

## 1 Sténose artérielle

D'après Agro-Véto - 2016

Le système cardio-vasculaire a pour fonction d'apporter aux tissus et aux organes l'oxygène et les nutriments nécessaires à leur fonctionnement, ainsi que de les débarrasser des déchets générés par leur métabolisme. Pour ce faire, la circulation du sang doit s'établir des artères jusqu'aux capillaires. On étudie ici dans un modèle cylindrique la détection d'une sténose artérielle, correspondant à un rétrécissement localisé mais problématique de l'artère.

L'écoulement du sang dans une artère peut être décrit en première approximation comme l'écoulement laminaire, incompressible et homogène, en régime stationnaire, d'un fluide visqueux de viscosité dynamique  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$ , dans un tronçon cylindrique horizontal d'axe (Ox), de rayon  $R$  et de longueur  $L$ . Cet écoulement horizontal suit une loi de Poiseuille (voir partie *Méthodes*) dont la loi de vitesse est :

$$\vec{v}(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{u}_x$$

où  $r$  est la distance radiale d'un point de l'écoulement à l'axe (Ox), et  $\Delta P$  est le différentiel de pression imposé entre l'entrée et la sortie du tronçon cylindrique de longueur  $L$ .

1. Exprimer le débit volumique  $Q$  de l'écoulement en fonction de  $\eta$ ,  $R$ ,  $\Delta P$  et  $L$ . En déduire l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement  $v_m$ . Application numérique : estimer la valeur de  $v_m$  et du nombre de Reynolds d'un tel écoulement en l'absence de sténose.  
Données :  $\rho = 1,06 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $\eta = 6 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ;  $R = 6 \text{ mm}$ ;  $L = 8,0 \text{ cm}$ ;  $\Delta P = 40 \text{ Pa}$ .
2. Montrer que l'on peut procéder à une analogie entre la description de cet écoulement et les lois de l'électrocinétique. En tirer une définition de la résistance hydraulique  $R_h$  d'un vaisseau sanguin faisant intervenir son débit volumique  $Q$  et son différentiel de pression  $\Delta P$ . En déduire alors l'expression de  $R_h$  en fonction de  $L$ ,  $R$  et  $\eta$ .

Une sténose correspond à une réduction brutale et localisée du diamètre d'un vaisseau sanguin. On modélise cette situation par la juxtaposition en série de trois tronçons coaxiaux de rayons respectifs  $R$ ,  $R_s$  et  $R$ , et de longueurs respectives  $L$ ,  $L_s$  et  $L$ , comme illustré ci-dessous.

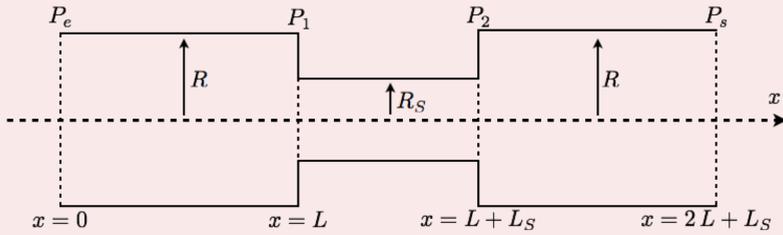


Fig. 1.1 – Modèle de vaisseau sanguin présentant une sténose.

3. L'écoulement étant supposé stationnaire, que peut-on dire du débit volumique  $Q$ ? Traduire cela par une relation liant les vitesses et les sections de chaque tronçon.
  4. Établir la relation liant la résistance hydraulique totale  $R_{h,\text{tot}}$  aux résistances  $R_{h,1}$ ,  $R_{h,2}$  et  $R_{h,3}$  des trois tronçons. En déduire le différentiel de pression  $P_1 - P_2$  en entrée/sortie de la sténose, en fonction notamment de l'écart total de pression  $P_e - P_s$ .
  5. Calculer la vitesse moyenne  $v_s$  dans la zone sténosée et la vitesse moyenne  $v$  hors de la sténose. En déduire la valeur du nombre de Reynolds dans chaque partie de l'artère.  
Données :  $L_s = 1,0$  cm ;  $2L + L_s = 8,0$  cm ;  $\Delta P = 40$  Pa ;  $R_s = 2$  mm ;  $R = 6$  mm.
  6. Quel est le problème posé par la sténose en terme de vascularisation? Proposer une méthode qui permette de diagnostiquer ce problème.
1. Le débit volumique  $Q$  est le flux de vitesse à travers la surface élémentaire de la couronne de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  :

