \sum_v \frac{v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)}{Z} |a\rangle |\phi_v\rangle \langle \phi_v| \langle a|$$

Considérons pour plus de simplicité le cas $\vec{E} \ll T_R$ (voir la section 2b), le calcul se déroule exactement de la même manière que précédemment.

Après la première impulsion du Ramsey l'état du système est :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \frac{v^2}{Z} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \left\{ |a\rangle - ie^{-i\phi} |b\rangle \right\} |\phi_{\omega}\rangle \\ \times \langle \phi_{\omega}| \left\{ \langle a| + ie^{i\phi} \langle b| \right\}$$

Après le temps de Ramsey l'état du système est :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\omega} p(\omega) \left\{ |a\rangle - ie^{-i\omega_0 T_R - i\phi} |b\rangle \right\} |\phi_{\omega}\rangle \\ \times \langle \phi_{\omega}| \left\{ \langle a| + ie^{i\omega_0 T_R + i\phi} \langle b| \right\}$$

Après la seconde impulsion du Ramsey l'état du système est :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \sum_{\omega} p(\omega) |\chi\rangle |\phi_{\omega}\rangle \langle \phi_{\omega}| \langle \chi| \\ \text{où } |\chi\rangle = |a\rangle - ie^{-i\phi - i\omega T_R} |b\rangle \\ - ie^{-i\omega_0 T_R - i\phi} [-ie^{i\phi + i\omega T_R} |a\rangle + |b\rangle]$$

En sortie de l'interféromètre nous obtenons donc :

$$P_a = \text{Tr}(|a\rangle \langle a| \hat{\rho}) \\ = \frac{1}{2} \int d\omega p(\omega) [1 - \cos(\omega_0 - \omega) T_R]$$

$$P_a = \frac{1}{2} \int d\nu p(\nu) \left\{ 1 - \cos \left[(\omega_0 - \omega) \frac{L}{v} \right] \right\}$$

On retrouve bien une superposition de franges dont la période dépend de la vitesse et dont la pondération est donnée par la loi de Boltzmann.

Nous pouvons généraliser aisément le résultat précédent en tenant compte de la durée du pulse de Rabi (à l'instar de la section 2.c)

Dans ce cas nous avons :

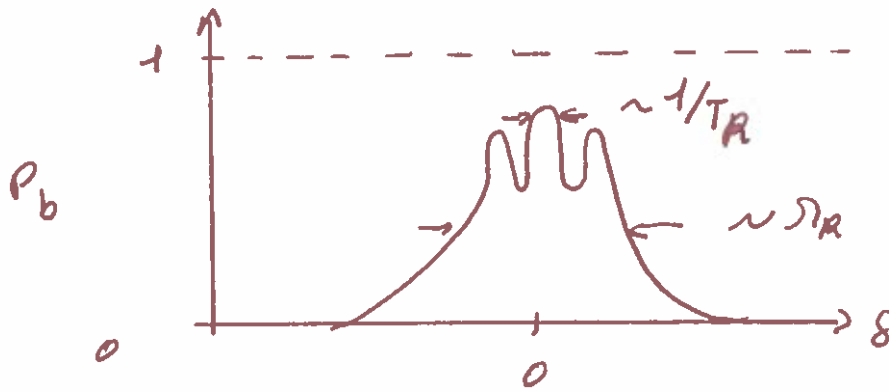
- le temps de Ramsey $T_R = L/v$
- la durée d'une impulsion $\pi/2$ $\tau = L_{int}/v$

La population dans l'état $|a\rangle$ est

$$\underline{P}_a = \int d\nu p(\nu) P_a$$

$$\text{avec } P_a = \left| \left[\cos\left(\Omega \frac{L_{int}}{v}\right) - i \frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\Omega \frac{L_{int}}{v}\right) \right]^2 - e^{i\delta L/v} \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\Omega \frac{L_{int}}{v}\right) \right|^2$$

Nous obtenons donc les franges de Ramsey de la figure suivante, qui coïncident bien avec celles mesurées expérimentalement sur une horloge à jet thermique.



Nous allons voir dans le chapitre suivant comment faire mieux en refroidissant les atomes avant de faire l'interférométrie de Ramsey.

Chapitre 2

Atomes froids, refroidissement laser et fontaine de Zacharias

Nous voulons améliorer la sensibilité de l'horloge à jet thermique, pour rappel cette sensibilité dépend de la largeur des franges de Ramsey qui est en $1/T_R$ où T_R est le temps de Ramsey. Comme $1/T_R \sim v_{th}/L$ il faut soit ralentir les atomes (diminuer v_{th}) soit augmenter L .

Supposons qu'on veuille une frange de 1 Hz de large, c'est à dire un temps de Ramsey de 1 s.

Si la cavité fait un mètre de longueur il faut des atomes à $v_{th} = 1 \text{ m/s}$, c'est à dire à une température $T \sim m v_{th}^2 / k_B \sim 10 \text{ mK}$

Si la température des atomes de Césium à la sortie du four est 400 K, ils ont une vitesse de 200 m/s, il faut donc une cavité de 200 m de longueur, ce qui n'est pas trop réaliste !

Il faut donc refroidir les atomes pour atteindre des températures inférieures au mK tout en gardant les atomes dans un état gazeux. Pour cela nous utilisons le refroidissement laser.

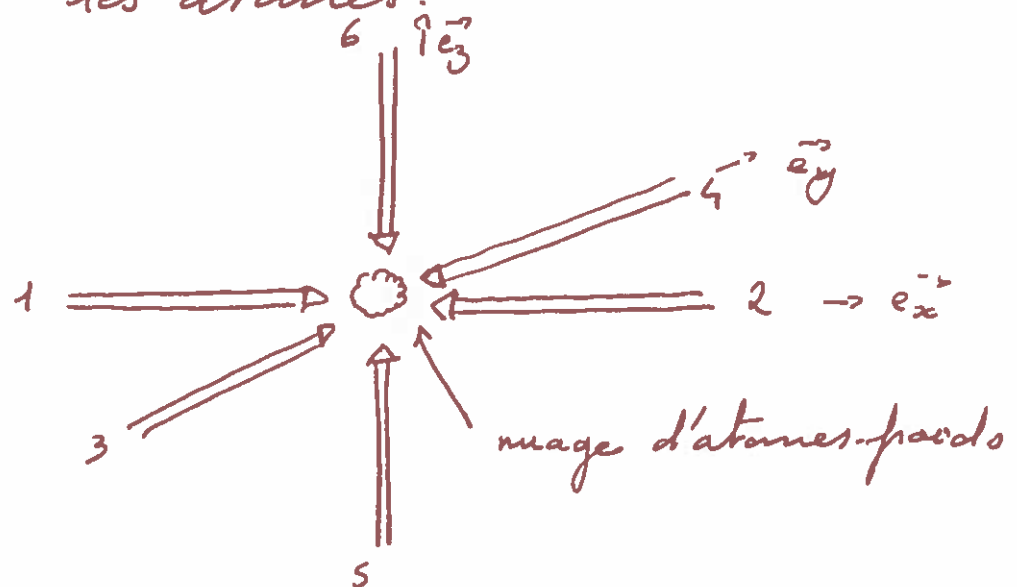
1) le refroidissement par laser : le piège magnéto-optique

Qu'est ce qu'un piège magnéto-optique ?

c'est : i) trois paires de lasers qui vont exercer une force sur les atomes, c'est une force analogue à une force de friction qui ralentit les atomes, ii) un gradient de champ magnétique de la forme

$$\vec{B} = B'_x x \vec{e}_x - \frac{B'_x}{2} y \vec{e}_y - \frac{B'_x}{2} z \vec{e}_z$$

qui exerce une force de rappel sur les atomes.

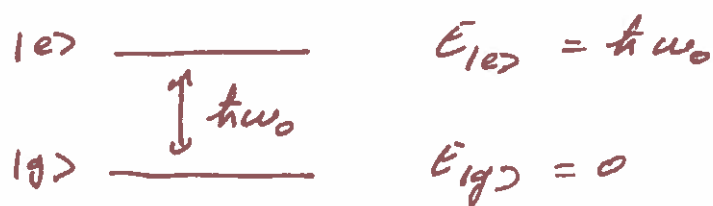


Dans toute la suite nous considérons uniquement un problème à une dimension (nous gardons z) pour simplifier l'exposé

a) un premier modèle simple

Considérons (c'est une bonne approximation pour le refroidissement des atomes alcalins)

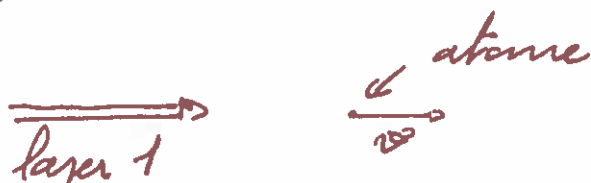
que notre atome est un système à deux niveaux tel que représenté sur la figure suivante :



Pour l'instant nous oublions le champ magnétique. On considère aussi que la pulsation du laser est en accord avec $\omega < \omega_0$.

b) la pression de radiation

Considérons uniquement le laser 1 et que notre atome se déplace à une vitesse $\vec{v} \vec{e}_x$.



L'atome absorbe un photon du laser 1 et l'impulsion du photon est transférée à l'atome. La nouvelle vitesse de l'atome est alors $\vec{v} + \frac{\hbar \vec{k}_{\text{laser 1}}}{m}$. L'atome va réémettre

un photon avec un vecteur d'onde $\vec{k}_{\text{em}}$ qui a une direction aléatoire dans l'espace. La vitesse de l'atome est alors :

$$\vec{v} + \frac{\hbar \vec{k}_{\text{laser 1}}}{m} - \frac{\hbar \vec{k}_{\text{em}}}{m}$$

Après N cycles absorption - émission (où N est très grand) la vitesse de l'atome est :

$$\vec{E} + N \frac{\hbar \vec{k} a_0}{m} + 0$$

31

car l'impulsion moyenne des N photons émis est nulle.

