

LP15 Particules dans un champ EM

11 avril 2022

Niveau : L1

1 Objectifs pédagogiques-extraits des programmes MPSI

- Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.
- Puissance de la force de Lorentz. -Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.
- Mouvement circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur-vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique.

2 Messages forts de la LP

- Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
- Savoir qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
- Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant.
- Effectuer un bilan énergétique pour calculer la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- Citer une application.
- Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire.
- Approche documentaire : analyser des documents scientifiques montrant les limites relativistes en s'appuyant sur les expressions fournies $E_c = (-1)mc^2$ et $p = mv$.
- Citer une application.

3 Prérequis

- Dynamique et cinématique classique (repère associé)
- Connaître la forme de l'énergie potentielle électrique $E_p = qV$
- Connaissance qualitative du facteur de Lorentz (tel que vu en terminale)
- Théorèmes énergétiques en mécanique (théorème de l'énergie cinétique)

4 Plan

4.1 Plan général

I. Particules chargée dans un champ EM

1. Mouvement dans un champ électrique uniforme
2. Aspects énergétique
3. Mouvement dans un champ magnétique uniforme

II. Applications

1. Spectromètre de masse
2. Principe de fonctionnement d'un cyclotron
3. Limites relativistes

4.2 Développements

Introduction :

I.1. Mouvement dans un champ électrique uniforme : on étudie le mouvement d'une particule de charge q , de masse m , soumise à un champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ constant et uniforme. Dans le référentiel galiléen du laboratoire, cette particule est assimilée à un point matériel M. On fait d'abord un bilan des forces qui lui sont appliquées :

La force électrique de Lorentz $\vec{f}_E = qE_0 \vec{e}_x$

Le poids est négligeable car $\frac{\vec{f}_E}{\vec{P}} = \frac{1.6 \times 10^{-19} E}{9.81 \times 1.7 \times 10^{-27}} = 9.6 \times 10^6 E_0$. Or, le champ disruptif de l'air vaut $10^7 V.m^{-1} \Rightarrow$ on peut toujours négliger le poids!¹

On applique le PFD à la particule :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qE_0}{m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit les expressions des vecteurs vitesse et position par intégration

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qE_0 t}{m} + v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$

Si on suppose que $v_0 = v_0 \cos \alpha + v_0 \sin \alpha$ et $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qE_0 t^2}{2m} + v_0 t \cos \alpha \\ v_0 t \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit², $t = \frac{y}{v_0 \sin \alpha}$ et donc l'équation de trajectoire $x = \frac{qE_0 y^2}{2mv_0^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha y}{\sin \alpha}$

Tracer la trajectoire sur slide.

I.2. On sait que l'énergie potentielle associée au champ électrique vaut $E_p = qU$ avec q la charge de la particule associée. La conservation de l'énergie mécanique implique que $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qU = \text{constante}$. Si on indique par l'indice i la situation initiale et par l'indice f la situation finale, on en déduit l'expression $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -q(U_f - U_i)$.

1. On a pris la masse et la charge d'un proton
2. Si on exclut le cas où $\sin \alpha = 0$

Pour faire varier la vitesse et donc la valeur de l'énergie cinétique d'une particule chargée, il faut lui appliquer une différence de potentiel. On a donc $\Delta E_c = -q\Delta U$.

En particulier, si $q < 0$ la particule sera accélérée par une différence de potentiel négative et si $q > 0$, elle sera accélérée par une différence de potentiel positive.

Pour une particule négative sans vitesse initiale on trouve donc $\frac{1}{2}mv_f^2 = -qU > 0$ soit $v_f = \sqrt{\frac{-2qU}{m}}$

I.3. On étudie maintenant le mouvement dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ constant et uniforme. On suppose qu'à l'instant initial la particule possède une vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y + v_{0z}\vec{e}_z$. La particule est toujours considérée comme un point matériel de masse m , de charge q , pour lequel on peut négliger le poids. Dans le référentiel galiléen du laboratoire elle est soumise à la composante magnétique de la force de Lorentz $\vec{f}_B = \vec{v} \wedge \vec{B}_0$

Dans un premier temps, appliquons le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_c = W(\vec{f}_B) = 0$ implique donc que la vitesse de la particule est constante \Rightarrow son mouvement est uniforme.

Étude de la trajectoire : comme précédemment [le passer sur slide?](#)

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-qB_0\dot{y}}{m} \\ \frac{qB_0\dot{x}}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque d'abord que $[\frac{qB_0}{m}] = \frac{CT}{kg} = \frac{A.s.kg}{s^2.Akg} = \frac{1}{s}$ ce qui est homogène à une pulsation. On note par conséquent $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ la pulsation dite pulsation cyclotron.

