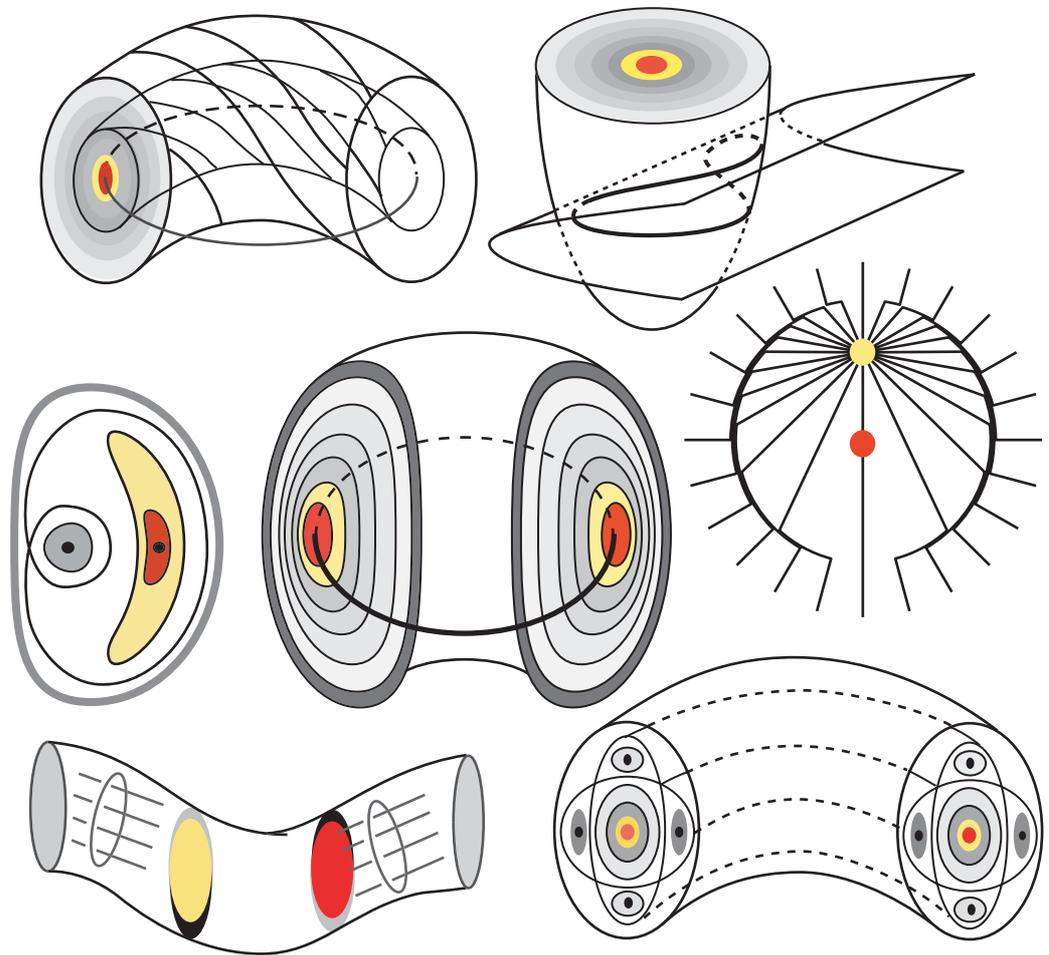


# Physique des Plasmas



Jean-Marcel.Rax

[jean-marcel.rax@polytechnique.edu](mailto:jean-marcel.rax@polytechnique.edu)

[jean-marcel.rax@universite-paris-saclay.fr](mailto:jean-marcel.rax@universite-paris-saclay.fr)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Dimensions and scales</b>	<b>4</b>
1.1	Space-time and mass-charge . . . . .	4
1.2	Energy scales . . . . .	6
1.3	Bogolioubov hierarchy . . . . .	7
1.4	Vaschy-Buckingham II theorem . . . . .	11
1.5	Debye, Langmuir and Spitzer scaling . . . . .	12
1.6	Reynolds, Mach, Maxwell and Kelvin numbers . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Plasma physics</b>	<b>18</b>
2.1	History and development . . . . .	18
2.2	Electron impact ionization . . . . .	20
2.3	Astrophysical plasmas . . . . .	22
2.4	Fusion and industrial plasmas . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Introduction to plasma dynamics</b>	<b>33</b>
3.1	Cyclotron rotation . . . . .	33
3.2	Magnetic moment . . . . .	34
3.3	Diamagnetic force . . . . .	37
3.4	Electric drift . . . . .	38
3.5	Alfven theorem . . . . .	39
3.6	Ponderomotive forces . . . . .	41
3.7	Polarization, magnetization and conduction . . . . .	44
3.8	Ambipolar and Braginsky diffusions . . . . .	47
3.9	Alfven, Böhlm and diamagnetic velocities . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Introduction to plasma kinetic</b>	<b>55</b>
4.1	Boltzmann distribution . . . . .	55
4.2	Poisson and Holtsmark Distributions . . . . .	58
4.3	Fokker-Planck Equation . . . . .	62
4.4	Debye and Landau Spheres . . . . .	66
4.5	Scattering cross section . . . . .	71
4.6	Mean free path and collision frequency . . . . .	76
4.7	Nernst-Planck equation . . . . .	78
4.8	Fluctuations, conduction, diffusion . . . . .	80
4.9	Loi de Saha . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Some Historical Problems</b>	<b>85</b>
5.1	Child-Langmuir current . . . . .	85
5.2	Debye sheath . . . . .	87
5.3	Chapman-Ferraro layer . . . . .	88
5.4	Lawson theorem . . . . .	90
5.5	Bohr-Bethe slowing down . . . . .	91
5.6	Paschen-Townsend condition . . . . .	94
5.7	Schottky/Tonks-Langmuir discharges . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Collectives and dissipative processes</b>	<b>103</b>
6.1	Langmuir frequency . . . . .	104
6.2	Hybrid frequencies . . . . .	107
6.3	Debye length . . . . .	109
6.4	London length . . . . .	110
6.5	Maxwell time . . . . .	112
6.6	Kelvin length . . . . .	113
6.7	Magnetic Reynolds and $\beta$ numbers . . . . .	114

<b>7</b>	<b>Adiabaticity, resonances and heating</b>	<b>118</b>
7.1	Gradient, curvature, and shear . . . . .	118
7.2	Magnetic drifts . . . . .	121
7.3	Adiabatic invariants . . . . .	126
7.4	Resonances and heating . . . . .	131
<b>8</b>	<b>Waves and Instabilities</b>	<b>138</b>
8.1	Plasma waves . . . . .	139
8.2	Cut-off and resonances . . . . .	143
8.3	Plasmons Wake . . . . .	145
8.4	Free energy and stability . . . . .	147
8.5	Couplages réactif et dissipatif . . . . .	149
8.6	Instabilités de Dérives . . . . .	153
8.7	Couplages cinétiques . . . . .	157
8.8	Modes de gradient de température . . . . .	159
8.9	Instabilités d'Interchange . . . . .	161
8.10	Instabilités de Torsion . . . . .	163
<b>9</b>	<b>Confinement and relaxation</b>	<b>166</b>
9.1	Principles of adiabatic confinement . . . . .	166
9.2	Landau and Boltzmann relaxations . . . . .	172
9.3	Slowing down and pitch angle scattering . . . . .	177
9.4	Suprathermal and relativistic particles . . . . .	181
<b>10</b>	<b>Annexes</b>	<b>185</b>
10.1	E/B and $c^2B/E$ velocities . . . . .	185
10.2	Frenet and Serret . . . . .	186
10.3	Stokes and Ostrogradsky . . . . .	188
10.4	Green functions . . . . .	189
10.5	Maxwell Tensor . . . . .	190
<b>11</b>	<b>Problems and exercises</b>	<b>193</b>

Les notes de cours rassemblées et ordonnées ici sont issues de mes enseignements de physique des plasmas, de physique des tokamaks, de dynamique des champs et particules chargées donnés, à différents niveaux, ces vingt dernières années, principalement : (i) en 2<sup>e</sup> & 3<sup>e</sup> années à l'Ecole Polytechnique, (ii) au M2 GI-PLATO (Université de Paris-Saclay/Ecole Polytechnique/INSTN), (iii) au M2 Physique des Plasmas (Université Paris VI/Université de Paris XI), (iv) au M2 Phénomènes Nonlinéaires et Irréversibles (ENS Ulm), (v) aux M1 de Physique Fondamentale et Physique Appliquée (Université de Paris-Saclay), (vi) au M2 FESup (ENS Paris-Saclay), et plus ponctuellement : (vii) comme options dans les différentes écoles de la région parisienne (Centrale, SupElec, SupOp, ENSTA...) ainsi que dans le cadre (viii) de l'ITER International School en Inde et (ix) du US National University Fusion program à Princeton.



*Une bonne connaissance de l'électromagnétisme, de la mécanique et de la thermodynamique, ainsi qu'une vision large de la physique, sans a priori idéologique, incluant les aspects fondamentaux et appliqués et une maîtrise des modèles statistiques, quantiques et relativistes de la dynamique et de la structure de la matière, constituent le prérequis de base pour aborder sereinement la physique des plasmas.*

*Choisir une bibliographie en phase avec le stade actuel de développement de cette discipline nécessite un choix critique pour identifier, au-delà des modes, ce qui restera fondamental et fondateur au cœur de la discipline et pour se défaire, au-delà des routines, des sujets traditionnels que les évolutions récentes ont rendu obsolètes.*

*On conseillera donc les ouvrages suivants :*

■ **Electromagnétisme**

*Continuum Electromechanics*, J.R. Melcher, MIT Press, 1981 Cambridge.

*Classical Electrodynamics*, J.D. Jackson, Wiley, 3<sup>e</sup> édition 1999 New-York.

*Classical Electricity and Magnetism*, W. Panofsky & M. Phillips, Add.-Wesley, 1977 Reading.

*Electromagnétisme, Milieux, Structure, Energie*, J.M. Rax, deBoeck, 2017 Paris.

■ **Dynamique des particules chargées**

*Regular and Stochastic Motion*, A. Lichtenberg & M. Leiberman, Springer, 1983 New-York.

*Physics of Chaos in Hamiltonian System*, J. Zaslavsky, Imperial College Press, 1998 London.

*Phase-space Dynamics of Particles*, A. Lichtenberg, Wiley, 1969, New York.

*Mécanique Analytique, Adiabaticité, Résonances, Chaos*, J.M. Rax, Dunod, 2020 Paris.

■ **Physique des plasmas**

*The Physics of Plasmas*, T.J. Boyd & J.J. Sanderson, CUP, 2<sup>e</sup> édition 2003 Cambridge.

*Plasma Physics*, A. Piel, Springer-Verlag, 2010 Berlin.

*Principles of Plasma Physics*, N. A. Krall & A.W. Trivelpiece, Mc Graw-Hill, 1973 New-York.

*Physique des Plasmas*, J.M. Rax, Dunod, 5<sup>e</sup> édition 2019 Paris.

■ **Plasmas thermonucléaires**

*Plasma Physics for Nuclear Fusion*, K. Miyamoto, MIT Press, 1989 Cambridge.

*Tokamak Plasma, a Complex Physical System*, B. Kadomtsev, IOP, 1992 London.

*Tokamak*, J. Wesson, OUP, 2<sup>e</sup> édition 1992 Oxford.

*Physique des Tokamaks*, J.M. Rax, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2<sup>e</sup> édition 2018 Paris.

■ **Plasmas pour les matériaux et l'énergie**

*Plasma Physics and Engineering*, A. Fridman & L.A. Kennedy, CRC Press, 2011 New York.

*Gaseous Electronics and Gas Lasers*, B.E. Cherrington, Pregamon, 1980, Oxford.

*Magnetohydrodynamics Energy Conversion*, R.J. Rosa, Mc Graw-Hill, 1968 New York.

*Physique de la Conversion d'Energie*, J.M. Rax, EDP Sciences, 2015 Paris.



# Chapitre 1

## Dimensions and scales

### 1.1 Space-time and mass-charge

La matière constituant notre environnement proche se présente essentiellement sous forme solide, liquide ou gazeuse. Au delà de ces trois états, à haute et à basse températures, deux nouveaux types d'états, les *gaz quantiques* et les *gaz ionisés*, se distinguent par l'apparition d'une grande diversité de phénomènes physiques nouveaux : (i) à très basse température, les états supraconducteur, superfluide ainsi que les condensats de Bose-Einstein présentent une richesse de comportements associée aux corrélations et aux phénomènes d'échange et de cohérence quantiques ; (ii) à très haute température, la dissociation, puis l'ionisation, conduisent à la création de populations d'ions et d'électrons libres et ces charges libres induisent un comportement collectif, non-linéaire, chaotique et turbulent.

On appelle *plasma* ou *gaz ionisé* cet état exotique de la matière contenant une fraction significative de charges libres ; l'ensemble des concepts, méthodes et résultats propres à l'étude de cet état de la matière constitue la *physique des plasmas*. La physique des plasmas intègre les connaissances de nombreux autres domaines de la physique, tels que la physique statistique, la dynamique hamiltonienne, l'électrodynamique relativiste, les physiques atomique, moléculaire et nucléaire ; réciproquement, de nombreux concepts et méthodes, issus de recherches fondamentales en physique des plasmas, ont été intégrés par d'autres disciplines, plus particulièrement en physique non-linéaire, chaos et turbulence, interaction champs-particules et théories des instabilités.

Avant d'aborder plus spécifiquement cette discipline, compte tenu des évolutions de l'enseignement de la physique ces dernières décennies dans le secondaire et le supérieur, il n'est pas inopportun de rappeler quelques fondamentaux.

Nous devons à la physique antique la distinction fondamentale entre (i) l'espace et le temps, d'une part, et (ii) la matière, d'autre part ; matière déployant sa structure dans l'espace et sa dynamique suivant le temps. Une fois cette distinction acquise, la matière, réduite à des propriétés sensibles, constitue un objet d'étude. La physique spéculative des présocratiques conduisit à la recherche d'un principe premier unifiant la diversité des apparences et propriétés de la matière : l'eau (Thalès), l'air (Anaximène), le feu (Héraclite), l'eau, l'air, la terre et le feu (Empédocle), quelque fut le choix de ce principe, ces réductions phénoménologiques amenèrent rapidement des contradictions. Ces limites de la physique antique furent dépassées par Archimède à travers une conception dialectique, expérience/théorie, et quantitative de la physique.

Cette pratique moderne de la physique, basé sur la confrontation quantitative de la *praxis* et du *logos*, a permis d'identifier une deuxième distinction fondamentale entre : (i) les propriétés émergentes de la matière et (ii) ses propriétés fondamentales. Par *émergentes*, on entend les propriétés liées aux grand nombre de degrés de liberté d'un échantillon macroscopique, ces propriétés émergent à grande échelle. Par *fondamentales*, on entend les propriétés irréductibles qui participent à l'identité d'un échantillon ultime de matière. Par exemple, la capacité calorifique ou la conduction électrique sont des propriétés émergentes qui perdent leurs vertus opérationnelles et leur sens au niveau de l'atome ou du noyau. Le concept de conduction électrique d'un noyau de cobalt est non opérationnel, alors que la masse est opérationnelle à petite échelle et à grande échelle, confirmant ainsi son caractère fondamental. L'une des missions historiques de la physique est de réduire les propriétés macroscopiques sensibles, non fondamentales, à une manifestation des propriétés microscopique fondamentales, sachant que le tout n'est pas nécessairement réductible à ses parties ; ce programme trouve au sein de la physique statistique son expression la plus aboutie à travers une remontée du microscopique vers le macroscopique.

Pour les échelles d'énergie qui nous intéressent en physique des plasmas, entre la fraction d'électron-volt ( $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ) et quelques dizaines de mégaelectron-volt, la matière, a son niveau ultime, atome, noyau, quark, est caractérisée par deux propriétés irréductibles et universelles, la *masse inertielle* et la *charge électrique*, d'autres propriétés tels que le charme, l'étrangeté... apparaissent à très petites échelles mais ne s'expriment pas en physique des plasmas.

Ainsi, à travers une description physique, notre environnement est-il réduit à l'évolutions de masses et de charges dans l'espace en fonction du temps. Se pose alors le problème de la mesure des distances, durées et

de ces deux propriétés fondamentales, c'est-à-dire leurs transformations en *grandeurs*. Un axiome implicite de la physique est constitué par l'existence de classe d'équivalence de ratio identique suivant la définition : *une grandeur est mesurable s'il est possible d'imaginer une opération (expérience) qui définit le rapport de deux grandeurs de la propriété considérée; en particulier, deux grandeurs sont égales lorsque leur rapport est égal à 1.* Le corollaire de cet axiome fondateur de la physique s'énonce : *la mesure d'une grandeur résulte du choix de l'unité de la propriété considérée.*

L'espace et le temps, d'une part, et la masse et la charge, d'autre part, conduisent donc au choix, nécessaire, suffisant et arbitraire, du système d'unité international SI : **mksA**, **mètre**, **kilogramme**, **seconde** et **Ampère**. Ces unités fondamentales constituent les grandeurs références pour les longueurs ( $L$ ), masses ( $M$ ), temps ( $T$ ), et charges ( $AT$ ), elles sont accessibles à travers des étalons. Les autres grandeurs, par exemples associés aux propriétés émergentes et aux constantes fondamentales, sont mesurés sur la base d'unités dérivées. Ainsi, empruntant la notation de Maxwell [], toute grandeur physique  $G$  présente une dimension physique  $[G]$  :

$$[G] = L^\alpha T^\gamma M^\beta A^\delta = \underbrace{(longueur)^\alpha (temps)^{\gamma-\delta}}_{\text{espace-temps}} \overbrace{(masse)^\beta (charge)^\delta}^{\text{matière}}$$

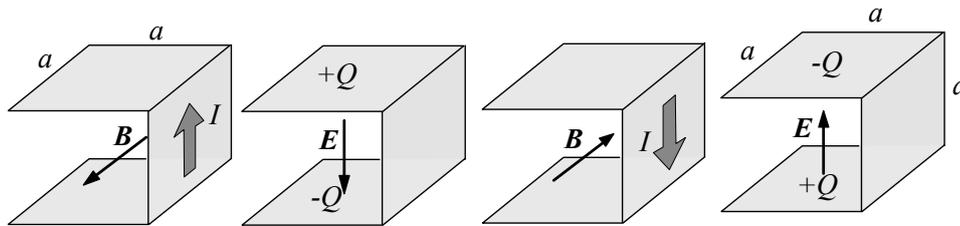
Par exemple, l'expression des équations de Maxwell nécessite l'introduction de deux constantes fondamentales, la permittivité électrique du vide  $\epsilon_0$  et la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$  :

$$\epsilon_0 \equiv 8,85 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \rightarrow [\epsilon_0] = \frac{A^2 T^4}{M L^3}, \mu_0 \equiv 1,26 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \rightarrow [\mu_0] = \frac{M L}{A^2 T^2}$$

Lorsque l'on résout les équations de Maxwell, dans le cadre de problèmes de physique des plasmas, ces deux constantes apparaissent souvent sous la forme de deux combinaisons : rapport et produit. Ces deux combinaisons ne sont autres que le carré de l'inverse de la vitesse de la lumière dans le vide  $c^{-2}$  et le carré l'impédance du vide  $Z_0^2$  :

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.9 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow [c] = \frac{L}{T}, Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega \rightarrow [Z_0] = \frac{M L^2}{A^2 T^3}$$

La vitesse de la lumière est associée aux phénomènes de propagation, mais elle est implicite aussi dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents où les phénomènes de propagation sont négligés. Considérons une feuille de métal supraconducteur en forme de rectangle de longueur  $3a$  et de largeur  $a$ . Plions cette feuille suivant les arrêtes d'un cube de coté  $a$  et considérons les propriétés capacitive et inductive de l'objet (supra)conducteur ainsi obtenu.



Les deux faces en regard de cette feuille pliée sont sujets aux phénomènes d'*influence électrostatique*, déterminant une accumulation de charges  $\pm Q(t)$ , elles présentent donc une capacité  $C$  mesurée en Farad F. La face latérale permet d'écouler un courant  $I(t)$  entre ces deux faces en regard et ce courant est fermé par le courant de déplacement dans le gap capacitif, un flux magnétique associé à ce courant dans ce circuit peut donc être défini, ainsi qu'une inductance propre  $L$  mesurée en Henry H. L'évaluation de la capacité  $C \approx \epsilon_0 a$  et de l'inductance  $L \approx \mu_0 a$  suivant les formules classiques où les effets de bord sont négligés permet le calcul de la fréquence de résonance conformément à la relation de Thomson  $LC\omega^2 = 1$  pour un circuit  $LC$ . Ainsi, la pulsation de résonance de cette feuille pliée est donnée par  $LC\omega^2 = 1 \rightarrow \epsilon_0 a \mu_0 a \omega^2 \approx 1$ , c'est-à-dire  $\omega \approx c/a$  Hz. La feuille supraconductrice est uniquement caractérisée par la longueur  $a$  et l'expression d'un temps à partir de  $a$  nécessite l'identification d'une vitesse, la seule disponible en électrodynamique étant  $c$ . Au-delà du mode propre fondamental  $\omega \approx c/a$ , si nous excitons cette feuille pliée avec une onde électromagnétique de fréquence  $\nu \neq \omega$ , la réponse stationnaire en tension  $V$ , dans le gap capacitif, et courant  $I$ , sur la face latérale, oscille à la fréquence  $\nu$  et l'impédance  $Z = V/I \approx E/H$  de ce circuit réactif est donnée par la relation :  $Z/Z_0 \approx j(\nu/\omega - \omega/\nu)$ . Ainsi, à basse fréquence  $\nu < \omega$ ,  $\text{Im } Z < 0$  : le comportement capacitif associé au gap est dominant, et à haute fréquence  $\nu > \omega$ ,  $\text{Im } Z > 0$  : le comportement inductif autorisé par le court circuit du courant de déplacement dans le gap est dominant.

L'électrodynamique est construite sur la base des deux constantes fondamentales  $c$  et  $Z_0$  (ou  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ ). En physique des plasmas, la prise en compte des propriétés fondamentales d'un électron, masse  $m$  et charge  $e$ , permet de construire un système complet d'unités adapté à l'étude des plasmas. En effet, la charge de

l'électron  $e$ , sa masse  $m$ , ainsi que la vitesse de la lumière  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  et l'impédance du vide  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ , constituent un jeu de quatre paramètres dimensionnés et **indépendants**. Ces quatre constantes classiques peuvent être aisément ramenées à : (i) une longueur, le rayon classique de l'électron,  $r_e$ , (ii) une masse, la masse de l'électron,  $m$ , (iii) un temps,  $r_e/c$  et (iv) un courant, le courant d'Alfven,  $I_A = 4\pi\varepsilon_0 mc^3/e$  remplaçant ainsi le système : [m, k, s, A]  $\rightarrow$  [ $r_e = \mu_0 e^2/4\pi m$ ,  $m$ ,  $r_e/c$ ,  $I_A = ec/r_e$ ].

La prise en compte de la constante de Planck  $2\pi\hbar$  conduit à l'identification de deux échelles de longueur supplémentaires rappelées dans le tableau ci-dessous :

Longueur	Définition	Valeur
<i>Rayon classique de Thomson</i>	$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$	$2,81 \times 10^{-5} \text{ \AA}$
<i>Longueur d'onde Compton</i>	$\lambda_c \equiv \frac{\hbar}{mc} = \frac{r_e}{\alpha}$	$3,86 \times 10^{-3} \text{ \AA}$
<i>Rayon de Bohr</i>	$a_0 \equiv \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m e^2} = \frac{r_e}{\alpha^2}$	$0,529 \text{ \AA}$

Ces trois longueurs fondamentales ne sont pas indépendantes et peuvent être mises en relations à travers les puissances de la constante de structure fine

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \rightarrow [\alpha] = L^0 M^0 T^0 A^0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{137}$$

A travers les puissances de  $\alpha$ , le courant d'Alfven est aussi associé à un ensemble de courants fondamentaux.

$$\begin{aligned} \text{Courant d'Alfven} & : I_A \equiv \frac{4\pi\varepsilon_0 mc^3}{e} = 17000 \text{ A} \\ \text{Courant mésoscopique relativiste} & : \alpha I_A \equiv \frac{emc^2}{\hbar} = 124 \text{ A} \end{aligned}$$

Au-delà des courants fondamentaux, le quantum de résistance mésoscopique  $h/e^2$  (*Klitzing-Landauer*) est égal à l'impédance du vide que divise la constante de structure fine.

$$\begin{aligned} \text{Admittance du vide} & : \frac{1}{Z_0} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{376.73} \Omega^{-1} \\ \text{Conductance de Klitzing-Landauer} & : G_K \equiv \frac{2\alpha}{Z_0} = \frac{e^2}{h} = \frac{1}{25812.81} \Omega^{-1} \end{aligned}$$

## 1.2 Energy scales

Considérons les trois constantes fondamentales de la physique :

$$\begin{aligned} \text{Entropie} & : k_B \equiv 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \\ \text{Action} & : h \equiv 6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \text{Vitesse} & : c \equiv 2,99 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Le système international complet des unités fondamentales contient aussi le Kelvin comme unité de température, mais souvent les températures sont mesuré en [énergie] =  $ML^2T^{-2}$  par l'usage de la constante de Boltzmann  $k_B$  qui est donc le *quantum* d'entropie. Suivant en cela les autres branches de la physique, les physiciens des plasmas n'utilisent pas toujours le système international d'unités et ont développé un système d'unités plus adapté aux ordres de grandeurs rencontrés dans les plasmas ; ainsi, l'unité d'énergie/température n'est pas le Joule mais l'électron-volt :

$$1 \text{ eV} \equiv 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Deux constantes fondamentales s'exprimant partiellement en Joules : la constante de Boltzmann  $k_B$  possédant la dimension d'une entropie, et la constante de Planck  $h$ , possédant la dimension d'une action, l'électron-volt peut donc être converti en un temps ou en une température. Enfin, la vitesse de la lumière  $c$  permet de convertir ce temps associé à l'électron volt en une longueur.

La table de conversion de l'électron-volt, permettant de converser avec les autres disciplines, s'établit donc comme suit. Le thermodynamicien préfère exprimer une énergie à travers une température, la conversion s'effectue à l'aide de la constante de Boltzmann ; l'équivalent en température de l'électron-volt est donné par :

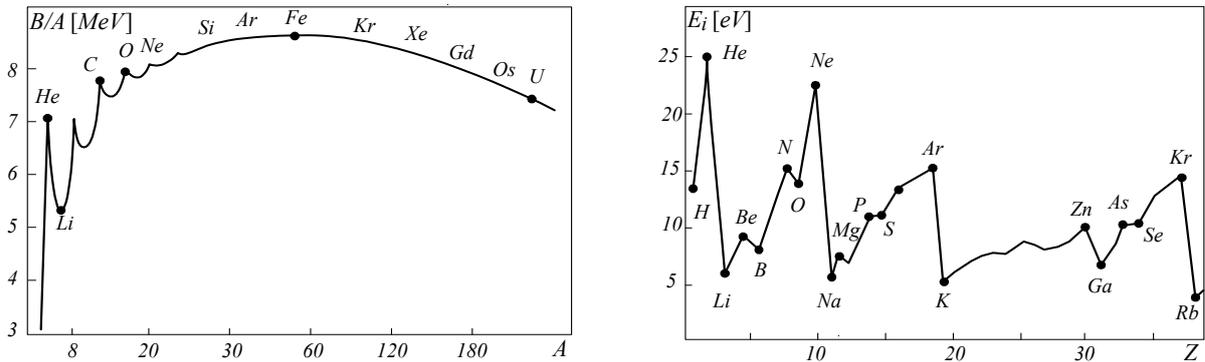
$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} / k_B = 11\,604 \text{ K}$ . L'opticien, quant à lui, quantifie les énergies en termes de longueur d'onde, la conversion s'établit à l'aide de la constante de Planck et de la vitesse de la lumière, le résultat est alors donné par l'équivalence :  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} / hc = 12\,398 \text{ \AA}$ . Le chimiste préfère raisonner sur l'énergie associée à une mole de matière,  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$  particules, et utilise plus volontiers les calories par moles ; l'équivalent en calories par mole de l'électron-volt est alors donné par :  $1 \text{ eV} = N_A \times 1,6 \times 10^{-19} / 4,18 = 23 \text{ kcal/mol}$ .

Enfin, le radio-électricien, plus accoutumé aux fréquences, travaille sur une telle échelle, la correspondance entre l'échelle d'énergie et l'échelle de fréquences étant donnée par l'équivalence :  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} / h = 242 \text{ THz}$ . La table de conversion de l'électron-volt s'établit donc suivant :

eV	K	Å	kcal/mol	THz
1	11 604	12 398	23	242

On retiendra que  $1/40 \text{ eV}$  donne l'ordre de grandeur de la température ambiante,  $300 \text{ K}$ .

Depuis plus d'un siècle, nous savons que la matière constituant notre environnement proche est formée d'un assemblage d'atomes. Ces atomes sont constitués d'un cortège électronique en interaction électromagnétique avec un noyau, ces noyaux se présentent sous la forme de protons et de neutrons rassemblés et stabilisés par les interactions fortes et soumis aux couplages électrofaibles. La taille du nuage électronique est de l'ordre de l'Angström,  $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ , la taille du nuage nucléaire de l'ordre du Fermi,  $1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m}$ . Malgré cette taille, plus que modeste au regard des dimensions atomiques, l'essentiel de la masse au sein de l'atome est concentrée dans le noyau mais l'essentiel des propriétés électriques, magnétiques et optiques provient de la dynamique du nuage électronique.



Ces deux échelles de longueur, l'Angström (Å) et le Fermi (F), conduisent à l'identification des deux énergies caractéristiques de la physique atomique et de la physique nucléaire. Considérons la relation exprimant l'énergie d'interaction électrique  $U$  entre deux charges  $q$  et  $q'$  séparées par une distance  $d$ :  $U(d) = qq'/4\pi\epsilon_0 d$ ; pour deux charges élémentaires  $q = q' = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  nous obtenons  $U(\text{Å}) \sim 10 \text{ eV}$  et  $U(\text{F}) \sim 1 \text{ MeV}$ .

Excitation/Transition	Ordre de grandeur [eV]
Moléculaire rotation/vibration/translation	$\sim 10^{-3} \rightarrow 10^{-1}$
Electronique Métaux et Semiconducteurs	$\sim 1$
Electronique Atomes et Molécules	$\sim 1 \rightarrow 10$
Ionisation	$\sim 10 \rightarrow 10^2$
Nucléaire Fission/Fusion	$\sim 10^6$

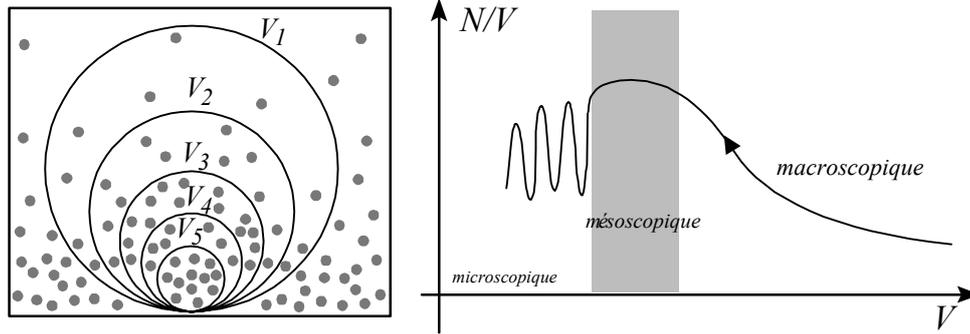
Nous venons d'obtenir les énergies caractéristiques de liaisons pour les noyaux et pour les atomes, dans ce dernier cas, l'énergie typique d'ionisation illustrée sur la figure ci-dessus.

### 1.3 Bogolioubov hierarchy

Au-delà de ces deux échelles, un échantillon macroscopique de matière possède un très grand nombre de degrés de liberté susceptibles de participer aux échanges d'énergie électromagnétique: L'ordre de grandeur de ce nombre de degrés de liberté, restreint aux excitations basses énergies, pour un volume de matière de quelques litres, est donné par le nombre d'Avogadro:  $N_A \equiv 6.022136 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , mesure le nombre d'atomes, ou de molécules, contenus dans une mole d'une espèce chimique donnée; si cette espèce est sous forme gazeuse à pression atmosphérique et à température ordinaire, elle occupe un volume de 22.4 litres. Le nombre de Loschmidt:  $N_L \approx 2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  mesure le nombre d'atomes ou de molécules, dans les mêmes conditions, contenus dans un volume de  $1 \text{ cm}^3$ .

Considérons l'expérience conceptuelle illustrée sur la figure ci-dessous. Au sein d'une atmosphère gazeuse inhomogène considérons une suite de volumes  $V_1 > V_2 > V_3 > V_4 > V_5 > \dots$  et comptons le nombre de molécules ainsi enfermées  $N_1 > N_2 > N_3 > N_4 > N_5 > \dots$ . Il est alors possible de tracer l'évolution du rapport  $N/V$  en fonction de  $V$ . Pour les grands volumes on observe une variation résultant de l'inhomogénéité de l'atmosphère et du positionnement de ces grands volumes, c'est l'échelle macroscopique. Puis, pour de petits volumes, un plateau de densité  $N/V$  apparaît permettant ainsi de définir une densité locale, mais si le volume diminue les effets associés à la structure discrète/discontinue du gaz sont alors dominant à l'échelle microscopique. La zone de transition entre le microscopique et le macroscopique est appelée échelle mésoscopique. A l'échelle macroscopique, sur des volumes supérieurs à quelques centaines de milliers d'atomes, il est possible de construire

des descriptions telles que la *mécanique des milieux continus*, la *magnétohydrodynamique* et la *thermodynamique macroscopique*.



Afin de construire une modélisation continue des systèmes de charges et de masses élémentaires, il est nécessaire de distinguer au sein de la structure de ces systèmes de masses et charges trois échelles de longueurs,

- (i) l'échelle microscopique : la taille de l'atome ou de l'ion, ou la distance entre atomes dans les phases denses, ou le libre parcours moyen,
- (ii) l'échelle macroscopique (le système) et
- (iii) l'échelle *mésoscopique* (la gouttelette fluide des hydrodynamiciens ou la sphère de Debye des physiciens des plasmas) intermédiaire entre les deux échelles macroscopique et microscopique c'est-à-dire :
- (i) grande au regard de l'échelle microscopique pour permettre le lissage des fluctuations microscopiques, et
- (ii) petite au regard de l'échelle macroscopique pour donner un sens à l'usage des bilans infinitésimaux locaux (ou globaux) formulés à travers le calcul différentiel/intégral.

Cette relation d'ordre structurelle est transverse à toute la physique ; pour l'air, à pression atmosphérique et à une température de 300 K, ces trois échelles de longueur sont données par les valeurs du tableau :

Microscopique	Mésoscopique	Macroscopique
$< 10^{-10}\text{m}$	$10^{-7}\text{ m}$	$> 10^{-4}\text{ m}$

Un argument similaire peut être développé pour les échelles non pas **structurelles**, mais **dynamiques**, c'est alors les temps d'évolution qui doivent être considérés.

La discontinuité des propriétés statistiques, telle que la densité fluctuante de particules, au passage de l'échelle mésoscopique, est particulièrement bien illustrée par l'exemple donné par Chandrasekhar dans son célèbre article de 1943. Chandrasekhar considère une sphère fictive de rayon  $a$  au sein de l'atmosphère dans ses conditions standards (300 K, 101300 Pa), et il évalue le temps de récurrence  $\tau$  entre deux fluctuations de densité de 1% à l'intérieur de cette sphère fictive, l'amplitude de ces fluctuations suivent à une loi de Poisson et le résultat du calcul de  $\tau$  est donné dans le tableau ci-dessous.

$a[\text{cm}]$	1	$5 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$
$\tau[\text{s}]$	$10^{10^{14}}$	$10^{68}$	$10^6$	1	$10^{-11}$

Le passage du microscopique au macroscopique se situe donc au voisinage  $0.2\ \mu\text{m}$ . Cette exemple historique démontre aussi la nécessité d'articuler les échelles intermédiaires (i) structurelles dans l'espace et (ii) dynamiques suivant le temps.

