

Satellites. Applications - Le candidat ou la candidate traitera le cas particulier des satellites géostationnaires. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.

Roméo BIGUÉ

21 juin 2022

## 1 Prérequis :

- Mécanique du point
- Lois fondamentales de la dynamique
- Théorème énergétique
- Systèmes de coordonnées
- Référentiels galiléens et non-galiléens
- *Notions fondamentales de la gravitation* (explicitées dans la première partie)

## 2 Messages forts de la leçon

Application des notions fondamentales de la gravitation vues en L1 à des systèmes réels afin de décrire des phénomènes relativement compliqués qui expliquent actuellement les méthodes des agences spatiales modernes ainsi que le phénomène de marées.

### 3 Plan

#### 3.1 I - La force de gravitation

##### 3.1.1 a) Rappels

##### 3.1.2 b) Énergie potentielle effective

#### 3.2 II - Satellites artificiels

##### 3.2.1 a) Optimisation d'un lancement

##### 3.2.2 b) Orbite géostationnaire

#### 3.3 III - Satellites naturels

##### 3.3.1 a) Termes de marées

##### 3.3.2 b) Explication du phénomène de marées

### 4 Développements

Première partie : rapides rappels sur l'énergie potentielle de pesanteur, le caractère plan du mouvement, la loi des aires, la troisième loi de Kepler. Ensuite, établissement de l'énergie potentielle effective et description états lié et de diffusion.

Deuxième partie : on se place dans la peau des physiciens pionniers des sciences spatiales : appliquons les notions fondamentales établies précédemment pour développer une agence spatiale dans un contexte de compétition internationale féroce. Où placer le pas de tir ? Calcul de l'énergie de lancement d'un satellite : différence entre l'énergie mécanique finale d'un satellite en orbite circulaire d'altitude  $h$  et l'énergie mécanique initiale du satellite posé à la surface (il est entraîné par la Terre  $\Rightarrow$  vitesse cinétique et à une distance  $R_T$  du centre de la Terre), apparition d'un terme en  $-\cos(\text{latitude})^2$  à minimiser, on place donc les centres de lancements à l'équateur. Vérification sur une image répertoriant les centres de Cap Canaveral, Kourou, Baïkonour et Hainan. Ensuite, établissement des caractéristiques de l'orbite géostationnaire : plan équatorial et altitude de 36000 km.

*Ouverture sur la vitesse de libération pour les sondes interplanétaires et sur les différents moyens de propulsion des fusées.*

Troisième partie : étude des conséquences de la présence de notre satellite lunaire, établissement de l'équation régissant la dynamique d'une particule de fluide à la surface de la Terre en établissant le terme d'inertie d'entraînement, mise en évidence des termes de marées et du bourrelet océanique. Ensuite, explication du phénomène de marées : deux marées par jour dues au caractère

stationnaire du bourrelet et de la rotation de la Terre sur elle-même, une période de  $12h25min$  au lieu de 12h car la Lune tourne avec une période de 27 jours, des marées liées principalement à la Lune et pas aux autres astres car les termes de marées de la Lune sont environ 2.15 fois plus important que ceux du Soleil et cela explique la modulation de la hauteur des marées lors des conjonctures favorables ou défavorables de la Lune et du Soleil par rapport à la Terre (pleine Lune et nouvelle Lune  $\Rightarrow$  grandes marées).

*Ouverture sur la synchronisation Terre-Lune, périodes orbitale et propre identiques de la Lune : elle montre toujours la même face, ralentissement de la rotation de la Terre, éloignement de la Lune de quelques centimètres par an.*

## 5 Questions

- Pourriez-vous citer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation ?

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$$

- État de diffusion et état lié, analogie avec un autre domaine et une expérience célèbre ?

Analogie avec la force centrale de l'électrocinétique et l'expérience de Rutherford qui bouleversa la compréhension de la structure atomique en mettant en évidence un phénomène de retrodiffusion.

- Savez-vous comment démontrer la troisième loi de Kepler pour des orbites elliptiques ?

Non, il me semble juste qu'on obtient une expression plus compliquée que simplement  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ .

- Était-ce vraiment utile d'invoquer la loi de Kepler pour optimiser la position du lancement ?