On peut donc exercer une force avec le laser 1 sur l'atome : c'est la pression de radiation.

note: nous avons ici négligé l'émission stimulée. Cette approximation est valable si la puissance laser est faible (dans une annexe nous irons au détail de cette approximation)

Nous pouvons écrire la force de pression de radiation sous la forme suivante:

$$\vec{F} = \underbrace{\hbar \vec{k}}_{\text{impulsion transmise par le photon absorbé}} \underbrace{\Gamma_{ee}}_{\substack{\text{population dans l'état excité} \\ \text{largeur de la raie atomique utilisée en s}^{-1}}}$$

Γ_{ee} : taux d'émission spontanée

Pour expliciter l'expression de la force il nous faut écrire Γ_{ee} . Pour cela il faut résoudre les équations de Bloch optique pour le couplage atome-laser en présence d'émission spontanée.

Du fait de l'effet Doppler l'atome voit le laser à la pulsation $\omega - kv$ et l'hamiltonien du système atome + laser est:

$$H = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| + \hbar\Omega_R \cos[(\omega - kv)x] (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$$

En utilisant le changement de variable du chapitre 1 section 1.a ainsi qu'en négligeant les termes en $\omega + \omega_0$, nous aboutissons à l'hamiltonien (dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$):

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_R e^{i\delta t} \\ \Omega_R e^{-i\delta t} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \delta = \omega - kv - \omega_0$$

pour rappel Ω_R est relié à l'amplitude du champ laser.

Pour avoir un hamiltonien indépendant du temps nous nous plaçons dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire $\delta/2$. Pour cela nous appliquons la transformation unitaire

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i\delta t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta t/2} \end{pmatrix}$$

à notre hamiltonien, notre nouvel hamiltonien est alors

$$\begin{aligned} & U^\dagger H U + i\hbar \frac{dU}{dt} U^\dagger \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_R \\ \Omega_R & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta & \Omega_R \\ \Omega_R & -\delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

note: la transformation unitaire précédente est analogue à la formule de Bour en mécanique, permettant de calculer la

dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{B}$ dans un référentiel R à partir de la dérivée temporelle du vecteur $\vec{B}$ dans R' et de la vitesse de rotation de R' par rapport à R

$$\vec{\Omega}_{A'/A} \frac{d\vec{B}}{dt}|_R = \frac{d\vec{B}}{dt}|_{A'} + \vec{\Omega}_{A'/A} \wedge \vec{B}$$

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger \quad \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger$$

nous avons donc tous les éléments pour résoudre l'équation de Bloch optique en incluant l'émission spontanée de $|e\rangle$ vers $|g\rangle$

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] + \frac{\Gamma}{2} \begin{pmatrix} 2\rho_{ee} & -\rho_{eg} \\ -\rho_{ge} & -2\rho_{ee} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{ee} \end{pmatrix}$$

il est facile de calculer le commutateur $[\hat{\rho}, \hat{H}]$

$$[\hat{\rho}, \hat{H}] = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Omega_A (\rho_{eg} - \rho_{ge}) & \Omega_A (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - 2\delta \rho_{eg} \\ \Omega_A (\rho_{ee} - \rho_{gg}) + 2\delta \rho_{ge} & \Omega_A (\rho_{ge} - \rho_{eg}) \end{pmatrix}$$

donc pour les populations nous avons:

$$\dot{\rho}_{gg} = \frac{i\Omega_A}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) + \Gamma \rho_{ee}$$

$$\dot{\rho}_{ee} = -\frac{i\Omega_A}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) - \Gamma \rho_{ee}$$

et pour les cohérences:

$$\dot{\rho}_{eg} = i \frac{\Omega_R}{2} (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - i \delta \rho_{eg} - \frac{\Gamma}{2} \rho_{eg}$$

$$\dot{\rho}_{ge} = -i \frac{\Omega_R}{2} (\rho_{gg} - \rho_{ee}) + i \delta \rho_{ge} - \frac{\Gamma}{2} \rho_{ge}$$

Pour calculer la force, nous considérons que le laser est allumé depuis longtemps devant l'atome et donc nous cherchons les solutions stationnaires des équations précédentes. Après quelques logues de calcul:

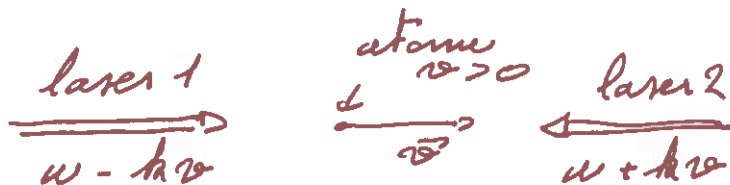
$$\rho_{ee} = \frac{\Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + 4\delta^2 + \Gamma^2}$$

et donc la force:

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma \Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + 4\delta^2 + \Gamma^2}$$

c) Le refroidissement laser

Considérons maintenant nos deux lasers 1 et 2:



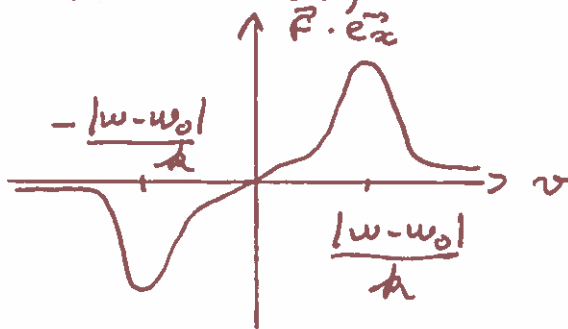
Du fait de l'effet Doppler (nous sommes toujours dans le référentiel du laboratoire) l'atome voit le laser 1 à la pulsation $w - kv$ et le laser 2 à la pulsation $w + kv$.

Comme $\omega < \omega_0$, dans le cas où $v > 0$
 $|\delta_{\text{laser}2}| = |\omega + kv - \omega_0| < |\delta_{\text{laser}1}| = |\omega - kv - \omega_0|$ et donc
 la force exercée par le laser 2 est plus importante
 que celle exercée par le laser 1. La force totale
 est donc dans la direction opposée au
 mouvement de l'atome, donc nous ralentissons
 l'atome. Dans le cas contraire $v < 0$, on
 a $|\delta_{\text{laser}2}| > |\delta_{\text{laser}1}|$ et la force est toujours
 dans la direction opposée au mouvement
 de l'atome qui est donc aussi ralenti.

La force totale s'exprime sous la forme:

$$\vec{F} = \hbar k \Gamma \Omega_R^2 \left\{ \frac{1}{2\Omega_R^2 + 4(\omega - kv - \omega_0)^2 + \Gamma^2} - \frac{1}{2\Omega_R^2 + 4(\omega + kv - \omega_0)^2 + \Gamma^2} \right\} \vec{e}_x$$

Si nous traçons $\vec{F} \cdot \vec{e}_x$ nous obtenons



$\frac{|\omega - \omega_0|}{k} = v_c$ est appelé la vitesse de
 capture en effet pour $v > v_c$ le ralentissement
 n'est plus efficace.

Typiquement pour le Rubidium et le Césium
 v_c est de l'ordre de 5 m/s soit 200 mK.
 (nous avons pris $\omega - \omega_0 \approx \Gamma$, c'est typiquement le
 cas au les expériences de refroidissement).

36

et pour le Rubidium $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 780 \text{ nm}$ et $m = 1,44 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$
et pour le Césium $\lambda \approx 850 \text{ nm}$ et $m = 2,2 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$

Nous pouvons aussi voir le refroidissement précédent sous la forme énergétique. L'atome absorbe des photons à l'énergie $\hbar\omega$ et émet des photons à l'énergie $\hbar\omega_0$. Comme $\omega < \omega_0$ à chaque cycle d'absorption émission l'atome perd une énergie $\hbar(\omega - \omega_0)$ et donc son agitation thermique diminue.

d) Le piège magnéto-optique

On réintroduit le champ magnétique de la section 1 de ce même chapitre.

Considérons que notre niveau fondamental $|g\rangle$ n'a pas de dégénérescence Zeeman, par contre notre niveau excité $|e\rangle$ est dégénéré en deux niveaux Zeeman notés $|+\rangle$, ayant un moment magnétique $+\mu$ positif, et $|-\rangle$, ayant un moment magnétique $-\mu$ négatif.

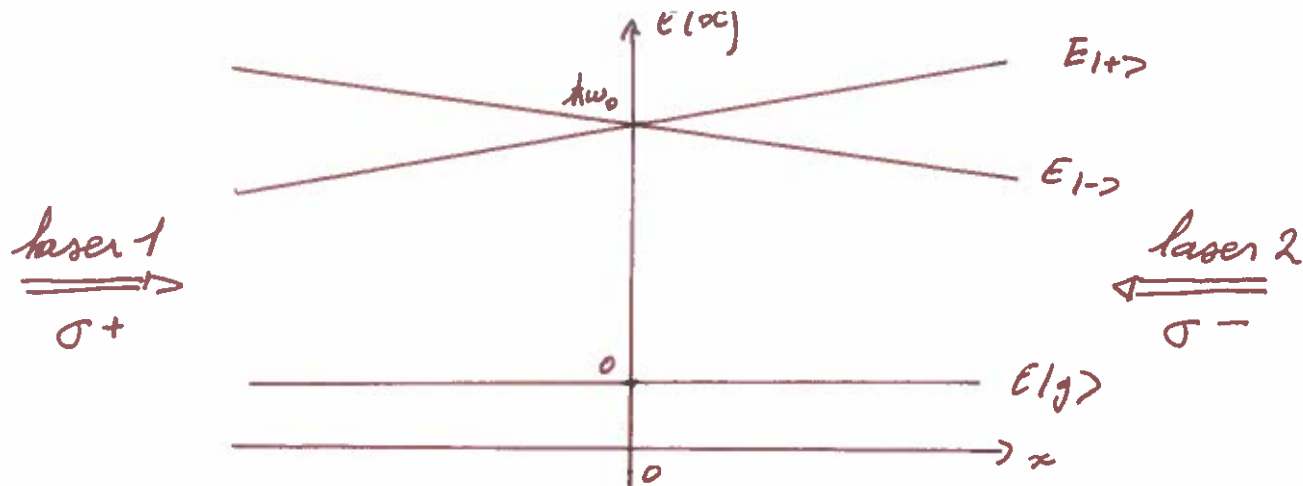
L'énergie de nos trois niveaux est alors :

$$E_{|+\rangle} = \hbar\omega_0 + \mu B'_x x$$

$$E_{|-\rangle} = \hbar\omega_0 - \mu B'_x x$$

$$E_{|g\rangle} = 0$$

Ces énergies sont représentées sur la figure de la page suivante :



Le laser 1 est polarisé σ^+ et ainsi induit des transitions entre $|g\rangle$ et $|1+\rangle$.