Soit un échantillon macroscopique de matière présentant un très grand nombre de degrés de liberté susceptibles de participer aux échanges d'énergie électromagnétique. Considérons les densités de probabilité, à  $N$  corps  $\mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)$ , à 1 corps  $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , et  $n(\mathbf{r}, t)$  la densité de particules dans l'espace réel, en fonction du temps  $t$  ( $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  sont les positions et impulsions). Sur une échelle de temps longue  $\mathcal{F}$  relaxera vers  $F^N$ , puis, la fonction de distribution à un corps  $F$  relaxera vers une maxwellienne locale, enfin, une description fluide au voisinage de l'équilibre thermodynamique devient valide. La température  $T$ , la densité  $n$  et la vitesse d'écoulement  $\mathbf{V}$  sont alors des variables pertinentes pour la description de cet ensemble de particules. Puis, sur une échelle de temps plus longue, si les contraintes le permettent, l'écoulement tend vers une configuration au repos et le milieu devient homogène et se présente comme un état d'équilibre thermodynamique.

Modèles statistiques: $\mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)$
<i>Décorrélations</i> $\rightarrow$ <i>Réduction cinétique</i>
Modèles cinétiques: $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$
<i>Equilibre thermodynamique local</i> $\rightarrow$ <i>Réduction hydrodynamique</i>
Modèles fluides: $n(\mathbf{r}, t), \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), T(\mathbf{r}, t) \dots$
<i>Extremum d'entropie</i> $\rightarrow$ <i>Equilibre thermodynamique global</i>
Modèles thermodynamiques homogènes: $U, V, N \dots$

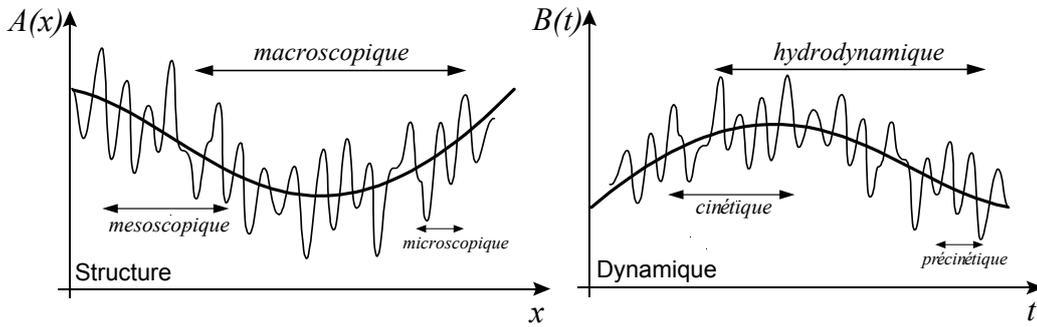
Ce processus de relaxation vers l'équilibre thermodynamique est universel pour tout système physique non pathologique. Suivant en cela Bogolioubov, l'usage est d'introduire trois échelles de temps pour quantifier cette évolution d'un système de  $N$  particules chargées.

- (i) L'échelle de temps précinétique est de l'ordre de grandeur du temps d'interaction entre deux particules, sa valeur est donc donnée par la longueur d'interaction entre deux particules que divise la vitesse moyenne de ces particules. Sous cette échelle de temps les corrélations entre plusieurs particules sont significatives.

- (ii) L'échelle de temps cinétique, plus longue, est de l'ordre de grandeur du temps entre deux interactions d'une même particule, sa valeur est donc donnée par le libre parcours moyen que divise la vitesse moyenne ; sur cette échelle de temps la fonction de distribution à un corps  $F$  contient l'information nécessaire pour l'étude physique du système :  $\mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) \sim F(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) F(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t) \dots F(\mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)$ .

- (iii) L'échelle de temps hydrodynamique est associée aux temps de relaxation des inhomogénéités des variables hydrodynamiques, sa valeur est de l'ordre de grandeur de la taille du système que divise la vitesse du son ; sur cette échelle de temps un modèle fluide est pertinent :  $F \sim n(\mathbf{r}, t) [2\pi m k_B T(\mathbf{r}, t)]^{-\frac{3}{2}} \exp - [\mathbf{p} - m\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)]^2 / 2mk_B T(\mathbf{r}, t)$ .

- Enfin, asymptotiquement, le système évolue à partir de cet état hydrodynamique d'équilibre thermodynamique local vers un état d'équilibre thermodynamique sans gradient : un état d'équilibre *thermodynamique global* :  $n(\mathbf{r}, t) \rightarrow n, T(\mathbf{r}, t) \rightarrow T$ .



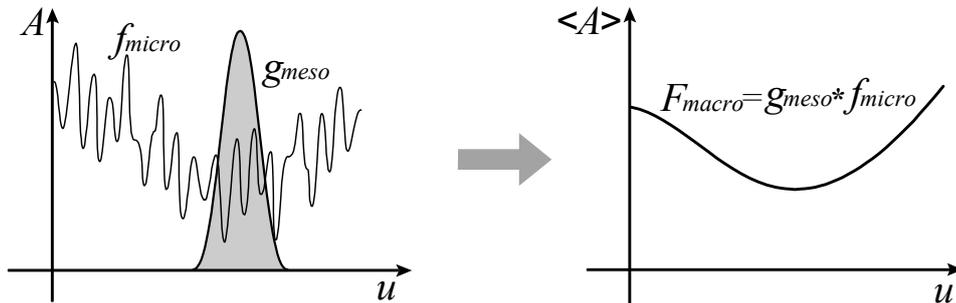
Cette dernière étape de relaxation ne présente pas un caractère systématique et dépend de la nature des contraintes appliquées au système. Pour l'air à pression atmosphérique, et à une température de 300 K, les trois échelles de temps de *Bogolioubov* sont données en ordre de grandeur par les valeurs du tableau :

Précinétique	cinétique	Hydrodynamique
$< 10^{-12}$ s	$10^{-9}$ s	$> 10^{-4}$ s

La réduction cinétique, qui consiste à négliger les corrélations, conduit à des équations d'évolutions markoviennes dont la propriété majeure est un taux de production d'entropie positif.

La réduction fluide conduit à des lois de transport (énergie, masse, charge, impulsion) macroscopiques.

**L'identification de l'échelle structurelle mésoscopique et de l'échelle dynamique cinétique est nécessaire pour construire la physique des plasmas.**



Le lissage mésoscopique, permettant la remontée du microscopique au macroscopique, est obtenu par une convolution dans l'espace, ou le temps (un filtrage dans l'espace de Fourier).

Soit  $f_{micro}(u)$  une variable physique microscopique ( $u = x, y, z, t$ ), les modèles de plasmas continus considèrent les propriétés de  $F_{macro}(u) = \langle f_{micro} \rangle$ , la moyenne  $\langle \rangle$  étant définie suivant la relation :

$$F_{macro}(u) \equiv \langle f_{micro} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{meso}(u - u') f_{micro}(u') du'$$

La fonction  $g_{meso}(u)$  est localisée autour de  $u = 0$  et présente une largeur suffisante pour lisser les fluctuations microscopiques, spatiales et temporelles, mais demeure relativement étroite pour que le calcul différentiel à l'échelle macroscopique soit pertinent.

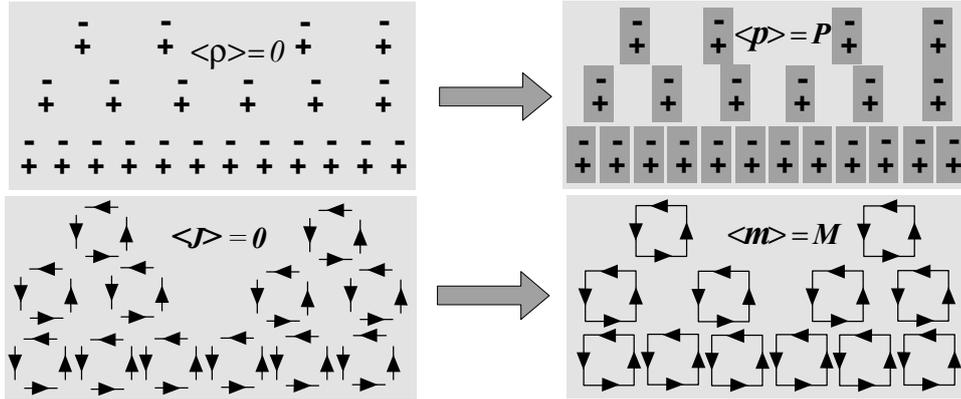
La dérivée de  $F_{macro}$ , par rapport au temps ou à la position, est la moyenne de la dérivée de  $f_{micro}$  :

$$\frac{\partial F_{macro}}{\partial u} = \int \frac{\partial g_{mésos}(u - u')}{\partial u} f_{micro}(u') du' = \int g_{mésos}(u - u') \frac{\partial f_{micro}(u')}{\partial u'} du' = \left\langle \frac{\partial f_{micro}}{\partial u} \right\rangle$$

Ce résultat est obtenu en considérant la relation :  $\partial g_{mésos}/\partial u = -\partial g_{mésos}/\partial u'$ , puis en effectuant une intégration par partie :  $-\int dgf = -[gf] + \int gdf = \int gdf$ .

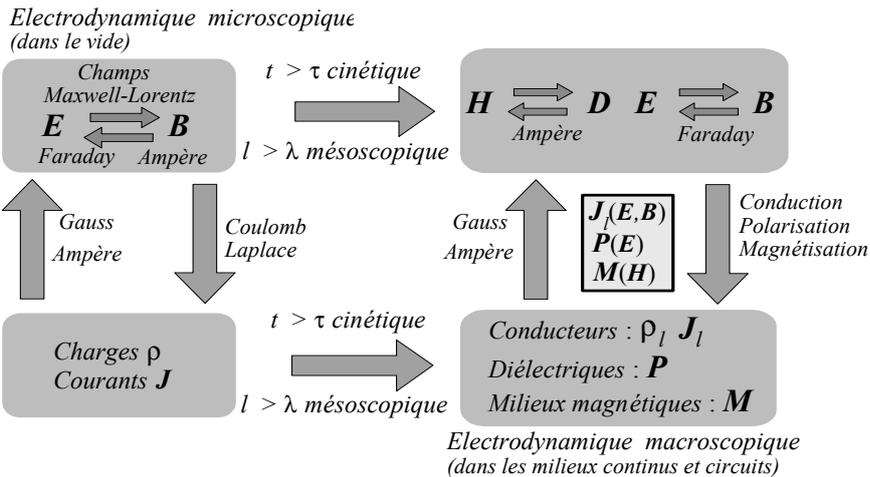
Par exemple, considérons le milieu chargé représenté sur le schéma ci-dessus, une moyenne macroscopique de la distribution microscopique de charges  $\rho$  et de courants  $\mathbf{J}$  peut être considérée sur une échelle macroscopique, et présente une valeur nulle  $\langle \mathbf{J} \rangle = \mathbf{0}$ ,  $\langle \rho \rangle = 0$ .

Par contre, l'introduction d'une échelle mésoscopique permet de discerner l'émergence de dipôles et de décrire ces milieux comme des densités volumiques de dipôles  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{P}$ .



Ainsi, l'électro-dynamique des milieux continus doit être distinguée de l'électro-dynamique dans le vide, le diagramme ci-dessous illustre cette distinction, la colonne de gauche décrit la relation champs/source dans le vide et celle de droite dans la matière. La remontée du microscopique, à gauche, vers le macroscopique, à droite, s'effectue en éliminant les échelles plus petites que la longueur mésoscopique  $\lambda$  et plus rapides que le temps cinétique  $\tau$ .

La modélisation de gauche conduit aux équations dites de Maxwell-Lorentz dans le vide ; par contre, la modélisation de droite, complétant les propriétés électriques (magnétiques) de la matière par des concepts macroscopiques tels que la conduction, la polarisation et la magnétisation, conduit aux équations sur les deux champs électrique et magnétique ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ), et sur l'induction magnétique et le déplacement électrique ( $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ) où  $\mathbf{B} \equiv \langle \mathbf{B}_{micro} \rangle$ ,  $\mathbf{E} \equiv \langle \mathbf{E}_{micro} \rangle$  et  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  ainsi que les charges libres  $\rho_l$  et courants libres  $\mathbf{J}_l$ . La rétroaction des champs sur la matière n'est plus alors envisagée à travers les forces de Coulomb et Laplace, mais suivant des fonctions de réponses macroscopiques champs/matière qui se réduisent aux perméabilité  $\mu$ , permittivité  $\varepsilon$  et conductivité  $\eta$  en régime linéaire.



Lorsque les charges ne peuvent se déplacer que sur des distances microscopiques, alors il est nécessaire de considérer (i) la polarisation  $\mathbf{P}$  [C/m<sup>2</sup>] ou/et (ii) la magnétisation  $\mathbf{M}$  [A/m], et non la conduction, puis de modéliser le matériau comme un diélectrique ou/et un milieu magnétique. Les charges et courants au sein de ces milieux sont appelés *charges liées* et *courants liés* par oppositions aux charges libres et courants libres ( $\rho_l, \mathbf{J}_l$ ) circulant au sein des conducteurs. Les propriétés des milieux sont donc,

- pour les conducteurs, caractérisées par la conductivité  $\eta$  [S/m] en régime linéaire,
- pour les diélectriques, caractérisées par la permittivité  $\varepsilon$  [F/m] en régime linéaire et
- pour les milieux magnétiques, caractérisés par la perméabilité  $\mu$  [H/m] en régime linéaire.

Ce sont les trois grandes classes de modélisations utilisées au sein en physique des plasmas.

## 1.4 Vaschy-Buckingham $\Pi$ theorem

Considérons une grandeur physique  $G$  telle que:  $[G] = L^\alpha M^\beta T^\gamma A^\delta$ . Suivant la nature du problème et les lois physiques mises en jeux, cette grandeur est en relation avec  $n$  autres grandeurs physiques  $a_1, a_2, a_3 \dots$  suivant l'équation:

$$G = f(a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$$

telles que:

$$[a_1] = L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1} A^{\delta_1}, [a_2] = L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2} A^{\delta_2} \dots [a_n] = L^{\alpha_n} M^{\beta_n} T^{\gamma_n} A^{\delta_n}$$

Construisons la matrice des dimensions  $D$ :

$$D \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}$$

Si il existe des combinaisons linéaires de certaines colonnes de  $D$  permettant d'exprimer une autre colonne différente, par exemple la dernière colonne combinaison linéaire des deux premières, alors il existe une combinaison monomiale des  $[a_i]$  associés à ces colonnes et *vis-versa*, par exemples:

$$[a_n] = [a_1]^\lambda [a_2]^\mu \leftarrow \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \delta_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

La démonstration est directe en développant la relation :

$$[a_n] = [a_1]^\lambda [a_2]^\mu \rightarrow \log(L^{\alpha_n} M^{\beta_n} T^{\gamma_n} A^{\delta_n}) = \log\left[(L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1} A^{\delta_1})^\lambda (L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2} A^{\delta_2})^\mu\right]$$

sur la base de l'indépendance de  $\log L, \log M, \log T, \log A$ .

Traduit en termes algébriques et en termes de dimensions physiques, le nombre  $k = \text{rang} D \leq 4$  donne le nombre de grandeurs  $a_i$  présentant des *dimensions indépendantes* et le nombre  $m = n - k$ , le nombres de grandeurs  $a_i$  dont les dimensions peuvent étre exprimées en fonction des dimensions des  $k$  grandeurs précédentes. Nous écrivons alors la relation physique:

$$G = f(a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_m)$$

où les  $a_i$  sont dimensionnelement indépendantes et les  $b_i$  présentent des dimensions expressibles comme monômes des  $[a_i]$ .

$$[b_1] = [a_1]^{p_1} \dots [a_k]^{r_1}, \dots [b_i] = [a_1]^{p_i} \dots [a_k]^{r_i}, \dots [b_m] = [a_1]^{p_m} \dots [a_k]^{r_m}$$

Un prérequis fondamentale et implicite des formulations des lois de la physique est constitué par l'énoncé suivant: *les relations exprimant les lois de la nature doivent pouvoir étre exprimées dans n'importe quel système d'unité*; en particulier si nous adoptons  $(a_1 \dots a_k)$  comme système d'unités indépendantes, alors :

$$\frac{G}{a_1^p \dots a_k^r} = f\left(1, 1, \dots, 1, \frac{b_1}{a_1^{p_1} \dots a_k^{r_1}}, \dots, \frac{b_m}{a_1^{p_m} \dots a_k^{r_m}}\right)$$

où  $[a_1]^p \dots [a_k]^r$  est la dimension de  $G$ . Si nous définissons les quantités sans dimensions:

$$\Pi_1 \equiv \frac{b_1}{a_1^{p_1} \dots a_k^{r_1}}, \Pi_i \equiv \frac{b_i}{a_1^{p_i} \dots a_k^{r_i}}, \Pi \equiv \frac{G}{a_1^p \dots a_k^r}$$

alors la loi entre grandeurs dimensionnées  $G = f(a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_m)$  peut étre réduite à la relation entre nombres sans dimensions:

$$G = f(a_1, a_2, a_3 \dots a_n), m = n - k \rightarrow \Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_m)$$

Ce résultat constitue le théorème  $\pi$  aussi appelé théorème de Vaschy-Buckingham. La réduction d'une loi physique:  $G = f(a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_m)$  à une relation sans paramètres dimensionnés :

$$\Pi_1 = \frac{b_1}{a_1^{p_1} \dots a_k^{r_1}}, \Pi_i = \frac{b_i}{a_1^{p_i} \dots a_k^{r_i}}, \Pi = \frac{G}{a_1^p \dots a_k^r} \rightarrow \boxed{\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_m)}$$

peut étre vue comme une invariance sous un groupe de similitudes. Considérons la transformation:

$$(a_1 \dots a_k) \rightarrow (a'_1 \dots a'_k) = S_{A_1 \dots A_k} (a_1 \dots a_k) \equiv (A_1 a_1 \dots A_k a_k)$$

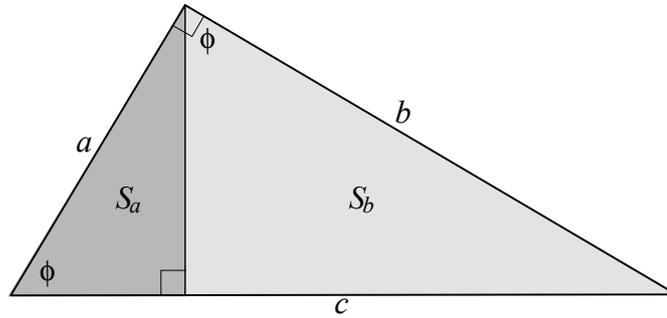
où  $(A_1 \dots A_k)$  sont des nombres positifs. L'ensemble des transformations  $S_{A_1 \dots A_k}$  présente une structure de groupe, en effet, l'élément neutre est associé à  $(1, \dots, 1)$ , l'inverse à  $(1/A_1 \dots 1/A_k)$  et la composition au produit  $(A_1 H_1 \dots A_k H_k)$ . C'est le groupe des similitudes du système physique tel que:

$$S_{A_1 \dots A_k} (b_1 \dots b_m) = (A_1^{p_1} \dots A_k^{r_1} b_1 \dots A_1^{p_m} \dots A_k^{r_m} b_m), S_{A_1 \dots A_k} G = A_1^{p_1} \dots A_k^{r_1} G$$

La règle de covariance de l'expression des lois de la nature par rapport au système d'unité est donc exprimé à travers l'application de ce groupe de similitude; ainsi, le théorème  $\pi$  est simplement la représentation invariante sous ce groupe de transformation des lois de la nature.

La réduction d'un problème par identification des variables dimensionnellement indépendantes puis adimensionnement de l'ensemble des variables, permet de mettre sous forme canonique les problèmes de physique des plasmas et permet parfois de résoudre, à un facteur multiplicatif près, certains problèmes. Considérons le théorème de Pythagore comme une conséquence du théorème  $\pi$ .

Soit un triangle rectangle de côtés  $(a, b, c)$ , considérons  $\phi \neq \pi/2$  l'angle  $(a, c)$  et les surfaces,  $S_a$  et  $S_b$ , des triangles rectangles obtenus par abaissement de la hauteur depuis l'angle droit sur l'hypoténuse  $c$ .



Un triangle rectangle étant entièrement déterminé par la donnée de son hypoténuse et d'un angle, nous avons nécessairement des relations :

$$S_a = f(a, \phi), S_b = f(b, \phi)$$

Adimensionnons ces relations:

$$\frac{S_a}{a^2} = f(1, \phi), \frac{S_b}{b^2} = f(1, \phi)$$

et considérons l'aire totale du triangle  $S_c$ :

$$S_c = S_a + S_b \rightarrow c^2 f(1, \phi) = a^2 f(1, \phi) + b^2 f(1, \phi)$$

Le théorème de Pythagore est ainsi retrouvé par un argument de dimension sur la base du théorème  $\pi$ .

## 1.5 Debye, Langmuir and Spitzer scaling

La réduction sous forme canonique d'une loi physique :

$$\Pi = \Phi(1, 1, 1, 1, \Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_m) \xrightarrow{k=4} \Pi \sim 1$$

lorsque  $k = 4$  et  $m = 0$ , c'est-à-dire lorsque cette loi physique ne met en jeu que 4 quantités dimensionnées indépendantes, conduit à l'identification de la forme fonctionnelle de cette loi à un facteur multiplicatif de l'ordre de l'unité près. Dans le domaine de la physique des plasmas, ces cas simples et fondamentaux sont nombreux.

■ Considérons un plasma de densité  $n$ , où les ions sont immobiles et les électrons de masse  $m$  et charge  $e$  mobiles. A l'équilibre les densités ionique et électronique sont identiques et si cet équilibre est perturbé par un fluctuation de densité électronique qui crée un champ électrique par séparation de charge, ce champ électrique met en mouvement les électrons et la dynamique de cette densité évolue soit vers une relaxation, une oscillation ou une instabilité; quel-que-soit le processus, il existe une échelle de temps caractéristique  $\tau$  associée à cette dynamique. Les lois de la physique impliquées dans la description de cette évolution sont essentiellement (i) la relation de Gauss-Poisson entre champ et charges  $(ne, \epsilon_0)$ , (ii) la force de Coulomb ( $e$ ) et (iii) la deuxième loi de Newton ( $m$ ) entre mouvement, inertie et force; ainsi, il existe une relation:  $\tau = f(\epsilon_0, e, m, n)$  où les

théorème pi : si une équation physique met en jeu  $n$  variables physiques dépendant de  $k$  unités fondamentales alors il existe une équation équivalente mettant en jeu  $n-k$  variables sans dimension construites à partir des variables originales

dimensions des différents paramètres sont :  $[\varepsilon_0] = A^2T^4M^{-1}L^{-3}$ ,  $[e] = AT$ ,  $[m] = M$ ,  $[n] = L^{-3}$ , ainsi  $k = 4$  et le théorème  $\pi$  conduit à la réduction :

$$\Pi = \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon_0 m / ne^2}} = f(1, 1, 1, 1) \sim 1$$

où  $f(1, 1, 1, 1)$  est une constante sans dimension qui est de l'ordre de l'unité si les équations régulant l'évolution de la dynamique sont linéaires et ne présentent que des coefficients de l'ordre de l'unité. Dans la suite nous confirmerons ce résultat et identifierons  $\omega_p$  la pulsation plasma ou de Langmuir comme l'échelle de temps caractéristique de relaxation ou d'explosion coulombienne.

$$\text{Pulsation de Langmuir : } \omega_p \equiv \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}} \approx 8.98 \text{ [kHz]} \times \sqrt{n_e \text{ [cm}^{-3}\text{]}}$$

■ Considérons un plasma de densité  $n$ , où les ions et les électrons sont thermalisés à la température/énergie  $k_B T$ . A l'équilibre les densités ionique et électronique sont identiques. Cet équilibre est perturbé par champ électrique appliqué de l'extérieur du plasma, ce champ électrique dérive d'un potentiel électrostatique. Les densités évoluent pour s'ajuster sur une distribution de Boltzmann, à la température/énergie  $k_B T$ , au sein du potentiel électrostatique. Cette distribution conduit à un écrantage du champ et il existe donc une échelle de longueur caractéristique  $\lambda$  associée à cet écrantage. Les lois de la physique impliquées ici sont essentiellement (i) la relation de Gauss-Poisson entre champ et charges ( $ne, \varepsilon_0$ ), et (ii) la relation entre densité et énergie suivant une distribution de Boltzmann dans le potentiel ( $k_B T$ ), ainsi il existe une relation :  $\lambda = h(\varepsilon_0, e, k_B T, n)$  où les dimensions des différents paramètres sont :  $[\varepsilon_0] = A^2T^4M^{-1}L^{-3}$ ,  $[e] = AT$ ,  $[k_B T] = ML^2T^{-2}$ ,  $[n] = L^{-3}$ , ainsi  $k = 4$  et le théorème  $\pi$  conduit à la réduction :

$$\Pi = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_0 k_B T / ne^2}} = h(1, 1, 1, 1) \sim 1$$

où  $h(1, 1, 1, 1)$  est une constante sans dimension qui est de l'ordre de l'unité si les équations régulant l'évolution de la dynamique sont linéaires et ne présentent que des coefficients de l'ordre de l'unité. Dans la suite nous confirmerons ce résultat et identifierons  $\lambda_D$  la longueur d'écrantage de Debye comme la longueur caractéristique d'écrantage électrique.

$$\text{Longueur de Debye : } \lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{ne^2}} \approx 743 \text{ [cm]} \sqrt{T \text{ [eV]} / n \text{ [cm}^{-3}\text{]}}$$

■ Considérons un plasma de densité  $n$ , où les ions sont immobiles et les électrons de masse  $m$  et charge  $e$  mobiles, ce plasma est collisionnel et présente une conductivité électrique  $\eta$  qui est nécessairement fonction de la fréquence de collision  $\nu$ , ainsi il existe une relation :  $\eta = g(\nu, e, m, n)$  où les dimensions des différents paramètres sont :  $[\nu] = T^{-1}$ ,  $[e] = AT$ ,  $[m] = M$ ,  $[n] = L^{-3}$  et le théorème  $\pi$  conduit à la réduction :

$$\Pi = \frac{\eta}{ne^2/m\nu} = g(1, 1, 1, 1) \sim 1$$

où  $g(1, 1, 1, 1)$  est une constante sans dimension qui est de l'ordre de l'unité si les équation régulant l'évolution de la dynamique sont linéaires et ne présentent que des coefficients de l'ordre de l'unité. Dans la suite nous confirmerons ce résultat et identifierons  $\eta_S$  la conductivité de Spitzer.

$$\text{Conductivité de spitzer : } \eta_S \equiv \frac{ne^2}{m\nu}$$

■ Considérons un plasma collisionnel où les ions sont immobiles et les électrons mobiles, ce plasma présente donc une conductivité électrique  $\eta_S$  décrivant la conduction électronique. Si une surcharge d'électrons apparaît en un point de se plasma, elle crée un champ électrique qui la disperse (les charges de même signe se repoussent). Quel est alors le temps caractéristique  $\tau$  de disparition de ces charge excédentaires? Les loi de la physique impliquées ici sont essentiellement (i) la relation de Gauss-Poisson entre champ et charges, (ii) la loi d'Ohm entre courant et champ et (iii) le principe de conservation de la charge entre charges et courant, ainsi il existe une relation :  $\tau = r(\varepsilon_0, \eta_S)$  où les dimensions des différents paramètres sont :  $[\varepsilon_0] = A^2T^4M^{-1}L^{-3}$ ,  $[\eta_S] = A^2T^3M^{-1}L^{-3}$  et le théorème  $\pi$  conduit à la réduction :

$$\Pi = \frac{\tau}{\varepsilon_0 / \eta_S} = r(1, 1) \sim 1$$

où  $r(1, 1)$  est une constante sans dimension qui est de l'ordre de l'unité si les équation régulant l'évolution de la dynamique sont linéaires et ne présentent que des coefficients de l'ordre de l'unité. Dans la suite nous confirmerons ce résultat et identifierons  $\tau_M$  le temps de Maxwell de relaxation collisionnelle des charges.

$$\text{Temps de Maxwell : } \tau_M \equiv \frac{\varepsilon_0}{\eta_S} = \frac{\nu}{\omega_p}$$

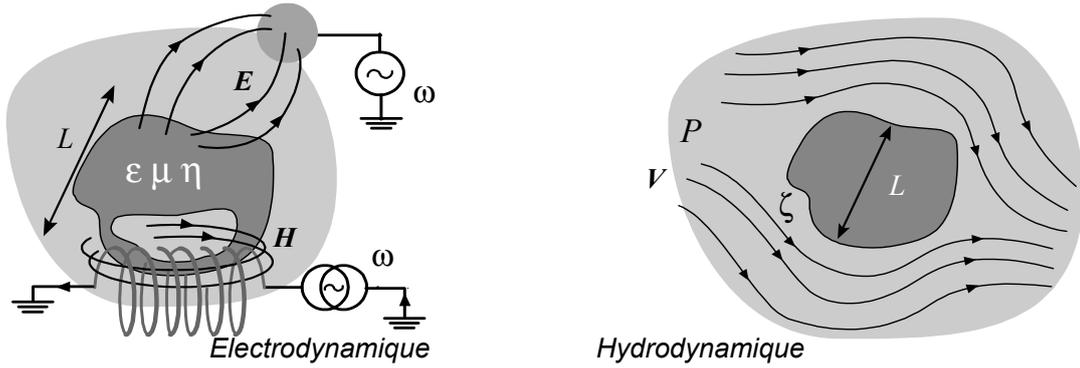
Ces quatre exemples sont particulier car  $\text{rang}D = 4$  pour 4 paramètres. Reprenons l'exemple de la conductivité  $\eta$ , mais au sein d'un plasma magnétisé par un champ magnétique  $B$ , alors:  $\eta_{mag} = h(B, \nu, e, m, n)$  où les dimensions des différents paramètres sont:  $[B] = MA^{-1}T^{-2}$ ,  $[\nu] = T^{-1}$ ,  $[e] = AT$ ,  $[m] = M$ ,  $[n] = L^{-3}$ . Le théorème  $\pi$  conduit à la réduction:

$$\Pi = \frac{\eta_{mag}}{ne^2/m\nu} = h\left(1, 1, 1, 1, \frac{\nu m}{eB}\right) = \Phi\left(\frac{\nu m}{eB}\right)$$

L'expression de la conductivité d'un plasma magnétisé nécessite donc l'identification de la fonction  $\Phi$  à travers l'étude dynamique des interactions, dans ce cas, les arguments de dimensions ne sont pas suffisant pour conclure. Au-delà de ces quelques exemples, l'ensemble des développements théoriques de la physique des plasmas illustrera la pertinence de la réduction dimensionnelle pour analyser les problèmes.

## 1.6 Reynolds, Mach, Maxwell and Kelvin numbers

La réduction sous forme canonique d'une loi physique lorsque  $k > 4$  et  $m \geq 1$ , c'est-à-dire lorsque cette loi physique met en jeux plus de 4 quantités dimensionnées indépendantes, conduit à l'identification des différents régimes physiques d'une structure statique ou d'un processus dynamique, c'est-à-dire les transitions entre type de solutions du problème donné. Lorsqu'un modèle physique présente la réduction sous forme canonique:  $\Pi = \Phi(1, 1, 1, 1, \Pi_1, \Pi_2) \rightarrow \Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2)$ , l'usage est de considérer  $(\Pi_1, \Pi_2)$  comme des paramètres de contrôle qui offrent une description des transitions entre régimes dans l'espace  $(\Pi_1, \Pi_2)$  ainsi identifié. L'électrodynamique et l'hydrodynamique sont essentielles en physique des plasmas aussi nous allons brièvement illustrer ce point de vue et considérer les régimes physiques pour: (i) les oscillations électromagnétiques à la pulsation  $\omega$  au sein d'un système de taille  $L$  présentant une conductivité  $\eta$ , une perméabilité  $\varepsilon$  et une permittivité  $\mu$ ; (ii) l'écoulement à la vitesse  $V$  d'un fluide de pression  $P$ , de densité  $n$  et viscosité  $\zeta$  autour d'un obstacle de taille  $L$ .



Dans le chapitre consacré aux échelles caractéristiques nous identifierons plusieurs temps et plusieurs longueurs associés aux phénomènes de relaxation des charges (libres) et des courants (libres) suivant deux régimes complémentaires, (i) inertiel ( $\omega_p$ ) correspondant à l'absence de dissipation collisionnel ( $\tau_M$ ), (ii) résistif ( $\tau_M$ ) en présence de dissipation collisionnelle. Considérons ici les régimes et transitions pour un plasma collisionnel. Soit donc un plasma de taille  $L$  présentant une conductivité  $\eta$ , une perméabilité  $\varepsilon$  et une permittivité  $\mu$ , les équations de Maxwell à la pulsation  $\omega$  sont données par :

$$\begin{aligned} \text{Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \text{Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{H} = \eta\mathbf{E} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \text{Maxwell-Gauss} & : \nabla \cdot \varepsilon\mathbf{E} = \rho \\ \text{Maxwell-Thomson} & : \nabla \cdot \mu\mathbf{H} = 0 \end{aligned}$$

Les différents régimes de l'électrodynamique des plasmas collisionnels peuvent être ordonnés sur la base de trois échelles de temps caractéristiques, c'est-à-dire sur la base de 2 paramètres de contrôle sans dimension obtenus en prenant deux rapports.

Pour un échantillon de permittivité  $\varepsilon$ , de conductivité  $\eta$ , de perméabilité  $\mu$  et de taille caractéristique  $L$ , illustré sur la figure ci-dessus, considérons le temps de Maxwell de migration des charges libres  $\tau_M \equiv \varepsilon/\eta$  et le temps de diffusion des courants libres  $\tau_K \equiv L^2\mu\eta$ , ce temps est appelé temps de Kelvin  $\tau_K$ .

Phénomène	Temps caractéristique
Relaxation des charges libres	Maxwell $\tau_M \equiv \varepsilon/\eta$
Relaxation des courants libres	Kelvin $\tau_K \equiv L^2\mu\eta$

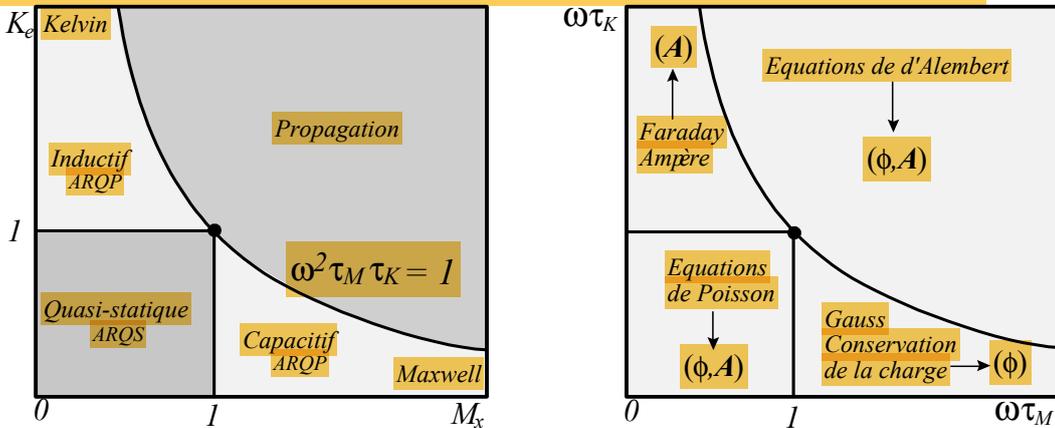
Le tableau ci-dessus résume les définitions de ces deux échelles dissipatives. Ces deux échelles doivent être complétées par la période du champ électromagnétique considéré  $2\pi/\omega$  et le temps de transit  $\tau_T$  à travers le milieu à la vitesse de la lumière  $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ , nous obtenons donc le tableau complémentaire ci-dessous.

