

Plan

10

I - Dispositif mécanique

- a) Chronomètre
- b) précision

II - horloge électronique

théorie a) + (slide) présentation [A]
[B]

- * équation différentielle
- * (slide) Lien → instab

précision b) * calcul $\frac{dw}{dt}$
* précision $P_f \propto 1/\alpha \rightarrow P_b$

exemples c) * Wien

* oscillateur à quartz

10^{-6} s
 10^{-9} s

AC10 - 1 oscillation
w0

III - horloge atomique

a) oscillation de Rabi

b) séquence d'interrogation

10^{-19} s

Chronomètre
horloge
portable → mesure
à bord du bateau
horloge
+ soleil
↓
longueur
mesurer des
temps longs
et courts (prise)
ça peut

Biblio

+ de contexte

poly x Mathieu - Dupont - Nivet
* E-learning physique
* poly JBS Syst - bachel

piège
magnéto-
optique

théorie des oscillateurs à valeur
physique exemple : RLC avec R négative

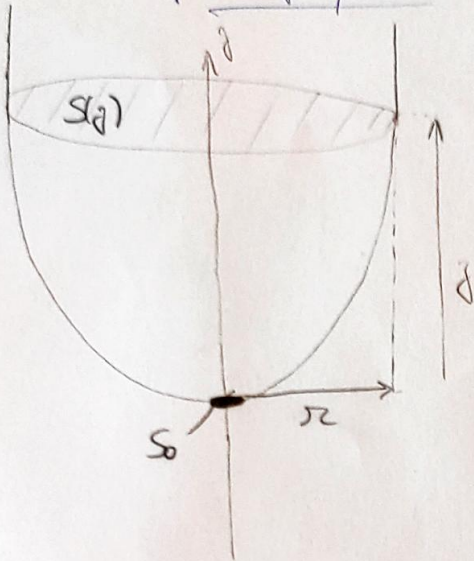
et mécanique

pendule : on veut autoentretenir
↳ RL → pendule paramétrique

Schrödinger par les $E_{n/2}$.

↳ calcul sympa met en évidence
les interf.

a) Clepsydra :



on cherche un siphonant
dont la vidange est uniforme

$$\text{hyp: } * h = k \cdot r^\alpha$$

$$r = \frac{1}{k} h^{1/\alpha}$$

$$S_h = \frac{\pi}{k^2} h^{2/\alpha}$$

$$V_0(h) = \sqrt{2gh}$$

égalité du débit volumique :

$$V_0(h) S_0 = - \frac{dh}{dt} S_h$$

$$\Rightarrow \sqrt{2gh} S_0 = - \frac{dh}{dt} \frac{\pi}{k^2} h^{2/\alpha}$$

$$\Rightarrow dh \cdot h^{2/\alpha - 1/2} = - \frac{\pi S_0}{k^2} \sqrt{2g} dt$$

$$\int \Rightarrow h^{2/\alpha + 1/2} = A t + B$$

$$2/\alpha + 1/2 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

$\Rightarrow$
↑
vidange uniforme $h \propto t$

b) précision

On a donc une relation linéaire entre ~~le temps~~ et une distance et une durée.

En considérant une clepsydre de 1m de haut munie de graduation millimétrique

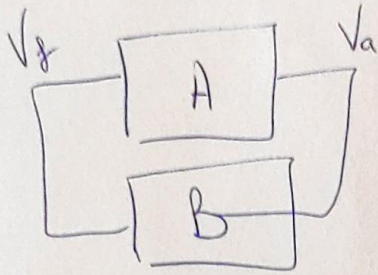
$$\Rightarrow \frac{\delta p}{l} \approx 10^{-3}$$

en choisissant δp pour que la clepsydre se vide en ~~1h~~ 1h:

$$\frac{\delta t}{\Delta t} = \frac{\delta p}{l} \Rightarrow \delta t = \frac{\delta p \Delta t}{l} = 3,6 \text{ s.}$$

$$\boxed{\delta t \sim 1 \text{ s}}$$

Calcul équation différentielle



$$\frac{\underline{V_g}}{\underline{V_a}} = \frac{G_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{G_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V_g} + \frac{1}{Q\omega_0} \dot{\underline{V_g}} + \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{\underline{V_g}} = \frac{G_0}{Q\omega_0} \dot{\underline{V_a}}$$

ampli: $V_a = A \cdot V_g$

$$\Leftrightarrow \ddot{\underline{V_g}} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - G_0 A) \dot{\underline{V_g}} + \omega_0^2 \underline{V_g} = 0$$

Condition d'oscillation: $G_0 A = 1$

calcul $\frac{\delta \omega}{\delta \theta} :$

condition d'oscillation. $A B(j\omega) = 1$ à ω_0 .

$$\Rightarrow \arg(A) + \underbrace{\arg(B(j\omega))}_{\phi} = 0$$

perturbation de phase de l'ampli $\delta \theta$.

$$\Rightarrow \delta \omega = \omega - \omega_0$$

en différenciant : $\delta \theta + \delta \phi = 0 \Rightarrow \delta \theta = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \delta \omega$