Le laser 2 est polarisé σ^- et ainsi induit des transitions entre $|g\rangle$ et $|1-\rangle$.

Pourquoi introduire ce champ magnétique? La force de pression de radiation exprimée dans la section 1.c de ce même chapitre est invariante par translation. On veut briser cette invariance pour, en plus de ralentir les atomes, les concentrer en une région de l'espace.

Exprimons les forces exercées par les lasers 1. et 2. Pour le laser 1:

$$\vec{F}_1 = \frac{\hbar \hbar \Gamma \Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + \Gamma^2 + 4(\omega - \omega_0 - \hbar kx - \frac{\mu B'_x}{\hbar})^2} \vec{e}_x$$

Pour le laser 2:

$$\vec{F}_2 = - \frac{\hbar \hbar \Gamma \Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + \Gamma^2 + 4(\omega - \omega_0 + \hbar kx + \frac{\mu B'_x}{\hbar})^2} \vec{e}_x$$

Plaçons nous dans le cas $x=0$, si $x < 0$ $\|\vec{F}_1\|$ est plus fort que $\|\vec{F}_2\|$, donc on repousse l'atome vers $x=0$. Si $x > 0$ $\|\vec{F}_2\|$ est plus fort que $\|\vec{F}_1\|$, donc on repousse l'atome vers $x=0$.

Le champ magnétique sert donc à concentrer les atomes au voisinage de $x=0$.

Pour comprendre un peu plus le comportement de cette force, on fait un développement limité de F_1 et F_2 en x et v proche de zéro à l'ordre 1.

$$\vec{F}_1 \simeq \frac{\hbar k \Gamma \Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + \Gamma^2 + 4(\omega - \omega_0)^2} \left(1 + d k v + d \frac{\mu B'_x}{\hbar} x \right) \vec{e}_x$$

$$\text{avec } d = \frac{8(\omega - \omega_0)}{2\Omega_R^2 + \Gamma^2 + 4(\omega - \omega_0)^2}$$

$$\vec{F}_2 \simeq -\frac{\hbar k \Gamma \Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + \Gamma^2 + 4(\omega - \omega_0)^2} \left(1 - d k v - d \frac{\mu B'_x}{\hbar} x \right) \vec{e}_x$$

donc la force totale :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{\hbar k \Gamma \Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + \Gamma^2 + 4(\omega - \omega_0)^2} \left(2d k v + 2d \frac{\mu B'_x}{\hbar} x \right) \vec{e}_x$$

Nous avons donc une force de friction proportionnelle à la vitesse et une force de rappel proportionnelle à x . L'atome dans le piège magnéto-optique, c'est un oscillateur amorti où l'amortissement est donné par le laser et l'oscillation par le champ magnétique.

2) le refroidissement laser, vers une dérivation plus rigoureuse de la force

Dans notre dérivation précédente de la force nous avons considéré deux systèmes disjoints: 1) le laser 1 et l'atome, 2) le laser 2 et l'atome. Puis nous avons sommé les deux forces trouvées cela n'est juste que si la puissance laser S_R est faible devant Γ . Cette hypothèse est rarement vérifiée expérimentalement. Nous devons donc considérer un seul système contenant les deux lasers et l'atome.

Pour ce faire nous introduisons l'opérateur force $\vec{F}$ sous la forme:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

et $\frac{d\vec{p}}{dt}$ est donné par

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \vec{p}]$$

où $\vec{p}$ est l'impulsion de l'atome et $\hat{H}$ l'hamiltonien du système {deux lasers et atome}.

$\hat{H}$ est donné par

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m}}_{\substack{\uparrow \\ \text{impulsion} \\ \text{de l'atome}}} + \underbrace{\hbar \Omega_R e^{i\vec{k}x - i\omega t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{laser 1}}} \{ |g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g| \} + \underbrace{\hbar \Omega_R e^{-i\vec{k}x - i\omega t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{laser 2}}} \{ |g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g| \}$$

la force moyenne est donnée par

$$\langle \vec{F} \rangle = \text{Tr} (\vec{F} \hat{\rho})$$

où $\hat{\rho}$ est la matrice densité décrivant notre système et est solution de l'équation de Bloch optique :

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{1}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] + \frac{\Gamma}{2} \begin{pmatrix} 2\rho_{ee} - \rho_{eg} \\ -\rho_{ge} - 2\rho_{ee} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{ee} \end{pmatrix}$$

Avoir gardé l'impulsion de l'atome dans l'hamiltonien du système est plus rigoureux mais complexifie beaucoup la résolution de l'équation de Bloch optique. Toutefois cela évite de réintroduire "à la main" la vitesse de l'atome via l'effet Doppler.

Une manière de résoudre ces équations est donnée dans l'article Letokhov et al. JETP 45 p698-705 (1977), les détails sont donnés en annexe de ce cours.

3) Notion de température limite de refroidissement

La norme des impulsions des photons émis spontanément par l'atome lors des cycles de refroidissement n'est pas constante. En effet à chaque émission spontanée de photon la fréquence du photon est tirée

aléatoirement suivant une loi lorentzienne de moyenne ω_0 et de largeur Γ

$$L(\omega) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2}$$

On a donc une dispersion des photons émis de largeur $\hbar\Gamma$ en énergie, ce qui inclut une dispersion en énergie cinétique minimum des atomes de l'ordre de

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \sim \hbar\Gamma$$

et donc $T_{\min} \sim \frac{\hbar\Gamma}{k_B}$ k_B : constante de Boltzmann

En toute rigueur, il est possible de montrer que la température minimum pouvant être atteinte est halguc

$$k_B T_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{2} \left(\frac{2|\delta\omega - \omega_0|}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{2|\omega - \omega_0|} \right)$$

qui est minimum pour le choix $|\omega - \omega_0| = \frac{\Gamma}{2}$

et donc $T_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B}$ qui est de

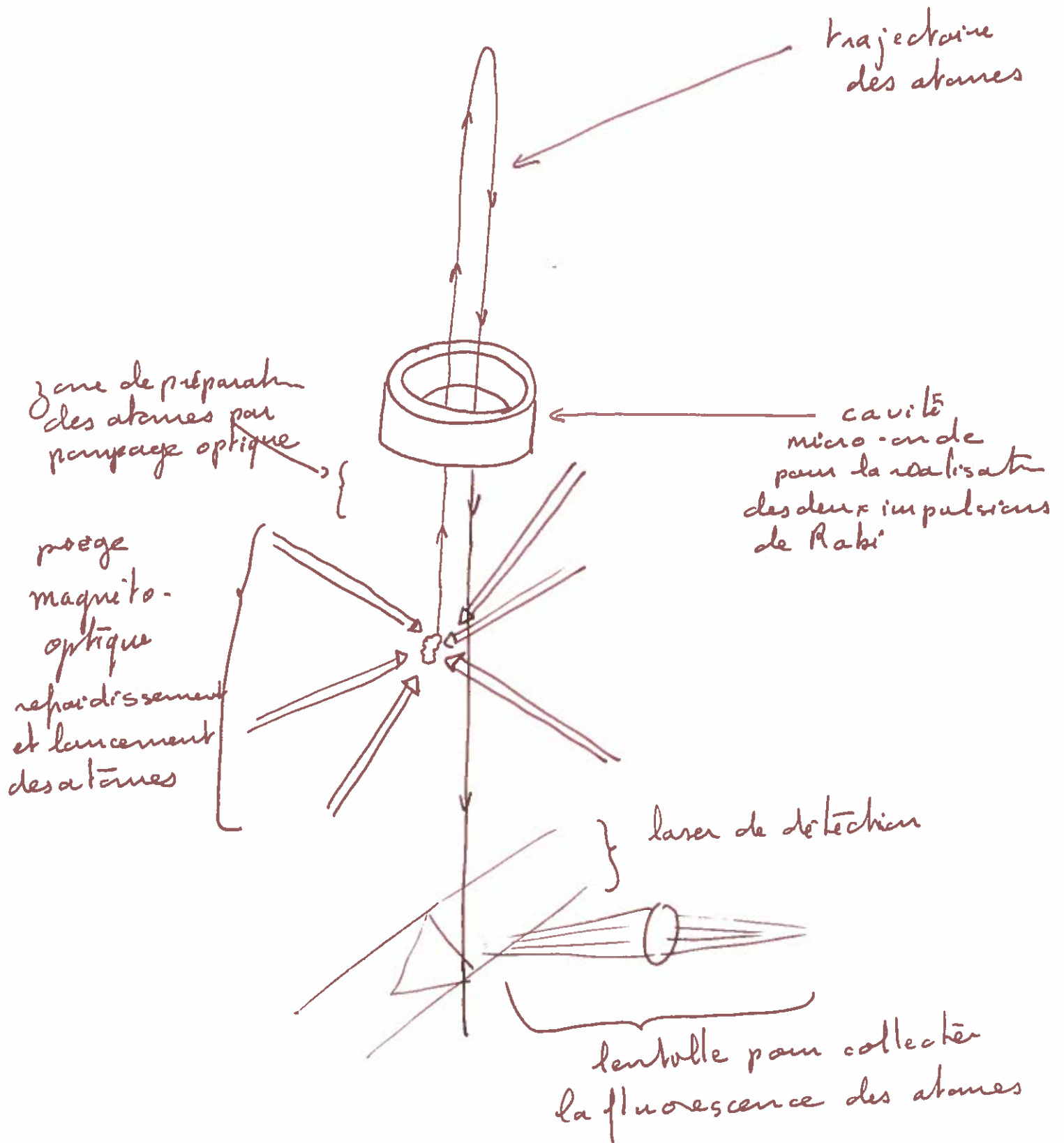
l'ordre de 140 μK pour le rubidium, et de 120 μK pour le césium. Cette température s'appelle la limite Doppler.