Phénomène	Temps caractéristique
Oscillation des champs	$2\pi/\omega$
Propagation des champs	$\tau_T \equiv L\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\tau_K\tau_M}$

Ainsi, comme  $\tau_T = \sqrt{\tau_K\tau_M}$ , nous disposons de seulement trois temps ( $\omega^{-1}, \tau_K, \tau_M$ ) c'est à dire de deux paramètres caractéristiques sans dimension :  $\omega\tau_M$  et  $\omega\tau_K$  pour caractériser l'électro-dynamique d'un échantillon ( $L, \eta, \varepsilon, \mu$ ) interagissant avec un champ à la pulsation  $\omega$ . Si nous adoptons  $L$  comme unité de longueur,  $\rho_0 \sim \rho$  comme unité de densité de charges,  $L\rho_0/\varepsilon$  comme unité de champ électrique  $E$  et  $\eta L^2\rho_0/\varepsilon$  comme unité de champ magnétique  $H$ , les équations de Maxwell sont alors données par:

$$\begin{aligned}
 \text{Maxwell-Faraday} & : \nabla^* \times \mathbf{E}^* = -\overbrace{j\omega\tau_K\mathbf{H}^*}^{\text{induction}}, \text{Maxwell-Gauss} : \nabla^* \cdot \mathbf{E}^* = 1 \\
 \text{Maxwell-Ampère} & : \nabla^* \times \mathbf{H}^* = \underbrace{\mathbf{E}^*}_{\text{conduction}} + \underbrace{j\omega\tau_M\mathbf{E}^*}_{\text{déplacement}}, \text{Maxwell-Thomson} : \nabla^* \cdot \mathbf{H}^* = 0
 \end{aligned}$$

où  $\nabla^* = L\nabla$  est un opérateur sans dimension,  $\rho^* = \rho/\rho_0$ ,  $E^* = \varepsilon E/\rho_0 L$  et  $H^* = \varepsilon H/\eta L^2\rho_0$ .



Domaine de validité de l'ARQP :  $\omega^2\tau_M\tau_K < 1$  et domaine de validité de l'ARQS :  $\omega\tau_M < 1$  et  $\omega\tau_K < 1$ .

Les deux paramètres caractéristiques sans dimension :  $\omega\tau_M$  et  $\omega\tau_K$  apparaissent ainsi après adimensionnement des équations de Maxwell. L'ordering entre ces deux paramètres caractéristiques permet de considérer différents régimes de l'électrodynamique, en particulier l'approximation du régime *quasi-statique* (ARQS) et l'approximation du régime *quasi-permanent* (ARQP). Nous définissons donc les deux nombres de Maxwell et de Kelvin :

$$\text{Nombre de Maxwell} : M_x \equiv \omega\tau_M, \text{ Nombre de Kelvin} : K_e \equiv \omega\tau_K$$

La signification physique de ces deux nombres est donnée par les ordres de grandeur des rapports des courants de déplacement sur les courants de conduction Ohmiques, et des courants induits sur les courants de conduction :

$$\begin{aligned}
 \text{Zones capacitives} & \rightarrow \frac{[\text{Courant de déplacement}]}{[\text{Courant de conduction}]} \sim \frac{\varepsilon\omega}{\eta} = \omega\tau_M \\
 \text{Zones inductives} & \rightarrow \frac{[\text{Courant induit}]}{[\text{Courant de conduction}]} \sim \mu\eta\omega L^2 = \omega\tau_K
 \end{aligned}$$

Considérons le diagramme de la figure ci-dessous où nous avons reporté en abscisse  $M_x$  en ordonnée  $K_e$  pour un système ( $\varepsilon, \mu, \eta$ ) de taille  $L$  interagissant avec un champ électromagnétique à la pulsation  $\omega$ .

- Lorsque  $\omega\tau_T = \omega\sqrt{\tau_K\tau_M} > 1$  la taille du système est grande devant la longueur d'onde et les effets de propagation sont dominants au sein du système.

- Lorsque  $\omega\tau_T = \omega\sqrt{\tau_K\tau_M} < 1$  la taille du système est petite devant la longueur d'onde et les effets de propagation peuvent être négligés, ce régime constitue l'approximation des régimes quasi-permanents ARQP.

- Lorsque  $\omega\tau_K > 1$  et  $\omega\tau_T < 1$  la taille du système est petite devant la longueur d'onde et  $E_A < E_I$ , les effets d'induction sont donc dominants dans les zones inductives (bobines) alors que les charges ne peuvent s'accumuler durablement dans les zone capacitives (condensateurs).

- Lorsque  $\omega\tau_M > 1$  et  $\omega\tau_T < 1$  la taille du système est petite devant la longueur d'onde, les charges libres du système répondent sans effet de propagation et d'induction, mais le phénomène d'influence est dynamique et le courant de déplacement  $J_D > J_\Omega$  dans les zones capacitives où l'accumulation de charges domine la relaxation.

• Lorsque  $\omega\tau_M < 1$  et  $\omega\tau_K < 1$  les charges libres du système se mettent très rapidement, comparé à l'échelle  $\omega^{-1}$ , à l'équilibre. Les courants ne sont pas dominés par l'effet de peau et remplissent les volumes conducteurs comme en magnéto-statique et les charges sont quasiment à l'équilibre électrostatique, c'est l'approximation des régimes quasi-statiques ARQS.

Régimes	Maxwell, Kelvin	Equations
Electro-Magnéto-statique ARQS	$M_x < 1$ & $K_e < 1$	$\nabla^* \times \mathbf{E}^* = \mathbf{0}, \nabla^* \times \mathbf{H}^* = \mathbf{E}^*$
Inductif ARQP	$K_e > 1$ & $\sqrt{M_x} < 1/\sqrt{K_e}$	$\nabla^* \times \mathbf{E}^* = -jK_e \mathbf{H}, \nabla^* \times \mathbf{H}^* = \mathbf{E}^*$
Capacitif ARQP	$M_x > 1$ & $\sqrt{K_e} < 1/\sqrt{M_x}$	$\nabla^* \times \mathbf{E}^* = \mathbf{0}, \nabla^* \times \mathbf{H}^* = jM_x \mathbf{E}^*$
Propagatif	$\sqrt{M_x K_e} > 1$	$\nabla^* \times \mathbf{E}^* = -jK_e \mathbf{H}^*, \nabla^* \times \mathbf{H}^* = jM_x \mathbf{E}^*$

On notera: (i) que  $\omega$  est une caractéristique unique du système alors que différentes échelles  $L_1, L_2, L_3$ , peuvent être identifiées en différents points du système, par exemple, la largeur d'un gap capacitif, la racine carrée de la surface d'une zone inductive ... cette analyse ARQS-ARQP-propagation doit donc être réévaluée pour chaque système spécifique qui ne présente pas un rapport d'aspect de l'ordre de l'unité et (ii) que la distinction ARQS-ARQP-propagation est souvent réduite à la considération de deux régimes ARQP-propagation.

Pour l'électrodynamique les transitions sont au voisinage de 1 car les équations sont linéaires, par contre pour l'hydrodynamique, dont l'équation de base est non linéaire le plan des paramètres de contrôle présente des transitions loin de 1 conséquences de la non linéarité.

Soit l'écoulement stationnaire d'un plasma présentant une pression caractéristique  $P_0$ , une vitesse typique  $V_0$  et une densité de référence  $n_0$ , prises en un point de référence de l'écoulement. Normalisons la pression  $P(\mathbf{r})$ , la vitesse  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ , la densité  $n(\mathbf{r})$  et les longueurs  $|\mathbf{r}|$ , à la pression de référence  $P_0$ , à la vitesse de référence  $V_0$ , à la densité de référence  $n_0$  et à une longueur caractéristique de l'écoulement  $L$  (la dimension du conduit pour un écoulement dans un tube ou de l'obstacle pour le mouvement d'un solide dans un plasma):  $P^* = P/P_0$ ,  $n^* = n/n_0$ ,  $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}/V_0$ ,  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}/L$ . L'équation de Navier-Stokes stationnaire traduit l'équilibre entre les forces de pression, d'inertie et de viscosité suivant la relation:

$$\underbrace{nm(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}}_{\text{inertie}} = \underbrace{-\nabla P}_{\text{pression}} + \underbrace{\zeta \Delta \mathbf{V}}_{\text{viscosité}}$$

où  $\zeta$  est le coefficient de viscosité caractérisant la diffusion de l'impulsion. Ainsi normalisée:

$$(\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{V}^* + \frac{\nabla^* P^*}{M_a^2} - \frac{\Delta^* \mathbf{V}^*}{Re} = \mathbf{0}$$

l'équation de Navier-Stokes fait ainsi apparaître deux nombres sans dimension.

$$\text{Mach} : M_a^2 \equiv \frac{n_0 m V_0^2}{P_0} \approx \frac{[\text{Energie cinétique}]}{[\text{Energie interne}]}, \quad \text{Reynolds} : Re \equiv \frac{m n_0 V_0 L}{\zeta} \approx \frac{[\text{Convection de l'impulsion}]}{[\text{Diffusion de l'impulsion}]}$$

Les trois termes (d'inertie, de pression et de viscosité) de l'équation de Navier-Stokes, en régime stationnaire, sont donc dans les rapports  $1/M_a^{-2}/Re^{-1}$ . Les propriétés mécaniques normalisées  $\Pi_n$  (forces, longueur de traînée...) de l'écoulement seront donc fonction de ces deux nombres:  $\Pi_n = \Psi(M_a, Re)$ . Pour un plasma, la viscosité peut s'exprimer en fonction du libre parcours moyen  $\lambda$  et de la densité  $n$  par la formule  $\zeta \sim \lambda n m \langle v \rangle$  où  $\langle v \rangle$  est la vitesse d'agitation thermique; de même la pression possède une interprétation cinétique et sa valeur est donnée par  $P \sim n m \langle v^2 \rangle$ . Ces deux expressions permettent alors d'exprimer le rapport du nombre de Reynolds sur le nombre de Mach comme le rapport de la dimension caractéristique de l'écoulement  $L$  sur le libre parcours moyen  $\lambda$ , l'inverse de ce nombre est appelé nombre de Knudsen.

$$\text{Nombre de Knudsen} : K_n \equiv \frac{M_a}{Re} \approx \frac{\lambda}{L} = \frac{[\text{Libre parcours moyen des particules}]}{[\text{Dimension du conduit ou de l'obstacle}]}$$

Le nombre de Knudsen constitue le paramètre de developement de la théorie cinétique pour un fluide en équilibre local et en écoulement à la vitesse  $\mathbf{V}$  suivant une distribution de Boltzman:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n_0 \exp\left(-\frac{q\phi(\mathbf{r})}{k_B T(\mathbf{r})}\right) (2\pi m k_B T(\mathbf{r}))^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{[\mathbf{p} - m\mathbf{V}(\mathbf{r})]^2}{2m k_B T(\mathbf{r})}\right) [1 + O(K_n)]$$

le terme  $O(K_n)$  décrit les processus de transport tels que la viscosité, les conductions thermiques et électriques, les diffusions électronique et ionique ...

Le nombre de Mach quantifie les effets de compressibilité; les écoulements à petit nombre de Mach peuvent être considérés comme incompressibles et les écoulements à grand nombre de Mach sont dominés par les effets de compressibilité. Ainsi, distingue-t-on les écoulements:

- subsonique:  $M_a < 0,8$ , • transsonique et supersonique:  $0,8 < M_a < 5$  et • hypersonique:  $M_a > 5$ .

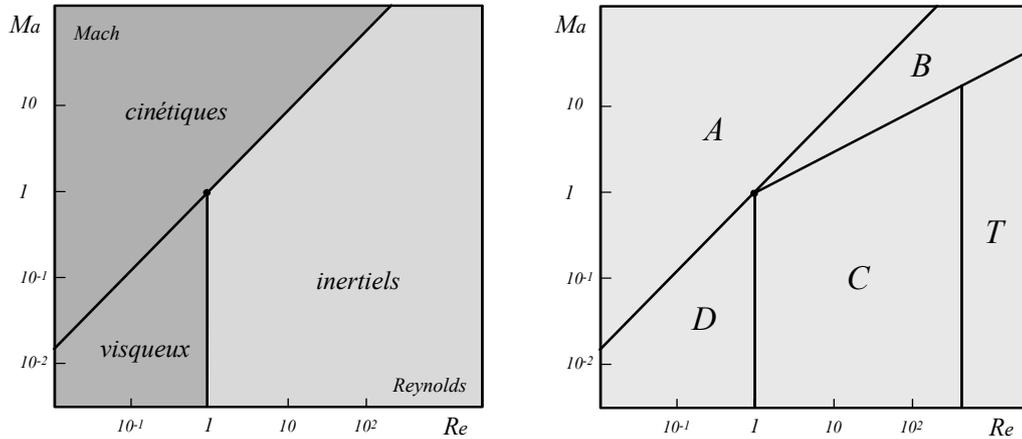
Le nombre de Reynolds quantifie la compétition entre les effets d'inertie et de viscosité. Le nombre de Reynolds étant une mesure des effets d'inertie, c'est-à-dire de l'importance du terme non-linéaire de convection de la vitesse,  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ , il constitue le paramètre de contrôle de la transition entre les écoulements laminaires et turbulents. Les écoulements à grand nombre de Reynolds sont dominés par l'inertie et décrit par l'équation d'Euler, les écoulements à petit nombre de Reynolds sont dominés par les phénomènes de viscosité, ainsi, distingue t-on :

- les écoulements en régime de Stokes:  $Re < 10$ , • les écoulements laminaires:  $10 < Re < 2000$  et • les écoulements turbulents:  $Re > 2000 - 3000$ .

Lorsque le nombre de Knudsen est plus grand que 1, l'approximation hydrodynamique, qui suppose un fort couplage entre les particules, n'est plus valable et un recours à la théorie cinétique est nécessaire pour traiter l'interaction entre les particules et les parois ainsi que les faibles couplages entre particules. Une analyse plus fine met en évidence l'existence d'un régime intermédiaire entre les régimes cinétique et hydrodynamique pour les nombres de Knudsen inférieurs à 10 mais supérieurs à 0,1. Trois régimes d'écoulements (gazeux) sont donc à considérer :

- les écoulements continus:  $Kn < 10^{-1}$ , • le régime de transition:  $10^{-1} < Kn < 10$  et • le régime moléculaire:  $10 < Kn < +\infty$ .

La classification des écoulements stationnaires est en fait plus simple, et plus subtile, que ces vingt sept cas ( $3 \times 3 \times 3$  au maximum), car certaines de ces inégalités sont incompatibles et l'ordering de classification fait aussi intervenir l'épaisseur des couches limites où se manifeste la viscosité. Pour établir une classification globale des écoulements de plasmas et gaz, considérons les différentes échelles de longueurs associées à un écoulement et identifions les frontières d'inversion des ordering dans le plan  $(Ma, Re)$ . Dans ce plan, le régime moléculaire correspond à la région A où  $Kn = Ma/Re \approx \lambda/L > 1$ .



Considérons maintenant un écoulement libre en régime continu,  $Kn < 1$ , autour d'un obstacle de dimension caractéristique  $L$ , la viscosité se manifeste au voisinage de cet obstacle sur une épaisseur de l'ordre de grandeur de la taille de la couche limite  $\delta \sim L/\sqrt{Re}$ . Pour que le milieu soit considéré comme continu il faut que le libre parcours moyen soit plus petit que l'épaisseur de la couche limite, cette condition se traduit par  $Ma < \sqrt{Re}$  et définit la zone C. Le régime de Stokes est un régime d'écoulement continu, donc  $\lambda < L$ , mais, où la viscosité domine l'inertie, c'est-à-dire  $\delta > L$ ; la région D du diagramme est donc définie par:  $Re < 1, Ma < Re$ .

La région B, telle que  $\delta < L, \lambda < L, \lambda > \delta$ , est intermédiaire entre les régimes fluide continu et cinétique; cette région B se distingue par un transfert d'impulsion cinétique dans la couche limite, la description de ce régime nécessite l'introduction de coefficients d'accommodation et de transfert spécifiques et l'on parle alors de glissement. Enfin nous avons aussi reporté la zone turbulente T. Le tableau résume les frontières et domaines de cette classification.

Régimes	$\delta, \lambda, L$	Mach / Reynolds / Knudsen
Moléculaire: A	$\lambda > L$	$Kn > 1, Ma > Re$
Glissement: B	$\delta < L, \lambda < L, \lambda > \delta$	$Re > 1, \sqrt{Re} < Ma < Re$
Navier-Stokes/Euler: C	$\delta < L, \lambda < L, \lambda < \delta$	$Kn < 1, Re > 1, Ma < \sqrt{Re}$
Stokes: D	$\delta > L, \lambda < L$	$Re < 1, Ma < Re$
Turbulent: T	$\delta < L, \lambda < L, \lambda < \delta$	$Re > 2000 - 3000$

L'apparition d'une transition turbulente pour  $Re > 2000 - 3000$  est une conséquence de la non linéarité du terme  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ , en effet, seules les termes nonlinéaire permettent de générer des nombres supérieur à 1 au sein d'une équation ne présentant que des 1 comme paramètres.

# Chapitre 2

## Plasma physics

permittivité diélectrique : décrit la réponse d'un milieu donné à un champ électrique appliqué, en coulomb par volt et par mètre

### 2.1 History and development

L'électrisation par frottement, la *tribo-électricité*, constitue la mise en évidence expérimentale la plus ancienne des propriétés électriques de la matière; elle est mentionnée par Thalès de Millet qui opérait avec l'ambre (*ηλεκτρον*) et la laine. Un classement des matériaux au regard de leurs propriétés tribo-électriques peut être établie en fonction du signe de la charge qu'ils acquièrent par frottement.

L'expérience montre que ce signe n'est pas uniquement déterminé par la nature du matériaux, mais requiers une classification en terme de couples  $(A, B)$ . La règle de Cohen : *lorsque deux matériaux, A et B, sont frottés l'un contre l'autre, celui présentant la permittivité la plus élevée (A) se charge positivement*, peut être quantifiée à travers la relation de Beach : *l'ordre de grandeur de la charge superficielle  $\sigma$  à l'issue d'une interaction tribo-électrique entre deux corps est égale à :*

$$\sigma \left[ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right] \sim 15 \times 10^{-6} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) \rightarrow \sigma \left[ \frac{\text{e}}{\text{cm}^2} \right] \sim 10^{10} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) \rightarrow \sigma \left[ \frac{\text{e}}{\text{\AA}^2} \right] \sim 10^{-6} (\varepsilon_A - \varepsilon_B)$$

où  $\varepsilon$  est la permittivité électrique relative. Si nous prenons la taille de l'atome de l'ordre de  $1 \text{ \AA}$ , alors la fraction des sites atomiques de surface ainsi électrisés par tribo-électricité est de l'ordre de  $10^{-6}$ . La règle phénoménologique de Cohen et la relation de Beach sont conformes à la *série tribo-électrique classique*  $A \leftarrow B$ :

bakélite  $\leftarrow$  verre  $\leftarrow$  plexiglas  $\leftarrow$  nylon  $\leftarrow$  laine  $\leftarrow$  peau de chat  $\leftarrow$  soie  $\leftarrow$  coton  $\leftarrow$  bois  $\leftarrow$  **Ambre**  
**Ambre**  $\leftarrow$  résines  $\leftarrow$  métaux  $\leftarrow$  polystyrène  $\leftarrow$  polyvinyle  $\leftarrow$  téflon  $\leftarrow$  caoutchouc  $\leftarrow$  soufre

dont l'établissement conduit à l'ancienne distinction, antérieure à l'identification *positive* et *negative*, entre *électricité vitreuse* et *électricité résineuse*. De façon similaire, la persistance de l'effet, ou sa disparition, conduit à la distinction entre *isolants* et *conducteurs*. Le frottement en lui même ne joue aucun rôle dans l'électrisation par frottement, une séparation de charges apparaît toujours lorsque deux substances de natures différentes sont mises en contact, les charges mobiles en surface migrant vers les zones de *potentiel électrochimique minimum*. Dans le cas des corps solides, le contact est inhibé par les rugosités microscopiques, en pressant et rodant deux corps on obtient une zone de contact supérieure au cas sans frottement qui est réduit à un petit nombre de points de contact.

Thalès rapporte aussi des observations sur les phénomènes d'attraction et répulsion d'échantillons d'oxydes de fer en provenance de la ville de Magnésie (*Μαγνησία*). Malgré ces origines antiques, l'étude scientifique des phénomènes électriques et magnétique ne pris son essor qu'à partir du dix septième siècle.

La publication, en 1600, du traité de magnétisme de Gilbert constitue l'acte fondateur de ce qui, trois siècles plus tard, allait devenir l'électromagnétisme. Dans ce traité, Gilbert explique l'orientation et l'inclinaison de l'aiguille de boussole en assimilant la terre à un dipôle magnétique; dans ce même traité, il utilise pour la première fois le mot *électricité* pour qualifier les phénomènes d'attraction et de répulsion associés à l'électrisation par tribo-électricité.

L'histoire ultérieure du développement de l'électrodynamique, au cours des dix-septième, dix-huitième et dix-neuvième siècles, verra successivement le développement de l'optique, de l'électrostatique, puis de la magnétostatique et enfin de l'électrodynamique. L'unification de la description des phénomènes électriques, magnétiques et optiques, dans le cadre de l'électrodynamique de Maxwell, achève la construction de cette discipline dès la fin du dix-neuvième siècle. Les principales étapes de cette synthèse remarquable, étalée sur trois siècles, sont rappelées ici.

Dès 1609, Galilée, en Italie, et Kepler, à Prague, mettent au point la lunette astronomique. Cette invention est l'aboutissement des progrès constants des technologies de fabrication des lentilles optiques. Malgré l'impact de cette invention, son étude ne débouche pas sur la formulation des lois de la réfraction. Il faut attendre Descartes, en 1637, pour que soit enfin formulées les lois fondamentales de l'optique géométrique permettant de mettre en place la théorie des instruments d'optique.

Descartes, afin d'interpréter les lois qui désormais portent son nom, construit une théorie corpusculaire de la lumière. C'est aussi une interprétation corpusculaire de la lumière que met en avant Newton, en 1672, lorsque, sur la base d'une série d'expériences de décomposition et de synthèse, il présente une théorie des couleurs et des phénomènes d'irisation associés à la dispersion dans les milieux transparents. Quelques années plus tard, en 1678, Huyghens propose une interprétation de la lumière en terme de vibrations et montre qu'un tel modèle permet de décrire correctement les phénomènes de propagation et de réfraction.

Le dix-septième siècle s'achève sur la confrontation de ces deux théories de la lumière, corpusculaire et ondulatoire, en apparence contradictoires, mais que la physique moderne rendra complémentaires. Les phénomènes optiques ayant trouvés une interprétation dans un (deux) cadre(s) théorique(s) durant le dix-septième siècle, l'effort des savants du dix-huitième siècle s'est principalement porté sur l'étude des phénomènes électriques.

Ainsi, dès 1740, l'abbé Nollet publie son célèbre traité de physique et d'électricité présentant une classification de l'ensemble des phénomènes électriques identifiés à l'époque ; mais il faut attendre 1785 pour que ces phénomènes électrostatiques trouvent une interprétation dynamique en terme de charges électriques et de forces entre ces charges. En effet, Coulomb, à l'aide de la balance de torsion mise au point quelques années auparavant, établit la loi d'attraction et de répulsion des charges électriques en fonction de leur distance ; cette (électro)dynamique permet alors d'interpréter les phénomènes d'électrostatique des conducteurs et des isolants.

Cependant, à cette époque, les générateurs électrostatiques, utilisant la tribo-électricité, constituaient les seules sources de courant et tension et les procédés de stockage des charges étaient essentiellement des condensateurs (les bouteilles de Leyde) de mauvaise qualité. Les performances médiocres de ces appareils limitaient toute perspective de développement expérimental pour explorer les propriétés des courants électriques.

Vers 1790, le physiologiste Italien Galvani, étudiant des phénomènes d'électrophysiologie associés à la contraction de cuisses de grenouilles, proposa une explication basée sur l'électricité atmosphérique ; mais c'est à Volta, en 1800, que revient le mérite de l'identification de l'origine de ces contractions. Volta remarqua que ces phénomènes nécessitent l'utilisation de deux métaux de nature différente. Partant de cette observation, il construit la première pile électrique en empilant des rondelles de métaux différents séparées par des rondelles de drap imbibé de solution saline. Un tel dispositif, appelé "pile" de par sa constitution, présente alors naturellement un pôle positif et un pôle négatif entre lesquels s'écoule un courant électrique lorsque le circuit est fermé à travers un conducteur.

L'invention de la pile électrique allait permettre le développement d'expériences sur la dynamique des phénomènes électriques et magnétiques tout au long du dix-neuvième siècle.

En 1820, suivant en cela une intuition récurrente du lien entre électricité et magnétisme, le Danois Oersted démontre, à l'aide d'une pile de Volta et d'une aiguille de boussole, que le passage d'un courant électrique engendre un champ magnétique ; l'année suivante, Ampère met en place le formalisme permettant d'interpréter ce premier phénomène électrodynamique, réalisant ainsi la première synthèse théorique entre électricité et magnétisme. Puis, Faraday, en 1831, met en évidence le phénomène d'induction électromagnétique, démontrant que les champs magnétiques engendrent des champs électriques. L'unification de l'électricité et du magnétisme était ainsi achevée.

C'est à Maxwell que revient le mérite de parachever cet édifice en publiant en 1865 un système complet d'équations permettant d'interpréter et de modéliser l'ensemble des phénomènes électriques et magnétiques observés à l'époque. Cette synthèse finale, entre électricité et magnétisme, s'accompagne d'une unification encore plus vaste, englobant l'optique, puisque ces équations, dites de Maxwell, admettent des solutions décrivant des ondes se propageant à la vitesse de la lumière.

En 1888, Hertz, utilisant un circuit électromagnétique oscillant, produit et détecte de telles ondes, confirmant ainsi cette prédiction. Dès lors, la lumière est considérée comme une vibration transverse de nature électromagnétique et les résultats établis en 1815 par Fresnel, qui, pour construire une théorie dynamique de la réfraction et de la diffraction, avait utilisé l'hypothèse d'une vibration transverse de nature inconnue, se trouvent confirmés et précisés, la vibration transverse de Fresnel est donc de nature électrique.

Bien que l'intuition atomiste ait été privilégiée de façon récurrente depuis l'antiquité, il faut attendre 1785 pour que cette intuition soit formalisée dans le cadre de la construction d'une théorie opérationnelle du comportement de la matière ; en effet, à cette époque, Bernoulli construit une théorie cinétique des gaz où la notion de pression, clairement identifiée et formulée depuis Pascal et Torricelli, est interprétée dans un cadre mécaniste microscopique. Durant le dix-neuvième siècle la physique des milieux dilués progresse rapidement ; l'équation des gaz parfaits issue des travaux de Boyle, Mariotte et Gay Lussac trouve son interprétation mécanique dans le cadre d'une vision atomiste et constitue, durant la deuxième moitié du dix-neuvième siècle, le modèle de référence des développements de la thermodynamique. Les progrès constants des techniques du vide et des technologies de soudure métal sur verre permettent alors l'étude des décharges électriques dans les gaz raréfiés emplissant des ampoules et tubes en verre et mènent naturellement vers l'étude de leur propriétés électriques et optiques.

Le milieu du dix-neuvième siècle voit alors le développement de la physique des décharges électriques dans les gaz. Certes, les phénomènes d'étincelle et d'éclair, à pression atmosphérique, avaient été décrit depuis l'antiquité, l'arc électrique inventé par Davy en 1813 et les décharges luminescentes décrites par Faraday en 1839 ; mais, les décharges électriques dans les gaz basse pression allait révéler, tout au long de la deuxième moitié du dix-neuvième siècle, l'essentiel des lois microscopiques régissant la structure de la matière, tout en permettant l'accumulation d'une phénoménologie extrêmement riche décrite par Hittorf, Geissler, Plücker, Crookes, Goldstein et bien d'autres. En effet, que ce soit la découverte de l'électron par J.J. Thomson en 1890, que ce

soit la découverte des rayons X par Röntgen en 1895, du rayonnement ultraviolet par Wiedemann la même année ou des séries spectrales de l'hydrogène, à l'origine du modèle de Bohr ; la physique, dite moderne, est principalement issue de l'effort d'interprétation du comportement et du rayonnement des décharges électrique dans les gaz basse pression.

En 1858 Plücker démontre expérimentalement la déflexion des rayons cathodiques par un champ magnétique ; ces études sont poursuivies en 1869 par Hittorf qui établit une classification systématique des décharges luminescentes. Dès 1871 Varley postule la nature particulière de ces rayons cathodiques. L'émission thermoionique est (re)découverte par Edison en 1883 et, en 1886, Goldstein identifie la composante ionique des décharges ; enfin, en 1887, Hertz découvre l'effet photoélectrique. émission d'électrons par un milieu soumis à de la lumière

L'accumulation de données expérimentales sur les mécanismes d'émission électronique des surfaces métalliques et de production ionique dans les gaz basse pression génère un intense débat sur la nature de ces particules et l'interprétation de leur comportement. En 1891 Stoney introduit le terme électron et progressivement les théories électroniques (ioniques) de Lorentz (1895) et J.J. Thomson (1897) s'imposent comme le cadre cohérent et opérationnel d'interprétation des propriétés électrique et magnétique de la matière.

La structure électronique de l'ensemble des phases de la matière est ensuite élucidée, d'abord dans le cadre du modèle de Bohr-Sommerfeld, puis de la mécanique quantique, permettant, à partir de 1927, non seulement l'interprétation des données accumulées à la fin du dix-neuvième et au début du vingtième siècle, mais aussi, l'élaboration d'un ensemble de prédictions sur les phases diluées et condensées, qui se verront confirmées durant la deuxième moitié du vingtième siècle.

## 2.2 Electron impact ionization

L'ionisation par impact électronique  $e + A \rightarrow A^+ + 2e$  constitue le principal mécanisme d'ionisation au sein de la plupart des plasmas.

Dans le chapitre d'introduction nous avons vu que le rayon classique de l'électron  $r_e$ , la longueur d'onde Compton  $\lambda_c$  et le rayon de Bohr  $a_0$ , s'ordonnent suivant les puissance de  $\alpha$  :  $r_e/\lambda_c/a_0 \sim \alpha^2/\alpha/1$ . Ces longueurs sont associées à deux sections efficaces fondamentales, la section efficace de Bohr  $\sigma_B$  et la section efficace de Thomson  $\sigma_T$ .

$$\begin{aligned} \text{Bohr} & : \sigma_B = \pi a_0^2 = 0,88 \times 10^{-16} \text{cm}^2, \\ \text{Thomson} & : \sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = 6,65 \times 10^{-25} \text{cm}^2 \end{aligned}$$

La première,  $\sigma_B$ , apparaîtra lors de l'étude des processus de collision électron-atome et la deuxième,  $\sigma_T$ , apparaît naturellement lors de l'étude des processus radiatifs. Un plasma faiblement ionisé est souvent le siège d'un très grand nombre de réactions, ioniques, atomiques et moléculaires ; la plus importante, car elle contraint le bilan de particules et contrôle ainsi l'existence du plasma, est l'ionisation par impact électronique :  $e + A \rightarrow A^+ + 2e$ . Il est donc nécessaire d'étudier en détail cette réaction. L'énergie de première ionisation de l'atome d'hydrogène

$$\text{Energie de première ionisation de l'hydrogène : } E_I = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = \alpha^2 \frac{m_e c^2}{2} = 13,6 \text{eV}$$

donne l'ordre de grandeur du seuil de la réaction d'ionisation par impact électronique. Le tableau ci-dessous présente les valeurs des potentiels de première  $E_I$  et deuxième  $E_{II}$  pour les éléments des deux première lignes de la classification périodique et les métaux usuels. L'augmentation du potentiel de première ionisation des alcalins, alcalino-terreux vers les halogènes et gaz rares s'explique par les règles de construction des couches atomiques. En effet, un alcalin perdant un électron possède une configuration électronique à 8 électrons de valence, de même un gaz rare ionisé perd une telle configuration ; enfin, les métaux usuels possèdent des potentiel de première ionisation situés typiquement entre 5et 10 eV.

	$E_I$	$E_{II}$		$E_I$	$E_{II}$		$E_I$	$E_{II}$
Li	5,39	75,63	Na	5,13	47,28	Ti	6,82	13,58
Be	9,32	18,21	Mg	7,64	15,03	Fe	7,87	16,18
B	8,29	25,15	Al	5,98	18,82	Cu	7,73	20,30
C	11,26	24,38	Si	8,15	16,34	Rb	4,17	27,28
N	14,53	29,60	P	10,48	19,72	Ag	7,58	21,49
O	13,61	35,11	S	10,36	23,33	Cs	3,89	25,1
F	17,42	34,97	Cl	12,96	23,81	Au	9,23	20,5
Ne	21,56	40,96	Ar	15,75	27,62	Hg	10,43	18,76

Pour aborder le problème de la section efficace d'ionisation il est instructif de reprendre le modèle classique proposé par Thomson. Soit un électron libre en translation uniforme, l'énergie cinétique associée à cette translation a pour valeur  $E$ , cet électron libre interagit avec un électron lié orbitant autour d'un proton sur la

première orbite de Bohr. La distance entre la trajectoire de l'électron libre et le noyau de l'atome d'hydrogène est  $b \gg a_0$ .

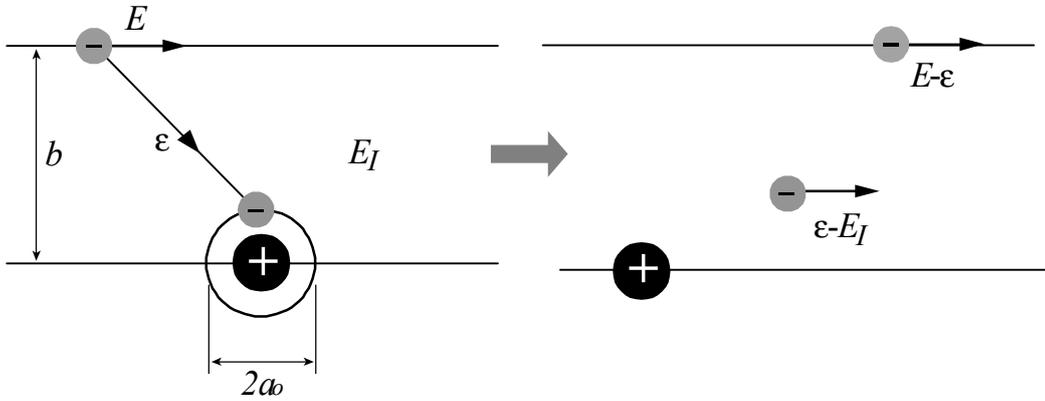
Pour effectuer ces calculs nous allons supposer que la vitesse de l'électron n'est que peu perturbée par l'interaction avec l'atome : sa trajectoire demeure rectiligne et son mouvement uniforme dans la direction initiale. Considérons donc un électron, de masse  $m_e$  de charge  $-e$ , en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{v}$ . Cet électron, d'énergie cinétique  $E = m_e v^2/2$  exerce une force coulombienne répulsive sur un électron, de masse  $m_e$  et de charge  $-e$  situé à une distance  $b \gg a_0$  de sa trajectoire rectiligne. Cette force transfère de l'impulsion de l'électron libre vers l'électron lié, elle transfère donc aussi de l'énergie. Après le passage de l'électron libre ( $t = +\infty$ ), l'électron lié initialement ( $t = -\infty$ ) au repos a acquis une énergie  $\varepsilon(E, b)$ . Ainsi, nous analysons, dans un cadre dynamique classique, la collision coulombienne :

$$\text{électron libre } (E) + \text{électron lié } (-E_I) \rightarrow \text{électron libre } (E - \varepsilon) + \text{électron libre } (\varepsilon - E_I)$$

où nous supposons  $\varepsilon \ll E$ . L'énergie acquise par l'électron lié est perdue par l'électron libre et est la somme des incréments infinitésimaux entre  $t = +\infty$  et  $t = -\infty$ . L'incrément total de vitesse de l'électron libre  $\delta \mathbf{v}$  est la somme des incréments infinitésimaux entre  $t = +\infty$  et  $t = -\infty$ .

$$\text{Transfert d'impulsion : } m_e \delta \mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ze^2 \mathbf{r}(t)}{4\pi \varepsilon_0 r^3(t)} dt = \delta \mathbf{v}_\perp + \delta \mathbf{v}_\parallel$$

où  $r(t) = \sqrt{v^2 t^2 + b^2}$  est la distance électron-électron à l'instant  $t$ .