Pas en soit, mais cela était nécessaire pour l'évaluation de l'ordre de grandeur des économies réalisées en se plaçant à l'équateur.

- Comment désorbiter un satellite ?

On rétrograde à l'aphélie pour placer le périhélie dans l'atmosphère terrestre qui réduit à néant l'intégrité du satellite par friction.

- Rétrograder au périhélie, est-ce que ça ralentit le satellite ?

À l'instant où l'on introduit un  $\Delta v$ , le satellite freine, en revanche, sa nouvelle trajectoire va augmenter considérablement sa vitesse dans les instants qui suivent la manoeuvre.

- Vous avez mentionné la vitesse de libération pour l'envoi de sondes inter-

planétaires, pourriez-vous faire le calcul ?

On considère un satellite à une distance  $r$  du centre de la Terre, pour obtenir un état de diffusion il faut apporter suffisamment d'énergie pour que son énergie mécanique devienne positive (état de diffusion), il faut donc apporter  $-E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}mv_{lib}^2$  et on résout l'équation.

- Pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle effective, vous vous êtes placé dans quel référentiel ?

Dans le référentiel barycentrique du système Terre + satellite et on a supposé  $m_{sat} \ll m_T$

- Vous insinuez donc que le référentiel barycentrique et le référentiel géocentrique ne coïncide pas, ainsi la Terre tournerait donc autour du centre de masse du système couplé ? Pourriez-vous calculer une estimation de la déviation ?  
Oui, mais non...

- C'est pas évident pour les élèves le lien entre vos deux dernières parties : schémas similaires et pourtant apparition de termes non-galiléens...

C'est vrai, en réalité, cela s'explique car les termes de marées sont de l'ordre de  $10^{-6}m/s^2$ , il y a donc 7 ordres de grandeurs d'écart entre l'accélération de la pesanteur à la surface et les termes de marées, ils sont donc négligeable en orbite et sur Terre.

## 6 Notes

# Satellites . Applications

## I - La force de gravité.

- a) rappels
- ~~b) troisième loi de Kepler~~
- c) énergie potentielle effective

## II - Satellites artificiels

- a) optimisation d'un site de lancement
- b) orbite géostationnaire

ouverture \* vitesse de libération  
\* méthodes de propulsion  
actuelle nucléaire

## III - Satellites naturels

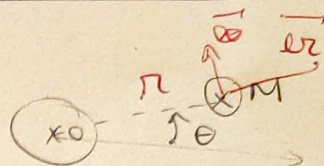
- a) termes de marées
- b) explication du phénomène de marées.

ouverture \* synchronisme T-L  
\* ralentissement de la Terre  
\* éloignement de la Lune

## I - force de gravitation

a) rappelle

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = - \frac{G m_0 m_m \vec{r}}{r^3}$$



→ Slide

## \* moment cinétique:

$$\begin{aligned}\vec{L}_O(M) &= m \vec{r} \wedge (\dot{\vec{r}} + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

TMC:  $\{M\}$  dans  $R_0$  suppose galiléen  
appliqué au point  $O$ :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_g) = \vec{r} \wedge F_g(r) \vec{e}_r = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = \vec{r} \wedge m \vec{v} = \text{cte}$$

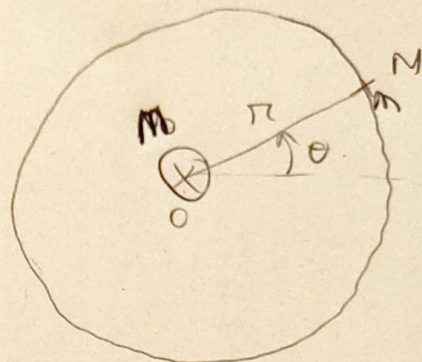
$$\forall t, \vec{r}(t) \perp \vec{L}_O$$

le mouvement est donc plan dans le  
plan contenant  $\vec{r}(t=0)$  et  $\perp \vec{L}_O$ .