h) Application : la fontaine de Zacharias

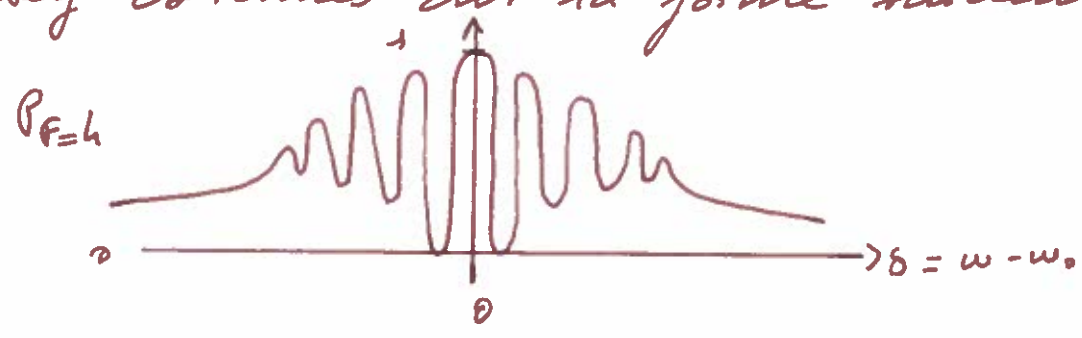
Une fontaine atomique de Zacharias est représentée sur la figure de la page suivante.

On considère les mêmes atomes de Césium que pour notre horloge à jet thermique. Les atomes sont d'abord refroidis dans le piège magnito-optique par trois paires de faisceaux lasers.

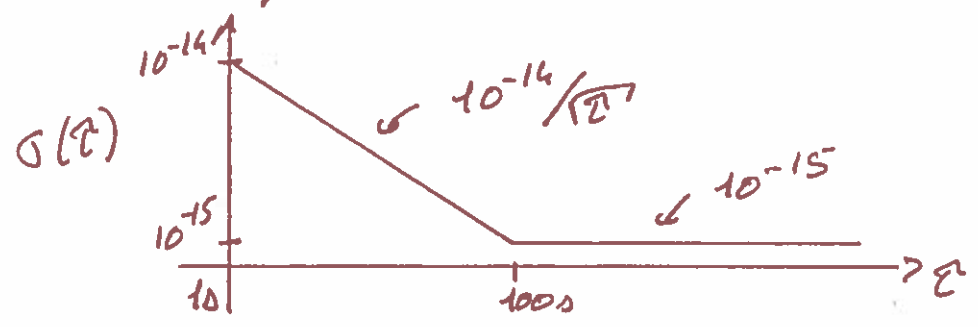
Une fois les atomes refroidis le champ magnétique est coupé, la fréquence des lasers du piège pivotant vers le bas est légèrement diminuée, celle des lasers pivotant vers le haut est légèrement augmentée. Cela a pour effet d'exercer une force vers le haut (c'est toujours la pression de radiation) et donc de lancer les atomes vers le haut. Ensuite, au niveau de la zone de préparation, les atomes sont pompés optiquement vers le niveau $F=3$. Ils continuent leur trajectoire vers le haut et passent une première fois par la cavité micro-onde, cela fait la première impulsion de Rabi. Quand ils passent dans la cavité, ils ont une vitesse $g T_R/2$ où g est l'accélération de la pesanteur et T_R le temps de Ramsey. A $T_R/2$, ils atteignent l'apex de leur trajectoire. Ils commencent alors à tomber pour finalement passer une deuxième fois, à $t = T_R$, dans la cavité micro-onde, cela fait la seconde impulsion



de Rabi. Enfin le nombre d'atomes dans $F=4$ est compté par fluorescence. Les franges de Ramsey obtenues ont la forme suivante:



La variance d'Allan typique d'une telle horloge est :



La fontaine de Zacharias est la technique utilisée actuellement pour la réalisation des étalons primaires de fréquence.

Chapitre 3

Refroidir au-delà de la limite Doppler

Il est possible de refroidir les atomes à une température plus basse que la limite Doppler. Pour cela nous allons décrire deux autres techniques : le refroidissement Sisyphus et le refroidissement par évaporation dans un piège magnétique.

1) Introduction au refroidissement Sisyphus

a) Les déplacements lumineux

Comme nous l'avons vu précédemment (chapitre 2, section 1.6) l'hamiltonien de notre atome à deux niveaux avec couplage laser, peut s'écrire dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta & \Omega_R \\ \Omega_R^* & -\delta \end{pmatrix}$$

Les énergies propres de cet hamiltonien sont :

$$E_{|+\rangle} = + \frac{\hbar}{2} \sqrt{\delta^2 + \Omega_R^2}$$

$$E_{|-\rangle} = - \frac{\hbar}{2} \sqrt{\delta^2 + \Omega_R^2}$$

et sont associées aux vecteurs propres suivants :

$$|+\rangle = \cos \theta |g\rangle + \sin \theta |e\rangle$$

$$|-\rangle = \sin \theta |g\rangle - \cos \theta |e\rangle$$

avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan(2\theta) = \frac{\Omega R}{\delta}$

Plaçons nous dans la limite $|\delta| \gg R$:

. cas 1 $\delta > 0$

$$\text{donc } \tan 2\theta \sim 2\theta \sim \frac{\Omega}{\delta}$$

$$\text{et } \cos \theta \sim 1 \text{ et } \sin \theta \sim \theta \sim \frac{\Omega}{2\delta}$$

$$\text{nous avons donc } |+\rangle \simeq |g\rangle + \frac{\Omega}{2\delta} |e\rangle \simeq |g\rangle$$

$$\text{qui a pour énergie } E_+ = +\frac{\hbar}{2} \delta + \frac{\hbar}{4} \frac{\Omega R^2}{\delta}$$

Ainsi l'état fondamental de notre atome s'identifie à $|+\rangle$ et son énergie est décalée de $\frac{\hbar}{2} (\delta + \frac{\Omega R^2}{2\delta})$

. cas 2 $\delta < 0$

$$\text{donc } \tan(2\theta) \rightarrow 0^- \text{ donc } \theta \sim \frac{\pi}{2} + \frac{\Omega}{2\delta}$$

$$\text{donc } \cos \theta \sim -\frac{\Omega}{2\delta} \text{ et } \sin \theta \sim 1$$

$$\text{nous avons donc } |-\rangle \simeq |g\rangle + \frac{\Omega}{2\delta} |e\rangle \simeq |g\rangle$$

$$\text{qui a pour énergie } E_- = -\frac{\hbar}{2} |\delta| - \frac{\hbar}{4} \frac{\Omega R^2}{|\delta|}$$

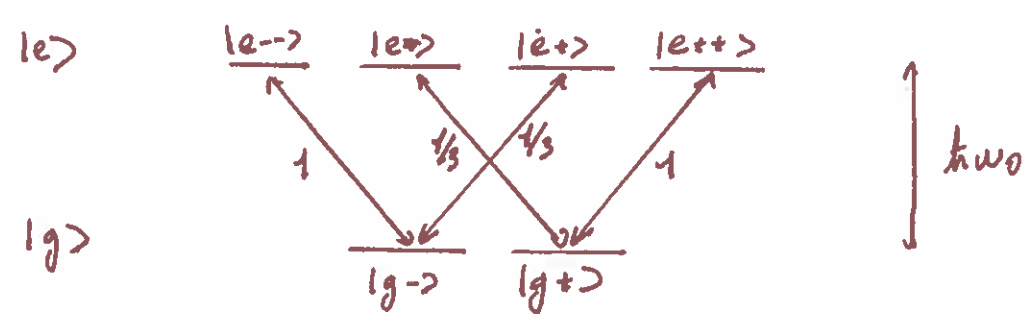
Ainsi l'état fondamental de notre atome s'identifie à $|-\rangle$ et son énergie est décalée de $-\frac{\hbar}{2} (|\delta| + \frac{\Omega R^2}{|\delta|})$

Cette augmentation (respectivement diminution) de l'énergie de l'état fondamental de l'atome est induite par un champ laser désaccordé positivement (respectivement

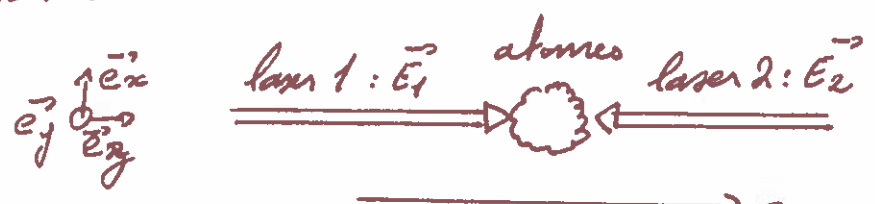
désaccordé négativement). Ces déplacements d'énergie sont appelés déplacements lumineux.

b) Un modèle simple de l'effet Sisyphes

Considérons un atome avec la structure suivante (il s'agit d'une version simplifiée de la transition utilisée pour le refroidissement du Rubidium ou du Césium):



Cet atome est éclairé par deux lasers contra-propageant comme illustré sur la figure suivante:



avec

$$\vec{E}_1 = \Omega_R e^{i\omega t + i k z} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_2 = \Omega_R e^{i\omega t - i k z} \vec{e}_y$$

le champ laser total est:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\Omega_R e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} \left(\vec{e}_- \cos(kz) - i \vec{e}_+ \sin(kz) \right)$$

avec $\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp \vec{e}_x - i \vec{e}_y)$ qui est une

base de polarisation circulaire

La polarisation du champ total varie avec z . Pour $z=0$ elle est circulaire gauche, pour $z=\pi/4k$ elle est linéaire, pour $z=\pi/2k$ elle est circulaire droite et pour $z=3\pi/4k$ elle est de nouveau linéaire.