La projection de l'accélération coulombienne parallèlement et perpendiculairement à la vitesse  $\mathbf{v}$  permet d'exprimer les deux composantes  $m_e \delta \mathbf{v}_\parallel$  et  $m_e \delta \mathbf{v}_\perp$  de ce transfert d'impulsion.

$$\delta \mathbf{v}_\parallel \equiv (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{v^2} = - \frac{\mathbf{v}}{4\pi \varepsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2 t}{(v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} dt = \mathbf{0}$$

$$\delta \mathbf{v}_\perp \equiv \frac{\mathbf{v} \times (\delta \mathbf{v} \times \mathbf{v})}{v^2} = \frac{\mathbf{b}}{4\pi \varepsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2}{(v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} dt = \frac{e^2}{2\pi \varepsilon_0 m_e b^2 v} \mathbf{b}$$

L'énergie  $\varepsilon(E, b)$ , transférée à l'électron est donnée par la valeur de l'énergie cinétique associée à  $\delta \mathbf{v}_\perp$ .

$$\text{Transfert d'énergie : } \varepsilon(E, b) \equiv \frac{1}{2} m_e \delta v_\perp^2 = \frac{e^4}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e v^2 b^2} = \frac{e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 E b^2} = \frac{r_e^2 m^2 c^4}{b^2 E}$$

où nous avons introduit le rayon classique de l'électron  $r_e$ . La section efficace différentielle de transfert d'énergie :

$$\frac{d\sigma(E, \varepsilon)}{d\varepsilon} \equiv \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{Nombre d'électrons d'énergie } E \text{ transférant entre } \varepsilon \text{ et } \varepsilon + d\varepsilon \\ \text{Par unité d'énergie } d\varepsilon \text{ et unité de temps } dt \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{c} \text{Nombre d'électrons incidents d'énergie } E \\ \text{Par unité de surface } dS \text{ et unité de temps } dt \end{array} \right]}$$

peut alors être évaluée en éliminant le paramètre d'impact  $b$  dans la dérivée  $d\varepsilon/db$ .

$$d\sigma = 2\pi b db \rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{2\pi b}{\left| \frac{d\varepsilon}{db} \right|} \rightarrow \frac{d\sigma(E, \varepsilon)}{d\varepsilon} = 4 \frac{\sigma_B}{E} \frac{E_I^2}{\varepsilon^2}$$

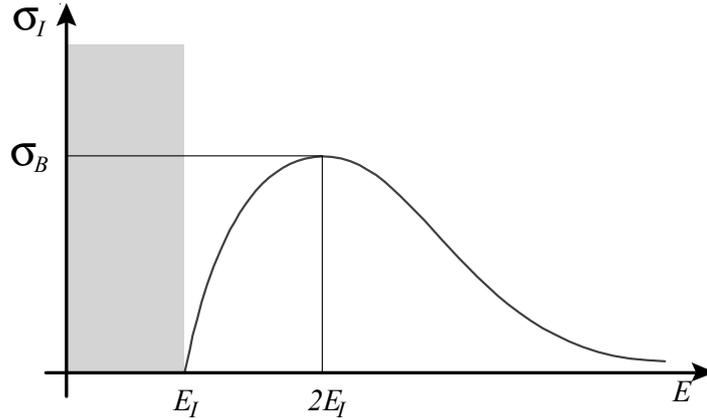
L'énergie transférée doit être, • au minimum, égale à l'énergie de seuil, c'est à dire au potentiel d'ionisation  $E_I$ , et peut, • au maximum, être égale à l'énergie de l'électron incident  $E$ . Il nous faut donc intégrer cette section

efficace différentielle de transfert d'énergie,  $d\sigma/d\varepsilon$ , entre ces deux bornes, pour obtenir la section efficace totale d'ionisation  $\sigma_I(E)$  par l'impact d'un électron d'énergie  $E$ .

$$\text{Formule de Thomson : } \sigma_I = \int_{E_I}^E \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varepsilon = 4\sigma_B \frac{E_I^2}{E} \int_{E_I}^E \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightarrow \frac{\sigma_I}{\sigma_B} = 4 \left( \frac{E_I}{E} - \frac{E_I^2}{E^2} \right)$$

Ce résultat constitue la formule de Thomson.

Cette section efficace présente un seuil en énergie,  $E_I$ , ainsi qu'un maximum pour l'énergie  $E_{\max} = 2E_I = 27,2 \text{ eV}$ , la valeur maximum de la section efficace est alors égale à la section de Born  $\sigma(2E_I) = \sigma_B$ . A basse énergie, le comportement observé expérimentalement au voisinage du seuil :  $\sigma_I(E) \sim (E - E_I)/E_I$  est conforme à celui prédit par la formule de Thomson ; par contre, à haute énergie, la décroissance n'est pas purement algébrique et un comportement du type :  $\sigma_I(E) \sim \log(BE)/E$  est observé expérimentalement et ne peut être interprété que dans le cadre d'un modèle quantique.



L'ionisation n'est pas l'unique réaction au sein d'un plasma, le tableau :

Processus	Réaction
Ionisation par impact électronique	$e + A \rightarrow 2e + A^+$
Excitation par impact électronique	$e + A \rightarrow e + A^*$
Ionisation dissociative	$e + AB \rightarrow 2e + A + B^+$
Dissociation par impact électronique	$e + AB \rightarrow e + A + B$

présente un ensemble de réactions induites par impact électronique. Parmi ces réactions l'excitation par impact électronique est importante car les seuils se situent en dessous des seuils d'ionisation.

### 2.3 Astrophysical plasmas

Passons de l'histoire à la géographie, les océans, les continents et l'atmosphère, ne sont pas des plasmas ; ils se présentent sous formes fluides et solides neutres. La croûte, le manteau et le noyau terrestre sont constitués principalement de fer, d'oxygène, de silicium et de magnésium sous forme solide et liquide. L'atmosphère terrestre est composée essentiellement d'azote et d'oxygène, sous forme gazeuse neutre et, en quantités minimes, de gaz rares. Enfin, pour ce qui concerne les océans, ils sont formés d'eau, contenant, en proportions minimes, des sels minéraux, principalement des halogénures alcalins et alcalino-terreux. Cette analyse rapide de notre environnement proche pourrait laisser croire que la phase *plasma* est totalement absente à l'état naturel ; au contraire, les plasmas constituent l'essentiel de notre environnement au delà de la haute atmosphère. En effet, à l'échelle cosmique, plus de 99,9% de la matière visible se présente sous forme ionisée, en phase plasma.

Une analyse plus fine de la constitution de l'atmosphère montre qu'une faible proportion d'ions libres est déjà présente au niveau des couches basses de l'atmosphère ; la proportion de cette composante chargée est variable, l'ordre de grandeur du nombre moyen d'ions par centimètre cube en fonction de l'altitude est donné dans le tableau :

Altitude [km]	Ions positifs $\text{cm}^{-3}$	Ions négatifs $\text{cm}^{-3}$
0.5	$\sim 800$	$\sim 700$
2	$\sim 600$	$\sim 500$
5	$\sim 2500$	$\sim 2000$

Les agents énergétiques à l'origine de ce faible niveau d'ionisation sont : les rayons cosmiques, la radioactivité naturelle et les phénomènes d'électrisation atmosphérique, liés principalement aux processus triboélectriques ; ainsi que le reliquat de rayonnement solaire ultraviolet dur présent à basse altitude.

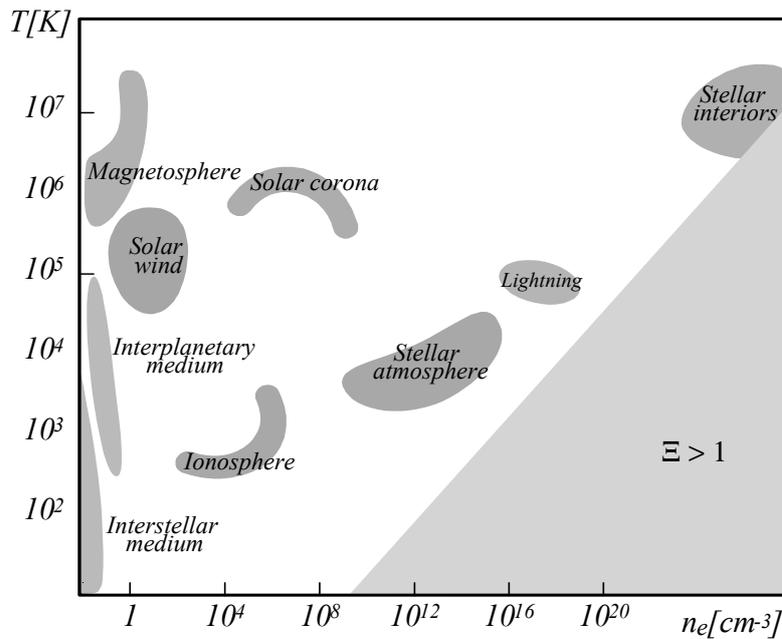
Alors que l'état d'équilibre électrique d'un système globalement neutre est caractérisé par la nullité du champ, c'est-à-dire l'homogénéité du potentiel électrostatique, un gradient de potentiel de l'ordre de 1 V/cm est présent au niveau des couches basses de l'atmosphère, entre le niveau de la surface libre des océans et une altitude de l'ordre de 50 km ; il va sans dire que ce chiffre constitue une moyenne dans le temps, pour un lieu donné, ou une moyenne dans l'espace, pour un instant donné.

La surface du globe peut ainsi être assimilée à un conducteur chargé négativement et les couches hautes de l'atmosphère à un conducteur chargé positivement. Ce système de deux conducteurs, sphériques et concentriques, se décharge en permanence car l'atmosphère est donc faiblement conductrice de par la présence de l'ordre du millier d'ions par centimètre cube.

Un courant de l'ordre de  $10^{-12}$  A/m<sup>2</sup> court-circuite en permanence la chute de potentiel de l'ordre de 350 à 500 kV entre la haute et la basse atmosphère. Il est donc nécessaire d'identifier un mécanisme électromoteur permettant de recharger en permanence le système Terre/haute atmosphère : l'activité orageuse, en particulier à travers la foudre qui apporte les charges négatives au niveau du sol. Malgré l'ancienneté des observations, le vaste problème de l'électricité atmosphérique à grande échelle présente encore des questions ouvertes, aussi nous n'offrirons pas ici la description d'un modèle complet de la structure et de la dynamique électrique à la surface du globe.

Cependant, les couches basses de l'atmosphère ne constituent pas un plasma compte tenu de leur faible niveau d'ionisation ; en effet, un tel niveau n'induit pas un comportement collectif, ni une réactivité significative. La physique de l'atmosphère relève donc de la mécanique et de la thermique des fluides classiques.

Par contre, à partir d'une altitude de l'ordre d'une centaine de kilomètres, le rayonnement ultraviolet du soleil entretient une structure ionisée dont l'étude relève de la physique des plasmas : l'ionosphère. A une telle altitude la densité de particules chargées atteint des valeurs supérieures à plusieurs dizaines de milliers d'électrons et d'ions par centimètre cube ; ces charges libres constituent la population à l'origine des propriétés électromagnétiques et physico-chimiques originales de ces couches de la très haute atmosphère.



Au-delà de l'ionosphère, c'est-à-dire à partir d'une altitude de l'ordre du millier de kilomètres, s'étend la magnétosphère : un plasma magnétisé structuré par le champ magnétique dipolaire terrestre et alimenté en espèces chargées par le vent solaire. Le comportement de l'ionosphère est dominé par une forte réactivité chimique et relève donc aussi de la physico-chimie des plasmas ; par contre, les phénomènes électrodynamiques et magnétohydrodynamiques sont au coeur de la dynamique de la magnétosphère. Au-delà de la magnétosphère s'étend l'espace interplanétaire, rempli aussi par un plasma : le vent solaire, issu des couches externes du soleil ; le soleil est aussi une sphère de gaz ionisée structurée en différentes couches.

Au-delà du système solaire, les étoiles, quels que soient leurs types, sont essentiellement des sphères de plasma et les espaces interstellaires et intergalactiques sont aussi emplis de particules chargées en interaction électromagnétique.

En conclusion, bien que notre environnement proche soit formé de matière neutre sous forme liquide, solide et gazeuse ; à grande échelle, les plasmas constituent l'essentiel de l'environnement terrestre et la physique des plasmas s'impose comme l'outil de référence pour étudier cet environnement au-delà des couches basses de l'atmosphère. En particulier, les structures et les processus tels que : les aurores boréales, le vent solaire, les queues de comètes, les bras galactiques, les magnétosphères, la couronne solaire, les éruptions solaires, les atmosphères et intérieurs stellaires, l'émission électromagnétique des nébuleuses gazeuses et des pulsars etc.

relèvent de la physique des plasmas. Le tableau :

Plasmas spatiaux	$n_e$ [cm <sup>-3</sup> ]	$T_e$ [K]	Plasmas astrophysiques	$n_e$ [cm <sup>-3</sup> ]	$T_e$ [K]
Ionosphère	$10^3 - 10^6$	$10^2 - 10^3$	Intérieurs stellaires	$10^{25} - 10^{32}$	$10^7 - 10^8$
Couronne Solaire	$10^4 - 10^8$	$10^4 - 10^6$	Espaces Interstellaires	$10^{-3} - 1$	$10^2 - 10^3$
Vent Solaire	$\sim 10^{1/2}$	$\sim 10^5$	Espaces Intergalactiques	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^5$

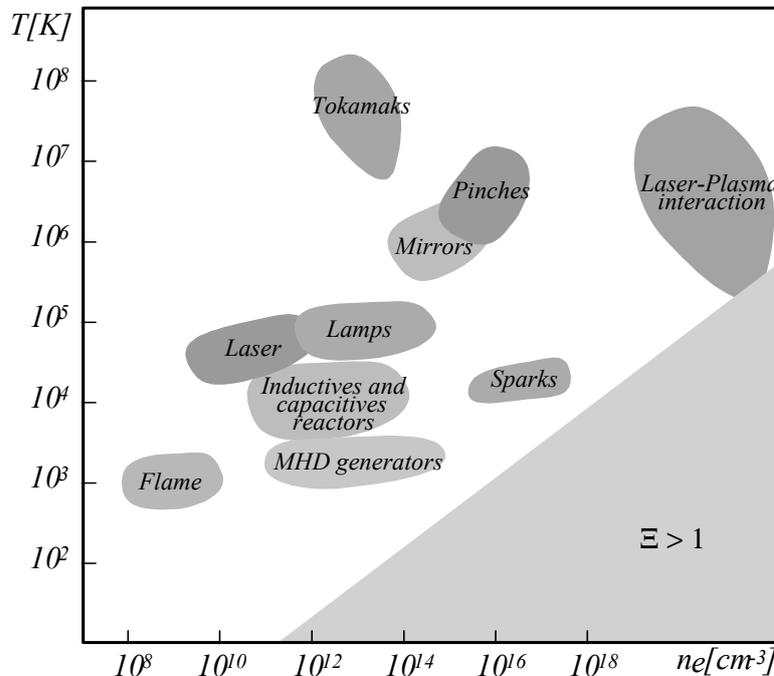
présente l'ordre de grandeur des caractéristiques (très variables) de densité électronique,  $n_e$ , et de température électronique,  $T_e$ , de ces différents plasmas spatiaux et astrophysiques. Face à l'extrême diversité des conditions de densité et température de ces structures, il pourrait sembler difficile d'envisager l'étude de l'ionosphère, de la magnétosphère, du vent solaire, de la couronne solaire, des intérieurs stellaires, des atmosphères stellaires... à l'aide d'un outil unique. Malgré cette difficulté apparente, la physique des plasmas se révèle pertinente pour l'étude de l'ensemble de ces objets et constitue un vaste champ de connaissances structuré autour d'un ensemble de concepts, méthodes et résultats fondamentaux permettant l'étude de systèmes aussi variés ; l'objectif de ce cours est de présenter ces concepts, méthodes, outils et résultats.

## 2.4 Fusion and industrial plasmas

Au-delà de son intérêt en tant qu'outil de référence pertinent pour l'étude des problèmes d'astrophysique et de physique spatiale, la physique des plasmas se situe aussi en amont d'un vaste champ d'applications technologiques ; par exemple, dans les domaines des hautes technologies que sont la micro-électronique et l'exploration spatiale : plus de la moitié des opérations de fabrication des processeurs et mémoires sont actuellement effectuées dans des réacteurs plasmas et les propulseurs plasmas sont considérés comme l'option la plus pertinente pour une mission habitée vers Mars.

Au cours de ces dernières années la pénétration des procédés plasmas dans les processus industriels a augmenté de façon extrêmement rapide ; bien qu'elles ne soient pas encore identifiées en tant que secteur industriel spécifique, les technologies plasmas sont devenues indispensables aussi bien dans des domaines innovants comme les nouveaux matériaux, les nanotechnologies et la propulsion spatiale, que dans des domaines plus classiques tels que la sidérurgie, l'éclairage ou la chimie.

Enfin, au-delà des applications industrielles, la physique des plasmas est l'outil essentiel pour comprendre les différents systèmes expérimentaux mis en œuvre dans le cadre des programmes de recherche sur la fusion thermonucléaire ; la fusion nucléaire du deutérium et du tritium en phase plasma constituant la seule option, à long terme, pour palier à l'épuisement des ressources en énergie fossile.



L'usage est de structurer les recherches en physique des plasmas en trois grandes communautés et de distinguer respectivement : • la physique des plasmas industriels, • la physique des plasmas thermonucléaires, • la physique des plasmas naturels, spatiaux et astrophysiques. Ces trois communautés de recherche ont en commun un ensemble d'outils, de méthodes et de résultats constituant la physique des plasmas. Cet ouvrage, à vocation généraliste, est construit autour de l'ensemble des connaissances et résultats communs à ces trois communautés.

Ces trois communautés ont aussi en commun une histoire, car l'état des connaissances actuelles en physique des plasmas résulte d'un processus de développement historique lié à l'évolution de notre compréhension de la structure de la matière et au développement de notre maîtrise des phénomènes électriques, magnétiques et optiques. La théorie des plasmas s'appuie donc sur la théorie électromagnétique des phénomènes électriques, magnétiques et optiques, ainsi que sur la théorie atomique de la structure de la matière.

Tout procédé de production de plasma nécessite un apport conséquent d'énergie pour induire une ionisation significative. La matière froide, liquide, solide, ou gazeuse, portée à haute température subit d'abord un processus de vaporisation (pour les phases denses), puis de dissociation (pour les vapeurs moléculaires) et finalement d'ionisation, conduisant ainsi à la création de populations d'ions et d'électrons libres. Le tableau :

Molécule	Dissociation [eV]	Ionisation [eV]
CO	11,1	14,0
H <sub>2</sub>	4,47	15,4
O <sub>2</sub>	5,11	12,0

présente les valeurs des énergies minimum de dissociation et d'ionisation pour quelques gaz diatomiques usuels. Sur la base de cet ordering entre dissociation et ionisation, une production significative de particules chargées par élévation de température, précédée par une dissociation, peut être envisagée à partir de quelques dizaines de milliers de Kelvin. Les valeurs des énergies d'ionisation, pour quelques éléments des trois premières lignes de la classification périodique, sont rappelés dans le tableau :

Élément	Z	E <sub>I</sub> [eV]	Élément	Z	E <sub>I</sub> [eV]
Li	3	5,392	Na	11	5,139
Be	4	9,322	Mg	12	7,646
Ne	10	21,564	Ar	18	15,759

L'augmentation du potentiel de première ionisation lorsque l'on suit une ligne de la classification périodique de la gauche vers la droite, des alcalins, alcalino-terreux vers les halogènes et gaz rares, s'explique aisément sur la base des règles de construction et de stabilité des couches atomiques. En effet, un alcalin perdant un électron retrouve une configuration à 8 électrons de valence (2 pour Li), de même, un gaz rare perdant un électron ne possède plus que 7 électrons de valence.

Les flammes, assurant la combustion de différents composés organiques inflammables, permettent d'envisager des températures supérieures à 2 500 °K; par exemple, dans le contexte des études sur les propulseurs de fusées, une combustion partant de l'oxygène liquide sous 20 atmosphères permet d'atteindre les températures suivantes : méthane, 3 000°; éthanol, 3 100°; hydrogène, 3 200°; et kérosène, 3 300°. L'utilisation de composés spécifiques, présentés dans le tableau :

Mélange	Température °C
Hydrogène + fluor	3 650
Cyanogène + oxygène	4 550
Butynedinitrile (C <sub>4</sub> N <sub>2</sub> ) + oxygène	5 000
Butynedinitrile (C <sub>4</sub> N <sub>2</sub> ) + ozone	5 200

permet d'atteindre 5 000°. Au regard de ces performances, l'élévation de température n'est pas le procédé de référence permettant d'obtenir un gaz ionisé. La création d'un plasma peut être envisagée à partir de tout procédé couplant, efficacement et rapidement, de l'énergie, en quantité suffisante pour induire une ionisation significative au sein d'une population atomique ou moléculaire neutre. De nombreux autres procédés, tels que :

- l'ionisation par impact d'électrons énergétiques entretenus par des champs électriques continus ou alternatifs,
- l'absorption de photons énergétiques, sont couramment mis en oeuvre pour la production de plasma.

Comme tout problème de physique, le problème de l'ionisation doit être abordé sous deux aspects : un aspect énergétique et un aspect entropique, c'est-à-dire statistique. Ce deuxième aspect est, entre autre, décrit par le degré d'ionisation,  $\alpha$ , défini comme le rapport de la densité électronique  $n_e$  sur la densité totale d'électrons et d'espèces (neutres) non ionisées  $n_n$ .

$$\text{Degré d'ionisation : } \alpha \equiv \frac{n_e}{n_e + n_n} = \frac{Z n_i}{Z n_i + n_n}$$

Ce paramètre permet de distinguer : • les plasmas faiblement ionisés,  $\alpha < 1$ , par exemple les plasmas industriels et l'ionosphère, • des plasmas fortement ionisés,  $\alpha \approx 1$ , par exemple les plasmas thermonucléaires et les plasmas stellaires.

Partant de la définition élémentaire d'un plasma comme un ensemble de charges positives et négatives en interactions coulombiennes mutuelles, une intuition physique primaire pourrait nous amener à conclure que la dynamique d'un tel ensemble doit être un simple collapse coulombien : la recombinaison des électrons avec les ions donnant un fluide neutre. Une telle image est totalement fautive et ne prend pas en compte deux éléments essentiels, contradictoires en apparence mais complémentaires en dernière analyse : • une tendance

au désordre due à l'agitation thermique, • une tendance à l'organisation due à l'aspect dynamique et collectif de l'interaction coulombienne. Nous verrons que l'agitation thermique et surtout la faible réactivité due à des contraintes cinématiques, expliquent la lenteur des recombinaisons ; le transport des espèces aux parois, pour les plasmas de laboratoire, ou le rayonnement, pour les plasmas astrophysiques, possèdent des échelles de temps beaucoup plus rapides ; la recombinaison dans de telles conditions n'est donc pas dominante. Le compromis entre une tendance au désordre, due à l'agitation thermique, et une tendance à l'organisation, due à l'aspect collectif de l'interaction coulombienne, peut être quantifié par un paramètre sans dimension, le *paramètre plasma* ou paramètre de couplage  $\Xi$ . Considérons un plasma de densité électronique  $n$  et de température électronique  $T$ . L'ordre de grandeur de la densité volumique d'énergie cinétique moyenne,  $\langle E_c \rangle$ , est donné par :  $\langle E_c \rangle \approx 3nk_B T/2$ . Ce premier nombre est une mesure de l'agitation thermique et du contenu en énergie incohérente. L'ordre de grandeur de la densité volumique d'énergie potentielle électrostatique,  $\langle E_p \rangle$ , a pour valeur  $|\langle E_p \rangle| \approx ne^2/4\pi\epsilon_0 n^{-\frac{1}{3}} = n^{\frac{4}{3}}e^2/4\pi\epsilon_0$ . Ce deuxième nombre est une mesure de l'énergie d'interaction coulombienne disponible dans le milieu pour organiser des structures ordonnées tel qu'un cristal ionique. Le rapport de ces deux nombres définit le paramètre de couplage  $\Xi$  ou paramètre plasma.

$$\text{Paramètre d'idéalité : } \Xi \equiv \frac{|\langle E_p \rangle|}{\langle E_c \rangle} \approx 10^{-5} \left[ \frac{n}{10^{12} \text{cm}^{-3}} \right]^{\frac{4}{3}} \left[ \frac{T}{10^6 \text{K}} \right]^{-1}$$

Ce paramètre permet de distinguer : • les plasmas faiblement couplés, *cinétiques* ou *idéaux*,  $\Xi \ll 1$ , où le désordre domine, • des plasmas fortement couplés ou *fortement corrélés*,  $\Xi \geq 1$ , dont la structure est de nature fluide voire cristalline, c'est-à-dire plus ou moins ordonnée.

Un système dynamique évolue souvent de manière à minimiser l'amplitude des forces qui l'entraînent (les exceptions à cette règle phénoménologique étant les instabilités). Compte tenu du très grand nombre de degrés de liberté d'un plasma, celui-ci pourra souvent se réarranger pour annuler la densité volumique de forces de Coulomb où la densité volumique de forces de Laplace. Le moyen le plus simple et le plus efficace pour annuler cette densité volumique de forces de Coulomb est simplement un réarrangement de charges tel que :  $n_e = Zn_i$  où  $n_e$  est la densité électronique,  $n_i$  la densité ionique et  $Z$  l'état d'ionisation. Bien entendu, si la densité volumique de charges était identiquement nulle, sur toutes les échelles de longueur et sur toutes les échelles de temps, toutes les interactions électriques disparaîtraient et la physique des plasmas serait sans objet. Il faut donc considérer l'hypothèse de quasi-neutralité comme l'ordre le plus bas d'un développement asymptotique par rapport au petit paramètre  $\varepsilon$  :

$$\text{Paramètre de neutralité : } \varepsilon \equiv \frac{n_e - Zn_i}{n_e + Zn_i}$$

Ce paramètre permet de distinguer : • les plasmas quasi-neutres,  $\varepsilon \ll 1$ , où les phénomènes d'écrantage dominant l'interaction champ-plasma à basse fréquence, • des plasmas non-neutres,  $\varepsilon \leq 1$ , tels que les faisceaux et les gaines, où le champ de charge d'espace contrôle la dynamique du milieu.

L'hypothèse de quasi neutralité constitue l'un des concepts fondamentaux de la physique des plasmas et sera analysée dans le prochain chapitre. Ce terme apparaît de manière récurrente dans l'argumentation physique qui précède la construction de nombreux modèles. Cette tendance des plasmas vers la quasi-neutralité va de pair avec une propension à l'écrantage électrique et magnétique. Cette universalité de comportement est conforme au fait qu'un système de charges libres possède un caractère diélectrique : sous l'effet d'un champ électrique un tel système a tendance à organiser spatialement les charges afin de créer un champ opposé au champ appliqué (*“les effets s'opposent aux causes qui leur donnent naissance”*).

Bien que la physique des plasmas soit un outil essentiel pour étudier les structures et les processus astrophysiques, son domaine d'application ne se restreint pas à la seule physique fondamentale ; depuis plusieurs dizaines d'années la technologie des plasmas est devenue indispensable dans de nombreuses industries et la physique des plasmas constitue une branche extrêmement active et innovante de la physique appliquée. Les activités industrielles peuvent être classifiées suivant différents schémas ; du point de vue de la physique appliquée, il est intéressant de considérer trois grands types d'activités et de distinguer respectivement : • le traitement de l'information, • le traitement de l'énergie, • le traitement des matériaux.

Les technologies des plasmas sont au coeur de techniques de pointe mises en oeuvre dans ces trois secteurs ; quelques exemples permettent de mesurer l'impact et le potentiel des procédés plasmas dans ces trois domaines. Les technologies modernes de traitement de l'information utilisent des composants électroniques miniaturisés tels que les microprocesseurs et les mémoires. Ces composants ne peuvent être fabriqués que dans des réacteurs à plasma car la gravure de millions de motifs, possédant des détails de dimensions inférieures au millièbre de millimètre, est impossible avec les procédés mécaniques ou chimiques usuels ; mais devient possible avec les flux d'ions énergétiques issus de la zone périphérique des décharges électriques radiofréquence. Les réacteurs plasmas radiofréquence, conçus pour maîtriser et optimiser ces flux d'ions, permettent ainsi les opérations de gravure et de dépôt sur les substrats de silicium et sont les outils essentiels des chaînes de fabrication des industries microélectronique.

La production d'oxyde d'azote, d'acétylène et de carbure de calcium, par synthèse en phase plasma, dès le début du vingtième siècle, constituent les premières applications industrielles des plasmas dans le domaine de la synthèse et du traitement des matériaux. Les propriétés de hautes températures ( $> 10^4\text{K}$ ) des plasmas d'arc de puissance sont utilisées en sidérurgie pour améliorer ou remplacer les procédés conventionnels des hauts

fourneaux. Ces mêmes décharges plasma en régime d'arc, mais à plus faible puissance, constituent les éléments actifs des systèmes de découpe et de soudure dans les ateliers de mécanique en amont des industries nucléaire, aéronautique et spatiale. Les plasmas permettent aussi la production de film de diamant ou de couches minces de silicium ; enfin la phase plasma offre une voie unique pour la synthèse de matériaux ultra-durs n'existant pas à l'état naturel tel que le nitrure de carbone. Dans les sociétés industrielles modernes, entre un et quelques Gigawatt de puissance électrique sont globalement nécessaires par million d'habitants ; ainsi, la consommation mondiale annuelle atteint désormais un niveau de l'ordre de  $10^{20}$  Joules et le développement de l'humanité s'accompagne d'une demande énergétique toujours croissante ; elle excède depuis longtemps la satisfaction des besoins énergétiques primaires c'est-à-dire une consommation minimale d'environ 3 GJ/homme/an qui correspond à une ration journalière de 2 400 kcal.

En un siècle la consommation est passée d'une moyenne de 20 GJ/homme/an en 1890 à 60 GJ/homme/an en 1990 avec de fortes disparités: 160 GJ/homme/an pour la France, 240 GJ/homme/an pour les Etats-Unis. D'ici un demi-siècle, on estime que la consommation globale va doubler ou quadrupler ; (i) une estimation basse: 8 milliards d'habitants sur Terre en 2050 et une consommation de 64 GJ/homme/an, conduisent à 16 GTep (1 Tep est égale à 42 GJ) ; (ii) une estimation haute, pour un scénario de croissance économique et démographique forte: population mondiale de 10 milliards d'habitants et une consommation de l'ordre de 147 GJ/homme/an conduisent à 35 GTep.

Ainsi, quelque soit le scénario, la demande actuelle sera multipliée par un facteur deux à quatre. Les réserves estimées des principaux combustibles fossiles, pétrole, gaz et charbon, largement exploitées actuellement, sont limitées ; ces estimations sont approximatives et font l'objet de nombreux débats d'experts compte tenu de la difficulté à évaluer le potentiel de découverte de nouveaux gisements. L'impact sur l'environnement de l'utilisation de ces combustibles fossiles ne peut plus être négligé, l'émission de gaz à effet de serre conduit à des effets sur le climat que l'on commence à observer et évaluer ; en particulier, la concentration de  $\text{CO}_2$  a augmenté de 30% depuis un siècle, et pourrait doubler d'ici la fin du siècle.

Compte tenu de la croissance de la demande et des contraintes écologiques, la fusion de noyaux légers de deutérium et tritium, suivant la réaction:  ${}^2\text{D} + {}^3\text{T} \rightarrow \alpha(3,5\text{MeV}) + \text{n}(14\text{MeV})$  dans des réacteurs à fusion thermonucléaire contrôlée, est la seule option, à long terme, validant physiquement les schémas de développement envisagés pour les sociétés post-industrielles. Un système thermonucléaire ne produit pas de dioxyde de carbone, génère des déchets radioactifs de faible activité et ne présente aucun risque d'emballement. Le deutérium (D) se trouve en quantité inépuisable dans l'eau et le tritium (T) peut être produit dans la couverture du réacteur en utilisant le flux neutronique de la réaction de combustion  $\text{D} + \text{T} \rightarrow \alpha + \text{n}$  suivant les schémas:  $\text{n} + {}^6\text{Li} \rightarrow \alpha + \text{T}(+4,8\text{ MeV})$  et  $\text{n} + {}^7\text{Li} \rightarrow \alpha + \text{T} + \text{n}(-2,5\text{ MeV})$ . Le lithium (Li) se trouve aussi en quantité abondante dans la croûte terrestre.

Compte tenu des pertes radiatives, la réaction  $\text{D} + \text{T} \rightarrow \alpha + \text{n}$  ne peut s'auto-entretenir en régime de combustion exothermique qu'à partir d'une température de l'ordre de 4 keV ; à de telles températures la matière est totalement ionisée et la problématique de la production d'énergie par fusion nucléaire se réduit donc aux problèmes complexes du chauffage et du confinement des plasmas. La solution de ces problèmes, jusqu'à présent non résolus, implique la compréhension et la maîtrise des instabilités et de la turbulence dans les plasmas thermonucléaires, qui constituent les objectifs majeurs des programmes de recherches en physique des plasmas thermonucléaires.

Au début de ce chapitre d'introduction et de présentation, nous avons considéré les plasmas comme la phase haute température de la matière. Cependant, la production de plasmas, dans les laboratoires et les ateliers, fait rarement appel à un procédé de chauffage classique par combustion ; en effet, les températures associées à la combustion chimique sont limitées à quelques milliers de Kelvin et une ionisation significative requiert quelques dizaines de milliers de Kelvin.

Les champs électriques, qu'ils soient continu, basse fréquence, radiofréquence, micro-onde ou optique, sont les principales sources d'énergie qui permettent la production de plasmas dans les dispositifs expérimentaux, thermonucléaires et industriels.

Considérons, par exemple, le cas des champs quasi-statiques, l'interaction des électrons avec ces champs résulte en une accélération ; les processus d'ionisation par impact électronique sont efficaces et permettent la production de la phase plasma ; compte tenu des pertes par excitation l'énergie moyenne nécessaire pour créer une paire électron-ion par impact électronique sur un atome,  $W_f$ , est supérieure à l'énergie d'ionisation,  $E_I$ .

Pour un faisceau d'électrons interagissant avec un gaz  $W_f$  est de l'ordre du double de l'énergie de seuil  $E_I$  comme le montre les valeurs du tableau :

Elément	$E_I$ [eV]	$W_f$ [eV]	$W_s$ [eV]
Ar	15,8	26,4	45
Xe	12,1	22,0	38

Un électron thermique accéléré par un champ électrique perdra une fraction significative de son énergie dans des processus d'excitations atomiques et moléculaires, cette perte d'énergie rend le processus d'accélération statistique. Ainsi, l'énergie minimum pour créer une paire électron-ion dans une décharge électrique,  $W_s$ , est supérieure à l'énergie nécessaire pour ce processus lorsque l'on considère un faisceau,  $W_f$  ;  $W_s$  est de l'ordre du triple de l'énergie de seuil  $E_I$  comme le montre les valeurs du tableau.

