

OPPH, modèle physique et limite

I - Généralité et définition

→ Onde plane progressive harmonique: L'onde est une fonction sinusoïdale du temps:

$$s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

De façon plus générale:

$$s(r,t) = S_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)$$

$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \vec{k}$ vecteur d'onde.

→ Notation complexe: $s(r,t) = \underline{S}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$$\text{avec } \underline{S}_0 = S_0 e^{i\phi}$$

$$\text{On a } \boxed{\frac{\partial \underline{S}}{\partial t} = i\omega \underline{S}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \underline{S} = -i\vec{k} \cdot \underline{S}}$$

II - Cas des ondes électromagnétiques dans le vide

1) Équations de Maxwell

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\text{avec } \vec{k}' = k \vec{v}$$

$$\underline{\vec{E}}' = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$$

$$\cdot \underline{\vec{\nabla}} \cdot \underline{\vec{E}}' = 0 \Rightarrow -ik' \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \Rightarrow v \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

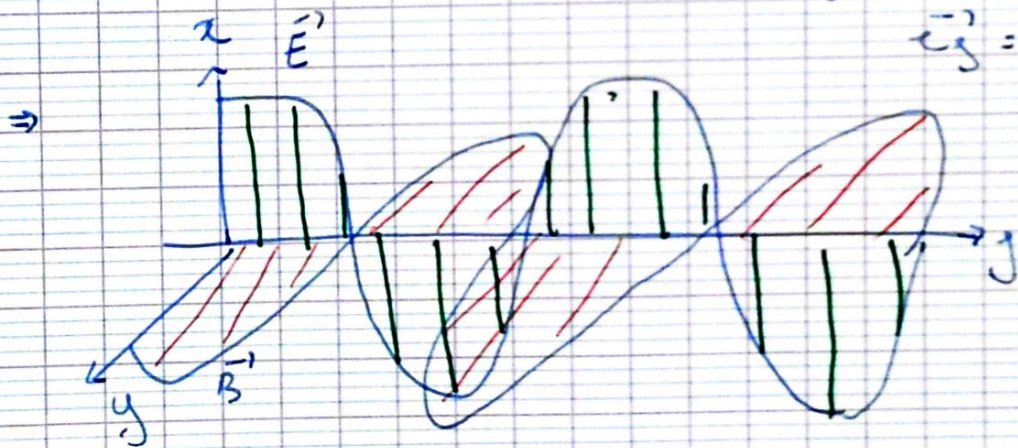
$$\cdot \underline{\vec{\nabla}} \cdot \underline{\vec{B}}' = 0 \Rightarrow \underline{\vec{v}} \cdot \underline{\vec{B}}' = 0$$

$\underline{\vec{E}}'$ et $\underline{\vec{B}}'$ sont $\perp$ à $\underline{\vec{v}}$ dans le vide $\Rightarrow$ les Oem PPH sont transversales.

$$\cdot \underline{\vec{\nabla}} \wedge \underline{\vec{E}}' = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{B}}' \Rightarrow -ik' n \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}'$$

$$\text{D'où } \underline{\vec{B}}' = \frac{k}{\omega} \underline{\vec{v}} \wedge \underline{\vec{E}}'$$

$\Rightarrow \underline{\vec{B}}'$ et $\underline{\vec{E}}'$ sont orthogonaux entre eux, $(\underline{\vec{v}}, \underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}')$ forment un trièdre direct $\underline{\vec{e}}_3 = \underline{\vec{v}}$.



2) Relation de dispersion :

On injecte les solutions dans l'équation de propagation, ici d'Alembert:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\vec{E}} = c^2 \Delta \underline{\vec{E}} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = c = v_p}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{U}' \wedge \vec{E}'}{c}, \text{ d'où } \frac{\|\vec{E}'(t, x)\|}{\|\vec{B}'(t, x)\|} = c$$

$\Rightarrow$ Ces résultats s'étendent aux ondes plane progressives (analyse de Fourier).

3) Propagation de l'énergie

$$U_{\text{em}} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} = \epsilon_0 \vec{E}^2$$

↑
↑
équipartition de
l'énergie

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \wedge (\vec{U}' \wedge \vec{E}') = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{U}' = \epsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{U}'$$

Prenons $\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - k_y y + \phi_x) + E_{0y} \cos(\omega t - k_y y + \phi_y)$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \langle \vec{E}^2 \rangle &= \langle E_{0x}^2 \cos^2(\dots) + E_{0y}^2 \cos^2(\dots) \rangle \\ &= \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \langle U_{\text{em}} \rangle = \epsilon_0 \left(\frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2} \right)$$

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle U_{\text{em}} \rangle c \vec{U}'}$$

énergie
infinie si l'on
intègre $\Rightarrow$ non ∇

III - onde réelle et paquet d'onde

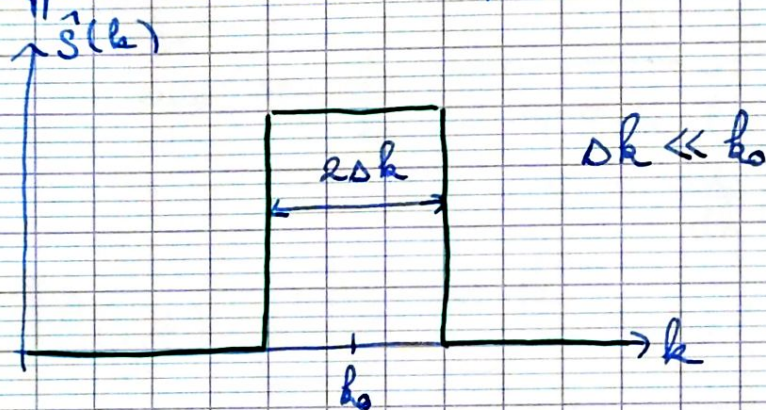
1) Superposition

→ Slide

2) Propagation d'un paquet d'onde

Soit un paquet d'onde d'extension spatiale finie:

On suppose nous avons contenu spectral:



On réalise un D.L de la relation de dispersion:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + O((k - k_0)^2)$$

$$\rightarrow \text{D'alambert } \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = c.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S(y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{S}(k) \exp(i k_0 y + (k - k_0) y \\ - \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} t - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) t) \end{aligned}$$

avec $\hat{S}(k) = |\hat{S}(k)| \exp\{i\phi(k_0) + \phi'(k_0)(k-k_0)\}$

$\rightarrow S(g,t) = \exp(i(k_0 g - \omega_0 t + \phi_0))$

$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{S}(k)| \exp\{i(\phi'(k_0)(k-k_0) + (k-k_0)g - \frac{d\omega}{dk}|_{k_0}(k-k_0)t)\}$

On pose $\eta = k - k_0$: et $\hat{S}_{env} = |\hat{S}(k)| e^{i\phi(k_0)}$

$\rightarrow S(g,t) = e^{i(k_0 g - \omega_0 t + \phi_0)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{S}_{env}(\eta) e^{i\eta(x - \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} t)}}_{\text{T.F de l'enveloppe en } x = \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} t}$

Porteuse $\rightarrow v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$

D'où $S(g,t) = e^{i(k_0 g - \omega_0 t + \phi_0)} \underbrace{\hat{S}_{env}(x - \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} t)}_{\text{enveloppe} \rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk}|_{k_0}}$

porteuse $\rightarrow v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$