Considérons que $\omega < \omega_0$, c'est à dire $\delta < 0$ et que notre atome est dans un des deux états fondamentaux $|g-\rangle$ ou $|g+\rangle$.

Si l'atome est dans $|g-\rangle$, nous avons vu au paragraphe précédent que son énergie est déplacée d'un certain déplacement lumineux que nous calculons.

Si on considère le système $\{|g-\rangle, |e--\rangle\}$ le déplacement lumineux est:

$$-\frac{\hbar}{2} |\delta| - \frac{\hbar}{4} \frac{\Omega^2}{|\delta|} \cos^2(kz)$$

on a considéré uniquement la partie polarisée circulaire gauche du champ total car la transition $|g-\rangle \rightarrow |e--\rangle$ est σ^- .

Si on considère le système $\{|g-\rangle, |e+\rangle\}$ le déplacement lumineux est:

$$-\frac{\hbar}{2} |\delta| - \frac{\hbar}{4} \frac{1}{|\delta|} \left(\frac{1}{3} \Omega\right)^2 \sin^2(kz)$$

on a considéré uniquement la partie polarisée circulaire droite du champ total car la transition $|g-\rangle \rightarrow |e+\rangle$ est σ^+ .

En première approximation, on peut considérer que le champ déplacement lumineux total de $|g-\rangle$ est la somme des deux précédents:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar}{2} |\delta| (1+1) - \frac{\hbar}{4} \frac{\Omega_R^2}{|\delta|} \left(\cos^2 k_z + \frac{1}{g} \sin^2 k_z \right) \\
 & = -\hbar |\delta| - \frac{\hbar}{4} \frac{\Omega_R^2}{|\delta|} + \frac{2}{g} \frac{\Omega_R^2}{|\delta|} \sin^2 k_z
 \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on peut calculer le déplacement lumineux de $|g+\rangle$

$$-\hbar |\delta| - \frac{\hbar}{4} \frac{\Omega_R^2}{|\delta|} + \frac{2}{g} \frac{\Omega_R^2}{|\delta|} \cos^2 k_z$$

Après avoir calculé les énergies de $|g-\rangle$ et $|g+\rangle$ qui dépendent de z et sont en opposition de phase, calculons les populations de $|g-\rangle$ et $|g+\rangle$ qui vont aussi dépendre de z et être en opposition de phase.

Le taux de pompage optique de $|g+\rangle$ vers $|g-\rangle$ est :

$$\gamma_{+\rightarrow-}(z) \propto \Gamma \frac{\frac{1}{2} \Omega_R^2(z)}{\frac{1}{2} \Omega_R^2(z) + \delta^2} \quad \text{car avec } \Omega_R^2(z) = \Omega_R^2 \cos^2(k_z z)$$

on se place dans le cas $\delta > \Omega_R$ (ce qui était déjà le cas pour écrire les déplacements lumineux et donc

$$\gamma_{+\rightarrow-}(z) \propto \Gamma \cos^2(k_z z)$$

De manière analogue on peut montrer que le taux de pompage optique de $|g-\rangle$ vers $|g+\rangle$ est :

$$\gamma_{-\rightarrow+}(z) \propto \Gamma \sin^2(k_z z)$$

Nous avons donc les équations suivantes qui décrivent l'évolution des populations dans $|g-\rangle$ et $|g+\rangle$:

$$\begin{cases} \frac{dP_+}{dt} = -\sigma_{+ \rightarrow -}(z) P_+ + \sigma_{- \rightarrow +}(z) P_- \\ \frac{dP_-}{dt} = \sigma_{+ \rightarrow -}(z) P_+ - \sigma_{- \rightarrow +}(z) P_- \end{cases}$$

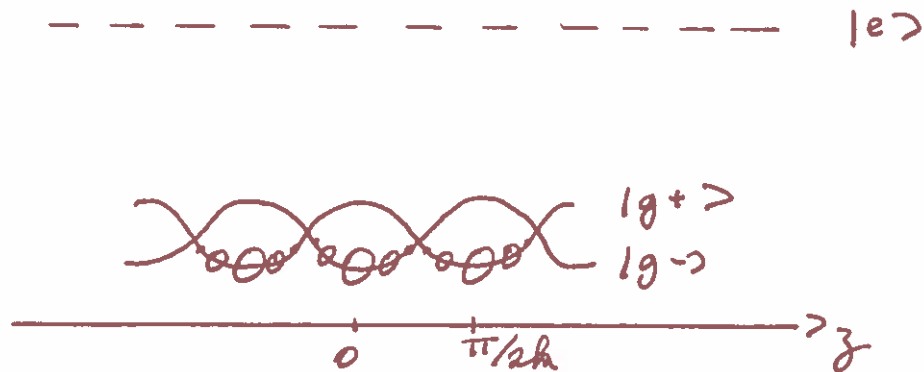
Les solutions stationnaires de ce système sont telles que :

$$\sigma_{+ \rightarrow -}(z) P_+ = \sigma_{- \rightarrow +}(z) P_-$$

$$\text{d'où } \begin{cases} P_-(z) = \cos^2(kz) \\ P_+(z) = \sin^2(kz) \end{cases}$$

Comment utiliser des deux résultats précédents pour refroidir un atome ?

Tracons la variation spatiale des énergies de $|g-\rangle$ et $|g+\rangle$ et représentons dessus la population de ces deux niveaux (le diamètre du disque est proportionnel à la population du niveau) :



Considérons un atome qui se déplace dans le sens des z croissants et qui, au départ, est en $z=0$. En $z=0$ cet atome est dans le niveau $|g-\rangle$ car la lumière est polarisée σ^- . Il avance vers $z = \pi/2k$ où la lumière est polarisée σ^+ ce qui pompe l'atome vers $|g+\rangle$. En $z = \pi/2k$ l'énergie de $|g-\rangle$ est plus élevée que celle de $|g+\rangle$. L'atome une fois dans $|g+\rangle$ a donc perdu de l'énergie pendant le processus de pompage.

ce qui a pour effet de ralentir l'atome et donc de le refroidir. 51

L'atome est donc sans arrêt entraîné de monter des collines de potentiel et dès qu'il arrive en haut de la colline il est pompé vers l'autre état et se retrouve en bas d'une nouvelle colline de potentiel qu'il va gravir, d'où le nom d'effet Sisyphé (d'après le mythe grec).

c) Limite du refroidissement Sisyphé

Pour monter une colline de potentiel (et donc être refroidi) l'atome doit avoir une énergie au minimum de l'ordre de $\hbar^2 \Delta^2 / 18$, les températures inférieures à

$$T_{\min} \sim \frac{\hbar^2 \Delta^2}{k_B 18}$$

ne sont donc pas accessibles par ce processus de refroidissement.

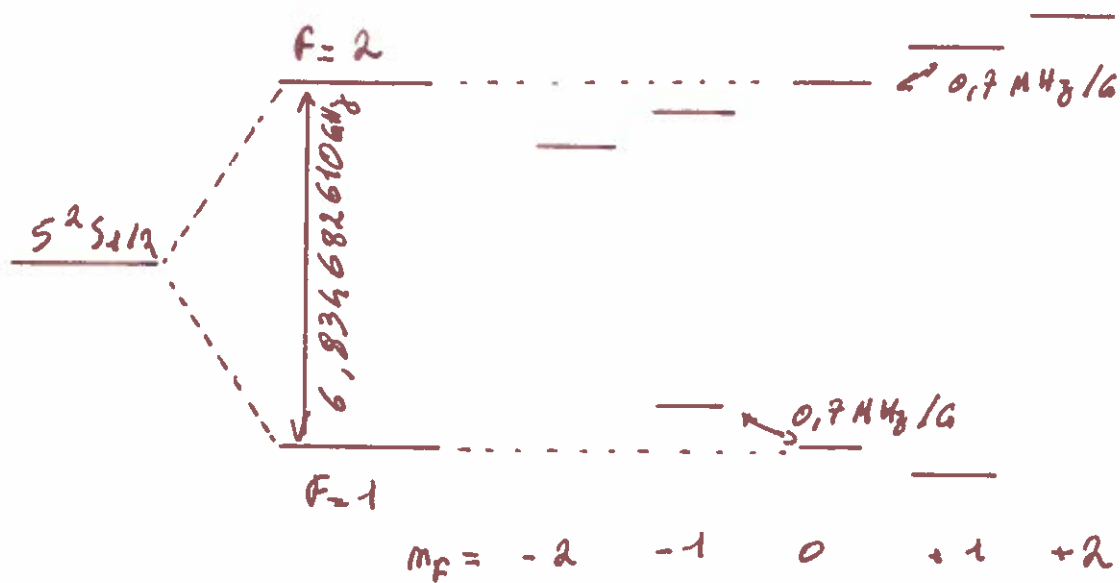
En pratique pour des atomes de Rubidium ou de Césium les températures obtenues sont entre 1 μ K et 20 μ K.