Les flux de puissances caractéristiques de l'interaction laser-plasma se situent entre  $10^9\text{ W/cm}^2$  et  $10^{20}\text{ W/cm}^2$ . Ces niveaux d'irradiations ne peuvent être entretenus que sur des durées courtes entre  $10\text{ ns} = 10^{-9}\text{ s}$

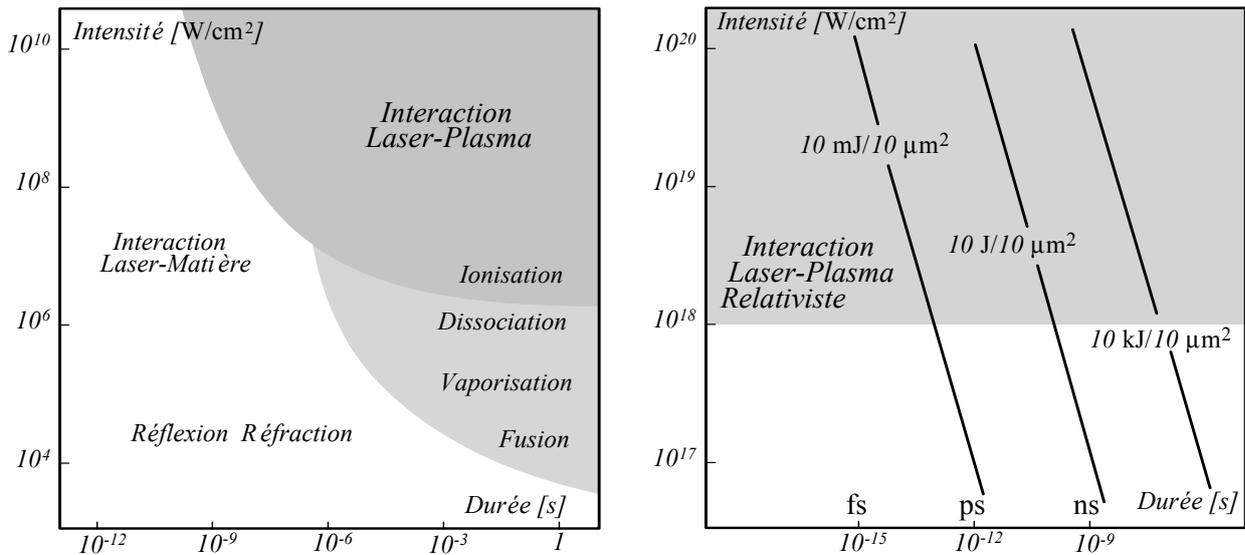
et  $10 \text{ fs} = 10^{-14} \text{ s}$ . La physique des champs électriques ultra-intenses et des champs magnétiques ultra-intenses peut être explorée avec les nouvelles générations de laser petawatt. Pour un flux de puissance  $I \text{ [W/cm}^2\text{]}$ , les valeurs des champs électrique et magnétique sont données par les relations :

$$E \left[ \frac{\text{V}}{\text{cm}} \right] = 27.5 \sqrt{I \left[ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \right]}, \quad B \text{ [T]} = 9.2 \times 10^{-6} \sqrt{I \left[ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \right]}$$

Les décharges électriques continues ont trouvées de nombreuses applications; que ce soit les étincelles dans les systèmes d’allumage, les arcs dans les industries sidérurgiques, les décharges lumineuses (glow) dans les systèmes d’éclairage ou les décharges dites couronnes dans les systèmes de dépollution.

Les propriétés électriques, thermiques, optiques et chimiques uniques de ces structures non-linéaires ont permis la mise au point de dispositifs fiables remplaçant avantageusement les flammes. Deux types de décharges sont possibles selon les conditions de pression et la géométrie, • les décharges thermiques, principalement l’arc, où le gaz neutre est à la même température que le plasma, • les décharges non-thermiques où la température électronique est beaucoup plus élevée que la température des espèces lourdes, ions et neutres.

Les champs électriques radiofréquence, micro-onde et laser permettent aussi de produire des plasmas. En particulier, les décharges radiofréquences, capacitives et inductives, à 13,56 MHz (et ses harmoniques), sont largement utilisées dans les industries microélectroniques. L’interaction de pulses électromagnétiques intenses, générés par des laser de puissance, avec des cibles solides ou gazeuses, engendre aussi des plasmas non stationnaires, dont la richesse de comportement est un sujet actif de recherches. Une description exhaustive des applications industrielles des plasmas dans les domaines du traitement de l’information, du traitement de l’énergie et du traitement des matériaux nécessiterait une monographie entièrement dédiée à ce sujet. Les réacteurs (à) plasma, parfois appelés générateurs (de) plasma ou sources plasma, sont des dispositifs permettant la production de plasma afin d’utiliser, • la population électronique pour amorcer et entretenir une réactivité chimique en volume, généralement dans des conditions de non-équilibre thermodynamique, • le flux d’ions en périphérie du plasma, dans la zone dite de gaines, afin de traiter des matériaux.



Si l’on excepte les décharges d’arc, la température électronique est en général de quelques eV et la température ionique beaucoup plus faible, mais, comme nous le verrons dans le chapitre six, dans la zone dite de pré-gaine et dans la zone de gaine, les électrons transfèrent, en régime non-linéaire, une fraction significative de leur énergie aux ions qui acquièrent ainsi une énergie suffisante pour induire des phénomènes de dépôt de couches minces, de gravure micrométrique (à travers un masque approprié) ou d’implantation ionique.

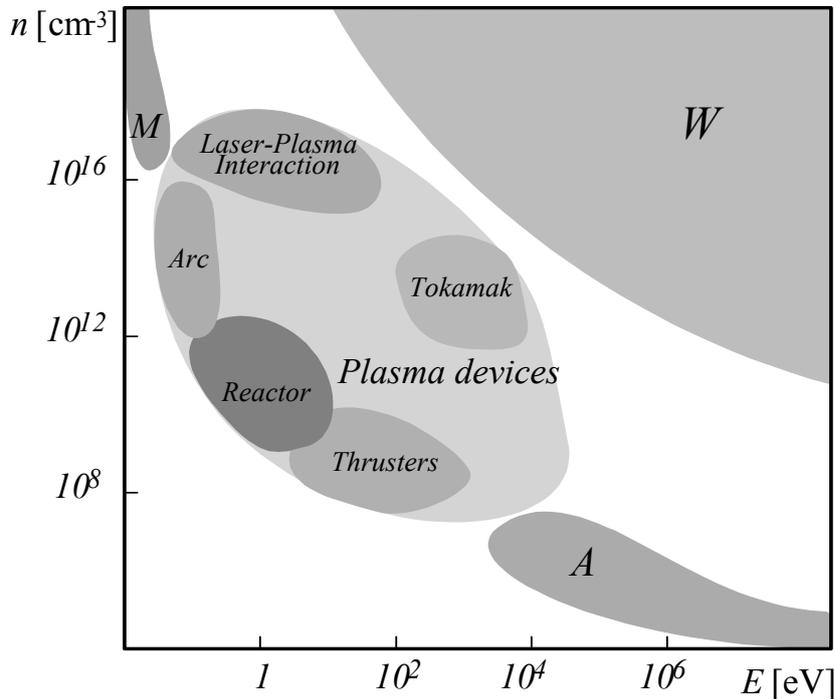
Ces trois opérations ne résultent pas simplement de l’action mécanique du flux d’ions énergétiques sur le substrat, mais, de toute une physico-chimie, hors-équilibre thermodynamique, en volume et surface, qui constitue un sujet extrêmement actif de recherches compte tenu des enjeux industriels; en effet, ces trois processus, dépôt, gravure et implantation, sont les opérations de base qui ont permis la mise au point des procédés de fabrication dans le domaine des nano-technologies. Un quatrième processus ionique, la pulvérisation ou “sputtering”, complète cette phénoménologie ionique (en 1852 Grove découvrit le phénomène de dépôt de couche mince par pulvérisation dans les décharges basse pression; W. Thomson appela ce phénomène “spluttering” par analogie avec le phénomène de génération de gouttelette lors de l’impact d’une goutte sur un liquide, mais le mot “sputtering” fut imprimé à la suite d’une erreur typographique et fut adopté par la communauté scientifique). La pulvérisation ou “sputtering”, permet de générer des vapeurs métalliques à basse température autorisant ainsi le dépôt de films minces sur des substrats fragiles. Les populations électroniques énergétiques des plasmas possèdent aussi un vaste potentiel d’applications industrielles; à haute énergie les faisceaux issus des accélérateurs prennent le relais des sources (à) plasma usuelles. Lorsque l’on aborde le sujet

des réacteurs plasma, plusieurs classifications peuvent être établies ; il est, par exemple, possible de distinguer :  
 • les réacteurs basse pression, fonctionnant en dessous de la pression atmosphérique, entre quelque millitorr et quelque centaines de millitorr, voir au torr, • des réacteurs haute pression, fonctionnant au voisinage de quelque dizaines de torrs jusqu'à la pression atmosphérique (760 torr). La fréquence du champ électromagnétique d'excitation peut aussi permettre de construire une classification des réacteurs, on distinguera alors : • les décharges continues, • des réacteurs radiofréquence (RF) et • des réacteurs micro-onde fonctionnant à quelques Gigahertz.

Enfin, la nature de la structure de couplage de l'énergie constitue un autre élément d'élaboration d'une classification, par exemple, pour les réacteurs RF, qui sont les plus courant dans les chaînes de fabrication des industries microélectroniques : • les structures de couplage capacitives constituées de deux plaques polarisées permettent de générer des plasmas pour le dépôt et la gravure, viennent ensuite, • les structures de couplage inductives permettent un transfert de puissance au plasma plus efficace et qui se substitue progressivement au réacteur capacitif dans de nombreuse applications ; • enfin, les structures radiatives, de type antenne dans les réacteurs dits hélicon ou de type guide ouvert dans les réacteurs dits ECR, génèrent des modes propagatifs du plasma alors que les structures capacitives et inductives opèrent sur des modes évanescents. Les réacteurs radiofréquence, malgré l'apparente simplicité de leur structure, sont des objets au comportement complexe qui présentent une grande diversité de régimes de fonctionnement et sont sujet à de nombreuses instabilités. Le chauffage stochastique, les instabilités, les transitions entre régimes dans les réacteurs RF sont autant de sujets de recherches qui nécessitent la mise en oeuvre de l'ensemble des méthodes et outils théoriques et expérimentaux de la physique des plasmas.

La physico-chimie des plasmas et plus particulièrement la compréhension et la maîtrise des cinétiques des espèces actives participant aux processus de dépôt et de gravure, constitue un deuxième sujet de recherches extrêmement actif, compte tenu de l'impact direct de ces études sur les procédés et opérations de fabrication des composants microélectroniques.

Les réacteurs radiofréquence pour la gravure, le dépôt et l'implantation ionique génèrent des plasmas dont la fonction ultime relève du traitement des matériaux ; le traitement de l'énergie est aussi un vaste champ d'applications des technologies plasma. En effet, que ce soit pour la production d'énergie dans les systèmes thermonucléaires Tokamak, ou pour la propulsion des systèmes spatiaux avancés, le potentiel des technologies plasmas permet d'envisager des modes de fonctionnement et des performances inaccessibles aux technologies de l'énergie actuelles.



Afin d'identifier la spécificité de ces technologies, considérons l'ensemble des milieux portés à haute température, ou à haute énergie, et représentons en abscisse l'énergie par nucléon  $E$  et en ordonnée le nombre de particules ainsi chauffées ou accélérées par unité de volume  $n$ . • A haute énergie et basse densité les technologies classiques des accélérateurs permettent d'accélérer des faisceaux peu denses (A). • A basse énergie et haute densité les technologies classiques des moteurs de fusées et des turbines permettent de chauffer et d'accélérer des flux de matière importants mais à des niveaux énergétiques modestes (M). • Entre ces deux extrêmes, les technologies plasma (P) permettent de transférer une quantité significative d'énergie vers une quantité significative de matière.

Les plasmas offrent ainsi la possibilité de développer de nouvelles technologies inovantes, basées sur des principes physiques originaux, dont les performances sont supérieures aux moteurs et accélérateurs classiques.

La zone W du diagramme est non physique et inaccessible, en effet un transfert important d'énergie vers une quantité importante de matière requiert, en régime stationnaire, des puissances impossibles à générer sur terre. Ce positionnement original de la physique et de la technologie des plasmas, analysé sous l'angle de l'énergétique appliquée, se retrouve aussi du point de vue fondamental.

Les Tokamaks sont des configurations magnétiques utilisées pour confiner et chauffer des plasmas en régime thermonucléaire ; en effet, la température d'amorçage et d'entretien d'une combustion thermonucléaire étant de l'ordre d'une centaine de millions de Kelvin, il n'existe aucun matériau pouvant supporter de telles températures. Il est donc nécessaire d'utiliser le principe du confinement magnétique qui sera étudié dans les chapitres cinq et dix. Le mouvement d'une particule chargée interagissant avec un champ magnétique statique est la combinaison d'une rotation autour des lignes de champ et d'une translation le long des lignes de champ ; ce comportement des systèmes de charges est à la base du principe du confinement magnétique : si les lignes de champ sont fermées ou restent dans un volume fini, comme c'est le cas dans la configuration Tokamak, alors les particules restent confinées dans ce volume fini.

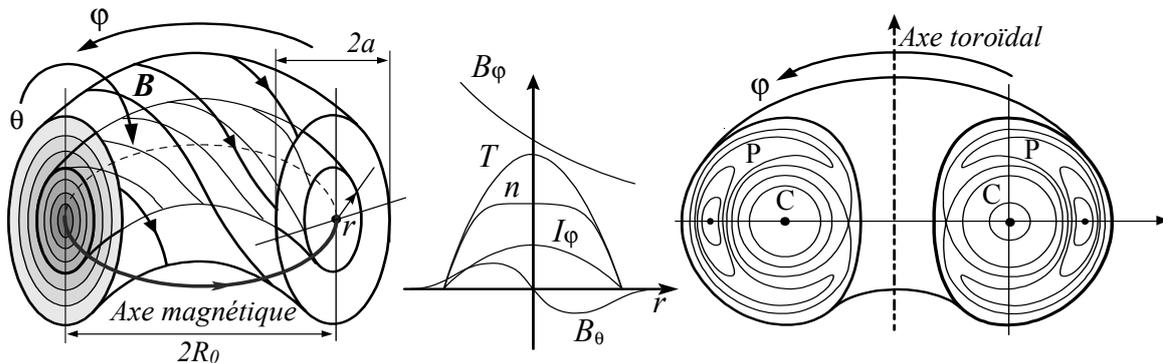
La réalité est plus complexe pour les configurations de type Tokamak, car, en repliant des lignes de champ magnétique se créent nécessairement des inhomogénéités qui engendrent des dérives perpendiculaires aux lignes de champ ; il faut donc compenser ces dérives afin d'assurer un confinement orbital. Pour cela, un champ, dit poloïdal, généré par un courant ( $I_\varphi$ ) traversant l'anneau de plasma (quelques millions d'Ampères dans un réacteur) est superposé au champ toroïdal ( $B_\varphi$ ) créé par le système de bobines distribuées autour du tore de plasma. Le résultat est donc une structure de champs complexes où les lignes de champ sont des hélices s'appuyant sur des tores emboîtés.

La configuration Tokamak offre ainsi un exemple de champs complexes où les différentes dérives sont compensées et le confinement orbital assuré. Afin de garantir la stabilité du tore de plasma des bobinages verticaux sont aussi nécessaires. Le confinement orbital est une condition nécessaire, mais ne constitue pas une condition suffisante pour assurer un bon confinement global du plasma ; en effet, le plasma génère des champs électrique et magnétique qui ont tendance à détruire le confinement. Ainsi, le tore de plasma d'une configuration Tokamak doit être contrôlé en permanence, car il est l'objet de nombreuses instabilités et d'une intense activité turbulente résultant de couplages non-linéaires entre les champs et les particules.

Les performances des grands Tokamaks les placent loin devant tous les autres types de machines et de procédés qui ont été proposés jusqu'à présent pour amorcer et entretenir une combustion thermonucléaire ; ce succès fait des Tokamaks un sujet de recherche particulièrement actif et de grands Tokamaks, dédiés aux études de physique des plasmas thermonucléaires, ont été construits depuis plus de vingt ans, les principaux paramètres de ces grandes machines sont donnés dans le tableau :

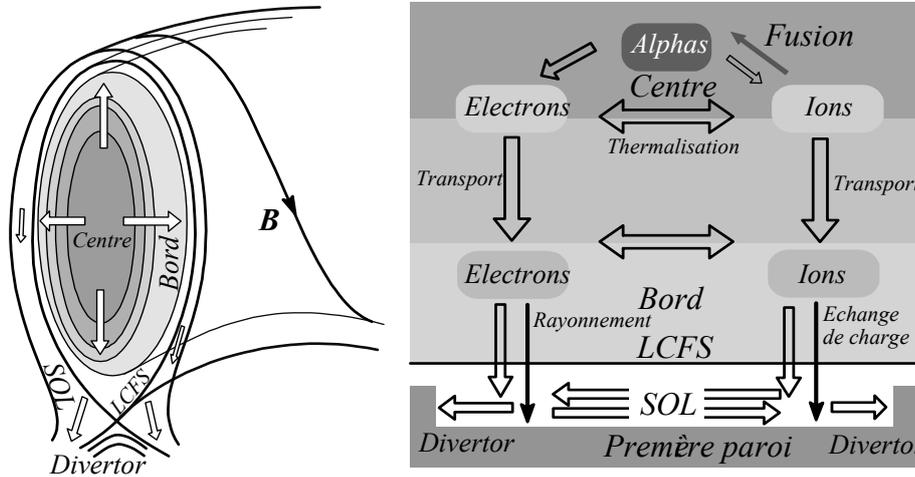
Tokamak/Laboratoire	$R$ [m] / $a$ [m]	$B_\varphi$ [T]	$I_\varphi$ [MA]
Alcator C/MIT	0,64/0,17	12	0,9
JET/Oxford	3,0/1,25	3,5	3,0
TS/CEA Cadarache	2,37/0,8	4,5	2,0
TFTR/Princeton	2,4/0,8	5,0	2,2
ITER/Cadarache	6,2/2,0	5,3	15,0

Enfin, le projet mondial ITER devrait permettre l'accès à la combustion thermonucléaire quasi-continu pour la prochaine décennie, ouvrant ainsi un vaste champ de recherches sur ce régime encore inexploré.



Les performances obtenues ces dernières années en termes de confinement, chauffage et contrôle des plasmas thermonucléaires dans ces grands Tokamaks traduisent des avancées remarquables et l'extrapolation des lois d'échelles, issues des bases de données accumulées ces vingt dernières années, permet d'envisager avec confiance l'accès à l'ignition et l'entretien de la combustion thermonucléaire dans le réacteur ITER. Cependant, le programme Tokamak se heurte actuellement à quatre grands problèmes qui constituent de solides verrous physiques et technologiques. Ces quatre questions-clés, scientifiques et techniques : • la compréhension et le contrôle de l'interaction plasma-paroi, • la compréhension et le contrôle de la turbulence, • la génération et le contrôle du courant en régime continu, • la maîtrise de la dynamique des populations suprathériques en régime thermonucléaire, conditionnent la mise au point d'un réacteur techniquement fiable et économiquement

viable. En effet, dans un réacteur Tokamak en régime de combustion continue : • l'injection/extraction de puissance à la périphérie du plasma doit s'effectuer en respectant de sévères contraintes technologiques de tenue des matériaux aux flux intenses de rayonnements et particules, • la turbulence et le transport doivent être diagnostiqués et contrôlés en temps réel et maintenus à un niveau compatible avec l'entretien de la combustion thermonucléaire, • quelques dizaines de millions d'ampères doivent être entretenus en régime continu afin d'assurer le confinement orbital et l'accès à des profils de courants optimaux, • la population de particules alpha d'origine thermonucléaire et les ions suprathermiques doivent être confinés, diagnostiqués et contrôlés afin d'assurer une combustion et un pilotage efficace.



La conception d'un réacteur thermonucléaire, techniquement fiable et économiquement viable, passe donc par l'étude approfondie des processus d'interaction plasma-paroi et des mécanismes de turbulence, ainsi que par l'identification de nouveaux procédés de diagnostic et de contrôle de la turbulence, du courant et des populations suprathermiques à l'origine de la réactivité thermonucléaire, c'est l'achèvement de ce vaste programme de physique, fondamentale et appliquée, qui constitue l'objectif des différentes grandes machines et du projet ITER.

La propulsion des engins spatiaux est un autre secteur des hautes technologies où le potentiel des technologies plasma permet d'envisager la mise au point de systèmes originaux, présentant des performances supérieures aux systèmes existant. Les moteurs de fusées et les propulseurs pour le positionnement des satellites sont caractérisés par deux paramètres : • la vitesse d'éjection des gaz ou des plasmas propulsifs, • la poussée qui mesure la force développée par l'action propulsive des gaz ou des plasmas.

Ces deux paramètres sont également important : • pour quitter l'attraction de la terre une fusée doit développer une forte poussée, supérieure à son poids, et la vitesse d'éjection n'est pas critique, • par contre, dans l'espace, loin de la terre, pour des missions d'exploration lointaines, la vitesse d'éjection doit être élevée pour minimiser la durée de la mission ; en effet, la loi de Tsiolkovski énonce que la vitesse finale d'une fusée est proportionnelle à la vitesse d'éjection des gaz ; la vitesse d'éjection contrôle donc la durée de la mission.

Les systèmes classiques chimiques, voire nucléaires ou électriques, où l'enthalpie est fournie à un gaz par des réactions nucléaires ou un chauffage électrique, développent de fortes poussées, mais, les performances, en terme de vitesse d'éjection, sont limitées par la vitesse du son, le tableau :

Système	Vitesse d'éjection [km/s]	Poussée [N]
Chimique solide	2 – 3	$10^7$
Chimique liquide	3 – 5	$10^7$
Nucléaire fission	5 – 9	$10^6$
Electrique thermique	1 – 10	$10^1$

présente les paramètres typiques de poussées et de vitesses d'éjection de ces systèmes classiques.

Depuis plus de trente ans les physiciens des plasmas ont développé un certain nombre de propulseurs basés sur l'accélération des plasmas ; plusieurs types de force peuvent être utilisés : • la force de Coulomb dans les propulseurs électrostatique et les SPT (Stationary Plasma Thruster), • la force de Laplace dans les propulseurs magnétoplasmodynamique (MPD), • la force diamagnétique d'une tuyère magnétique et le chauffage cyclotronique ionique (ICRH, ion cyclotron résonance heating) dans le système VASIMIR (Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket) proposé par la NASA pour une mission habitée vers Mars. Le tableau :

Propulseur	Vitesse d'éjection [km/s]	Poussée [mN]	Rendement [%]
Electrostatique	20 – 50	$10^2$	75
SPT	10 – 20	$10^3$	50
MPD	20 – 50	$10^4$	30
ICRH-VASIMIR	30 – 100	$10^5$	50

montre clairement que les performances de vitesse d'éjection sont un à deux ordres de grandeur supérieures à celles des propulseurs chimiques classiques, le rendement des propulseurs plasma est presque deux fois supérieur à celui de ces propulseurs chimiques, par contre, les développements actuels ont été limités aux applications nécessitant de faibles poussées.

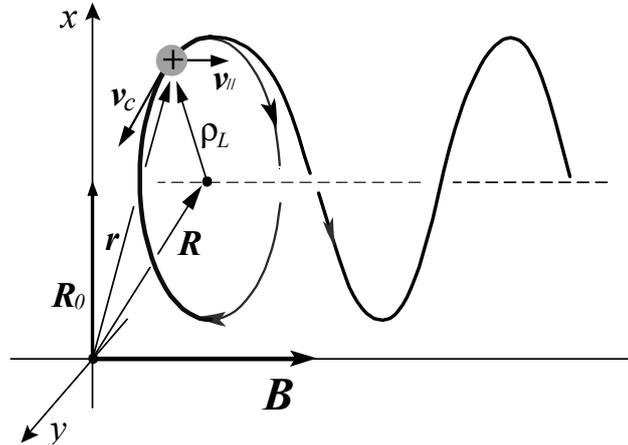
L'objectif de ce chapitre d'introduction est de donner un aperçu de l'importance et de l'impact de la physique des plasmas; le niveau de développement actuel des technologies plasma ne permet pas d'embrasser l'ensemble des applications en quelques pages, le choix, nécessairement arbitraire, qui a été fait de présenter succinctement les réacteurs, les Tokamaks et les propulseurs ne doit pas occulter l'importance et l'impact des autres dispositifs à plasma; par exemple, les détecteurs de particules, que ce soit les compteurs Geiger, les chambres à fils ou les chambres à étincelles, sont construits sur le principe de l'amplification électronique dans des décharges plasma en régime non autonome.

# Chapitre 3

## Introduction to plasma dynamics

### 3.1 Cyclotron rotation

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et statique est composé (i) d'une translation uniforme le long des lignes de champ et (ii) d'une rotation uniforme autour des lignes de champ. Cette rotation, appelée **rotation de Larmor** ou **rotation cyclotron**, est caractérisée par la **pulsation cyclotron**  $\omega_c$ . Pour établir ce résultat considérons une particule, de masse  $m$  et de charge  $q$ , plongée dans un champ magnétique statique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b}$  est un vecteur unitaire  $\mathbf{b}^2 = 1$ .



L'écriture de l'équation du mouvement de la particule se réduit à la prise en compte de la force de Laplace :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rightarrow \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B} \ \& \ \frac{dv_\parallel}{dt} = 0$$

où le vecteur vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}$  a été décomposé en une composante parallèle au champ magnétique,  $\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}$ , plus une composante perpendiculaire au champ magnétique,  $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{b} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b})$ . Le mouvement le long des lignes de champ est une translation uniforme. L'intégration par rapport au temps de l'équation du mouvement conduit à :

$$m \frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0)}{dt} = q(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{B} + mv_\parallel \mathbf{b}$$

où  $\mathbf{R}_0$  est un vecteur constant. Afin d'étudier l'orbite décrite par cette particule dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, introduisons la variable complexe  $Z(t) = x + jy$  où  $x$  et  $y$  constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$  :

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_0 = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + v_\parallel t \mathbf{b}$$

système de coordonnées associé à la base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{b}]$ . Définissons la pulsation cyclotron  $\omega_c$  par la relation (3.1).

$$\text{Pulsation cyclotron : } \omega_c = qB/m \tag{3.1}$$

Cyclotron électronique	$\omega_{ce} = \frac{ q_e B}{m_e}$	$28 \text{ [GHz]} \times B \text{ [T]}$
Cyclotron ionique	$\omega_{ci} = \frac{ q_i B}{m_i}$	$15 \text{ [MHz]} \times B \text{ [T]} \cdot A^{-1}$

La variable  $Z = x + jy$  vérifie alors l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\frac{dZ}{dt} + j\omega_c Z = 0$$

dont la solution décrit un mouvement de rotation uniforme  $Z = Z_0 \exp(-j\omega_c t)$ . Le vecteur position  $\mathbf{r}(t)$  a donc été décomposé en la somme de la position du centre de rotation,

- le **centre guide**  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + v_{\parallel} t \mathbf{b}$ , et du rayon tournant de l'orbite cyclotronique qui définit :

- le **rayon de Larmor**  $\rho_L(t) = \rho_L [\cos(\omega_c t) \mathbf{e}_x - \sin(\omega_c t) \mathbf{e}_y]$  et

- la **vitesse cyclotronique**  $\mathbf{v}_c(t) = -v_c [\sin(\omega_c t) \mathbf{e}_x + v_c \cos(\omega_c t) \mathbf{e}_y] = \omega_c \rho_L(t) \times \mathbf{b}$  où  $v_c = \rho_L \omega_c$ .

L'orbite de Larmor  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 + \rho_L [\cos(\omega_c t) \mathbf{e}_x - \sin(\omega_c t) \mathbf{e}_y] + v_{\parallel} t \mathbf{b}$  est donc une hélice et l'hodographe de Larmor  $\mathbf{v} = -v_c [\sin(\omega_c t) \mathbf{e}_x + v_c \cos(\omega_c t) \mathbf{e}_y] + v_{\parallel} \mathbf{b}$  est un cercle.

Position :  $\mathbf{r}(t) = \underset{\text{centre guide initial}}{\mathbf{R}_0} + \underset{\text{rotation cyclotron}}{\rho_L(t)} + \underset{\text{translation du centre guide}}{v_{\parallel} t \mathbf{b}}$

Vitesse :  $\mathbf{v}(t) = \underset{\text{rotation cyclotron}}{\mathbf{v}_c(t)} + \underset{\text{translation du centre guide}}{v_{\parallel} \mathbf{b}}$

Centre guide :  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + v_{\parallel} t \mathbf{b}$

Rayon de Larmor :  $\rho_L \equiv \left| \frac{v_c}{\omega_c} \right| \rightarrow \rho_L(t) = \rho_L \cos(\omega_c t) \mathbf{e}_x - \rho_L \sin(\omega_c t) \mathbf{e}_y$

Notons que  $\rho_L$  définit le rayon de Larmor pour une vitesse cyclotronique donnée et il est courant de nommer *rayon de Larmor* sa valeur pour une vitesse égale à la vitesse thermique.

$$\rho_{Le} [\text{cm}] = 2,75 \frac{\sqrt{\frac{m_e}{2} v_c^2 [\text{eV}]}}{B [\text{G}]}, \quad \rho_{Li} [\text{m}] = 1,18 \frac{\sqrt{\frac{m_i}{2} v_c^2 [\text{eV}]}}{B [\text{G}]}$$

Il est d'usage, et cet usage est particulièrement pertinent pour analyser et résoudre de nombreux problèmes en physique des plasmas, d'introduire le **moment magnétique orbital d'une particule**  $\boldsymbol{\mu} = -\mu \mathbf{b}$ .

### 3.2 Magnetic moment

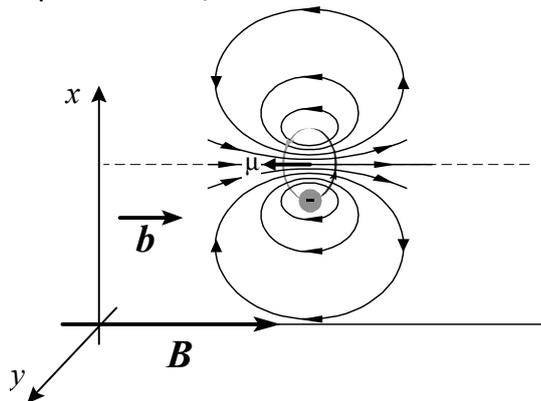
La définition usuelle du moment magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  d'une boucle de courant fermée  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  est aisément adaptable au cas de l'orbite cyclotronique d'une charge  $q$ .

Moment magnétique :  $\boldsymbol{\mu} \equiv \oint \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})}{2} d^3 \mathbf{r} \rightarrow \boldsymbol{\mu}[\rho_L(t), \mathbf{v}_c(t), \mathbf{B}] = q \frac{\rho_L(t) \times \mathbf{v}_c(t)}{2} = -\frac{|q| \rho_L v_c}{2} \mathbf{b}$

où  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ .

$\mathbf{j}$  : densité volumique de courant : A/m<sup>2</sup>

où  $\rho_L$  = rayon de Larmor



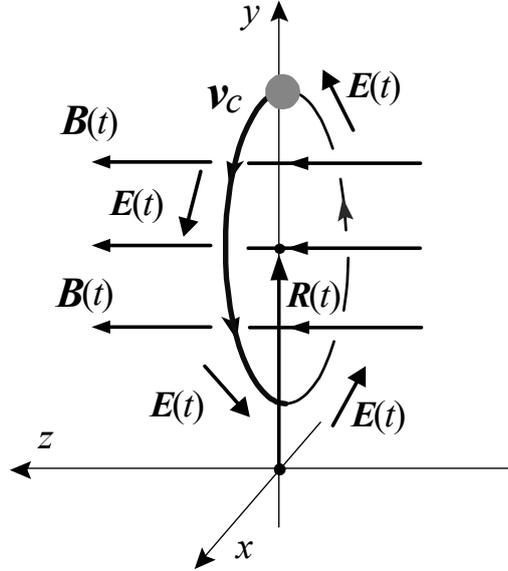
Le moment magnétique est donc le rapport du contenu énergétique cyclotronique  $mv_c^2/2$  divisé par la valeur du champ  $B$ .

Moment magnétique cyclotronique :  $\boldsymbol{\mu} \equiv -\frac{|q| \rho_L v_c}{2} \mathbf{b} \rightarrow \mu \equiv \frac{|q| \rho_L v_c}{2} = \frac{mv_c^2}{2B}$

Ce concept est particulièrement important pour l'étude des plasmas magnétisés : le moment magnétique d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique permet d'analyser le comportement des plasmas dans le cadre d'une description fluide ainsi que dans le cadre d'une analyse du mouvement des particules.

Nous allons démontrer que le moment magnétique  $\mu[\rho_L(t), \mathbf{v}_c(t), \mathbf{B}]$  est un **invariant adiabatique**, c'est-à-dire, lorsque  $\mathbf{B}$  n'est plus constant,  $\mu[\rho_L(t), \mathbf{v}_c(t), \mathbf{B}(t)]$  est une combinaison des variables  $v_c(t)$ ,  $\rho_L(t)$ , et de  $B(t)$  dont les variations temporelles se compensent et la variation de  $\mu$  est exponentiellement faible au regard de l'identification d'un petit paramètre dit paramètre d'adiabaticité. Cette analyse est aisément étendue au cas d'un champs inhomogène  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  à travers un changement de repère vers le repère ou le mouvement de translation le long des lignes de champ  $v_{\parallel}$  s'annule.

Pour un champ magnétique homogène dans l'espace et variable dans le temps  $\mathbf{B}(t)$  la prise en compte du champ électrique d'induction  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , résultant de la variation temporelle  $\mathbf{B}(t)$ , s'avère nécessaire pour étudier la dynamique d'une particule chargée. Ce champ d'induction est la source d'une variation du mouvement cyclotronique et cette variation de  $v_c$  compense la variation de champ magnétique  $B$  pour assurer l'invariance de la combinaison algébrique  $\mu = mv_c^2(t)/2B(t)$ .



Soit donc un **champ magnétique homogène instationnaire**  $\mathbf{B}(t) = B(t) \mathbf{e}_z$ ; la solution de l'équation de Maxwell-Faraday permet d'exprimer le champ d'induction  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  en chaque point  $\mathbf{r}$  à chaque instant  $t$ :

$$\text{Maxwell-Faraday: } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \leftrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

L'équation du mouvement d'une particule, prenant en compte la force de Coulomb électrique et la force de Laplace magnétique, est donc donnée par:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} + \frac{q}{2m} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position de la particule. Considérons un système orthonormé direct cartésien  $(x, y, z)$  tel que l'axe des  $z$  soit orienté suivant la direction du champ magnétique  $\mathbf{B}(t)$ . Afin de simplifier la discussion nous considérerons  $dz/dt = 0$ ; la projection de l'équation du mouvement conduit aux relations:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega_c(t) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\omega_c}{dt} y, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_c(t) \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\omega_c}{dt} x.$$

où  $\omega_c(t) = qB(t)/m$ . Introduisons le changement de variable complexe  $Z = x + jy$  et définissons  $\Omega(t) = \omega_c(t)/2$ :

$$(x, y) \rightarrow Z(t) = [x(t) + jy(t)] \exp j \int_0^t \omega_c(u) du / 2$$

La variable complexe  $Z(t)$  ainsi définie permet de réécrire l'équation du mouvement sous la forme canonique:

$$\Omega(t) = \frac{\omega_c(t)}{2} \rightarrow \frac{d^2 Z}{dt^2} + \Omega^2(t) Z = 0 \quad (3.2)$$

Recherchons les solutions de l'équation en  $Z(t)$  sous la forme d'une phase complexe  $\gamma(t)$  définie par  $Z(t) = Z_0 \exp \int_0^t \gamma(u) du$ , où  $Z_0$  et  $\gamma(0) Z_0$  sont déterminés par  $Z(t=0)$  et  $Z'(t=0)$ . La fonction complexe inconnue  $\gamma(t)$  est solution d'une **équation de Riccati**,

$$\frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2 + \Omega^2 = 0, \quad (3.3)$$

dont la condition initiale  $\gamma(0)$  est égale au rapport  $Z'(0)/Z(0)$ . Introduisons le **paramètre d'adiabaticité**  $\varepsilon$  supposé petit :  $\varepsilon = |\Omega'|/\Omega^2 \ll 1$  où le prime ' dénote la dérivée temporelle  $d/dt$ . Effectuons un développement de  $\gamma$  suivant  $\varepsilon$ ,  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + O[\varepsilon^4]$ . Lorsque cette série perturbative est substituée dans l'équation de Riccati, on notera que  $d/dt \sim O[\varepsilon]$ , la hiérarchie des approximations s'établit suivant les relations récursives :

$$\begin{aligned}
 O[\varepsilon^0] & : \quad \gamma_0^2 + \Omega^2 = 0, \quad O[\varepsilon^1] : \quad \frac{d\gamma_0}{dt} + 2\gamma_1\gamma_0 = 0, \\
 O[\varepsilon^2] & : \quad \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_1^2 + 2\gamma_0\gamma_2 = 0, \quad O[\varepsilon^3] : \quad \frac{d\gamma_2}{dt} + 2\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_0\gamma_3 = 0..
 \end{aligned}$$

Ces relations sont aisément intégrables.

$$\begin{aligned}
 O[\varepsilon^0] & : \quad \gamma_0 = \pm j\Omega, \\
 O[\varepsilon^1] & : \quad \gamma_1 = -\frac{\Omega'}{2\Omega}, \\
 O[\varepsilon^2] & : \quad \gamma_2 = \mp j\frac{\Omega''}{4\Omega^2} \pm j\frac{3\Omega'^2}{8\Omega^3}, \dots
 \end{aligned}$$

Ainsi, la structure de ce développement perturbatif est telle que les termes impairs en  $\varepsilon$  sont réels et les termes pairs sont imaginaires. Définissons donc  $\alpha$  et  $\beta$  à travers la séparation réel/imaginaire :  $\gamma = \alpha + j\beta = (\gamma_1 + \gamma_3 + \dots) + (\gamma_0 + \gamma_2 + \dots)$ . Une relation intéressante entre  $\alpha$  et  $\beta$  peut être établie en reconsidérant l'équation de Riccati (3.3).

$$\frac{d\alpha}{dt} + j\frac{d\beta}{dt} + (\alpha + j\beta)^2 + \Omega^2 = 0 \rightarrow \int_{t_0}^t \alpha(u) du = \ln \sqrt{\frac{|\beta(t_0)|}{|\beta(t)|}}. \quad (3.4)$$

La deuxième relation est associée à l'intégration de la partie imaginaire de l'équation (3.3). Le relation (3.4) entre  $\alpha$  et  $\beta$  est indépendante de l'ordre de développement et permet l'expression de la solution  $Z(t)$  pour tout ordre, par exemple à l'ordre  $O[\varepsilon^4]$  près nous obtenons deux solutions indépendantes de l'équation (3.2)  $Z_{\pm}(t)$ .

$$\frac{Z_{\pm}(t)}{Z_{\pm}(0)} = \frac{\sqrt{\left|\Omega + \frac{3\Omega'^2}{8\Omega^3} - \frac{\Omega''}{4\Omega^2}\right|_0}}{\sqrt{\left|\Omega + \frac{3\Omega'^2}{8\Omega^3} - \frac{\Omega''}{4\Omega^2}\right|_t}} \exp \pm j \int_0^t \left( \Omega + \frac{3\Omega'^2}{8\Omega^3} - \frac{\Omega''}{4\Omega^2} \right) du$$

À l'ordre le plus bas la position de la particule est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
 x(t) + jy(t) & = \sqrt{\frac{|\omega_c(0)|}{|\omega_c(t)|}} \left[ R_0 + \rho_0 \exp -j \int_0^t \omega_c(u) du \right] \\
 & = \underbrace{R(t)}_{\text{Centre guide}} + \underbrace{\rho(t) \exp -j \int_0^t \omega_c(u) du}_{\text{Rotation cyclotron}}
 \end{aligned}$$

où nous avons choisi  $x = \rho_0 + R_0$  et  $y = 0$  comme position initiale de la particule sans altérer la généralité du résultat.