\* ~~Système~~ loi de Kepler.

slide

trajectoire circulaire uniforme:  
( $\dot{\theta} = \text{cste}$ )



$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow v = \|\vec{v}\| = r \dot{\theta}$$

$$a = \|\vec{a}\| = r \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r} \Rightarrow m a = m \frac{G M_0}{r^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{G M_0}{r}$$

on cherche à déterminer la relation  
entre la période de rotation et le rayon  
de la trajectoire

$$v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G M_0}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G M_0} = \text{cste}$$

I - ~~b~~) énergie potentielle effective  
 ③ la force est conservative

$$E_m = E_c + E_p = \text{cte}$$

$$= \frac{1}{2} m \overline{v}^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r} \overline{e_r} + r \dot{\theta} \overline{e_\theta})^2 + E_p(r)$$

$$c = n^2 \dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m c^2}{2 r^2} + E_p(r)}_{E_{p, \text{eff}}(r)} \quad \frac{m n^2 \dot{\theta}^2}{2}$$

$E_{p, \text{eff}}(r)$  est problème en  $(r, \dot{r})$  seulement

$$E_{p, \text{eff}}(r) = \frac{m c^2}{2 r^2} - \frac{k}{r} + \text{cte}$$

## II - Satellites artificiels

c) a) optimisation du placement

$$E_m = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 + \bar{\varphi}(\vec{m})$$

$$E_p(\sqrt{r}) = -\frac{k}{r} + \text{const}$$

\* Sahellite an ~~ad~~

$$K = \underline{G m_T m}$$

$$E_{m,i} = \frac{m \omega^2 R_T^2 \cos(\lambda)^2}{2} - \frac{k}{R_T}$$

\* Satellite en orbite :  
altitude  $h$

$$E_{m,f} = 0 + \frac{m v_0^2}{2} - \frac{k}{R_{T+h}}$$

troisième loi de Kepler:

$$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_s} \Rightarrow \frac{1}{(R_T + h)^3} \cdot \overset{2}{\theta} = \frac{1}{Gm_s}$$

$$\Rightarrow \frac{G m_E m}{2(R_T + h)} = \frac{m v_o^2}{2} = \frac{k}{2(R_T + h)}$$

$$\Rightarrow E_{m,f} = - \frac{k}{2(R_T + h)}$$

$$E_l = E_{m,f} - E_{m,i} = -K \left[ \frac{1}{2(R_T + h)} - \frac{1}{R_T} \right] - \frac{m\omega^2 R_T^2 \cos(\chi)^2}{2}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.s}^2/\text{m}^2$$

①  
②

energie de lancement minimale ~~maximale~~ pour  $\cos^2(\lambda)_{\text{max}}$   
 $\Rightarrow \lambda = 0$

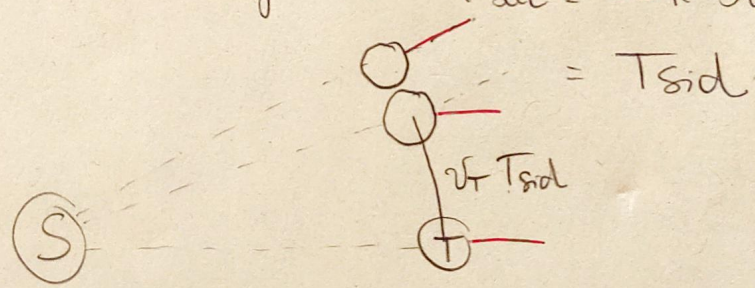
$$\frac{②}{①} \sim \frac{\omega^2 R_T^3}{G M_T} \sim \frac{1}{289} \sim 0,33 \%$$

b) application aux télécommunications:  
l'orbite géostationnaire

But : on cherche une orbite qui revole un satellite stationnaire pour un observateur terrestre

⚠ Subtilité il ne faut pas  $T_{\text{sat}} = 24\text{h} = T_{\text{sol}}$ .

il faut :  $T_{\text{sat}} = 23\text{h } 56 \text{ min } 4 \text{ sec}$



on veut que  $\frac{T_{\text{sat}}^2}{\pi^3} = \frac{4\pi^2}{G M_T} \Rightarrow r_{\text{geo}} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T_{\text{sid}}^2}{4\pi^2}}$   
 $= 42\,168 \text{ km}$

$\Rightarrow h_{\text{geo}} = r_{\text{geo}} - R_T = 35\,790 \text{ km}$

III (1)

