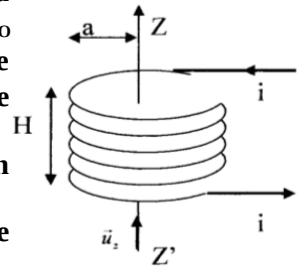


EXERCICE : FOUR À INDUCTION

On considère un four à induction constitué d'une bobine cylindrique de rayon a et de hauteur $H \gg a$, comportant N spires parcourues par un courant $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et noyée dans une matrice réfractaire. On se place en ARQS, et le courant parcourant les N spires peut être modélisé par une nappe surfacique de courant, de densité notée j_s à déterminer.



1. Déterminer le champ magnétique $B(M,t)$ en tout point intérieur M , en fonction notamment des caractéristiques de la bobine.
2. En déduire le champ électrique $E(M,t)$ induit dans le four (intérieur de la bobine).
3. L'intérieur de la bobine est totalement rempli d'un matériau conducteur non ferreux de conductivité γ . Déterminer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ cédée à ce matériau.
4. On désire procéder dans ce four à la fusion du matériau de conductivité γ . En estimant que les pertes par rayonnement correspondant à environ 15 % de l'énergie nécessaire à la fusion, déterminer le temps t_F nécessaire pour obtenir un matériau fondu, s'il était initialement à sa température de fusion.
5. Peut-on ici parler d'effet de peau ? Discuter.

Données :

$I_0 = 150 \text{ A}$; $a = 15 \text{ cm}$; $f = 4,0 \text{ kHz}$; $\mu_0 N/H = 10^{-5} \text{ T/A}$; $\gamma = 1,6 \cdot 10^6 \text{ S/m}$; $\Delta h_{\text{fus}} = 350 \text{ kJ/kg}$.

Le matériau de masse $M = 80 \text{ kg}$ occupe initialement un volume $V = 0,03 \text{ m}^3$.

1) Symétries et invariances : $\mathbf{B} = B(r) \mathbf{U}_z$ donc d'après Maxwell-Faraday, $\text{rot} \mathbf{E} \parallel \mathbf{U}_z$ et $\mathbf{E} = E(r) \mathbf{U}_\theta$. Ampère sur un contour rectangle d'axe Oz : champ B nul à l'extérieur (on peut montrer via Ampère qu'il est constant, et utiliser un argument de champ lointain nul) et constant à l'intérieur. Cette constante vaut $B(r,t) = \mu_0 N \cdot i(t) / H = \mu_0 j_s$.

2) Maxwell-Faraday intégré à travers une section S de rayon r :

$$\oint \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(r) 2\pi r = -\frac{dB}{dt} S = -\frac{d}{dt} B(r) \pi r^2 \text{ ainsi } E(r,t) = -\frac{dB(t)}{dt} \frac{r}{2} = \mu_0 N \omega I_0 \sin(\omega t) \frac{r}{2H}$$

3) $dP/dV = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \gamma E^2 = \gamma (\mu_0 N \omega I_0 \sin(\omega t) \frac{r}{2H})^2$ en instantané.

En moyenne $\langle \sin^2 \rangle = 1/2$ donc sur le volume total :

$$\langle P \rangle = \gamma \mu_0^2 N^2 \omega^2 I_0^2 / 8H^2 \int r^3 dr 2\pi H = \gamma \pi \mu_0^2 N^2 \omega^2 I_0^2 / 4H \cdot r^4 / 4 = \gamma \pi \mu_0^2 N^2 \omega^2 I_0^2 r^4 / 16H.$$

4) $E_{\text{fus}}(1+0,15) = \langle P \rangle \cdot t_F$ soit $t_F = 1,15 E_{\text{fus}} / \langle P \rangle = 300 \text{ s}$.

5) Un effet de peau optique ($f \sim 10^{15} \text{ Hz}$) sur un aussi bon conducteur ne permet pas à l'onde EM de pénétrer dans le conducteur (profondeur de pénétration $\delta \sim 40 \text{ nm}$). Ici, on travaille en BF (4 kHz) :

$\delta = (2/\omega \mu_0 \gamma)^{1/2} = 6 \text{ mm}$ donc E pénètre sur environ 1 cm et l'effet Joule résultant fait fondre le métal.