On peut résoudre l'équation du mouvement selon z et on obtient $v_z = v_{0z}$ et $z(t) = v_{0z}t$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega_c \dot{x} \end{aligned}$$

Les deux équations suivantes sont couplées, on peut poser $Z = \dot{x} + j\dot{y}$ et on obtient l'équation $\dot{Z} + j\omega_c Z = 0$. On peut résoudre cette équation et on obtient : $Z = Z_0 e^{j\omega_c t} = Z_0(\cos(\omega_c t) - j\sin(\omega_c t))$

$$\dot{Z} = \ddot{x} + j\ddot{y} = -\omega_c \dot{y} + j\omega_c \dot{x} = -j\omega_c Z$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 \cos(\omega_c t) \\ \dot{y}(t) &= -v_0 \sin(\omega_c t) \\ x(t) &= \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{aligned}$$

en utilisant que $y(t=0) = \dot{x}(t=0)/\omega_c = \frac{v_0}{\omega_c}$.

Si la vitesse selon z est nulle initialement, on trouve donc une trajectoire circulaire, de rayon $R_0 = \frac{v_0}{\omega_c}$. Dans le cas d'une trajectoire azimutale non nulle, on a une trajectoire hélicoïdale.

ODG On considère un électron préalablement accéléré par une différence de potentiel de 2000V, sa vitesse³ initiale est $v_0 = 2.7 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$. On soumet cet électron à un champ magnétique de 0.10T. On suppose des trajectoires circulaires. Le rayon est $R_0 = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 2.7 \times 10^7}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.10} = 1.5 \text{ mm}$. Pour un proton ($v_0 = 6.2 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$, $R = 6.5 \text{ cm}$).

3. pouvant être obtenue en utilisant $E_c = E_p = qU$ et donc $v_f = \sqrt{\frac{-2qV}{m}}$

La pulsation cyclotron, équivalente à la vitesse angulaire est alors de $1.8 \times 10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$ pour l'électron et $9.5 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ pour le proton.

Bilan : un champ électrique accélère (beaucoup) des particules chargées, un champ magnétique permet de faire des trajectoires circulaires. Avec le bon agencement, on peut donc potentiellement accélérer des particules, les confiner. Pourquoi faire? Des particules rapides, ont une grande énergie cinétique. Le fait d'atteindre de hautes énergies est important que ce soit pour comprendre certains phénomènes spatiaux ou dans des traitements médicaux comme en radiothérapie.

II.1. **Spectromètre de masse** : La spectrométrie de masse est une technique physique d'analyse permettant de détecter et d'identifier des molécules d'intérêt par mesure de leur masse, et de caractériser leur structure chimique. Son principe réside dans la séparation en phase gazeuse de molécules chargées (ions) en fonction de leur rapport masse/charge (m/z).

Une source émet des ions de mercure $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$ qui sont envoyés dans un spectromètre de masse où ils sont accélérés puis séparés afin de mesurer leur rapport isotopique.

Séparation : On suppose qu'on a un faisceau d'ions accélérés qui se dirigent vers un milieu contenant un champ magnétique et perpendiculaire au plan de la trajectoire. D'après ce qui précède, le champ magnétique courbe la trajectoire de l'ion (puisque'il s'agit d'une particule chargée). On a vu que le rayon de la particule s'écrit $R = \frac{mv_0}{qB}$: les ions de mercures ayant la même charge, c'est leur masse qui modifie la déviation. Les ions les plus lourds sont moins déviés tandis que les ions plus légers sont davantage déviés.

Détection?

II.2. Cyclotron⁴ : contient deux demi cylindres creux (les dees) dans lesquelles règne un champ magnétique uniforme. Le sens du champ magnétique est le même dans les deux dees. Entre celle-ci, on place un champ électrique uniforme (une différence de potentiel). Souvent, on injecte des particules préalablement accélérée. Dans chaque dees, la vitesse angulaire vaut ω_c . Pour que le potentiel U accélère effectivement les particules, il faut qu'il change de sens entre 2 passages, pour se faire on doit donc utilisé un champ sinusoïdal de fréquence correspondant à la pulsation synchrotron. Soit $U(t) = U_0 \cos(\omega_c t)$.

Avantage : on accélère des particules avec un faible champ électrique

Inconvénient : On doit produire un champ magnétique homogène sur une grande surface.

Exemple : Cyclotron de l'université du Michigan $B=0.10\text{T}$, le diamètre des dees est 2.1m , $f=1.5\text{MHz}$ $v_{max} = \omega_c B = 1.0 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$.