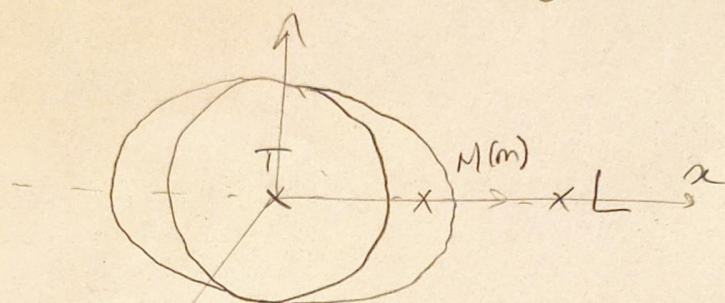
marées

e-learning physique

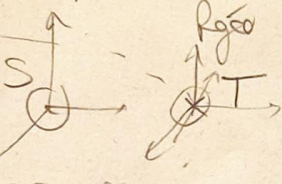
marées

Lune / ralentissement  
T pour séisme

écartement de  
la lune 9 cm/an



$R_{\text{océan}}$



\*  $\int$  { particule élémentaire  
de fluide  $M(m)$  }

\*  $R$  : ( $R_{\text{geo}}$ ) non géométrique.

$$\vec{G}_A(B) = -G M_A \frac{\vec{AB}}{AB^3}$$

PFD

$$m \vec{a}_M / R_{\text{geo}} = m \vec{G}_T(M) + m \vec{G}_S(M) + m \vec{G}_L(M) - m \vec{a}_E$$

PFD {Terre} dans  $R_c$ :

$\vec{a}_T / R_{\text{océan}}$

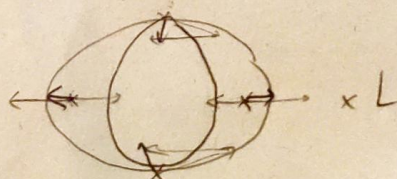
$$m_T \vec{a}_T / R_c = m_T \vec{G}_S(T) + m_T \vec{G}_L(T)$$

$$\Rightarrow m \vec{a}_M / R_{\text{geo}} = m \vec{G}_T(M) + m \left( \vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(T) \right) + m \left( \vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(T) \right)$$

termes de marées

$\Delta \vec{G}_S(M)$

$\Delta \vec{G}_L(M)$

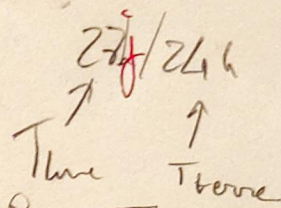


2x sup.  
à é val

II (2)

→ 2 marées hautes par jour et deux marées basses

↳ Lune tourne → pas 12h  
mais 24h25 min. en vrai



$$\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(T) = + \frac{G M_L \vec{M}}{L M^2} - \frac{G M_L \vec{M}}{L T^2}$$

$$d_{TL} = 380 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$d_{TS} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_L = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

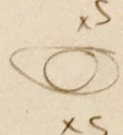
$$= G M_L \left( \frac{1}{(d_{TL} + R_T)^2} - \frac{1}{d_{TL}^2} \right) \vec{M}$$

$$\approx \frac{G M_L}{d_{TL}^2} \left( 1 + \frac{2 R_T}{d_{TL}} - 1 \right) \vec{M} \approx \frac{2 G M_L R_T}{d_{TL}^3} \vec{M}$$

$$\sim 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

$$\frac{\|\vec{\Delta G}_S\|}{\|\vec{\Delta G}_L\|} = \frac{M_L}{M_S} \frac{d_{TS}^3}{d_{TL}^3} \sim 2,75$$

\* nouvelle - Lune et pleine Lune → grandes marées

\* ⊥  → faibles marées

IV ③

au voisinage de la Terre

$$m \vec{a}_{\text{sat}}(M) = m \vec{G}_T(M) + \cancel{m \vec{G}_S(M)} + \cancel{m \vec{G}_L(M)} - \cancel{m \vec{a}_{(T)}/R_e}$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 force d'entraînement qui  
 compense les termes lunaire  
 et solaire

Lune  $\Rightarrow$  marées sur Terre

mais Terre  $\Rightarrow$  MAREES sur Lune  
 - freine

Synchronisation : ( $T_{\text{orbitale}} = T_{\text{rot}}^{\circ}$ )

transfert d'énergie mécanique