2) Le piègeage magnétique et le refroidissement par évaporation

a) Le piège magnétique

Considérons un atome par exemple de Rubidium. Le niveau fondamental du Rubidium, $5^2S_{1/2}$, présente deux niveaux hyperfins $F=1$ et $F=2$.

qui ont eux-mêmes des sous-niveaux Zeeman.
Ces niveaux sont représentés sur la figure suivante :



Le champ magnétique modifie l'énergie d'un atome dans l'état $|F, m_F\rangle$ d'une quantité :

$$E_{F, m_F} = \mu_B g_F m_F \|\vec{B}\|$$

avec $g_{F=1} = -1/2$ et $g_{F=2} = 1/2$

note : cette expression est écrite sous l'hypothèse que la vitesse de l'atome est telle que l'orientation de son spin à le temps de suivre l'orientation du champ magnétique, c'est à dire :

$$\underbrace{|\omega \vec{v} \theta|}_{\text{}} \ll \frac{|g_F m_F| \mu_B \|\vec{B}(r)\|}{\hbar}$$

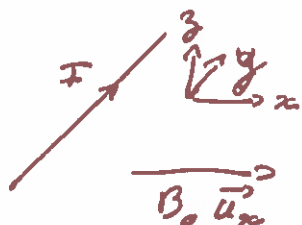
↳ vitesse de changement de la direction de $\vec{B}(r)$ vue par les atomes à la vitesse v

Considérons que le module de notre champ magnétique est de la forme $||\vec{B}|| = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2$.

Ainsi pour les atomes dans $|2, -2\rangle, |2, -1\rangle$ et $|1, 1\rangle$, $E_{p, mp}$ a la forme d'une colline de potentiel et les atomes sont repoussés vers les maximum du champ magnétique. Pour les atomes dans $|2, 2\rangle, |2, 1\rangle$ et $|1, -1\rangle$, $E_{p, mp}$ a la forme d'une cuvette de potentiel, on peut donc piéger les atomes au voisinage du minimum du champ magnétique.

Comment créer un minimum de champ magnétique en pratique ?

Considérons un fil parcouru par un courant I ainsi qu'un champ de biais B_0 comme représenté sur la figure suivante :



$$\vec{B}_{\text{tot}}^2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{3}{x^2 + z^2} \vec{u}_x^2 + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2}{x^2 + z^2} \vec{u}_y^2 + B_0 \vec{u}_x$$

La position du minimum du module du champ magnétique et donc la position du piège est

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi B_0} \end{cases}$$

Il existe plein d'autres manières de faire des pièges magnétiques, mais celle dernière est une des plus simples.

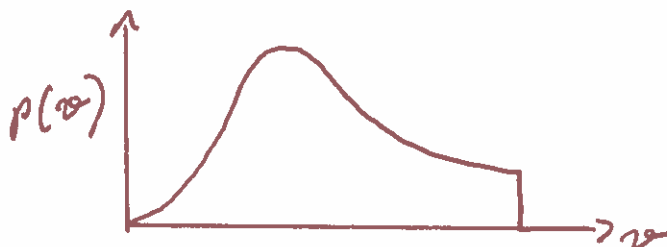
b) Refroidissement par évaporation

Les atomes à refroidir sont à une température entre quelques μK et quelques centaines de μK et sont piégés dans un piège magnétique. Pour continuer à refroidir les atomes dans ce piège, il faut introduire un mécanisme de dissipation de l'énergie.

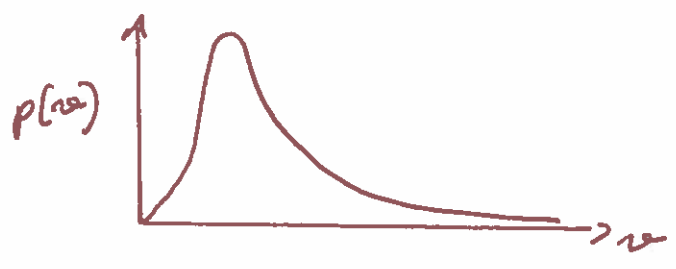
Le gaz d'atome dans le piège est à l'équilibre thermique donc la distribution des énergies des atomes, et la distribution de la norme de leur vitesse, dans le piège suit une loi de Boltzmann.



Par un mécanisme, que nous expliquerons dans la suite, nous venons tronquer la distribution de Boltzmann en retirant du gaz les atomes ayant le plus d'énergie. La distribution de la norme des vitesses dans le gaz est alors :



Ensuite les collisions élastiques présentes entre les atomes vont lui permettre de se rethermaliser : c'est à dire que la distribution de la norme des vitesses va retrouver l'allure d'un équilibre :



Après rethermalisation, sous-certaines conditions, que nous n'explicitons pas ici, la température du gaz est abaissée.

Le processus qui permet de diminuer la température au profit d'une perte d'atomes dans le gaz, est répété autant de fois que nécessaire pour atteindre la température voulue.

noté: Ce processus permet aussi tout en diminuant la température d'augmenter la densité spatiale d'atomes dans le gaz et donc d'augmenter la densité dans l'espace des phases. Ainsi cette technique permet d'atteindre la condensation de Bose-Einstein.

Pour une nomenclature rigoureuse de cette technique et la description de son utilisation pour atteindre la condensation de Bose-Einstein il faut lire le cours de Cohen-Tannoudji au Collège de France de 1996-1997.

c) Le refroidissement par évaporation en pratique

Revenons à nos atomes de Rubidium dans notre piège magnétique.

Supposons que tous les atomes dans le piège sont dans l'état $|F, m_F\rangle = |2, 2\rangle$ (la préparation de tous les atomes du gaz dans cet état peut-être réalisée par pompage optique avant la capture des atomes dans le piège). Supposons aussi que le module du champ magnétique réalisant le piège est de la forme

$$||\vec{B}|| = \frac{1}{2} m \omega r^2 + B_0$$

Les atomes oscillent dans le piège. Ceux avec le plus d'énergie oscillent avec une amplitude plus importante que ceux qui ont moins d'énergie. Ainsi en moyenne (sur une oscillation) les atomes avec plus d'énergie voient un champ magnétique plus grand que ceux avec moins d'énergie.

L'espacement entre les niveaux $|F=2, m_F\rangle$ croît linéairement (au premier ordre) avec le champ magnétique. Nous avons donc une corrélation entre l'énergie de l'atome et l'espacement des niveaux $|F=2, m_F\rangle$.

Les $|F=2, m_F=2\rangle$ et $|F=2, m_F=1\rangle$ sont piégés mais que $m_F=0$, $m_F=-1$ et $m_F=-2$ ne sont pas piégés et donc tout atome dans un de ces états est éliminé du gaz (n'étant pas piégé il sort de la zone de piégeage sous l'action de la gravité).

Ainsi pour tracer la distribution de Boltzmann on utilise une onde à résonance sur la transition entre $|2, 2\rangle$ et

12,17 pour faire basculer l'état de l'atome de 12,27 vers 12,17 puis vers 12,07 qui n'est pas piégé.

En pratique cette onde est comprise entre 50 MHz et 1 MHz et sa fréquence est abaissée en continu pour tronquer en continu la distribution de vitesse du gaz le tout pendant que la rethermalisation s'effectue. La vitesse de la variation de la fréquence de cette onde est adaptée pour permettre au gaz de se rethermaliser.

En utilisant cette technique, au prix d'une réduction du nombre d'atomes, des températures de l'ordre de, et même inférieur à, 100 nK sont atteignables pour le rubidium.

3) Une horloge sur puce atomique

a) Qu'est ce qu'une puce atomique

C'est un substrat isolant sur lequel on dépose des fils conducteurs. Dans ces fils on fait passer des courants, ces courants génèrent un champ magnétique. Ainsi en contrôlant la géométrie des fils sur la puce atomique, on contrôle la géométrie du champ magnétique ce qui permet de piéger les atomes au voisinage de la surface de la puce (typique à une distance comprise entre 10 et 100 nm de la surface).

b) Comment réaliser une horloge sur une puce atomique?

Considérons notre atome de Rubidium. Notons que les états $|1, -1\rangle$ et $|2, 1\rangle$ sont piégeables magnétiquement. Notons aussi que pour un même champ magnétique $\|\vec{B}\|$ leurs énergies sont déplacées de la même quantité :

$$\frac{\mu_B}{2} \|\vec{B}\|$$

La fréquence de la transition entre $|2, 1\rangle$ et $|1, -1\rangle$ ne dépend donc pas du champ magnétique, du moins au premier ordre. Les corrections d'ordre supérieure introduisent une légère dépendance de la fréquence de la transition avec le champ magnétique. Cette transition peut donc servir de référence pour une horloge.

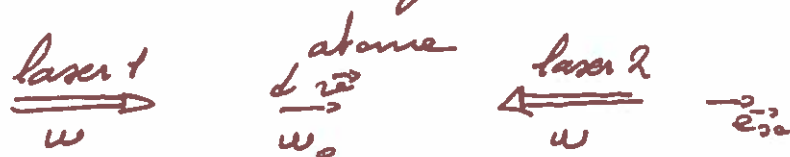
Les atomes sont donc refroidis, préparés dans l'état $|1, -1\rangle$ et piégés par le piège magnétique créé par la puce atomique dans le quel ils sont refroidis par évaporation. Une séquence de Ramsey est réalisée entre $|1, -1\rangle$ et $|2, 1\rangle$ tout en gardant les deux états piégés. Les atomes ne se déplacent plus pendant la séquence de Ramsey. Cela permet de découpler la taille du dispositif de la sensibilité voulue et ainsi de réaliser des horloges plus compactes.