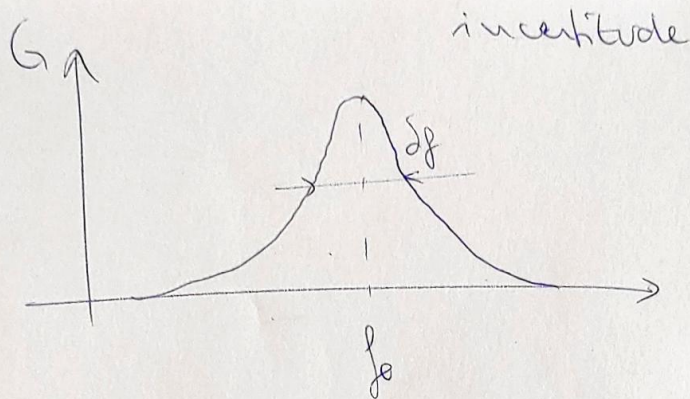
passif - bande : $B(j\omega) = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underset{\omega \approx \omega_0}{\approx} \frac{G_0}{1 + 2jQ \frac{\delta \omega}{\omega_0}}$

$$\Rightarrow \phi = - \arctan \left(\frac{2Q \delta \omega}{\omega_0} \right) \approx - \frac{2Q \delta \omega}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} = - \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta \omega}{\delta \theta} = \frac{\omega_0}{2Q}}$$

Q élevé $\Rightarrow$ faible perturbation fréquentielle.



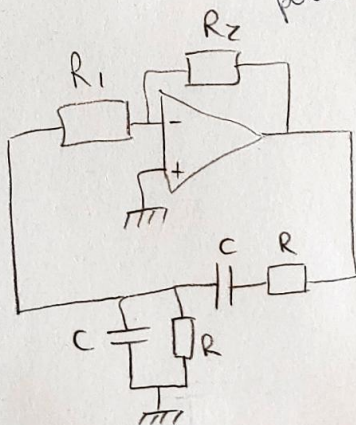
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

En assimilant Δf à l'incertitude sur la fréquence on a:

$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta T}{T} = 1/Q}$
 $\Rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{1}{f_0 Q}}$
 $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$ l'incertitude relative
 on mesure des durées en comptant nb périodes

d)

1) oscillateur à pont de Wien



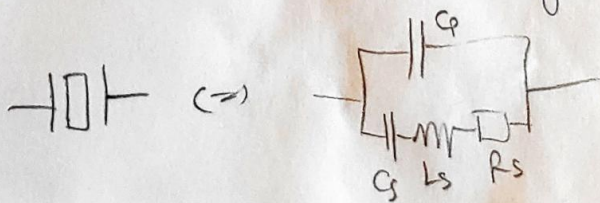
$$\rightarrow Q = 1/3$$

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = 2 \text{ MHz}$$

1kΩ 100pF

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T \sim 1 \text{ ns}}$$

2) Oscillateur à quartz:



$$\rightarrow Q = 10^5$$

$$f \approx 10 \text{ kHz}$$

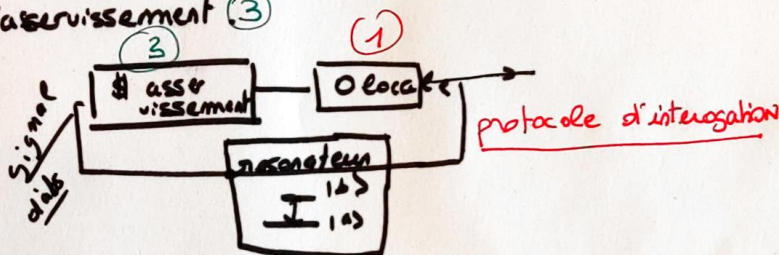
$$\boxed{\Delta T \sim 1 \text{ ns}}$$

III] d'horloge atomique.

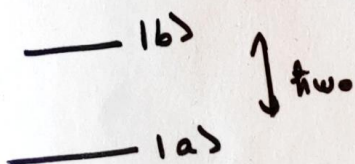
(1)

une horloge atomique : c'est quoi :

- * un oscillateur local fournissant une fréquence en ν^0 (1)
- * un résonateur atomique permettant périodiquement comparer la fréquence de l'oscillateur locale à la fréquence atomique (2)
- * d'asservissement (3)



(1) de résonateur atomique à deux niveaux couplé à un CEN.