Si on voulait utiliser un accélérateur linéaire, on devrait appliquer une différence de potentiel de $U = \frac{mv^2}{2q} = 5.3 \times 10^5 \text{ V}$

II.3. Pour un champ $B=1.5\text{T}$, la vitesse finale obtenue est $v_{max} = R_{max}\omega = 2\pi \cdot 1.05 \frac{qB}{2\pi m} = 2.8 \times 10^{11} > c$! Le second postulat d'Einstein indique que la vitesse de la lumière est une constante ne pouvant être dépassée dans le vide. La mécanique relativiste n'est alors plus évitable et on doit modifier les expressions précédentes d'un facteur $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (appelé facteur de Lorentz). Dans ce cadre, la fréquence s'écrit $f_{cr} = \frac{f_c}{\gamma}$ et $\omega_{cr} = \frac{\omega_c}{\gamma}$. Le

fait que la fréquence de rotation de la particule soit modifiée entraîne rapidement des problèmes : comment synchroniser la fréquence de champ électrique à la fréquence d'un électrons accéléré quand celle-ci dépend de sa vitesse? Le champ devient donc $E = E_0 \cos(\frac{\omega_c t}{\gamma})$.

En fonction du temps restant, pour palier à la perte d'isochronisme, on développe les cyclosynchrotrons⁵, pour lesquels la fréquence de E varie.

Conclusion : des particules chargées dans un champ électromagnétique sont accélérées ou déviées, c'est un vaste sujet d'étude en physique et en médecine qui permet de sonder les plus hautes énergies (découverte du boson de Higgs).

4. Premier cyclotron en 1932 par Livingston aux états unis (Berkeley)

5. Lawrence développe plusieurs cyclotrons puis le premier cyclosynchrotron en 1945, il reçoit le prix Nobel en 1939

5 Animations-Vidéos

- Mouvement de particules dans un champ E et/ou B (en 3D). https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/general.php
- Mouvement dans un champ E (en 2D) <http://physique.ostralo.net/mvtParticuleChampE/>
- Animation cyclotron http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charge_cyclotron.php

6 Remarques et questions associées

6.1 Remarques

manip : déviateur de faisceau d'électron.

Un cyclotron est un accélérateur de particules de taille minime : de l'ordre de 6 m³. Il permet la production d'isotopes radioactifs, et en particulier d'oxygène 15 (15O), de carbone 11 (11C), d'azote 13 (13N), et de fluor 18 (18F), utilisés notamment en médecine. Les isotopes sont obtenus par l'irradiation d'une cible avec les protons accélérés par le cyclotron.

Le fluor 18 (isotope à demi-vie courte : 109 minutes) permet de fabriquer du fluorodésoxyglucose (FDG), un sucre radioactif inutilisable par la cellule, qui va s'accumuler préférentiellement dans les zones cancéreuses, fortes consommatrices de glucose. Une tomographie à émission de positons (TEP) permettra de détecter de façon particulièrement fine certains cancers puis de les traiter à des stades très précoces.

6.2 Questions et remarques

- Attention à bien diriger les axes pour un trièdre direct (confusion pour les étudiants).
- Rappeler la valeur de la charge et la masse pour un électron pour l'application numérique.
- Dire que lors du PFD on a une équation totalement identique à celle de la chute libre.
- *Comment marche les animations car il y a beaucoup de paramètres que l'on peut changer?* Bien insister sur cela pendant l'exposé.
- *Conservation de l'énergie mécanique?* Force conservatives ou forces non conservatives qui ne travaillent pas.
- *Applications de l'accélération avec un champ E?* Vieilles télévisions (cathodiques) et vieux oscilloscopes, décontaminer des boîtes en tuant les bactéries.
- *Pourquoi la méthode avec $Z = x + jy$?* Méthode apprise lors de mes études et donc avec laquelle je suis la plus à l'aise + permet de manipuler les complexes (on peut également dériver une équation et faire apparaître une équation de l'oscillateur harmonique sur la vitesse).
- *Comment retrouve t-on que $1 T = 1 m \cdot s^{-2}$?* Cela vient de $T = \frac{sN}{Ckg} = m \cdot s^{-2}$
- Pour éviter un rayon de courbure négatif, on peut mettre une valeur absolue à la charge.
- *Peut-on accélérer une particule avec un champ magnétique B?* Non car la force de Lorentz magnétique ne travaille pas.
- Explication du fonctionnement des deux bobines de Helmholtz utilisées pour la manipulation.
- *Quel en est l'intérêt?* Obtenir un champ uniforme entre les bobines.
- *Qu'est ce que le boson de Higgs?* Particule qui véhicule la masse d'une particule, prédites théoriquement et trouvée récemment par la méthode d'accélération de particules.
- Pour charger un isotope on utilise des zones ionisantes sur le trajet de la particule pour le spectromètre de masse (à préciser dans la leçon).
- Pour le cyclotron, rayon plus grand mais vitesse plus grande donc on peut laisser la fréquence ω_c constante pour le champ E alternatif.
- *Pour des champs E et B qui dépendent du temps?* En plus de certains accélérateurs de particules, on a la RMN par exemple.
- Il faut expliciter à l'oral la signification des abréviations utilisées, comme fait dans cette leçon.
- Photos pour illustrer la notion de spectromètre de masse.

7 Bibliographie

Dunod, Physique MPSI MP2I
Pages wiki pour les accélérateurs
Cours de PN M1 (modèle standard, ordre de grandeurs pour les accélérateurs).