Annexe 1

Dérivation de la force de repartissement par laser

1) Le système considéré

Considérons un atome, de vitesse v et d'impulsion $p = mv$, modélisé par un système à deux niveaux, notés $|e\rangle$ et $|g\rangle$, espacés de $\hbar\omega_0$. Prenons la référence des énergies sur le niveau $|g\rangle$. On considère un problème à une dimension, l'atome se déplace uniquement le long de l'axe x . Nous considérons aussi deux lasers contra-propageant le long de même axe x . Les lasers sont à la pulsation $\omega < \omega_0$.



2) Hamiltonien du système

L'hamiltonien du système est:

$$\begin{aligned}
 H = & \underbrace{\hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|}_{\text{énergie électronique de l'atome}} + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{impulsion de l'atome}} \\
 & + \hbar\Omega_R^1 \cos(\omega t - kx) \{ |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e| \} \\
 & \quad \hookrightarrow \text{couplage avec le laser 1} \\
 & + \hbar\Omega_R^2 \cos(\omega t + kx) \{ |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e| \} \\
 & \quad \hookrightarrow \text{couplage avec le laser 2}
 \end{aligned}$$

Supposons que les deux couplages lasers ont la même intensité : $\Omega_R = \Omega_R^1 = \Omega_R^2$ et notons que $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2\cos(kx)\cos(\omega t)$ donc l'hamiltonien de notre système est :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| + 2\Omega_R \cos(kx) \cos(\omega t) \{ |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e| \}$$

Posez $\delta = \omega - \omega_0$, effectuons l'approximation de l'onde tournante et effectuons la même transformation unitaire que dans la section 1.6 du chapitre 2. L'hamiltonien du système s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + H_{int}$$

où l'interaction atome-lasers s'écrit :

$$H_{int} = \frac{\hbar}{2} \delta \{ |g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e| \} + \hbar\Omega_R \cos(kx) \{ |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g| \}$$

3) Ecriture de la force de refroidissement

Comme nous l'avons vu dans la section 2 du chapitre 2, l'opérateur force s'écrit comme la dérivée temporelle de l'opérateur impulsion.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

et l'évolution temporelle d'un opérateur $\hat{X}$ sous $\hat{H}$ est donnée par :

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{X}]$$

et la force moyenne est:

$\langle \vec{F} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{F})$ où ρ est l'opérateur densité de notre système.

4) Procédure pour le calcul

Commençons par calculer la matrice densité du système en résolvant l'équation de Bloch optique:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] + \frac{\Gamma}{2} \hat{O} [|g\rangle \langle e|]$$

où $\frac{\Gamma}{2} \hat{O} [|g\rangle \langle e|]$ représente l'émission spontanée de $|e\rangle$ vers $|g\rangle$ et est un opérateur agissant sur l'opérateur $|g\rangle \langle e|$:

$$\hat{O}(\hat{o}) = 2\hat{o}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^+\hat{o}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{o}^+\hat{\sigma}$$

dans notre cas en écrivant l'opérateur densité dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ comme:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{ee} \end{pmatrix}$$

alors:

$$\frac{\Gamma}{2} \hat{O} [|g\rangle \langle e|] = \frac{\Gamma}{2} \begin{pmatrix} 2\rho_{ee} & -\rho_{eg} \\ -\rho_{ge} & -2\rho_{ee} \end{pmatrix}$$

nous pouvons réécrire notre équation de Bloch optique sous la forme:

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\rho} = [\hat{H}_{\text{int}}, \hat{\rho}] + i\hbar \frac{\Gamma}{2} \hat{O} [|g\rangle \langle e|]$$

on effect:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + i\hbar \frac{\Gamma}{2} \hat{D}[|g\rangle\langle e|]$$

$$= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho} \right] + [\hat{H}_{int}, \hat{\rho}] + i\hbar \frac{\Gamma}{2} \hat{D}[|g\rangle\langle e|]$$

$$\text{or: } \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho} \right] = \frac{1}{2m} \hat{p} [\hat{p}, \hat{\rho}] + \frac{1}{2m} [\hat{p}, \hat{\rho}] \hat{p}$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} \left(\hat{p} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} \hat{p} \right)$$

$$\text{car } [\hat{p}, \hat{\rho}] = -i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x}$$

donc

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} + \frac{\hat{p}}{2m} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} \frac{\hat{p}}{2m} \right) = [\hat{H}_{int}, \hat{\rho}] + i\hbar \frac{\Gamma}{2} \hat{D}[|g\rangle\langle e|]$$

Comme l'impulsion minimum de notre atome reste grande devant l'impulsion d'un photon, nous considérons $\hat{p}$ comme une variable classique et non plus comme un opérateur et donc:

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} + v \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} \right) = [\hat{H}_{int}, \hat{\rho}] + i\hbar \frac{\Gamma}{2} \hat{D}[|g\rangle\langle e|]$$

Une fois la matrice densité calculée nous pouvons calculer la force

$$\vec{F} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}] = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{int}, \hat{p}] = \frac{i}{\hbar} \left(i\hbar \frac{\partial \hat{H}_{int}}{\partial x} \right)$$

$$= - \frac{\partial \hat{H}_{int}}{\partial x}$$

or dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$:

$$\hat{H}_{int} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2\mathcal{D}_R \cos(kx) \\ 2\mathcal{D}_R \cos(kx) & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\hat{F} = \hbar k \sigma_A \begin{pmatrix} 0 & \sin(kx) \\ \sin(kx) & 0 \end{pmatrix}$

nous pouvons donc calculer la force moyenne:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F} \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{F}) = \hbar k \sigma_A \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sin(kx) \\ \sin(kx) & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \hbar k \sigma_A \sin(kx) (\rho_{eg} + \rho_{ge}) \end{aligned}$$

5) calcul de la matrice densité

commençons par calculer le commutateur $[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{\rho}]$:

$$\hat{H}_{\text{int}} \hat{\rho} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta \rho_{gg} + 2\sigma_A \cos kx \rho_{ge} & ; \delta \rho_{eg} + 2\sigma_A \cos kx \rho_{ee} \\ -\delta \rho_{ge} + 2\sigma_A \cos kx \rho_{gg} & ; -\delta \rho_{ee} + 2\sigma_A \cos kx \rho_{eg} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} \hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta \rho_{gg} + 2\sigma_A \cos kx \rho_{eg} & ; -\delta \rho_{eg} + 2\sigma_A \cos kx \rho_{gg} \\ \delta \rho_{ge} + 2\sigma_A \cos kx \rho_{ee} & ; -\delta \rho_{ee} + 2\sigma_A \cos kx \rho_{ge} \end{pmatrix}$$

On est intéressé par la solution stationnaire des équations de Bloch-optique, on considère donc que les lasers sont allumés depuis suffisamment longtemps ($t \gg 1/\Gamma$) donc on écrit les équations en posant $\partial \hat{\rho} / \partial t = 0$

$$\begin{cases} i\hbar \omega \frac{\partial}{\partial x} \rho_{gg} = \hbar \sigma_A \cos kx (\rho_{ge} - \rho_{eg}) + i\hbar \Gamma \rho_{ee} \\ i\hbar \omega \frac{\partial}{\partial x} \rho_{ee} = \hbar \sigma_A \cos kx (\rho_{eg} - \rho_{ge}) - i\hbar \Gamma \rho_{ee} \\ i\hbar \omega \frac{\partial}{\partial x} \rho_{eg} = \hbar \sigma_A \cos kx (\rho_{ee} - \rho_{gg}) + \hbar \delta \rho_{eg} - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \rho_{eg} \\ i\hbar \omega \frac{\partial}{\partial x} \rho_{ge} = \hbar \sigma_A \cos kx (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - \hbar \delta \rho_{ge} - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \rho_{ge} \end{cases}$$

64

nous allons écrire $\cos(kx) = (e^{ikx} + e^{-ikx})/2$
 et développer $\hat{\rho}$ en série de Fourier et nous
 l'approximons à l'ordre 1 en kx donc :

$$\rho \approx \hat{\rho}^0 + \hat{\rho}^{+1} e^{ikx} + \hat{\rho}^{-1} e^{-ikx}$$

on réécrit les quatre équations précédentes
 avec ces hypothèses, puis on identifie les
 différents ordres, nous avons :

pour l'ordre 0 :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{eg}^{-1} - \rho_{ge}^{-1} + \rho_{eg}^1 - \rho_{ge}^1) + i\hbar \Gamma \rho_{ee}^0 \\ 0 = \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{ge}^{-1} - \rho_{eg}^{-1} + \rho_{ge}^1 - \rho_{eg}^1) - i\hbar \Gamma \rho_{ee}^0 \\ 0 = \hbar \delta \rho_{eg}^0 + \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{gg}^{-1} - \rho_{ee}^{-1} + \rho_{gg}^1 - \rho_{ee}^1) - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \rho_{eg}^0 \\ 0 = -\hbar \delta \rho_{ge}^0 + \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{ee}^{-1} - \rho_{gg}^{-1} + \rho_{ee}^1 - \rho_{gg}^1) - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \rho_{ge}^0 \end{cases}$$

pour l'ordre 1 :

$$\begin{cases} -\hbar k v \rho_{gg}^1 = \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{eg}^0 - \rho_{ge}^0) + i\hbar \Gamma \rho_{ee}^1 \\ -\hbar k v \rho_{ee}^1 = \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{ge}^0 - \rho_{eg}^0) - i\hbar \Gamma \rho_{ee}^1 \\ -\hbar k v \rho_{eg}^1 = \hbar \delta \rho_{eg}^1 + \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{gg}^0 - \rho_{ee}^0) - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \rho_{eg}^1 \\ -\hbar k v \rho_{ge}^1 = -\hbar \delta \rho_{ge}^1 + \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{ee}^0 - \rho_{gg}^0) - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \rho_{ge}^1 \end{cases}$$

pour l'ordre -1 :

$$\begin{cases} \hbar k v \rho_{gg}^{-1} = \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{eg}^0 - \rho_{ge}^0) + i\hbar \Gamma \rho_{ee}^{-1} \\ \hbar k v \rho_{ee}^{-1} = \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\rho_{ge}^0 - \rho_{eg}^0) - i\hbar \Gamma \rho_{ee}^{-1} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hbar \hbar \omega p_{eg}^{-1} &= \hbar \delta p_{eg}^{-1} + \frac{\hbar \Omega_R}{2} (p_{gg}^0 - p_{ee}^0) - i \hbar \frac{\Gamma}{2} p_{eg}^{-1} \\ \hbar \hbar \omega p_{ge}^{-1} &= -\hbar \delta p_{ge}^{-1} + \frac{\hbar \Omega_R}{2} (p_{ee}^0 - p_{gg}^0) - i \hbar \frac{\Gamma}{2} p_{ge}^{-1} \end{aligned} \right.$$