- Le terme  $R(t)$  décrit l'impact de la variation du champ magnétique sur le centre guide dont le mouvement adiabatique est radial.
- La rotation cyclotronique modulée en amplitude et vitesse angulaire est décrite par le rayon de Larmor instantané  $\rho(t)$ .

Nous en déduisons que :

- le produit de  $|\omega_c(t)|$  par le carré du rayon du centre guide instantané  $R(t)^2 |\omega_c(t)|$  est indépendant du temps à cet ordre, et
- le produit de  $|\omega_c(t)|$  par le carré du rayon de Larmor instantané  $\rho(t)^2 |\omega_c(t)|$  est indépendant du temps à cet ordre.

On notera que ces deux invariants adiabatiques  $R(t)^2 B(t)$  et  $\rho(t)^2 B(t)$  mesurent les flux magnétique invariants, le théorème d'Alfvén confirmera la robustesse des flux magnétiques en régime adiabatique.

$$\begin{array}{l}
 \hline \hline
 \text{Invariance adiabatique du "flux de centre guide"} \quad \Phi = \pi R(t)^2 B(t) \rightarrow d\Phi/dt = 0 \\
 \text{Invariance adiabatique du "flux de Larmor"} \quad \phi = \pi \rho(t)^2 B(t) \rightarrow d\phi/dt = 0 \\
 \hline \hline
 \end{array}$$

Le produit  $\rho(t)^2 \omega_c(t)$  n'est autre que le moment magnétique  $\mu$  de la particule à un facteur  $q/2$  près. Ainsi, sous l'hypothèse de variations adiabatiques  $\varepsilon = |\Omega'|/\Omega^2 \ll 1$ , la solution de l'équation du mouvement peut donc être décrite en termes d'**invariance adiabatique du moment magnétique** :

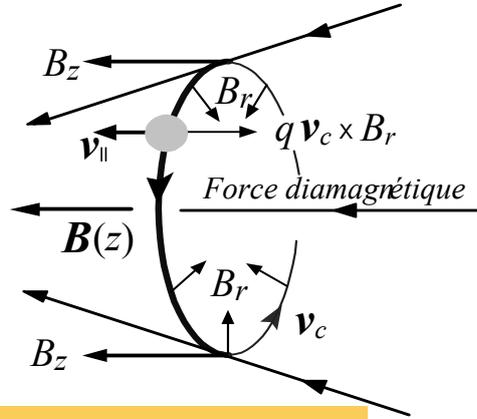
$$\text{Invariance adiabatique : } \boxed{d\mu[\rho_L(t), \mathbf{v}_c(t), \mathbf{B}(t)]/dt = 0} \quad (3.5)$$

$\mu$  est une constante du mouvement dont l'invariance est garantie par un *ordering* des temps caractéristiques de la dynamique, en l'occurrence ici  $d \ln \omega_c / dt \ll \omega_c$ .

Une analyse plus rigoureuse permettrait de démontrer que l'erreur commise en considérant  $d\mu/dt = 0$  n'est pas en  $\varepsilon^3$  mais en  $\exp -K/\varepsilon$  ce qui explique la robustesse de l'approximation adiabatique lorsqu'elle est comparée aux simulations numériques. Physiquement, la variation temporelle du champ magnétique est compensée par un ajustement du mouvement cyclotronique, à travers une accélération, ou une décélération, produite par le champ électrique d'induction  $\mathbf{E}$  telle que  $\mu$  reste à peu près constant.

### 3.3 Diamagnetic force

Considérons un champ magnétique inhomogène mais indépendant du temps  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  présentant des lignes de champ convergentes. Ce champ est la somme du champ axial  $B_z \mathbf{u}_z$  dominant et du champ radial  $B_r \ll B_z$  perturbateur représentés sur la figure ci-dessous. À l'ordre zéro une particule effectue un mouvement de rotation cyclotronique  $\mathbf{v}_c(B_z, t)$  autour de la direction de  $B_z$ ; ce faisant cette particule intercepte le champ  $B_r$  et la force de Laplace, engendrée par  $B_r$ :  $q v_c(B_z, t) B_r$ , est dirigée suivant  $B_z$  et garde un signe constant sur une rotation cyclotron, c'est la **force diamagnétique**  $-\mu \cdot \nabla B$ . Pour démontrer ce résultat, considérons à nouveau le problème de l'invariance adiabatique du moment magnétique  $\mu$ , mais dans un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  inhomogène et stationnaire.



La conservation de l'énergie cinétique,  $m(v_{\parallel}^2 + v_c^2)/2$ , conjuguée avec la conservation du moment magnétique,  $\mu = m v_c^2(t) / 2B(\mathbf{r}(t))$ , permettent d'établir les relations :

$$\begin{aligned} \text{Invariance de l'énergie} & : \frac{dv_c^2}{dt} = -\frac{dv_{\parallel}^2}{dt} = -2v_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} \\ \text{Invariance adiabatique} & : \frac{d(v_c^2/B)}{dt} = \frac{1}{B} \frac{dv_c^2}{dt} - \frac{v_c^2}{B^2} \frac{dB}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Or la variation temporelle du champ  $\mathbf{B}(\mathbf{r}(t))$  perçu dans le repère au repos (où  $v_{\parallel} = 0$ ) de la particule qui suit les lignes de champs, est donnée par la relation,

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt} = v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s}$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ et  $v_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) / B = ds/dt$  la vitesse le long des lignes de champ; ainsi :

$$-2v_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{v_c^2}{B} v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s}$$

Cette relation entre accélération le long des lignes de champ et variation de l'amplitude du champ peut s'interpréter comme une force séculaire, la force diamagnétique.

$$\text{Force séculaire diamagnétique} : m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) B = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (3.6)$$

Les particules chargées, quel que soit leur signe, sont attirées par les zone de champ faible et repoussées par les zone de champ fort. Notons que le signe la force diamagnétique est indépendant du signe de la charge. Si nous considérons, non pas une particule unique, mais une population de particules chargées de densité  $n$ , le plasma ainsi constitué subit une densité volumique de force "mugradB" :  $\mathcal{F}_d$ .

$$\mathcal{F}_d = -n \frac{q^2 \rho_L^2}{2m} \mathbf{B} \cdot \nabla B = -\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 \rho_L^2}{c^2} \mathbf{b} \cdot \nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

### 3.4 Electric drift

Il est important d'analyser les orbites dans des configurations dites de champs croisés, composées d'un champ électrique basse fréquence,  $\mathbf{E}(t)$  et d'un champ magnétique homogène et stationnaire  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ .  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$  est une base cartésienne orthonormée directe et  $x$  et  $y$  constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire au champ  $\mathbf{B}$ . L'équation du mouvement d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  est donnée par :

$$\text{Newton/Coulomb/Laplace : } \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E}(t) + \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

La vitesse  $\mathbf{v}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  sont ensuite décomposés en la somme de deux composantes parallèle et perpendiculaire au champ magnétique. La projection de l'équation suivant  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z$ , conduit donc à la quadrature :

$$\mathbf{v}_{\parallel}(t) - \mathbf{v}_{\parallel}(t_0) = \frac{q}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{E}_{\parallel}(u) du$$

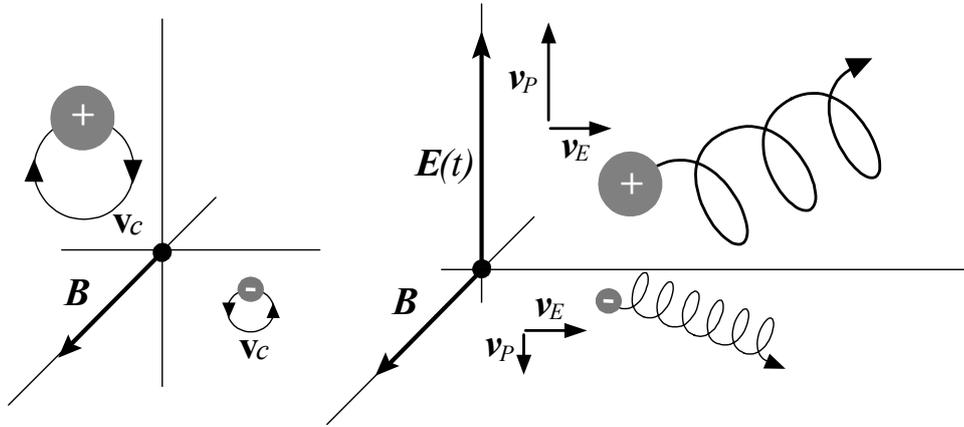
décrivant une translation variée. Dans le plan  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y]$  définissons les variables complexes  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F}$  :  $v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y \rightarrow \mathcal{V} \equiv v_x + jv_y$  et  $E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y \rightarrow m\mathcal{F} \equiv qE_x + jqE_y$  ; ce changement de variables conduit à l'équation différentielle ordinaire linéaire avec second membre :

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E}_{\perp} + \frac{q}{m}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} \rightarrow \frac{d\mathcal{V}(t)}{dt} = \mathcal{F}(t) - j\omega_c\mathcal{V}(t)$$

La solution générale d'une équation différentielle ordinaire linéaire avec second membre est la somme d'une solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(t_0) \exp[-j\omega_c(t - t_0)] + \int_{t_0}^t \exp[-j\omega_c(t - s)] \mathcal{F}(s) ds$$

Nous reconnaissons dans le membre de droite le mouvement cyclotronique,  $\mathcal{V}(t_0) \exp[-j\omega_c(t - t_0)]$ , non perturbé par le champ électrique  $\mathcal{F}(t)$  et l'effet du champ électrique,  $\int_{t_0}^t \exp[-j\omega_c(t - s)] \mathcal{F}(s) ds$ .



Considérons un champ électrique adiabatique, c'est-à-dire variant peu sur une échelle de temps de l'ordre de la période cyclotron :  $d^n \mathcal{F}/dt^n \ll \omega_c^n \mathcal{F}$ .

L'intégrale peut alors être sommée par parties pour faire apparaître un développement en  $d^n \mathcal{F}/dt^n \mathcal{F} \omega_c^n$  qui constitue un petit paramètre pertinent pour un développement perturbatif, sachant que les conditions initiales sont données par  $\mathcal{F}(t = -\infty) = 0$  et  $d^n \mathcal{F}(t = -\infty)/dt^n = 0$ . Cette hypothèse d'adiabaticité  $d^n \mathcal{F}/dt^n \ll \omega_c^n \mathcal{F}$  conduit donc à l'expression approchée de l'intégrale d'interaction électrique dans un champ magnétique statique homogène :

$$\int_{-\infty}^t \exp[-j\omega_c(t - s)] \mathcal{F}(s) ds = \int_{-\infty}^t \frac{\mathcal{F}(s)}{j\omega_c} \frac{d}{ds} \exp[-j\omega_c(t - s)] ds \approx \underbrace{\frac{\mathcal{F}(t)}{j\omega_c}}_{\mathbf{v}_E} + \underbrace{\frac{1}{\omega_c^2} \frac{d\mathcal{F}(t)}{dt}}_{\mathbf{v}_P} + O\left[\frac{d^2 \mathcal{F}(t)}{\omega_c^3 dt^2}\right]$$

Ainsi avons nous identifié : (i) la dérive électrique de champs croisés  $\mathbf{v}_E$  et la dérive de polarisation  $\mathbf{v}_P$  ; électrons et ions présentent une dérive  $\mathbf{v}_E$  identique, par contre pour la vitesse  $\mathbf{v}_P$  des espèces de charges différentes développent des vitesses différentes induisant une polarisation du plasma de nature diélectrique.

$$\mathbf{v}_E \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad \mathbf{v}_P \equiv \frac{1}{B\omega_c} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_c(t) + \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_P + \dots$$

Ces deux dérivées électriques, champs croisés,  $\mathbf{v}_E$ , et polarisation,  $\mathbf{v}_P$  :

<i>Dérive de Champs croisés</i>	$\mathbf{v}_E = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{B^2}$
<i>Dérive de Polarisation</i>	$\mathbf{v}_P = \frac{1}{B\omega_c} \frac{d\mathbf{E}}{dt}$

se superposent au mouvement cyclotronique,  $\mathbf{v}_c$  et les orbites sont des cycloïdes hélicoïdales étirées par la dérive de polarisation et par la vitesse parallèle.

Au paragraphe précédent nous avons identifié deux invariants adiabatiques associés au mouvement dans un champs magnétique variable du type :

$$\mathbf{B} = B(t) \mathbf{e}_z \xrightarrow{\text{Induction}} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

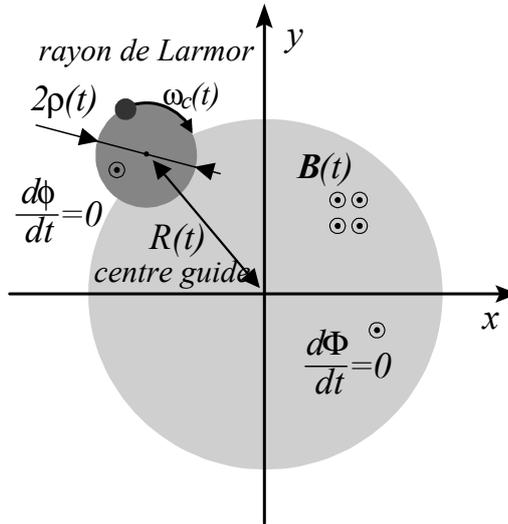
Le principal étant le moment magnétique  $\mu$ . Mais ces deux invariants pouvaient aussi être aussi vus comme des flux magnétiques,  $\phi$  et  $\Phi$ , représentés sur la figure ci-dessous;  $\phi$  est associé au rayon de Larmor  $\rho$  et  $\Phi$  à la position du centre guide  $R$ .

$$x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} \rightarrow \left[ \phi = \pi\rho(t)^2 B(t), \Phi = \pi R(t)^2 B(t) \right]$$

Considérons l'invariance adiabatique  $d\Phi/dt = 0$  et déduisons en la vitesse radiale du centre guide  $dR/dt$ .

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} [R^2(t) B(t)] = 0 \rightarrow \frac{dR}{dt} = -\frac{R}{2B} \frac{dB}{dt}$$

Cette vitesse n'est autre que la vitesse de dérive électrique  $\mathbf{v}_E$  associée au champ électrique d'induction  $\mathbf{E}$ .



En effet, l'application du résultat relatif à  $\mathbf{v}_E$  conduit à considérer :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \rightarrow \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_z)}{2B} \frac{dB}{dt} \rightarrow \left\langle \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right\rangle = -\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \mathbf{R}$$

où le résultat finale est obtenu si non prenons la moyenne,  $\langle \mathbf{r} \rangle = \langle \boldsymbol{\rho} + \mathbf{R} \rangle = \mathbf{R}$ , sur l'échelle de temps rapide  $2\pi/\omega_c$  conformément aux prescriptions de l'hypothèse d'adiabaticité qui valide les développements sur le moment magnétique et de la théorie des dérivées électriques.

### 3.5 Alfven theorem

La robustesse des flux magnétiques est illustrée à l'échelle fluide par le théorème d'Alfven. Lorsqu'un plasma conducteur est en mouvement le couplage champ-matière, à travers les courants d'induction et la force de Laplace, autorise un entraînement du champ par le fluide et du fluide par le champ. Pour étudier ce phénomène considérons un écoulement de vitesse  $\mathbf{V}$  où la loi d'Ohm non relativiste est modifiée pour prendre en compte le fait qu'elle s'applique dans le repère au repos du plasma où le champ électrique doit être complété par le terme électromoteur de Lorentz  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ .

$$\begin{aligned} \text{Equations de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{Equations de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \text{Loi d'Ohm non relativiste} & : \mathbf{J} = \eta (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

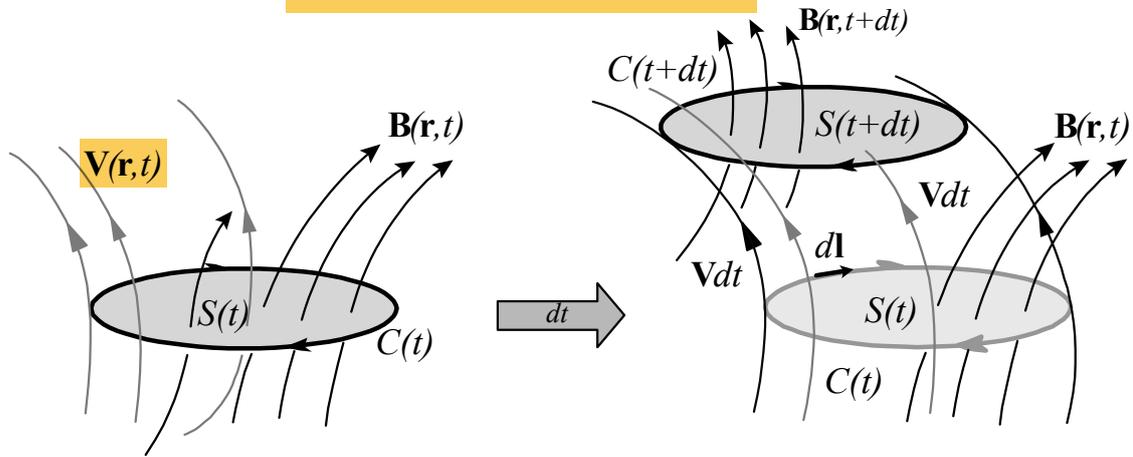
Éliminons le courant et le champ électrique entre ces trois équations pour obtenir l'équation dite de *convection-diffusion du champ magnétique*.

$$\text{Equation de convection-diffusion : } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - D_M \Delta \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = 0$$

où nous avons introduit le coefficient de diffusion magnétique  $D_M \equiv 1/\mu_0 \eta$ . Le transport du champ apparaît comme la combinaison d'un terme convectif  $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ , que nous allons analyser plus en détail à l'aide du théorème d'Alfvén, et du terme de diffusion magnétique  $D_M \Delta \mathbf{B}$  que nous étudierons plus tard.

Considérons la limite asymptotique d'un fluide excellent conducteur,  $\eta = +\infty \leftrightarrow D_M = 0$ ; sous cette hypothèse, à chaque instant, en chaque point :  $\eta = +\infty \leftrightarrow D_M = 0 \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , et le transport du champ par le fluide relève uniquement du terme de convection  $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ . En effet si la conductivité est infinie, le courant doit rester fini donc  $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , un autre point de vue consiste à supposer que dans un milieu où les porteurs de charge sont très mobiles ( $\eta = +\infty$ ) l'écrantage du champ électrique  $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}$  dans le repère au repos du milieu est instantané.

Sous l'hypothèse  $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , nous allons démontrer le **théorème d'Alfvén** : soit une courbe fermée  $C(t)$  attachée à un plasma magnétisé présentant un écoulement de vitesse  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , c'est-à-dire une courbe convectée et déformée par cet écoulement; considérons  $S(t)$  une surface orientée s'appuyant sur  $C(t)$ , alors le flux  $\Psi(t)$  du champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  à travers la surface  $S(t)$  reste constant.



Pour démontrer ce théorème étudions la variation  $d\Psi$  du flux  $\Psi$  durant un temps  $dt$ , temps durant lequel la courbe a été entraînée et s'est déformée;  $dt$  étant de nature infinitésimale la variation temporelle du champ magnétique peut être développée suivant  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + dt) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + dt \partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) / \partial t$ .

$$d\Psi = \iint_{S(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S(t+dt)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée étant nul, la somme des deux premiers termes du membre de droite est égale aux flux latéral à travers la surface balayée par  $C$  durant le temps infinitésimal  $dt$ .

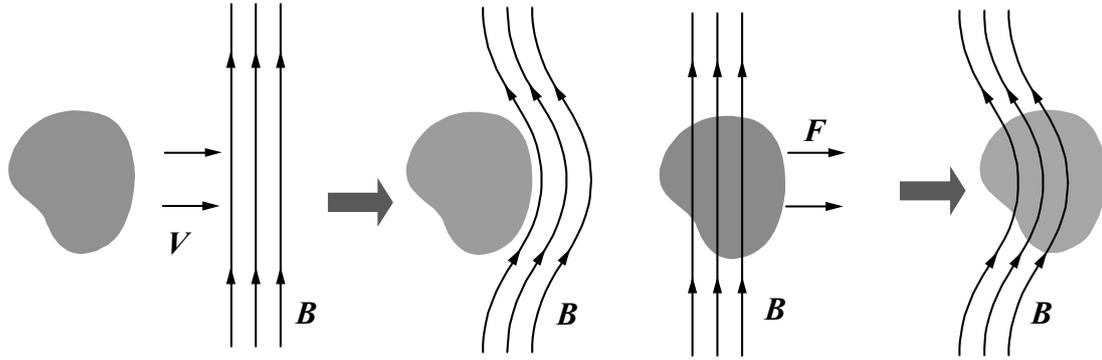
L'élément de surface de cette surface latérale balayée est égal à  $d\mathbf{S} = d\mathbf{l} \times \mathbf{V} dt$  où  $d\mathbf{l}$  est un élément infinitésimal le long de la courbe orientée  $C$ ;  $\mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{V}) = d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$  le flux latéral est donc égal à la circulation du vecteur  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$  le long de  $C$ . L'équation de Maxwell-Faraday :  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) / \partial t$  et le théorème de Stokes conduisent à la nullité de  $d\Psi / dt$  car l'hypothèse idéale implique  $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= - \oint_{C(t)} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{V}) + \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_{C(t)} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{V}) + \iint_{S(t)} \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \oint_{C(t)} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{V}) + \oint_{C(t)} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{aligned}$$

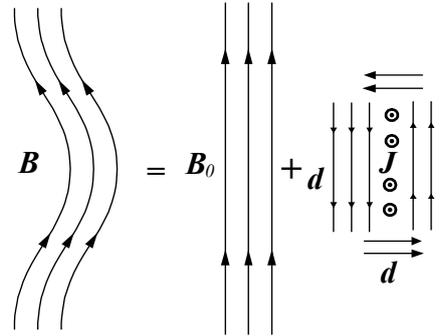
Cette propriété, vraie pour un circuit attaché au plasma  $C(t)$  quelconque, permet de dégager une image physique où le fluide et le champ sont attachés dans une évolution commune. Ce résultat constitue le *théorème d'Alfvén*.

$$\text{Théorème d'Alfvén : } \forall C(t_0), \forall t \rightarrow \Psi[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) \rightarrow C(t_0)] = \Psi[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rightarrow C(t)]$$

Un plasma initialement non magnétisé le restera au cours de son évolution et, en particulier, s'il rencontre un champ magnétique il le déformera afin de maintenir un champ nul en son intérieur. De même un plasma initialement magnétisé le restera et, s'il est entraîné par une force il entraînera avec lui le champ magnétique en le déformant. Les deux situations présentées sur ces figures en régime idéale peuvent être interprétées dans le cadre des théories des dérives et de la magnétisation.



Un champ déformé  $\mathbf{B}$  peut être décomposé en un champ homogène  $\mathbf{B}_0$  plus un champ de déformation  $\mathbf{d}$ .



Ce champ de déformation  $\mathbf{d}$  est généré par des courants  $\mathbf{J}$  qui ne sont autres que les courants résultant de la dérive  $\mathbf{F} \times \mathbf{B} / qB^2$  ou  $\mathbf{F}$  est la force qui est mise à profit pour extraire le plasma du champ dans le premier cas, ou pour pousser le plasma dans le deuxième cas ; ces courants étant supplémentés par les courants de magnétisation résultant de l'inhomogénéité du plasma.

### 3.6 Ponderomotive forces

Lorsque l'amplitude d'un champ oscillant est inhomogène, l'aller et le retour d'une oscillation ne se compensent pas exactement. La somme de ces petites différences, sur plusieurs oscillations, engendre une dérive qui est similaire à la dérive de gradient, c'est aussi un effet séculaire. En fait, cette non-compensation d'oscillations légèrement biaisées par l'inhomogénéité de l'amplitude du champ ne se traduit pas en termes de vitesse, mais en termes d'accélération. Le résultat final est une force : la force pondéromotrice. Deux cas doivent être distingués : le cas des oscillations électriques longitudinales quasi-électrostatiques et le cas des oscillations transverses.

Soit une particule chargée, de charge  $q$  et de masse  $m$ , interagissant avec une oscillation électrique longitudinale inhomogène  $E(x, t)$ .

$$E(x, t) = E \left[ 1 + \frac{x}{L} \right] \cos \omega t$$

L'équation de son mouvement est donnée par :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{qE}{m} \cos \omega t + \frac{qE}{mL} x(t) \cos \omega t$$

L'échelle de variation de l'amplitude du champ,  $L$ , est supposée grande devant l'amplitude des oscillations linéaires  $qE/m\omega^2$  :  $|qE/m\omega^2| \ll |L|$ . Cet ordering permet d'introduire le petit paramètre  $\varepsilon = qE/m\omega^2 L$ , et de chercher ensuite une solution de l'équation du mouvement sous la forme d'un développement perturbatif en  $\varepsilon$  :  $x(t) = x_0(t) + x_1(t) + O[\varepsilon^2] \dots$  Sur la base de ce petit paramètre  $\varepsilon$ , l'amplitude du champ peut aussi être développée et l'équation du mouvement devient alors une hiérarchie d'équations ordonnées par les puissances de  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \text{Ordre } O(0) & : \quad \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{qE}{m} \cos \omega t \\ \text{Ordre } O(1) & : \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{qE}{mL} x_0(t) \cos \omega t \end{aligned}$$

La solution à l'ordre zéro donne l'oscillation linéaire dans un champ d'amplitude constante, et l'équation à l'ordre un fait apparaître la superposition d'un terme constant et d'une oscillation à l'harmonique deux.

$$\begin{aligned} \text{Ordre } O(0) & : x_0(t) = -\frac{qE}{m\omega^2} \cos \omega t \\ \text{Ordre } O(1) & : \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{q^2 E^2}{m^2 \omega^2 L} \cos^2 \omega t = -\frac{q^2 E^2}{2m^2 \omega^2 L} [1 + \cos 2\omega t] \end{aligned}$$

Le terme constant du troisième membre de cette deuxième identité décrit une dérive uniformément accélérée de la particule. Cette dérive est induite par la force dite pondéromotrice (ou diélectrique) longitudinale  $\mathbf{F}_p$ .

$$\text{Force pondéromotrice: } \boxed{\mathbf{F}_p \equiv -\frac{q^2}{4m\omega^2} \nabla E^2}$$

Le cas d'un champ transverse est légèrement différent car l'existence de la force pondéromotrice est due, pour partie, au champ magnétique.

Soit une particule, de charge  $q$  et de masse  $m$ , interagissant avec une onde électromagnétique transverse inhomogène de champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  et de champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . L'échelle de variation des amplitudes,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , est supposée grande devant l'amplitude des oscillations linéaires et la longueur d'onde  $2\pi/k$ . L'équation du mouvement est donnée par :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + \frac{q}{m} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

Pour des ondes dont la vitesse de phase est de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière et des particules dont les vitesses sont non relativistes, le terme de Laplace est petit devant le terme de Coulomb. En première approximation le mouvement est donc une oscillation entretenue par le champ électrique.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \dots \rightarrow \mathbf{r}_0(t) = -\frac{q}{m\omega^2} \mathbf{E} \cos \omega t$$

Le terme suivant doit prendre en compte l'inhomogénéité du champ électrique et la force de Laplace magnétique.

$$\frac{m}{q} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{r}_0(t) \cdot \nabla \mathbf{E} \cos \omega t + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \times \mathbf{B} \cos \omega t \quad (3.7)$$

Compte tenu de l'identité  $(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \nabla \frac{E^2}{2} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , la moyenne sur la phase rapide  $\omega t$  de l'équation précédente permet d'obtenir un résultat similaire au cas précédent.

$$\left\langle \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} \right\rangle = -\frac{q^2}{4m^2 \omega^2} \nabla E^2$$

Ainsi l'expression de la force pondéromotrice d'un champ transverse est identique à celle d'un champ longitudinal ; la particule est poussée des zones de champ fort vers les zones de champ faible. La densité volumique de force pondéromotrice,  $\mathcal{F}_p$ , est égale à la force que multiplie la densité de particules  $n$ , faisant ainsi apparaître la densité électrostatique d'énergie  $\varepsilon_0 E^2/2$  et la fréquence plasma  $\omega_p$ .

$$\text{Densité volumique de forces: } \mathcal{F}_p = -\frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \nabla \left( \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right)$$

Cette force est importante en théorie des instabilités car elle permet un couplage non-linéaire entre les branches hautes fréquences et basses fréquences d'un spectre de modes propres à travers le phénomène de battement qui module les enveloppes des modes et génère ainsi une interaction pondéromotrice avec les particules.

Soit une onde électromagnétique dont les champs électrique et magnétique sont : (i) de nature périodique harmonique dans le temps  $t$ , de période  $2\pi/\omega$ , et (ii) inhomogènes dans l'espace  $\mathbf{r}$ .

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp j\omega t, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})}{-j\omega} \exp j\omega t$$

Considérons une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $e$ . L'équation de Newton décrivant son interaction avec les champs précédents est non-linéaire, pour la résoudre effectuons un développement de Taylor des amplitudes complexes des champs oscillants au voisinage d'un point de référence  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r} = \mathbf{0}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \dots$ ,  $\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) = j \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \dots$ . L'équation de Newton présente alors deux termes, (i) un premier identique aux équations du mouvement dans un champ oscillant spatialement homogène, et (ii) un deuxième décrivant des effets séculaires et des termes d'harmoniques supérieures, car croisant des termes oscillants.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{\frac{e}{m}\mathbf{E}\exp j\omega t + \omega_c\mathbf{v} \times \mathbf{b}}_{\text{oscillation rapide}} + \underbrace{\frac{e}{m}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{E}\exp j\omega t + \frac{e}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\exp j\omega t}_{\text{effets séculaires et harmoniques}}$$

$\mathbf{b}$  est un vecteur unitaire dans la direction du champs magnétique statique et  $\omega_c$  la fréquence cyclotron associée à ce champs magnétique statique. Ces deux termes peuvent être ordonnés suivant un ordering temporel, le premier décrit des oscillations rapides et le deuxième, prit en valeur moyenne sur la période du mouvement rapide ( $\langle \rangle$ ), représente une force séculaire *pondéromotrice*. Si nous considérons la solution linéaire associée au premier terme sous la forme  $\tilde{\mathbf{v}} \exp j\omega t$  pour la vitesse et sous la forme  $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{v}} (\exp j\omega t) / j\omega$  pour la position, nous obtenons la relation algébrique :

$$\text{Oscillation rapide : } j\omega\tilde{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \omega_c\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{b}$$

L'équation algébrique est résolue en considérant la solution de l'équation algébrique linéaire d'inconnue  $\mathbf{x}$  suivante :  $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{x} = [\mathbf{c} + \alpha\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \alpha^2\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})] / (1 + \alpha^2)$ , pour obtenir :

$$\text{Vitesse oscillante : } \tilde{\mathbf{v}} = j\frac{e}{m}\frac{\omega}{\omega_c^2 - \omega^2} \left[ \mathbf{E} + j\frac{\omega_c}{\omega}\mathbf{b} \times \mathbf{E} - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}\mathbf{b} \right]$$

La force pondéromotrice est constituée par la valeur moyenne du deuxième terme.

$$\text{Force séculaire : } \mathbf{F}_P \equiv \left\langle m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\rangle = \frac{e}{2} \text{Re} [\tilde{\mathbf{r}} \cdot \nabla \mathbf{E}^* + \tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}^*]$$

Cette expression peut être évaluée, soit par projection sur une base appropriée, soit en utilisant les identités :  $\text{Re} [\tilde{\mathbf{r}} \cdot \nabla \mathbf{E}^* + \tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}^*] = \text{Im} [\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{E}^* + \tilde{\mathbf{v}} \times \nabla \times \mathbf{E}^*] / \omega$  et  $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{E}^* + \tilde{\mathbf{v}} \times (\nabla \times \mathbf{E}^*) = \nabla (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{E}^*) / 2$ . La force pondéromotrice est donc de nature potentielle et il est d'usage d'introduire le potentiel pondéromoteur  $\Phi_P$  tel que  $\mathbf{F}_P = -\nabla \Phi_P$ .

$$\text{Potentiel pondéromoteur : } \Phi_P(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{4m\omega} \frac{\omega}{\omega_c^2 - \omega^2} \left[ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{b}) \right]$$

Dans le cadre d'une description fluide le concept de pression pondéromotrice  $P_P$  peut aussi être introduit.

$$\text{Pression pondéromotrice : } P_P(\mathbf{r}) = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{|\mathbf{E}_{\parallel}|^2}{2} \right)$$

La force pondéromotrice est particulièrement importante dans le domaine de l'interaction laser-plasma, dans le domaine des tokamaks elle a été proposée pour générer le courant toroïdal ou la rotation globale du plasma mais aucune expérience n'a, à l'heure actuelle, exploré son efficacité.

Le cadre d'analyse de la force pondéromotrice est de nature plus mécanique qu'électrodynamique, en effet les effets pondéromoteurs sont simplement la déclinaison, dans le domaine de l'électromagnétisme, des effets séculaires mécaniques associés au mouvement présentant deux échelles de temps, l'une rapide, l'autre lente.