$$Q = \int_0^R \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) 2\pi r \, dr = \frac{\pi R^4}{8L\eta} \Delta P.$$

Par définition, la vitesse moyenne est  $v_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta P}{8L\eta} = 0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui correspond ici à un nombre de Reynolds  $\mathcal{R}e = \frac{\rho v_m R}{\eta} \simeq 4 \times 10^2$  (écoulement plutôt laminaire, ce que suppose le modèle de Poiseuille).

2. En électrocinétique, dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), la loi d'Ohm traduit la relation entre le flux de charge (intensité du courant) et sa cause (différence de potentiel) :  $U = Ri$ , où la résistance électrique  $R$  du conducteur quantifie sa capacité à freiner le flux de charge. Il en va de même pour l'écoulement laminaire d'un fluide en régime stationnaire, où l'analogue de la loi d'Ohm relie le flux de matière (débit volumique) à sa cause (différence de pression) :  $\Delta P = R_h \cdot Q$ , où la résistance hydraulique  $R_h$  caractérise la capacité du conduit à freiner l'écoulement. Dans la géométrie cylindrique de l'artère, on a ainsi

$$R_h = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{8L\eta}{\pi R^4}.$$

3. En régime stationnaire et incompressible, le débit volumique se conserve :  $v_m \pi R^2 = v_s \pi R_s^2$ .
4. En écoulement laminaire et stationnaire, l'analogie électrocinétique s'applique, ici avec des résistances en série, puisque le flux traverse les résistances l'une après l'autre. Les résistances hydrauliques se somment donc en série :  $R_{h,\text{tot}} = R_{h,1} + R_{h,2} + R_{h,3}$ . L'analogie de la loi d'Ohm s'appliquant à chaque tronçon, et le flux en série étant le même en tout point, on retrouve

l'expression d'un pont diviseur :

$$P_1 - P_2 = \frac{R_{h,2}}{R_{h,tot}} (P_e - P_s)$$

5. En régime stationnaire, le débit se conserve toujours, mais la présence d'une sténose réduit implique des pertes de charge qui vont réduire la valeur du débit, pour un différentiel de pression fixé. Dans la partie sténosée, la loi d'Ohm s'écrit :

$$v_s \pi R_s^2 = Q = \frac{P_1 - P_2}{R_{h,2}} = \frac{P_e - P_s}{R_{h,tot}} = \frac{\Delta P}{\frac{16L\eta}{\pi R^4} + \frac{8L_s\eta}{\pi R_s^4}}$$

ce qui donne  $v_s = 0,31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $Re \simeq 100$ . En dehors de la zone sténosée, la conservation du débit donne  $v = v_s \frac{R_s^2}{R^2} = 0,034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $Re \simeq 30$ . Le faible nombre de Reynolds dans les trois tronçons permet de valider l'utilisation de la loi de Poiseuille. On constate que l'étranglement (sténose) implique une accélération locale de l'écoulement, mais qu'il est responsable d'un ralentissement global du sang dans l'artère, dû aux pertes de charge.

6. Les pertes de charge liée à l'apparition d'une sténose réduisent drastiquement le débit, qui passe de  $42 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$  à  $4 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'apport en nutriments et le nettoyage des tissus en sont alors dangereusement ralentis. L'accélération localisée dans la zone sténosée, et l'augmentation correspondante du nombre de Reynolds, peuvent se voir par échographie Doppler, qui présentera davantage de hautes fréquences dans la réponse des tissus à une excitation acoustique.