* Pour simplifier origine des NRS au lve.

$$\hat{H} = h\omega_0 |b\rangle\langle b| + 0$$

* à éviter par un CEN que l'on considère classique $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \phi) \rightarrow$ couple les deux lve en effet $\hat{V} = -\frac{\vec{d} \cdot \vec{E}_0}{2} \cos(\omega t + \phi) (|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|)$

a justification vient de $\hat{H} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + q\vec{d} \cdot \vec{E}$

slides

* $\vec{d} \cdot \vec{E}$ traduit la "force du couplage".
et on pose donc $\boxed{\hbar\Omega_R = -\frac{\vec{d} \cdot \vec{E}_0}{2}}$

À $t=0$ on suppose que : $|\psi_0\rangle = c_a(0)|a\rangle + c_b(0)|b\rangle$

À t : $|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a\rangle + c_b(t)|b\rangle$.
Etat de l'atome à $t=0$

On cherche $|\psi(t)\rangle$ i.e $c_a(t)$ et $c_b(t)$ $\rightarrow$ donc équation de Schrödinger
(Rq par la leçon ~~fait pas~~ insiste sur le caractère automatique "on cherche une évolution temporelle donc Schrödinger !!")

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

avec $\hat{H} = \hbar\omega_0(|b\rangle\langle b|) + \hbar\Omega_R \cos(\omega t + \phi) \{ |a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a| \}$

projection sur les états $|a\rangle, |b\rangle$:

$\downarrow$
Traduit le couplage !!!

$$i\hbar \frac{dc_a}{dt} = c_b \Omega_R \cos(\omega t + \phi)$$

$$i\hbar \frac{dc_b}{dt} = c_a \Omega_R \cos(\omega t + \phi) + \hbar\omega_0 c_b(t)$$

Rq: Equations couplées: donc on va les découpler

chgt de variable : $\underline{c_a = c_a'}$ et $\underline{c_b = e^{-i\omega_0 t} c_b'}$

on obtient donc:

$$i\hbar c_a' = c_b' e^{-i\omega_0 t} \Omega_R \cos(\omega t + \phi)$$

$$i\hbar c_b' e^{-i\omega_0 t} + \hbar\omega_0 e^{-i\omega_0 t} c_b' = c_a' \Omega_R \cos(\omega t + \phi) + \hbar\omega_0 e^{-i\omega_0 t} c_b'$$

$$\text{or } \cos(\omega t + \phi) = \frac{e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}}{2}$$

donc :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{dc_a'}{dt} = c_b' \frac{\Omega_R}{2} \left\{ e^{i(\omega - \omega_0)t + i\phi} + e^{-i(\omega + \omega_0)t - i\phi} \right\} \\ i\hbar \frac{dc_b'}{dt} = c_a' \frac{\Omega_R}{2} \left\{ e^{i(\omega + \omega_0)t + i\phi} + e^{-i(\omega - \omega_0)t - i\phi} \right\} \end{cases}$$

A bien discuter: Approximation de l'onde tournante.

en intégrant on obtient des termes en $\frac{e^{i(\omega+\omega_0)t}}{\omega+\omega_0}$

et
$$\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{\omega-\omega_0}$$

or on veut tendre vers $\omega - \omega_0 \rightarrow 0$ i.e. résonance (Rappel: on parle d'un résonateur atomique)

i.e. on néglige les termes en $\frac{e^{i(\omega+\omega_0)t}}{\omega+\omega_0}$

donc
$$\begin{cases} i\dot{c}_a = c_b \frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} e^{-i\delta t} \\ i\dot{c}_b = c_a \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} e^{-i\delta t} \end{cases} \quad \text{ou } \boxed{\delta = \omega - \omega_0}$$

Méthode: on dérive l'une et on l'injecte dans l'autre.

on se place dans le cas $c_a(0) = 1$ et $c_b(0) = 0$ tout le monde est dans l'état fondamental! et on pose $\boxed{\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \delta^2}}$ (puissance de rabi généralisée)

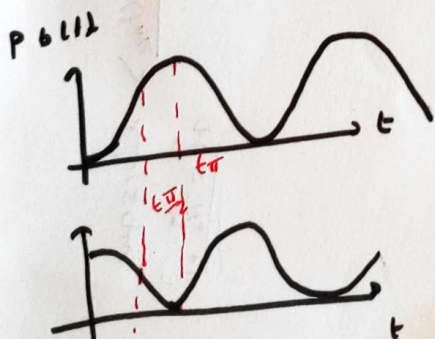
$$c_a = e^{i\delta t/2} \left(\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\delta}{\Omega} \sin\frac{\Omega t}{2} \right)$$

$$c_b(t) = e^{-i\omega_0 t} e^{-i\delta t/2} \left\{ -i\frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} \sin\frac{\Omega t}{2} \right\}$$

Or ce qui est intéressant: les probas de transition

$$P_a = |c_a|^2 = \underbrace{|\langle \psi | a \rangle|^2}_{\uparrow \text{ important}} = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

$$P_b = |c_b|^2 = |\langle \psi | b \rangle|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$



Considérons l'accord: $\delta = 0$! $\Omega = \Omega_R$!

à $t = \pi$ i.e. $t_0 + \frac{\Omega_R t}{2} = \pi \Rightarrow P_a = 0$
 à $t = \pi$ i.e. $t_0 + \frac{2\pi}{\Omega_R}$ } l'at est dans l'état $|b\rangle$

à $t = \frac{\pi}{2}$ l'atome est dans une superposition

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 t/2} e^{-i\phi} |b\rangle$$