à partir des équations d'ordre 1, on obtient:

$$\begin{aligned} p_{ee}^1 &= \frac{\Omega_R}{2i\Gamma - 2\hbar\omega} (p_{ge}^0 - p_{eg}^0); & p_{gg}^1 &= \frac{\Omega_R}{2i\Gamma - 2\hbar\omega} (p_{eg}^0 - p_{ge}^0) \\ p_{eg}^1 &= \frac{\Omega_R}{i\Gamma - 2\delta - 2\hbar\omega} (p_{gg}^0 - p_{ee}^0); & p_{ge}^1 &= \frac{\Omega_R}{i\Gamma + 2\delta - 2\hbar\omega} (p_{ee}^0 - p_{gg}^0) \end{aligned}$$

à partir des équations d'ordre -1, on obtient:

$$\begin{aligned} p_{ee}^{-1} &= \frac{\Omega_R}{2i\Gamma + 2\hbar\omega} (p_{ge}^0 - p_{eg}^0); & p_{gg}^{-1} &= \frac{\Omega_R}{2i\Gamma + 2\hbar\omega} (p_{eg}^0 - p_{ge}^0) \\ p_{eg}^{-1} &= \frac{\Omega_R}{i\Gamma + 2\hbar\omega - 2\delta} (p_{gg}^0 - p_{ee}^0); & p_{ge}^{-1} &= \frac{\Omega_R}{i\Gamma + 2\delta + 2\hbar\omega} (p_{ee}^0 - p_{gg}^0) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant, à partir des huit expressions précédentes, calculer:

$$p_{ge}^{-1} - p_{eg}^{-1} + p_{ge}^1 - p_{eg}^1 \text{ et } p_{gg}^{-1} - p_{ee}^{-1} + p_{gg}^1 - p_{ee}^1$$

pour les remplacer dans les équations d'ordres zero. Après quelques lignes de calcul sans difficulté, nous avons:

$$p_{ge}^{-1} - p_{eg}^{-1} + p_{ge}^1 - p_{eg}^1 = -(p_{ee}^0 - p_{gg}^0) \{d_- + d_+\} 2i\Omega_R$$

$$\text{avec } d_- = \frac{\Gamma}{4(\delta - \hbar\omega)^2 + \Gamma^2}$$

$$d_+ = \frac{\Gamma}{4(\delta + \hbar\omega)^2 + \Gamma^2}$$

$$p_{gg}^{-1} - p_{ee}^{-1} + p_{gg}^1 - p_{ee}^1 = -(p_{eg}^0 - p_{ge}^0) 2i\beta\Omega_R$$

$$\text{avec } \beta = \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \hbar^2 \omega^2}$$

pour les termes d'ordre zéro, nous avons donc le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 0 = i\hbar \Omega_R^2 (d_- + d_+) (\rho_{ee}^0 - \rho_{gg}^0) + i\hbar \Gamma \rho_{ee}^0 \\ 0 = -i\hbar \Omega_R^2 (d_- + d_+) (\rho_{ee}^0 - \rho_{gg}^0) - i\hbar \Gamma \rho_{ee}^0 \\ 0 = \hbar \delta \rho_{eg}^0 - i\hbar \Omega_R^2 (\rho_{eg}^0 - \rho_{ge}^0) \beta - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \rho_{eg}^0 \\ 0 = -\hbar \delta \rho_{ge}^0 + i\hbar \Omega_R^2 (\rho_{eg}^0 - \rho_{ge}^0) \beta - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \rho_{ge}^0 \end{cases}$$

La condition de normalisation de la matrice densité $\text{Tr}(\rho) = \rho_{ee} + \rho_{gg} = 1$ nous donne $\rho_{ee}^0 + \rho_{gg}^0 = 1$ car $\rho_{gg}^{-1} = -\rho_{ee}^{-1}$ et $\rho_{gg}^{-1} = -\rho_{ee}^{-1}$

en ajoutant à cela la première équation du système précédent nous avons:

$$\rho_{ee}^0 = \frac{\Omega_R^2 (d_+ + d_-)}{2\Omega_R^2 (d_+ + d_-) + \Gamma}$$

$$\rho_{gg}^0 = \frac{\Omega_R^2 (d_+ + d_-) + \Gamma}{2\Omega_R^2 (d_+ + d_-) + \Gamma}$$

Considérons les deux dernières équations du système précédent et calculons leur somme et leur différence:

$$\begin{cases} 0 = \delta (\rho_{eg}^0 - \rho_{ge}^0) - i\frac{\Gamma}{2} (\rho_{eg}^0 + \rho_{ge}^0) \\ 0 = \delta (\rho_{eg}^0 + \rho_{ge}^0) - 2i\Omega_R^2 \beta (\rho_{eg}^0 - \rho_{ge}^0) - i\frac{\Gamma}{2} (\rho_{eg}^0 - \rho_{ge}^0) \end{cases}$$

ce système se résout trivialement

$$l_{eg}^o - l_{ge}^o = 0 \text{ et } l_{eg}^o + l_{ge}^o = 0 \text{ donc } l_{eg}^o = l_{ge}^o = 0$$

nous pouvons maintenant exprimer les ordres -1 et $+1$ des cohérences:

$$l_{ge}^{+1} = - \frac{\Omega_R \Gamma}{2(\delta - kx) + i\Gamma} \frac{1}{2\Omega_R^2(d_- + d_+) + \Gamma}$$

$$l_{eg}^{+1} = \frac{\Omega_R \Gamma}{-2(\delta + kx) + i\Gamma} \frac{1}{2\Omega_R^2(d_- + d_+) + \Gamma}$$

$$l_{eg}^{-1} = \frac{\Omega_R \Gamma}{-2(\delta - kx) + i\Gamma} \frac{1}{2\Omega_R^2(d_- + d_+) + \Gamma}$$

$$l_{ge}^{-1} = - \frac{\Omega_R \Gamma}{2(\delta + kx) + i\Gamma} \frac{1}{2\Omega_R^2(d_- + d_+) + \Gamma}$$

6) Calcul de la force moyenne

Pour calculer la force moyenne:

$$\langle F \rangle = \hbar k \Omega_R \sin(kx) (l_{eg} + l_{ge})$$

nous devons calculer

$$l_{eg} + l_{ge} =$$

$$= l_{eg}^o + l_{ge}^o + (l_{eg}^{+1} + l_{ge}^{+1}) e^{+ikx} + (l_{eg}^{-1} + l_{ge}^{-1}) e^{-ikx}$$

= quelques lignes de calcul simple plus tard

$$= 2 \cos kx \frac{\Omega_R (\Delta_- L_-^2 + \Delta_+ L_+^2)}{L_-^2 L_+^2 + 2\Omega_R^2 (L_-^2 + L_+^2)}$$

$$= 2 \sin kx \frac{\Omega_R \Gamma (L_-^2 - L_+^2)}{L_-^2 L_+^2 + 2\Omega_R^2 (L_-^2 + L_+^2)}$$

où on a posé $\Delta_{\pm} = \delta \pm \hbar \omega$

$$\text{et } L_{\pm}^2 = 4\Delta_{\pm}^2 + \Gamma^2$$

nous obtenons donc la force moyenne

$$\langle F \rangle = F_{sp} + F_{ind}$$

$$\text{où : } F_{sp} = 2\hbar k \Omega_R^2 \frac{\Gamma (L_+^2 - L_-^2)}{L_+^2 L_-^2 + 2\Omega_R^2 (L_-^2 + L_+^2)} \sin^2(kx)$$

$$F_{ind} = -4\hbar k \Omega_R^2 \frac{\Delta_+ L_-^2 + \Delta_- L_+^2}{L_+^2 L_-^2 + 2\Omega_R^2 (L_-^2 + L_+^2)} \sin(kx) \cos(kx)$$

F_{sp} est la force due à l'émission spontanée
et F_{ind} est la force due à l'émission induite

Plaçons nous dans le cas $\Omega_R^2 \ll 4\Delta_{\pm}^2 + \Gamma^2$

$$F_{sp} = 2\hbar k \Omega_R^2 \Gamma \left\{ \frac{1}{4\Delta_-^2 + \Gamma^2} - \frac{1}{4\Delta_+^2 + \Gamma^2} \right\} \sin^2(kx)$$

Si nous moyennons cette expression sur une
longueur d'onde :

$$\tilde{F}_{sp} = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^{2\pi/\hbar} F_{sp} dx$$

$$= \hbar k \Omega_R^2 \Gamma \left\{ \frac{1}{4\Delta_-^2 + \Gamma^2} - \frac{1}{4\Delta_+^2 + \Gamma^2} \right\}$$

ce qui correspond à la force de pression
de radiation, pour une pousse de laser
contre-propagant, écrite dans la section 1.c du
chapitre 2 (avec l'hypothèse $\Omega_R^2 \ll 4\Delta_{\pm}^2 + \Gamma^2$).