Considérons le mouvement suivant  $x$  d'une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  au sein d'un champ électrique haute fréquence dérivant du potentiel  $\phi(x) \cos \omega t$ . Le lagrangien  $L$  de ce champ est donné par la différence entre énergie cinétique et énergie potentielle,

$$\text{Lagrangien capacitif : } L(x, v, t) = \frac{m}{2}v^2 - e\phi(x) \cos \omega t.$$

Effectuons le changement de variables  $(x, v) \rightarrow (X, V)$  où  $(X, V)$  sont des variables lentes et où les variables rapides sont prises égales aux amplitudes des oscillations forcées par  $\phi \cos \omega t$ ,

$$x \equiv X - \frac{e}{m\omega^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_X \cos \omega t, \quad v \equiv V + \frac{e}{m\omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_X \sin \omega t.$$

L'ordering  $v\partial\phi/\partial x \ll \omega\phi$  conduit à définir le petit paramètre  $\varepsilon \equiv v(\partial\phi/\partial x) / \omega\phi \ll 1$ . Effectuons un développement de Taylor au voisinage de  $X$  suivant  $\varepsilon$ ,

$$L = \frac{m}{2}v^2 - e\phi(X) \cos \omega t - e(x - X) \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_X \cos \omega t + O[\varepsilon^2],$$

et considérons le lagrangien moyenné  $\mathcal{L}$  sur le mouvement rapide à la pulsation  $\omega$ ,

$$\mathcal{L}(X, V) \equiv \langle L \rangle_\omega = \frac{m}{2} V^2 - \frac{e^2}{4m\omega^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2.$$

Ce résultat final permet d'identifier un potentiel moyen qui est le potentiel associé à la force pondéromotrice.

Considérons le lagrangien d'une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  au sein d'un champ électromagnétique décrit par le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cos \omega t$ ,

$$\text{Lagrangien inductif: } L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cos \omega t,$$

et effectuons le changement de variables  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{V})$  où  $(\mathbf{R}, \mathbf{V})$  sont les variables lentes et les variables rapides sont prises égales aux amplitudes des oscillations forcées par  $\mathbf{A} \cos \omega t$ ,

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{R} - \frac{e}{m\omega} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \sin \omega t, \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{V} - \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cos \omega t.$$

L'hypothèse traduite par l'ordering:  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} \ll \omega \mathbf{A}$  permet d'effectuer un développement de Taylor au voisinage de  $\mathbf{R}$ ,

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cos \omega t + e\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \mathbf{A}|_{\mathbf{R}} \cos \omega t,$$

et la méthode du lagrangien moyenné conduit à l'expression

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \equiv \langle L \rangle_\omega = \frac{m}{2} \mathbf{V}^2 + \frac{e^2}{4m} \mathbf{A}^2(\mathbf{R}) - \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2(\mathbf{R}) = \frac{m}{2} \mathbf{V}^2 - \frac{e^2}{4m} \mathbf{A}^2(\mathbf{R}).$$

Le résultat ainsi obtenu constitue une extension du cas précédent car un champ électrique  $\mathbf{E}$  se manifeste par des couplages inductif ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ ) et capacitif ( $e\phi$ ),

$$\left[ \frac{e^2}{4m\omega^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2, \frac{e^2}{4m} \mathbf{A}^2(\mathbf{R}) \right] \rightarrow \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 = \mathbf{E}^2, \quad \omega^2 \mathbf{A}^2 = \mathbf{E}^2,$$

les deux résultats précédents sont donc des cas particuliers du lagrangien pondéromoteur  $\mathcal{L} \equiv \langle L \rangle_\omega$  pour les couplages entre une particule chargée et des champs électromagnétiques haute fréquence présentant des amplitudes inhomogènes,

$$\text{Lagrangien pondéromoteur: } \mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) = \underbrace{\frac{m}{2} \mathbf{V}^2}_{\text{énergie cinétique lente}} - \underbrace{\frac{e^2}{4m\omega^2} \mathbf{E}^2(\mathbf{R})}_{\text{potentiel pondéromoteur}}.$$

On notera que le potentiel pondéromoteur est en fait l'énergie cinétique moyenne du mouvement rapide.

Densité volumique de force [N/m <sup>3</sup> ]	
Coulomb	$\rho \mathbf{E}$
Laplace	$\mathbf{J} \times \mathbf{B}$
Diamagnétique	$-\frac{1}{2} \frac{\rho_L^2 \omega_p^2}{c^2} \mathbf{b} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)$
Pondéromotrice	$-\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla \left( \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \right)$

### 3.7 Polarization, magnetization and conduction

Dans les problèmes d'ondes, il est courant de considérer le cas harmonique où vitesse  $\mathbf{v}$  et champ  $\mathbf{E}$  présentent une dépendance temporelle suivant  $\exp j\omega t$ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{E} + \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{v} + j \frac{\omega_c}{\omega} \mathbf{v} \times \mathbf{b} = -j \frac{q}{m\omega} \mathbf{E}$$

Cette équation algébrique linéaire peut être résolue en considérant la solution de l'équation d'inconnue  $\mathbf{x}$  suivante:

$$\mathbf{x} + \alpha \mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{c}}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha^2 \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}{1 + \alpha^2} = \left[ \frac{\mathbf{I} + \alpha \mathbf{b} \times + \alpha^2 \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}}{1 + \alpha^2} \right] \cdot \mathbf{c}$$

A basse fréquence,  $\omega/\omega_c \approx 0$ , lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$  et pour un champs électrique polarisé perpendiculairement au champ magnétique nous pouvons restreindre la solution aux deux premiers termes dominants :

$$\frac{\mathbf{I} + \alpha \mathbf{b} \times + \alpha^2 \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}}{1 + \alpha^2} \approx \frac{\mathbf{I}}{\alpha^2} + \frac{\mathbf{b} \times}{\alpha} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}$$

Pour un plasma de densité  $n$ , l'expression du courant perpendiculairement aux lignes de champ  $\mathbf{J}_\perp \equiv \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b})$  en régime harmonique basse fréquence,  $\omega/\omega_c \approx 0$ , développé suivant les puissances de la pulsation  $\omega$ , s'établit donc comme suit :

$$\text{Courants de dérive : } \mathbf{J}_\perp \equiv nq\mathbf{v}_\perp = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \left[ \underbrace{\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{b}}_{\mathbf{v}_E} + j \underbrace{\frac{\omega}{\omega_c} \mathbf{E}_\perp}_{\mathbf{v}_P} + O\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \dots \right]$$

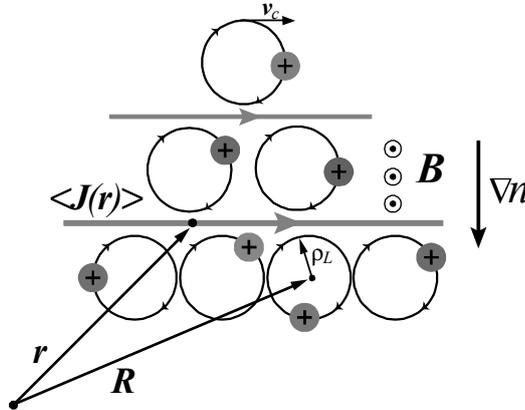
où nous avons introduit la pulsation plasma  $\omega_p^2 = nq^2/\varepsilon_0 m$ . La dérive de polarisation est proportionnelle à la masse,  $\mathbf{v}_P \sim \omega_c^{-1}$ , les courants de polarisation au sein d'un plasma sont donc de nature ionique,  $\mathbf{v}_{Pi} \gg \mathbf{v}_{Pe}$ , et il n'y a pas de courant de champs croisés car  $\mathbf{v}_{Ei} = -\mathbf{v}_{Ee}$ .

$$\text{Courants plasma } \omega/\omega_{ci} \rightarrow 0 : \quad \boxed{\mathbf{J}_\perp = j\omega\varepsilon_0 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \mathbf{E}_\perp}$$

Dans le cadre d'une étude des courants au sein d'un plasma, l'expression précédente des courants de polarisation harmoniques doit être complétée par les courant quasi-statique de magnétisation. Le moment magnétique orbital permet de définir la densité volumique de moments magnétiques ou *vecteur magnétisation*  $\mathbf{M}$ .

$$\text{Vecteur Magnétisation : } \mathbf{M} \equiv -n_e \langle \mu_e \rangle \frac{\mathbf{B}}{B} - n_i \langle \mu_i \rangle \frac{\mathbf{B}}{B}$$

où la densité ionique est notée  $n_i$  et de densité électronique  $n_e = Zn_i$ , les crochets  $\langle \rangle$  exprimant une moyenne sur la distribution des vitesses cyclotroniques  $v_c$ , le signe moins étant une conséquence du caractère diamagnétique des mouvements cyclotroniques.



Soit  $\mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp, t)$  la densité volumique de courant, à l'instant  $t$ , générée en  $\mathbf{r}$  par une particule de centre guide  $\mathbf{R}_\perp$ , de vitesse cyclotronique  $\mathbf{v}_c(t)$  et de rayon de Larmor  $\rho_L(t)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp, t) &\equiv q\mathbf{v}_c(t) \delta[\mathbf{r} - (\mathbf{R}_\perp + \rho_L(t))] \\ &\approx q\mathbf{v}_c(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp) - q\mathbf{v}_c(t) \otimes \rho_L(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp) + \dots \end{aligned}$$

où nous avons pris en compte l'ordering  $\rho_L \ll |\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp|$  et la relation  $\mathbf{v}_c(\rho_L \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) = [\mathbf{v}_c \otimes \rho_L] \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$ . Dans le contexte d'un modèle fluide la composante haute fréquence ( $\omega_c$ ) de ce courant doit être filtrée. Aussi nous considérerons la moyenne temporelle  $\langle \mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp) \rangle$ ,  $\langle \mathbf{v}_c(t) \rangle = \mathbf{0}$  mais le tenseur

$$\langle \mathbf{v}_c(t) \otimes \rho_L(t) \rangle_t = v_c \rho_L \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est non nul, ainsi :

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp) \rangle = -q \langle \mathbf{v}_c(t) \otimes \rho_L(t) \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp) = -qv_c \rho_L \nabla_{\mathbf{r}} \times [\mathbf{b} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp)]$$

où  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ . Pour obtenir le courant de magnétisation  $\mathbf{J}_M(\mathbf{r})$  associé à une distribution de densité  $n(\mathbf{R}_\perp)$  nous devons sommer l'expression de  $\langle \mathbf{J}(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{R}_\perp) \rangle$  pondérée suivant les différentes contributions  $n(\mathbf{R}_\perp) d\mathbf{R}_\perp$ . Compte tenu de l'identité  $\nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp) = -\nabla_{\mathbf{R}_\perp} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp)$  et après intégration par partie,

$$\mathbf{J}_M(\mathbf{r}) = q \int v_c \rho_L \nabla_{\mathbf{r}} \times [\mathbf{b} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_\perp)] n(\mathbf{R}_\perp) d\mathbf{R}_\perp = -\mu \nabla_{\mathbf{r}} \times n(\mathbf{r}) \mathbf{b}$$

nous obtenons ainsi l'expression classique des courants, dits ampériens, de magnétisation en fonction du vecteur magnétisation :

$$\text{Courant de Magnétisation : } \boxed{\mathbf{J}_M \equiv \nabla \times \mathbf{M} = -\nabla \times (n \langle \mu \rangle \mathbf{B}/B)}$$

L'origine des courants de magnétisation est illustrée sur la figure ci-dessus, pour une particule isolée la valeur moyenne de la vitesse est nulle ; mais en un point donné de l'espace la valeur moyenne de la vitesse est non nulle si la distribution de particules présente un gradient de densité ; le même résultat peut être obtenu avec un gradient de température.

Enfin la conduction résultant des collisions conduit à la troisième grande classe de courant au sein d'un plasma inhomogène. Lorsqu'un champ électrique statique  $\mathbf{E}$  est appliqué à un plasma magnétisé, il nous faut considérer un simple modèle fluide, quasi-statique, où les forces de Coulomb, Laplace et de pression sont équilibrées par une force de friction décrivant les collisions.

$$\begin{aligned} \underbrace{-\nabla P}_{\text{pression}} + \underbrace{nq\mathbf{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{nq\mathbf{V} \times \mathbf{B}}_{\text{Laplace}} - \underbrace{nm\nu\mathbf{V}}_{\text{collisions}} &= \mathbf{0} \\ \underbrace{-k_B T \nabla n}_{\text{pression}} + \underbrace{nq\mathbf{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}_{\text{Laplace}} - \underbrace{\frac{m}{q} \nu \mathbf{J}}_{\text{collisions}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ce bilan des forces, auxquelles est soumis le plasma, permet d'étudier les phénomènes de mobilité et diffusion magnétisées et d'établir ainsi l'équation de transport des charges en présence d'un champ magnétique statique. Les équations d'inconnues  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{J}$  peuvent être résolues en considérant la solution de l'équation algébrique linéaire d'inconnue  $\mathbf{x}$  suivante :

$$\mathbf{x} + \alpha \mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{c}}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha^2 \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}{1 + \alpha^2} = \left[ \frac{\mathbf{I} + \alpha \mathbf{b} \times + \alpha^2 \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}}{1 + \alpha^2} \right] \cdot \mathbf{c}$$

puis en appliquant ce résultat général au cas de la vitesse des porteurs de charges libres ( $\omega_c = qB/m$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ ). Considérons un modèle inhomogène ( $\nabla n \neq \mathbf{0}$ ) mais isotherme ( $\nabla T = \mathbf{0}$ ). Introduisons la mobilité  $\mu = q/m\nu$ , à ne pas confondre avec le moment magnétique, et le coefficient de diffusion  $D = k_B T/m\nu$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{\mu}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \mathbf{E} + \frac{\omega_c}{\nu} \frac{\mu}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \mathbf{E} \times \mathbf{b} + \frac{\mu}{1 + \frac{\nu^2}{\omega_c^2}} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} \\ &\quad - \frac{D}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \frac{\nabla n}{n} - \frac{\omega_c}{\nu} \frac{D}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \frac{\nabla n}{n} \times \mathbf{b} - \frac{D}{1 + \frac{\nu^2}{\omega_c^2}} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot \frac{\nabla n}{n} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  et  $\omega_c = qB/m$ . Il est d'usage d'exprimer  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_\parallel + \mathbf{J}_\perp$  en fonction des composantes parallèles et perpendiculaires du champ électrique :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp$  et du gradient de densité :  $\nabla = \nabla_\parallel + \nabla_\perp$ , la direction du champ magnétique  $\mathbf{b}$  étant prise comme axe de référence :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp \leftarrow \mathbf{E}_\parallel \equiv \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{E}_\perp \equiv \mathbf{b} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) \\ \nabla &= \nabla_\parallel + \nabla_\perp \leftarrow \nabla_\parallel \equiv \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot \nabla, \nabla_\perp \equiv -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla) \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_\parallel + \mathbf{J}_\perp \leftarrow \mathbf{J}_\parallel \equiv \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}, \mathbf{J}_\perp \equiv \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

alors le courant  $\mathbf{J}_\perp = nq\mathbf{V}_\perp$  présente 4 composantes et le courant  $\mathbf{J}_\parallel = nq\mathbf{V}_\parallel$  2 :

- (i) la mobilité et la diffusion le long des lignes de champ magnétique ( $\parallel$ ) qui ne sont pas altérées par la force de Laplace,
- (ii) la mobilité et la diffusion dans la direction du champ électrique et perpendiculairement au champ magnétique ( $\perp$ ) et
- (iii) la mobilité et la diffusion dans la direction mutuellement perpendiculaire aux champs électrique et magnétique ( $\times$ ), ce dernier terme constitue l'effet Hall ; le facteur  $\omega_c/\nu$  est appelé le *paramètre de Hall*.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\parallel &= \underbrace{nq\mu_\parallel \mathbf{E}_\parallel}_{\text{Spitzer}} - \underbrace{qD_\parallel \nabla_\parallel n}_{\text{Fick}} \\ \mathbf{J}_\perp &= \underbrace{nq\mu_\perp \mathbf{E}_\perp}_{\text{Braginsky}} - \underbrace{qD_\perp \nabla_\perp n}_{\text{Braginsky}} + \underbrace{nq\mu_\times \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{b}}_{\text{Hall}} - \underbrace{qD_\times \nabla_\perp n \times \mathbf{b}}_{\text{Hall}} \end{aligned}$$

Si nous définissons les coefficients de mobilité et diffusion de Braginsky, Hall et Ohm-Fick suivant le tableau :

<i>Spitzer/Fick</i>	$\mu_{\parallel} = \mu \equiv \frac{q}{m\nu}$	$D_{\parallel} = D \equiv \frac{kT}{m\nu}$
<i>Hall/Fick</i>	$\mu_{\times} = \frac{1}{\omega_c + \frac{\omega_c}{\nu}} \mu \underset{\nu/\omega_c \rightarrow 0}{\approx} \frac{q}{m\omega_c}$	$D_{\times} = \frac{1}{\frac{\nu}{\omega_c} + \frac{\omega_c}{\nu}} D \underset{\nu/\omega_c \rightarrow 0}{\approx} \frac{k_B T}{m\omega_c}$
<i>Braginsky/Fick</i>	$\mu_{\perp} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \mu \underset{\nu/\omega_c \rightarrow 0}{\approx} \frac{q\nu}{m\omega_c^2}$	$D_{\perp} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} D \underset{\nu/\omega_c \rightarrow 0}{\approx} \frac{k_B T \nu}{m\omega_c^2}$

où les expressions approchées sont dérivées sous l'hypothèse  $\nu \ll \omega_c$ .

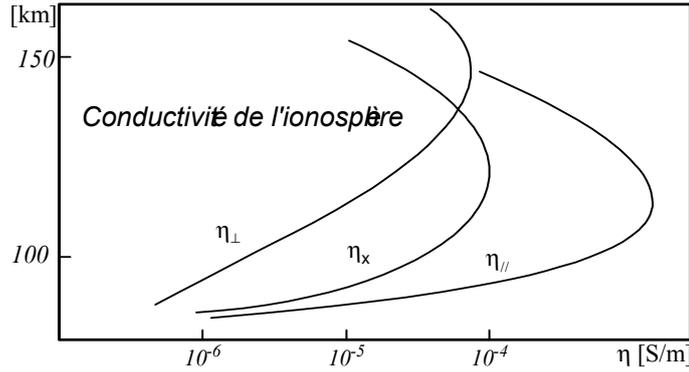
Le courant au sein d'un plasma magnétisé homogène résulte donc de la combinaison de trois processus de transport dans trois directions de référence :

$$\text{Courant de Conduction : } \mathbf{J} = \underbrace{\eta_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}}_{\text{Spitzer}} + \underbrace{\eta_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}}_{\text{Braginsky}} + \underbrace{\eta_{\times} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{b}}_{\text{Hall}}$$

Les trois composantes du tenseur de conductivité sont donc données par :

<i>Spitzer</i>	$\eta_{\parallel} = \frac{nq^2}{m\nu}$
<i>Hall</i>	$\eta_{\times} = \frac{\eta_{\parallel}}{\omega_c + \frac{\omega_c}{\nu}} \underset{\nu/\omega_c \rightarrow 0}{\approx} \frac{nq^2}{m\omega_c} = \frac{nq}{B}$
<i>Braginsky</i>	$\eta_{\perp} = \frac{\eta_{\parallel}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} \underset{\nu/\omega_c \rightarrow 0}{\approx} \frac{nq^2\nu}{m\omega_c^2}$

Le coefficient de conductivité de Hall ne s'annule pas lorsque la fréquence de collisions  $\nu$  s'annule, dans ce régime, nous reconnaissons la dérive de champ croisé :  $\eta_{\times} E = nqE/B$ .



Pour conclure, démontrons brièvement qu'une analyse cinétique conduit au même résultat, et restreignons cette analyse à la diffusion de Braginsky. Perpendiculairement au champ, il nous faut considérer le couplage entre le terme de Laplace  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  et les collisions et évaluer le coefficient de diffusion du centre guidé  $\mathbf{R}_{\perp}$  des orbites cyclotroniques. Soit une particule chargée, de masse  $m$  et de charge  $q$ , plongée dans un champ magnétique statique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ . Considérons alors l'histoire de cette particule comme une suite de rotations interrompues par des collisions de durées nulles conformément au schéma de la figure :  $d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}/m + \sum_n \delta(t - \tau_n) \delta\mathbf{v}_n$  où  $\tau_n$  sont les instants des collisions.

### 3.8 Ambipolar and Braginsky diffusions

Compte tenu de la grande différence de masses entre les électrons et les ions, le flux électronique est beaucoup plus important que le flux ionique. Cette différence crée donc une charge d'espace, cette charge d'espace génère un champ électrique  $\mathbf{E}$  et ce champ a tendance à freiner les électrons et à accélérer les ions pour assurer la quasi-neutralité du plasma. Il nous faut donc évaluer le champ auto-cohérent  $\mathbf{E}$  ainsi créé en résolvant le système :

$$\begin{aligned} \text{Conservation des électrons} & : \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_e = S_e \\ \text{Conservation des ions} & : \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_i = S_i \\ \text{Equation de Maxwell-Gauss} & : \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \end{aligned}$$

où  $S_e = S_i = S$  sont les sources d'espèces chargées résultant de l'ionisation.

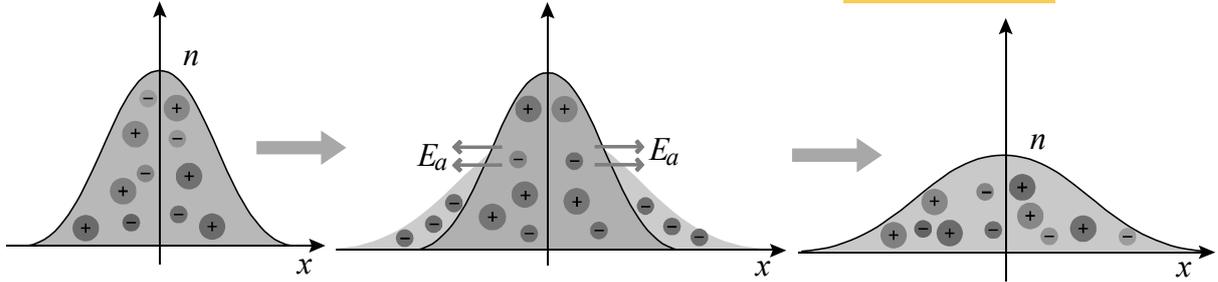
L'Hypothèse de quasi-neutralité permet de simplifier le problème; cette hypothèse est recevable pour les phénomènes plus lents que les oscillations plasma, à la fréquence de Langmuir  $\omega_p$ , et sur des échelles de longueur plus grandes que la longueur de Debye  $\lambda_D$ .

$$\text{Quasi-neutralité : } n_e = n_i = n$$

Sous cette hypothèse les flux ionique et électronique sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Flux électronique} & : \Gamma_e = -n\mu_e \mathbf{E} - D_e \nabla n \leftarrow \mu_e = \frac{|q_e|}{m_e \nu_e}, D_e = \frac{k_B T_e}{m_e \nu_e} \\ \text{Flux ionique} & : \Gamma_i = n\mu_i \mathbf{E} - D_i \nabla n \leftarrow \mu_i = \frac{q_i}{m_i \nu_i}, D_i = \frac{k_B T_i}{m_i \nu_i} \end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs des coefficients de diffusion ionique et électronique, en l'absence de champ électrique appliqué le flux électronique est beaucoup plus grand que le flux ionique:  $\mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \Gamma_e \gg \Gamma_i$ .



Cette différence de flux crée une séparation de charges qui génère un champ, le champ ambipolaire  $\mathbf{E}_a$ ; ce champ assure la régulation des flux et leur égalité qui permet le maintien de la quasi-neutralité.

$$\Gamma_e(\mathbf{E}_a) = \Gamma_i(\mathbf{E}_a) \rightarrow \mathbf{E}_a = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}$$

Si nous éliminons le champ ambipolaire de l'expression de la valeur commune des deux flux, le transport apparaît purement diffusif.

$$\Gamma_e = \Gamma_i = \Gamma_a = -\frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + D_a \nabla^2 n = S$$

Le coefficient de diffusion  $D_a$  ainsi identifié est appelé ambipolaire et permet de décrire le transport lent d'un plasma quasi-neutre,  $D_a$  résulte d'un transfert d'inertie entre électrons et ions à travers le champ ambipolaire  $\mathbf{E}_a$  qui assure un couplage fort entre les deux populations.

$$\text{Diffusion ambipolaire : } D_a \equiv \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \approx D_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right)$$

Si les températures électronique et ionique sont du même ordre de grandeur, compte tenu de la relation d'Einstein, le coefficient ambipolaire est de l'ordre de grandeur de deux fois le coefficient ionique. La chute de potentiel ambipolaire :

$$\left| \frac{\nabla n}{n} \right| \approx L^{-1} \rightarrow E_a \approx \frac{k_B T_e}{qL} \rightarrow q\phi_a \approx k_B T_e$$

est de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique  $k_B T_e$  en conformité avec l'ordering initial.

Considérons une marche aléatoire discrète et inhomogène suivant un axe  $x$ . Durant un pas de temps mésoscopique  $\delta t$  une particule présente une probabilité 0.5 d'effectuer un pas  $+\delta x$  et une probabilité 0.5 d'effectuer un pas  $-\delta x$ . Ainsi, pour une particule initialement en  $x$ , à l'issue d'un petit temps  $dt < \delta t$  cette particule présente une probabilité  $dt/2\delta t$  d'être en  $x + \delta x$ , une probabilité  $dt/2\delta t$  d'être en  $x - \delta x$  et une probabilité  $1 - (dt/\delta t)$  de demeurer en  $x$ . Introduisons  $P(x, t) dx$  la distribution de probabilité suivant  $x$  à l'instant  $t$  qui vérifie donc la relation :

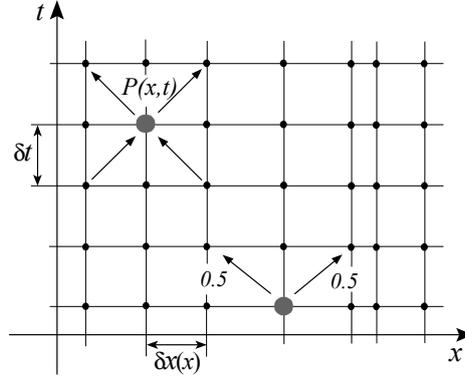
$$P(x, t + dt) dx = P(x, t) dx \left( 1 - \frac{dt}{\delta t} \right) + P(x - \delta x, t) d(x - \delta x) \frac{1}{2} \frac{dt}{\delta t} + P(x + \delta x, t) d(x + \delta x) \frac{1}{2} \frac{dt}{\delta t}$$

Compte tenu de la relation  $d(x \pm \delta x) = dx (1 \pm d\delta x/dx)$ , le développement de Taylor suivant  $t$  de cette relation conduit à :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\delta x^2}{2\delta t} \frac{P(x + \delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \delta x, t)}{\delta x^2} + \frac{\delta x}{\delta t} \frac{d\delta x}{dx} \frac{P(x + \delta x, t) - P(x - \delta x, t)}{2\delta x}$$

et le développement de Taylor suivant  $x$  à :

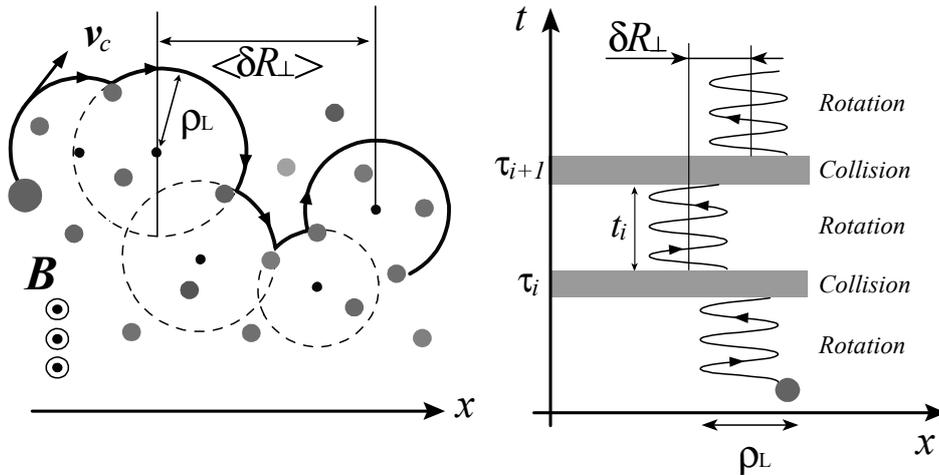
$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\delta x^2}{2\delta t} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\delta x}{\delta t} \frac{\delta x}{dx} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{\delta x^2}{\delta t} \right) \frac{\partial}{\partial x} P(x,t) \right]$$



Le coefficient de diffusion est donc défini sur la base de la dynamique mésoscopique comme  $\langle \delta x^2 / 2\delta t \rangle$  où les crochets indiquent une moyenne mésoscopique. Etudions la dynamique de la composante de  $\mathbf{v}$  perpendiculaire au champ magnétique, la vitesse cyclotronique :  $\mathbf{v}_c = \mathbf{b} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b})$ , pour ce faire introduisons la variable complexe :  $\mathcal{V} = v_x + jv_y$  où  $x$  et  $y$  constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{v}_c = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y$ , système de coordonnées associé à la base orthonormée directe  $[\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{b}]$ . La variable  $\mathcal{V}$  vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre :  $d\mathcal{V}/dt + j\omega_c \mathcal{V} = \sum_n \delta(t - \tau_n) \delta\mathcal{V}_n$  où les  $\delta\mathcal{V}_n = \delta v_{xn} + j\delta v_{yn}$  décrivent les transferts aléatoires de vitesse cyclotronique dus aux collisions. Entre deux collisions la solution est constituée par le mouvement de rotation cyclotronique :  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 \exp(-j\omega_c t)$ . La position instantanée de la particule est définie comme la somme de la position du centre guide  $\mathbf{R}_\perp$  plus le rayon de Larmor  $\rho_L(t)$ . Le rayon de Larmor  $\rho_L(t)$  et la vitesse cyclotronique  $\mathbf{v}_c(t)$  vérifient la relation :  $\mathbf{v}_c = \omega_c \rho_L \times \mathbf{b}$ . A l'issue d'une collision la variation de vitesse cyclotronique  $\delta\mathbf{v}_c$  est accompagnée par un changement de position du centre guide  $\delta\mathbf{R}_\perp$  ; en effet,  $\omega_c \rho_L = \mathbf{b} \times \mathbf{v}_c \rightarrow \mathbf{R}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{b} \times \mathbf{v}_c / \omega_c$ . La collision étant supposée provoquer une variation d'impulsion instantanée au regard de l'échelle cyclotronique  $\omega_c^{-1}$ , la position de la particule ne varie pas lors d'une collision et la variation de la position  $\mathbf{r}$  de cette particule est nulle :  $\delta\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , ainsi les variations de vitesse  $\delta\mathbf{v}_c$  et de position du centre guide  $\delta\mathbf{R}_\perp$  sont couplées.

$$\delta\mathbf{R}_\perp = \frac{\delta\mathbf{v}_c \times \mathbf{b}}{\omega_c} \rightarrow \langle \delta\mathbf{R}_\perp^2 \rangle = \frac{\langle \delta v_x^2 \rangle + \langle \delta v_y^2 \rangle}{\omega_c^2}$$

Une particule chargée qui vient juste de subir une collision à l'instant  $t_0$  possède, avant cette collision, la vitesse  $v_{c0} \exp(-j\omega_c t_0)$  ; en l'absence de collision la vitesse à un instant ultérieur  $t > t_0$  est donnée par  $\mathcal{V}(t) = v_{c0} \exp(-j\omega_c t)$  et la variation de vitesse est égale à  $\delta\mathcal{V} = v_{c0} \exp(-j\omega_c t) - v_{c0} \exp(-j\omega_c t_0)$ .



Introduisons  $\tau = t - t_0$  la durée d'une libre rotation, et exprimons le carré de l'incrément de vitesse cyclotronique et de l'incrément de position du centre guide à l'issue d'une libre rotation de durée  $\tau$  :  $\delta v_x \delta v_x + \delta v_y \delta v_y = \delta\mathcal{V} \delta\mathcal{V}^*$  :

$$\delta\mathcal{V} \delta\mathcal{V}^* = 4v_{c0}^2 \sin^2 \omega_c \frac{t - t_0}{2} \rightarrow \delta\mathbf{R}_\perp^2 = 4 \frac{v_{c0}^2}{\omega_c^2} \sin^2 \frac{\omega_c \tau}{2}$$

Le résultat ainsi obtenu est fonction uniquement de la variable aléatoire  $\tau$  et cette variable est distribuée suivant la loi  $dP_0/d\tau$ , il est donc nécessaire de moyenner ce résultat pour exprimer le coefficient de diffusion. La probabilité que la particule ne subisse aucune collision durant un temps  $\tau$  puis subisse une collision à l'issue de ce temps  $\tau$  durant l'intervalle  $d\tau$  est donnée par  $dP_0(\tau) = \nu \exp(-\nu\tau) d\tau$ .

$$\frac{\langle \delta \mathbf{R}_\perp^2 \rangle}{\langle \delta t \rangle} = 4 \frac{v_{c0}^2}{\omega_c^2} \frac{\int_0^{+\infty} P_0(\tau) \sin^2(\omega_c \tau / 2) d\tau}{\int_0^{+\infty} P_0(\tau) \tau d\tau} = 2v_c^2 \frac{\nu}{\nu^2 + \omega_c^2}$$

Compte tenu de l'isotropie du problème autour des lignes de champ  $\langle \delta \mathbf{R}_\perp^2 \rangle = 2 \langle \delta R_x^2 \rangle = 2 \langle \delta R_y^2 \rangle$ . Pour une distribution des vitesses maxwellienne  $\langle v_{c0}^2 \rangle = 2k_B T/m$ ; le résultat final est donc donné par :

$$\text{Coefficient de diffusion de Braginsky : } D_\perp \equiv \frac{D_\parallel}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}}$$

résultat similaire à celui obtenu dans le cadre d'un modèle fluide.

Processus	Gradient	Coefficient
<i>Mobilité</i>	$-\frac{d\phi}{dx}$	$\mu = \frac{q}{m\nu}$
<i>Diffusion libre</i>	$\frac{dn_e}{dx}$	$D = \frac{k_B T}{m\nu}$
<i>Diffusion ambipolaire</i>	$\frac{dn}{dx}$	$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}$
<i>Diffusion de Braginsky</i>	$\frac{dn}{dx}$	$D_\perp = \frac{1}{1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}} D$

### 3.9 Alfvén, Böhm and diamagnetic velocities

Soit une population de particules de masse  $m$  et de charge  $e$  décrite par un modèle de gaz parfait et neutralisé à l'équilibre par un fond continu de charge opposé. Considérons une perturbation électrique  $E \exp(j(\omega t - kz))$  suivant la coordonnée  $z$ . La densité  $n$ , la vitesse  $v$  et les pression et température  $p$  et  $T$  de cette population vérifient les relations de conservation de la masse (charge), de l'impulsion (équation d'Euler), de l'entropie (équation d'état isentropique) ou de l'énergie (équation d'état isotherme) selon le modèle.

$$\begin{aligned} \text{Euler} & : m \underbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_{\text{inertie}} = - \underbrace{\frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial z}}_{\text{compressibilité}} + \underbrace{\frac{eE}{m}}_{\text{Coulomb}} \\ \text{Continuité} & : \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (nv) = 0 \\ \text{Isentropique} & : \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = \gamma k_B T \leftarrow \frac{p}{p_0} = \left( \frac{n}{n_0} \right)^\gamma \\ \text{Isotherme} & : \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_T = k_B T \leftarrow p = nk_B T \end{aligned}$$

$k_B$  est la constante de Boltzmann (que l'on ne confondra pas avec le vecteur d'onde  $k$ ) et  $\gamma$  le rapport de la capacité calorifique à pression constante sur la capacité calorifique à volume constant. Ce système, une fois linéarisé, admet des solutions sommes d'une solution d'équilibre statique plus une perturbation harmonique dans le temps et l'espace  $\exp(j(\omega t - kz))$ . La linéarisation de l'équation d'Euler, de l'équation de continuité et de l'équation d'état conduit ainsi au système d'équations algébriques :

$$\begin{aligned} \text{Euler} & : j\omega J = \omega_p^2 \varepsilon_0 E + j \frac{e}{m} k p \\ \text{Continuité} & : e\omega n = k J \\ \text{Isentropique} & : p = n\gamma k_B T, \text{ Isotherme} : p = nk_B T \end{aligned}$$

où  $J$  représente la densité volumique de courant linéarisée  $J \equiv en_0 v$  le long des lignes de champ. La pression  $p$  et la vitesse  $v$  sont éliminées dans ce système pour exprimer le courant  $J$  en fonction du champ  $E$ , ainsi pour les populations électronique et ionique nous obtenons les réponses isentropiques en courant  $J$  à une perturbation électrique  $E \exp(j(\omega t - kz))$ .

$$\begin{aligned} \text{Courant électronique} & : \frac{J_e}{\omega \varepsilon_0} = j \frac{\mathbf{E}}{\underbrace{\gamma k^2 \lambda_{De}^2}_{\text{compressibilité}} - \underbrace{\omega^2 / \omega_{pe}^2}_{\text{inertie}}} \\ \text{Courant ionique} & : \frac{J_i}{\omega \varepsilon_0} = j \frac{\mathbf{E}}{\underbrace{\gamma k^2 \lambda_{Di}^2}_{\text{compressibilité}} - \underbrace{\omega^2 / \omega_{pi}^2}_{\text{inertie}}} \end{aligned}$$

où nous avons introduit la *longueur de Debye* :  $\lambda_D^2 \equiv \varepsilon_0 k_B T / n_0 q^2$  et la *pulsation de Langmuir*  $\omega_p^2 \equiv n_0 q^2 / \varepsilon_0 m$ .

