

IP : Ondes dans les plasmas

I / Propagation d'une onde dans un plasma

- 1) Cadre d'étude
- 2) Equations de Maxwell
- 3) Relation de dispersion
- 4) Structure de l'onde

II / Propagation d'un groupe d'ondes

- 1) Propagation de deux ondes planes progressives
- 2) Généralisation au paquet d'ondes
- 3) Retour à la structure de l'onde plane progressive

On obtient ainsi :

$$-i\vec{R} \wedge (\vec{R} \nabla \vec{E}) = -i \frac{\mu_0 n e^2}{m \omega} \vec{E} + i \omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}$$

$$+ i \frac{R^2}{\omega} \vec{E}$$

$$R^2 = -\mu_0 \frac{n e^2}{m} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

$$R^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Equation de Klein-Gordon

relation plasma

$$\omega_p^2 = \frac{\mu_0 n e^2}{m}$$

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{c k}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$$

Ainsi $v_p > c$: paradoxe ?

↳ ne correspond pas à la vitesse de l'information ou de l'énergie

On considère un plasma avec n ions ($M_i, Z_i e$) et n électrons ($n, -e$) par unité de vol.

On néglige les interactions entre ions

+ Si un champ $\vec{E}$ est appliqué, 2^{ème} loi de Newton :

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{m}{M} \vec{v} \quad m \sim 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad M \sim 10^{-26} \text{ kg}$$

$$\frac{m}{M} \ll 1$$

$$\text{Ainsi } \vec{j} = -ne\vec{v} + ne\vec{v} \approx -ne\vec{v}$$

* Equation du mouvement d'un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{1}{c}$$

$\Rightarrow \|\vec{v}\| \ll c$ Approximation non relativiste

* $\omega > \omega_p$, $R \in \mathbb{R}$: il y a propagation

$$R = \pm i \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = \pm i k$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i k x} \cos(\omega t + \varphi)$ onde évanouissante

(décroissance exponentielle de l'amplitude dans la direction du vecteur d'onde)

$\Rightarrow$ passe-front

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$\Rightarrow$ milieu dispersif (dépendance en ω)

Ainsi $v_p > c$: paradoxe ?

↳ ne correspond pas à la vitesse de l'information ou de l'énergie

I2)

$$\rho = 0 \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$3) \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\text{Ainsi } i \vec{k} \cdot \vec{E} = i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$-i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i \omega \vec{B}$$

$$-i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 i \omega \vec{E}$$

$$\text{Or } \vec{j} = -ne\vec{v} \Rightarrow i \omega \vec{j} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -i \frac{ne^2}{m \omega} \vec{E}$$

Avec les équations de Maxwell :

$$\vec{B} = \frac{\vec{R} \nabla \vec{E}}{\omega} \quad (\vec{E}, \vec{B}, \vec{R}) \text{ est un trièdre di}$$

$$\text{et } \vec{B} = \frac{\vec{R} \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{E}}{\omega \vec{R}}$$

à structure semblable à celle du vide

$$\text{Remarque, } \|\vec{v}\| \ll c \Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{e \vec{v}}{c} \ll e \vec{E}$$

ou $v_p > c$: approximation relativiste

valable à posteriori

II/1) On suppose $k \in \mathbb{R}$

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \text{Se} = \omega_1 - \omega_2$$

$$Sk = k_1 - k_2$$

Onde résultante :

$$\chi(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\chi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{Se}{2} t - \frac{Sk}{2} x\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

2) Paquet d'ondes = un ensemble d'ondes planes progressives harmoniques de pulsations voisines

$$\chi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega$$

Développement limité au 1^{er} ordre :

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0)$$

Ainsi $\chi(x, t) = \exp(i\omega_0 t - k_0 x) \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp\left(i(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x\right) d\omega$

onde moyenne

enveloppe qui se propage à la vitesse $v_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}$

3) $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

On $\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

Ainsi $v_g = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} c < c$

Remarque : $v_g v_\phi = c^2$