Deux régimes de réponses en courant peuvent être ainsi identifiés :

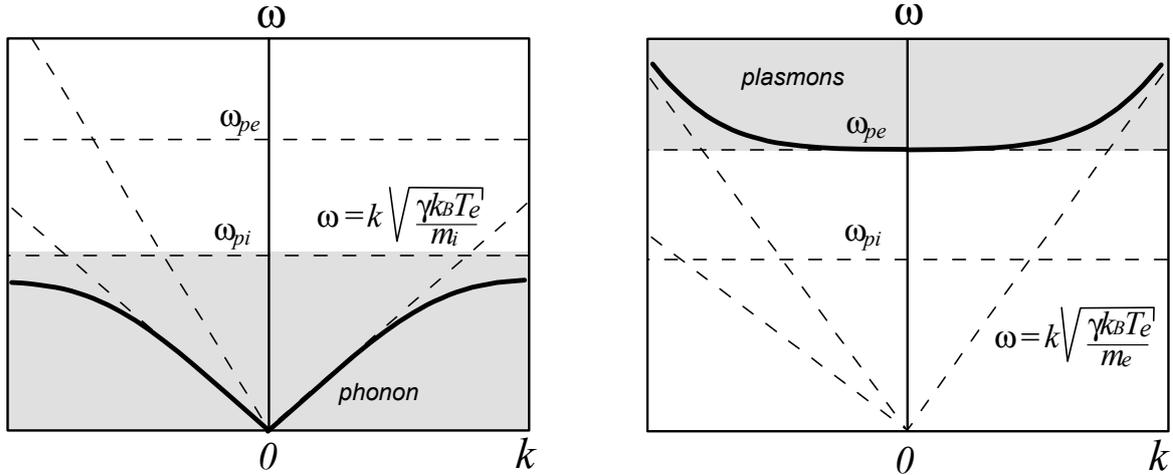
- le régime adiabatique lorsque les effets de compressibilité ( $\gamma k_B T k^2 / m$ ) sont dominants par rapport aux effets d'inertie ( $\omega^2$ ),

- le régime inertiel dans le cas contraire (complémentaire) lorsque les effets de compressibilité ( $\gamma k_B T k^2 / m$ ) sont négligeables devant les effets d'inertie ( $\omega^2$ ).

Considérons la population électronique excitée au voisinage de la fréquence de Langmuir ; l'équation de dispersion des modes électrostatiques peut être établie en exprimant la relation de Maxwell-Ampère :  $\mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{J}_e = 0$ , la réponse inertielle  $\mathbf{J}_e = -j\omega_{pe}^2\varepsilon_0\mathbf{E}/\omega$  conduit à la relation  $\omega = \omega_{pe}$ . La prise en compte des corrections de compressibilité finie permet l'identification du mode plasma électronique dont la relation de dispersion est illustrée sur la figure.

$$\text{Ondes plasma électroniques : } \omega^2 = \omega_{pe}^2 (1 + \gamma k^2 \lambda_D^2)$$

A basse température, pour une fréquence donnée, ou à basse fréquence, pour une température donnée, cette branche électrostatique dite de Böhm et Gross, se confond avec les oscillations de Langmuir.



A basse fréquence, en dessous de la fréquence de Langmuir électronique, la prise en compte de la dynamique ionique révèle l'existence d'un nouveau mode. Les électrons participent à ce mode ionique non pas de manière inertielle mais à travers une réponse adiabatique décrivant l'écrantage du champ électrique. La traduction de l'hypothèse adiabatique consiste donc à négliger le terme d'inertie ( $k^2 k_B T_e > \omega^2 m_e$ ) devant le terme de compressibilité pour obtenir le courant électronique  $\mathbf{J}_e$ . Le courant ionique  $\mathbf{J}_i$  est, quant à lui, purement inertielle sous l'hypothèse d'ions froids ( $k^2 k_B T_i < \omega^2 m_i$ ).

$$\text{Courant électronique adiabatique : } \mathbf{J}_e = j \frac{\omega}{\gamma k^2 \lambda_{De}^2} \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\text{Courant ionique inertiel : } \mathbf{J}_i = -j \frac{\omega_{pi}^2}{\omega} \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

La partie très basse fréquence de ce mode est de nature quasi-neutre, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser les équations de Maxwell pour établir la dispersion très basse fréquence de ce nouveau mode électrostatique. L'hypothèse de quasi-neutralité

$$\text{Quasi-neutralité : } J_e + J_i = 0 \rightarrow \frac{\omega_{pi}^2}{\omega} = \frac{\omega}{\gamma k^2 \lambda_{De}^2} \rightarrow \omega = k C_S$$

est suffisante, nous venons ainsi d'identifier le son ionique le long des lignes de champ où nous avons introduit la vitesse acoustique ionique  $C_S \equiv \sqrt{\gamma k_B T_e / m_i}$  ; il est d'usage de définir aussi la vitesse de Böhm  $C_B$ .

$$\text{Vitesses de Böhm : } C_B \equiv \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \approx 9789 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \times \sqrt{T_e [\text{eV}]}$$

L'énergie de ce mode ionique se propage à travers l'échange périodique potentiel/cinétique entre l'inertie ionique et la compressibilité électronique. Cette relation de dispersion linéaire n'est plus valable à haute fréquence et la prise en compte de l'inertie électronique dans l'équation de Maxwell-Ampère,  $J_e + J_i + j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} = 0$ , permet d'établir la relation de dispersion complète des ondes acoustiques ioniques illustrée sur la figure.

$$\text{Onde Acoustique Ionique : } \omega = k C_S \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{\omega_{pi}^2 + k^2 C_s^2}}$$

La relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques devient  $\omega \approx \omega_{pi}$  lorsque le vecteur d'onde tend vers l'infini, c'est-à-dire pour les petites longueurs d'onde. Malgré ce comportement, il n'existe pas d'oscillation plasma ionique semblable à l'oscillation plasma électronique  $\omega \approx \omega_{pe}$ ; en effet, lorsque  $k\sqrt{k_B T/m} \ll \omega$  le modèle fluide tombe en défaut et une description cinétique est nécessaire, dans le cadre de cette description le mode acoustique ionique apparaît fortement amorti aux petites longueurs d'onde. Les effets d'inertie et de séparation de charges n'entraîne pas la création d'un plasmon ionique mais une courbure de la dispersion linéaire du son ionique. Les conclusions que nous venons d'énoncer sur la non pertinence du modèle fluide aux petites longueurs d'ondes sont aussi recevables pour le mode de Böhm-Gross.

<i>Plasmons</i>	$\omega \approx \omega_p \left(1 + \frac{\gamma}{2} k^2 \lambda_D^2 + \dots\right)$
<i>Phonons</i>	$\omega \approx k C_S \left(1 - \frac{\gamma}{2} k^2 \lambda_D^2 + \dots\right)$

Perpendiculairement aux lignes de champ, en présence d'un gradient de pression, c'est-à-dire d'un gradient de densité ou de température, la vitesse de propagation des perturbations de densités quasi-neutres est donnée par la vitesse dite diamagnétique qui constitue la vitesse des modes dits de dérives que nous analyserons plus en détail dans le chapitre consacré aux instabilités. Dans ce paragraphe nous allons simplement identifier cette vitesse dans le cadre d'un modèle quasi-neutre de perturbations très basses fréquences.

Soit un plasma d'hydrogène de densité  $n_0(x)$ , plongé dans un champ magnétique  $B_0 \mathbf{e}_z$ . Perturbons localement cette équilibre suivant la direction de l'axe des  $y$  où  $[x, y, z]$  constitue un système de coordonnées cartésiennes. Du point de vue électromagnétique cette perturbation est décrite par le potentiel  $\phi(y, t)$  et du point de vue mécanique par le champ de vitesse ionique  $v_i(y, t) \mathbf{e}_x$ .

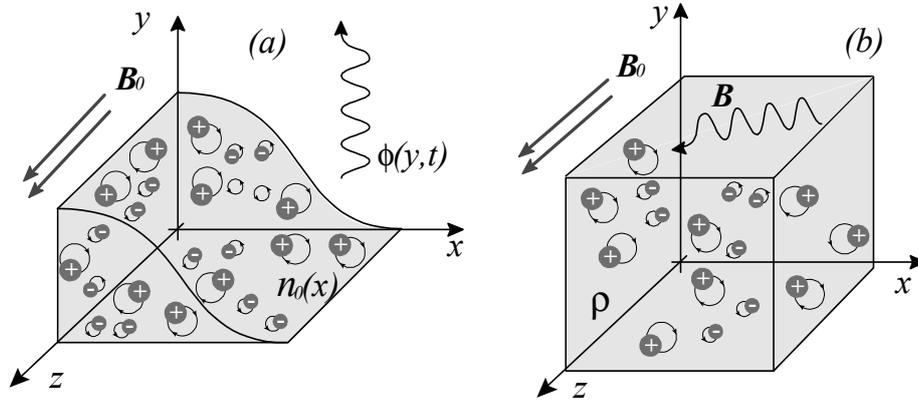


Fig. 4.9 : (a) Modes de dérives, (b) Modes d'Alfvén.

Compte tenu de leur faibles inerties les électrons se distribuent suivant une loi de Boltzmann, les ions sont soumis aux forces de Coulomb et Laplace et nous supposons qu'à chaque instant ces deux forces s'équilibrent; en effet, nous étudions une perturbation basse fréquence et qui peut être considérée comme une suite continue de quasi-équilibres. Enfin, la conservation du nombre d'ions permet de compléter l'écriture d'un système de trois équations décrivant les trois inconnues:  $\phi$ ,  $v_i$  et  $n_i$  la densité perturbée.

$$\begin{aligned}
 \text{Equilibre de Boltzmann} & : n_e = n_0 \exp\left(\frac{q\phi}{k_B T_e}\right) \\
 \text{Equilibre Coulomb/Laplace} & : qv_i B_0 + q \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\
 \text{Conservation de la charge ionique} & : \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_i}{\partial x} + \frac{\partial n_i v_i}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

L'hypothèse de quasi-neutralité  $q(n_e - n_i)/\varepsilon_0 = \partial^2 \phi / \partial y^2 \approx 0$  permet d'éliminer le terme  $\partial v_i / \partial y \sim \partial^2 \phi / \partial y^2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Adiabaticité électronique} & : \frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{qn_0}{k_B T_e} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\
 \text{Dérives } E \times B \text{ ioniques} & : \frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial n_0}{\partial x} = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, le potentiel obéit à une équation de convection, qui en régime harmonique n'est autre que la branche électronique des modes de dérives que nous étudierons dans le chapitre consacré aux instabilités.

$$\text{Onde de dérives} : \frac{\partial \phi}{\partial y} - \left( \frac{qn_0 B_0}{k_B T_e |dn_0/dx|} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

La vitesse de convection/propagation ainsi identifiée,  $V^*$ , définit la *vitesse diamagnétique* que nous analyserons plus en détails dans les chapitres suivants.

$$\text{Vitesse diamagnétique : } \boxed{V^* \equiv \frac{k_B T_e}{q B_0} \frac{1}{n_0} \left| \frac{dn_0}{dx} \right|} \sim v_T \frac{\rho_L}{a} \quad (3.8)$$

Cette vitesse est de l'ordre de quelques kilomètres par seconde dans les plasmas de tokamak et est beaucoup plus petite que les autres vitesses collectives. Introduisons la longueur de gradient  $a$  telle que  $a^{-1} \equiv |dn_0/dx|/n_0$  :  $V^* \sim v_T \rho_L/a \ll v_T$  où  $v_T$  est la vitesse thermique.

Dans un plasma quatre types de perturbations doivent être considérés,

- les perturbations de densités électronique et ionique qui viennent d'être étudiées et dont les échelles caractéristiques de temps et de longueur ont été identifiées,
- et les perturbations des champs électriques et magnétiques.

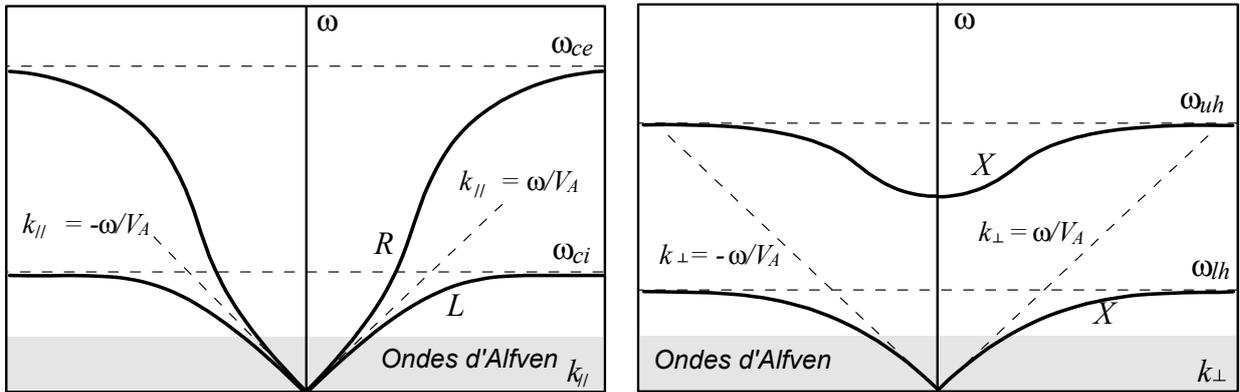
Compte tenu de l'équation de Maxwell-Ampère et de la relation de Gauss, les perturbations des champs ne sont pas indépendantes des perturbations des densités de particules chargées ; aussi il peut paraître difficile de décider de la nature réelle d'un processus collectif : *électronique, ionique, électrique* ou *magnétique* ? Cette question peut être tranchée en comparant ce qui est comparable, c'est-à-dire les contenus énergétiques des différentes perturbations ; on parlera de perturbation magnétique lorsque l'essentiel de l'énergie contenue dans la perturbation sera sous forme magnétique bien que ce champ soit nécessairement accompagné par un courant électronique ou ionique.

Les perturbations basses fréquences de nature magnétique constituent les ondes d'Alfvén. La vitesse caractéristique des perturbations magnétiques est la *vitesse d'Alfvén*  $V_A$ , que nous allons construire dans le cadre du modèle suivant.

Soit un plasma d'hydrogène de densité volumique de masse  $\rho$ , confiné par un champ magnétique statique homogène  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{b}$ . Considérons une perturbation électromagnétique harmonique de champs électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp j\omega t$  et magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp j\omega t$ . Sous l'effet de ces champs les particules chargées du plasma, supposées initialement au repos, développent une accélération résultant de la force de Coulomb et de la force de Laplace. Cette dernière force sera restreinte au champ statique  $B_0$  en accord avec l'ordering de linéarisation. Ainsi, une population de particules (électrons ou ions) de charge  $q$  et de masse  $m$  génère un courant harmonique  $\mathbf{J}_\perp(\mathbf{r}) \exp j\omega t$  :

$$\text{Courants plasma } \omega/\omega_{ci} \rightarrow 0 : \mathbf{J}_\perp = \varepsilon_0 j \omega \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \mathbf{E}_\perp + O\left(\frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2}\right)$$

où nous ne nous intéressons qu'aux champ et courant électriques perpendiculaires au champ magnétique statique, car le long des lignes de champ magnétique l'écrantage ( $\omega \ll \omega_p$ ,  $L \gg \lambda_D$ ) garantit la nullité de toute composante électrique  $E_\parallel$  pour les ondes transverses considérées ici.



Les champs électromagnétiques sont donc couplés par ce courant plasma basse fréquence qui est beaucoup plus intense que le courant de déplacement  $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  si  $\omega_{pi}^2 > \omega_{ci}^2$ .

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday : } \nabla \times \mathbf{E}_\perp = -j\omega \mathbf{B}$$

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère : } \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_\perp + j \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E} \approx j \frac{\omega}{c^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \mathbf{E}_\perp$$

L'élimination du champ électrique entre ces équation conduit à l'équation des perturbations électromagnétiques harmoniques basse fréquence :

$$\text{Ondes d'Alfvén : } \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

C'est une équation d'ondes et ces ondes, dites *ondes d'Alfvén*, sont non dispersives. La vitesse caractéristique, indépendante de la fréquence, définit la vitesse d'Alfvén.

$$\text{Vitesse d'Alfvén : } \boxed{V_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}} = \lambda_p \sqrt{\omega_{ce} \omega_{ci}} = c \frac{\omega_{ci}}{\omega_{pi}} \approx 2180 \left[ \frac{\text{km}}{\text{s}} \right] \times \frac{B_0 [\text{T}] A^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n_i [10^{20} \text{ m}^{-3}]}}$$

Une analyse complète du spectre du modèle fluide des plasmas confirme le résultat précédent : les modes basses fréquence convergent vers les ondes d'Alfvén qui constitue l'unique branche des perturbations perpendiculairement au champ magnétique dans un plasma homogène magnétisé.

Nous avons ainsi identifié un ensemble d'échelles caractéristiques associées au comportement collectif d'un plasma thermonucléaire en réponse à des perturbations électronique, ionique et électromagnétique. Dans un tokamak ces trois vitesses caractéristiques vérifient un ordering fort.

$$V^* \sim \frac{\rho L_i}{L} v_{Ti}, C_B \sim v_{Ti}, V_A \sim \frac{v_{Ti}}{\sqrt{\beta}} \rightarrow \overline{\overline{V^* < C_B < V_A}} \quad (3.9)$$

Les ordres de grandeur sont donnés par :  $V_A/C_B/V^* \sim 10^7 [\text{m/s}] / 10^6 [\text{m/s}] / 10^3 [\text{m/s}]$ . Cet ensemble de résultats est résumé dans le tableau ci-dessous.

<i>Vitesse Diamagnétique</i>	$V^* = \frac{k_B T_e}{q B_0} \left  \frac{d \ln n_0}{dx} \right $	$1 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \times \frac{T_e [\text{eV}]}{B_0 [\text{T}] L [\text{m}]}$
<i>Vitesse de Böhm</i>	$C_B^2 = \frac{k_B T_e}{m_i}$	$9789 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \times \sqrt{T_e [\text{eV}]}$
<i>Vitesse d'Alfvén</i>	$V_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 n_i m_i}$	$2180 \left[ \frac{\text{km}}{\text{s}} \right] \times \frac{B_0 [\text{T}] A^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n_i [10^{20} \text{ m}^{-3}]}}$

Ces trois vitesses constitueront les trois échelles caractéristiques des relations de dispersion des instabilités et ondes basses fréquences.

# Chapitre 4

## Introduction to plasma kinetic

### 4.1 Boltzmann distribution

Il est une loi d'échelle bien connue dans le domaine de la théorie de l'information pour les systèmes dont l'état est inconnu mais dont la structure de l'espace des états est connue :

*le nombre de questions pertinentes, nécessaires pour apporter une réponse non ambiguë face à un déficit d'information, croît comme le logarithme du nombre de réponses possibles.*

C'est cette croissance extrêmement lente du nombre de questions en fonction du nombre de réponses possibles qui autorise notre compréhension émergente de l'univers.

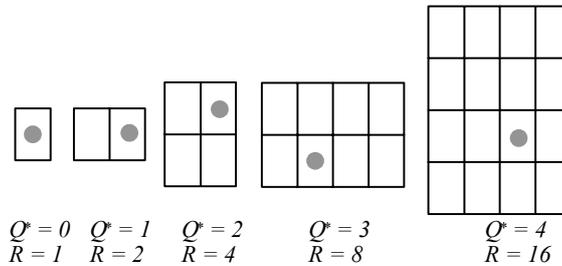


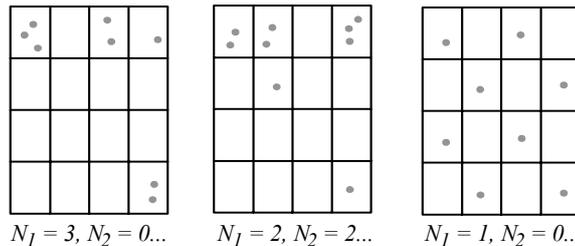
Fig. 2.14 Nombre de questions pertinentes nécessaires  $Q^*$  et nombre de réponses  $R$  possibles.

Un système est défini comme un ensemble d'états accessibles au sein d'un espace d'états, ainsi une interrogation sur l'état d'un système peut toujours être ramenée à une forme canonique: *quelle est la position d'un objet au sein d'un ensemble de boîtes?* Cette question universelle, illustrée sur la figure 2.14, peut être abordée par une demande systématique pour chaque boîte: *pleine/vide?* Nous avons alors autant de questions  $Q$  que de réponses  $R$  possibles,  $Q = R$ . Un protocole plus efficace nous est offert par une méthode de dichotomie, illustrée sur la figure 2.14, en articulant systématiquement des demandes: *haut/bas?* et *droite/gauche?*

Dans ce cas particulier, définissons (i)  $Q^*$  comme le nombre de questions (*haut/bas* et *droite/gauche*) nécessaires pour spécifier la position d'une particule dans un ensemble de boîtes vides suivant une stratégie de dichotomie et (ii)  $R$  le nombre de boîtes, c'est-à-dire le nombre de réponses possibles à la question globale: *où est la particule?* On vérifie bien, sur ce cas particulier :

$$\text{Nombre de questions: } Q^*(R) = \frac{\log R}{\log 2} .$$

Dans le domaine de la physique le problème de la spécification de l'état d'un système est en général posé ainsi: *soit  $N$  particules semblables que l'on suppose occuper  $m$  états individuels.*



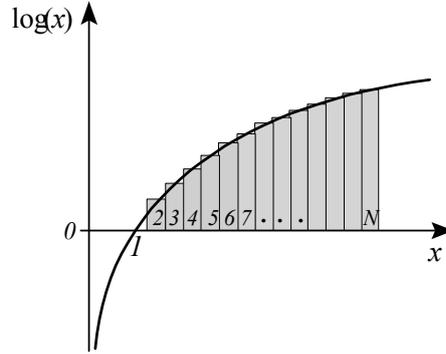
On note  $N_i$  le nombre de particules occupant l'état individuel  $i \in \{1, 2, 3...m-1, m\}$  tel que  $\sum_{i=1}^m N_i = N$ ; quel est alors le nombre d'états  $R$  du système? Ce nombre d'états est donné par la relation classique :

$$R(N_1, N_2, \dots, N_{m-1}, N_m) = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_{m-1}! N_m!}$$

et il faut donc poser  $\log R / \log 2$  questions pour appréhender l'état du système. Introduisons un taux d'occupation  $P_i = N_i / N$  tel que  $N_i = NP_i$ ,  $P_i$  sera ensuite interprété comme une probabilité,  $\sum_{i=1}^{i=m} P_i = 1$ , suivant un protocole de mesures répétées et incomplètes et conformément à la dialectique statistique/probabilité.

$$\log R = \log N! - \log NP_1! \dots NP_{m-1}! NP_m!$$

Lorsque  $N \gg 1$ , cette relation peut être approchée par la formule asymptotique de Stirling :  $\log N! \approx \log \sqrt{2\pi} + (N + 1/2) \log N - N$ . L'expression du terme dominant de ce développement classique s'établit comme suit. Le logarithme du factoriel est égal à la somme :  $\log N! = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log (N - 1) + \log N$ .



Pour  $N$  grand, cette somme peut être approchée, par l'intégrale :  $\int_1^N \log(x) dx = N \log N - N$ . Ainsi lorsque  $N \gg 1$ :

$$\log R = N \log N - N - \sum_{i=1}^{i=m} NP_i \log NP_i + NP_i = -N \sum_{i=1}^{i=m} P_i \log P_i$$

Partant de ce résultat, définissons l'entropie au sens de Shannon  $S_S$  pour un système présentant un ensemble  $\{i\}$  exhaustif d'états indexés par l'indice  $i$  et dont les probabilités d'occupation sont égales à  $\{P_i\}$ :

$$\text{Entropie de Shannon : } S_S(P_i) \equiv - \sum_i P_i \log P_i .$$

Cette définition possède de nombreuses propriétés confirmant la pertinence de ce choix de mesure. En particulier, pour des systèmes decorrélés si  $P = P_1 P_2$ , alors l'entropie de Shannon est extensive comme l'entropie de Clausius :  $S = S_1 + S_2$ . Pour  $N$  particules que l'on suppose occuper  $m$  états individuels avec les probabilités  $P_i$ , le nombre de questions est proportionnel au nombre totale de particules  $N$ .

$$\text{Nombre de questions : } Q^* = \frac{N}{\log 2} S_S(P_i)$$

On notera qu'une discussion argumentée pour établir le lien entre «questions nécessaires pour spécifier l'état d'un système» et «mesure» au sens physique du terme serait nécessaire et intéressante.

Dans le contexte de la physique, complétons la définition de Shannon par l'hypothèse de Boltzmann. Pour un système isolé à l'équilibre, soit  $\Omega(U, V, N)$  le nombre d'états microscopiques présentant tous la même énergie interne  $U$  pour le même volume  $V$  et le même nombre de moles  $N$ , (figure 2.15).

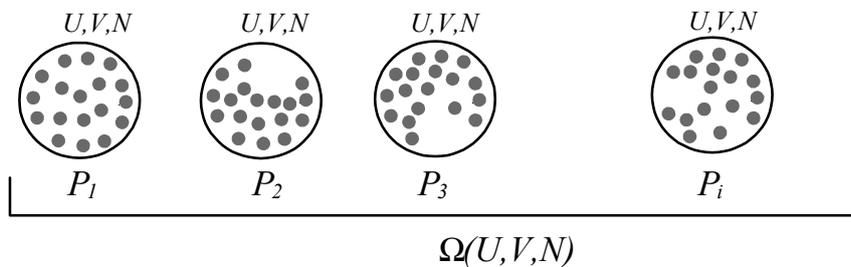


Fig. 2.15 Ensemble microcanonique de  $\Omega(U, V, N)$  états microscopiques.

**Hypothèse de Boltzmann :** pour un système isolé à l'équilibre, tous les états microscopiques présentant les mêmes variables macroscopiques extensives  $[U, V, N, \dots]$  sont équiprobables et la probabilité pour que le système soit dans un état  $i$  est égale à  $1/\Omega(U, V, N)$ .

$$\text{Hypothèse de Boltzmann : } P_i = \frac{1}{\Omega(U, V, N)}$$

L'entropie de Shannon conduit donc à définir l'entropie de Boltzmann :

$$\text{Entropie de Boltzmann: } S_B \equiv k_B S_S(P_i) = k_B \log \Omega(U, V, N).$$

Une telle définition peut sembler formelle et dénuée de vertus pratiques, il n'en est rien, cette définition permet la remontée de la description microscopique vers la description macroscopique pour un système à l'équilibre. En particulier, considérons la réunion de deux systèmes faiblement couplés, 1 et 2, d'énergie totale  $U$  et dont le contenu énergétique du premier est  $U_1$  :

$$\begin{aligned} \Omega(U, U_1) &= \Omega_1(U_1) \Omega_2(U - U_1), \\ S(U, U_1) &= S_1(U_1) + S_2(U - U_1). \end{aligned}$$

L'entropie de Boltzmann est donc bien extensive. Définissons  $T \equiv \partial S_B / \partial U$  et considérons les conséquences du second principe de la thermodynamique pour la réunion de ces deux systèmes 1 et 2. L'énergie totale  $U$  est donnée mais la fraction relative  $(U - U_1) / U_1$  de cette énergie pour chaque système est *a priori* un paramètre libre sur la base du premier principe. Cette liberté est en fait contrainte par le second principe qui énonce le maximum de l'entropie  $S_B$  à l'équilibre, ainsi :

$$\frac{\partial S}{\partial U_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial S_1}{\partial U_1} - \frac{\partial S_2}{\partial (U - U_1)} = 0 \rightarrow T_1 = T_2,$$

et l'interprétation en termes d'égalité des températures  $T_1 = T_2$  est conforme aux lois de la thermodynamique phénoménologique.

La loi de probabilité  $P_i = 1/\Omega(U, V, N)$ , dénommée microcanonique, permet la description des systèmes isolés. Analysée sous l'angle de la théorie de l'information, l'entropie de Boltzmann mesure le nombre de questions nécessaires, en unité  $k_B \log 2$ , pour spécifier l'état microscopique d'un système; ne pouvant poser ces questions, le physicien de l'échelle macroscopique renonce aux détails mais garde comme variables d'étude ce nombre de questions.

En général les systèmes physiques sont contraints en température par des thermostats. La description macroscopique de tels systèmes passe par l'usage de l'énergie libre  $F$  (Helmholtz) et la description microscopique par l'étude de la distributions canonique.

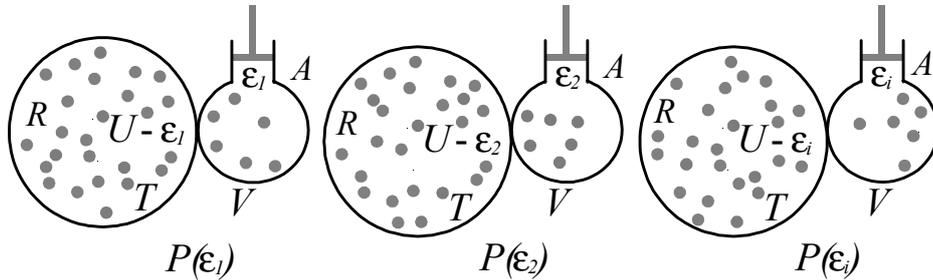


Fig. 2.16 Sous-ensemble canonique  $A$  de l'ensemble microcanonique  $R + A$ .

Considérons, sur la figure 2.16, un système isolé d'énergie interne  $U$ . Partitionnons ce système en un grand système appelé réservoir  $R$  et un petit système  $A$ ;  $A$  et  $R$  échangeant de l'énergie sous toutes ses formes, mais n'échangeant pas de matière. La probabilité  $P(\varepsilon_1)$  que le système  $A$  soit dans l'état d'énergie  $\varepsilon_1$ , ramenée à la probabilité  $P(\varepsilon_2)$  que le système  $A$  soit dans l'état d'énergie  $\varepsilon_2$ , est donnée par le rapport des nombres d'états du réservoir  $R$  correspondant aux deux états du système  $A$ :  $\Omega(U - \varepsilon_1)$  et  $\Omega(U - \varepsilon_2)$

$$\frac{P(\varepsilon_1)}{P(\varepsilon_2)} = \frac{\Omega(U - \varepsilon_1)}{\Omega(U - \varepsilon_2)}.$$

Soit  $S(U)$  l'entropie de Boltzmann du réservoir, le rapport des probabilités s'exprime alors suivant la relation :

$$\frac{\Omega(U - \varepsilon_1)}{\Omega(U - \varepsilon_2)} = \frac{\exp \frac{S(U - \varepsilon_1)}{k_B}}{\exp \frac{S(U - \varepsilon_2)}{k_B}} \approx \frac{\exp \left[ \frac{S(U)}{k_B} - \frac{\varepsilon_1}{k_B} \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{V, N} \right]}{\exp \left[ \frac{S(U)}{k_B} - \frac{\varepsilon_2}{k_B} \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{V, N} \right]},$$

où nous avons utilisé l'ordering  $\varepsilon_1 \ll U$  &  $\varepsilon_2 \ll U$  pour justifier les développements de Taylor des exposants. La définition de la température thermodynamique du réservoir  $R$ ,  $1/T \equiv \partial S / \partial U$ , conduit ainsi à la distribution canonique décrite par le facteur de Boltzmann.

$$\text{Facteur de Boltzmann: } \frac{P(\varepsilon_1)}{P(\varepsilon_2)} = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right)}{\exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)}$$

La normalisation du facteur de Boltzmann, pris comme loi de probabilité des états du système  $A$  dans l'espace des énergie  $\varepsilon_i$ , définit la fonction de partition canonique  $Z(T, V)$ ,

$$\text{Fonction de partition canonique: } Z(T, V, N) \equiv \sum_{\varepsilon_i} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_B T}\right).$$

D'une part, l'entropie  $s$  du système  $A$  est définie par la formule de Shannon-Boltzmann  $s = -k_B \sum_{\varepsilon_i} P(\varepsilon_i) \ln P(\varepsilon_i)$  et peut être exprimée suivant

$$s \equiv \sum_{\varepsilon_i} \frac{\varepsilon_i}{T} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_B T}\right)}{Z} + k_B \ln Z,$$

d'autre part, l'énergie interne  $u$  du système  $A$  est donnée par la somme

$$u \equiv \sum_{\varepsilon_i} \varepsilon_i P(\varepsilon_i) = \sum_{\varepsilon_i} \varepsilon_i \frac{\exp\left(-\varepsilon_i/k_B T\right)}{Z}.$$

De ces deux relations découle l'identité  $Ts - u = k_B T \log Z$ , ainsi, compte tenu de la définition de l'énergie libre du système  $A$ :  $F = u - Ts$ , le lien entre la thermodynamique statistique de l'équilibre canonique  $R/A$  et la thermodynamique phénoménologique du système  $A$  s'établit à travers l'énergie libre de Helmholtz:  $F(T, V, N) = -k_B T \log Z(T, V, N)$ .

$$\text{Distribution de Boltzmann: } P(\varepsilon) = \exp\left(\frac{F - \varepsilon}{k_B T}\right)$$

On notera que ce facteur est celui qui rend l'énergie libre de  $A$

$$F = U - TS = \underbrace{\sum_i P_i \varepsilon_i}_U + T \underbrace{k_B \sum_i P_i \log P_i}_{-S}$$

minimum au regard des variations  $\delta P_i$

$$\delta F = \sum_i \delta P_i \varepsilon_i + k_B T \sum_i \delta P_i \log P_i + k_B \sum_i \delta P_i = \sum_i \delta P_i (\varepsilon_i + k_B T \log P_i) = 0$$

des différentes pondérations possibles  $P_i$  telles que  $\sum_i P_i = 1 \rightarrow \sum_i \delta P_i = 0$ .

## 4.2 Poisson and Holtsmark Distributions

Considérons un événement se réalisant suivant deux possibilités, la première avec une probabilité  $p$  et la deuxième avec la probabilité  $1 - p$ . Soit  $N$  réalisations successives et indépendantes de cet événement, la probabilité  $P(N, n)$  qu'il se réalise  $n$  fois suivant la première possibilité et  $N - n$  fois suivant la deuxième, est donnée par la distribution de Bernouilli :

$$\text{Bernouilli: } P(N, n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Deux cas limites sont souvent rencontrés en physique :

• Si  $N \gg 1$  alors, à moins que  $p \approx 0$  ou  $p \approx 1$ ,  $P(N, n)$  est piquée autour de la valeur  $\bar{n}$  telle que  $dP/dn = 0$  et  $P$  tend, au voisinage de  $\bar{n} = Np$ , vers la **distribution de Gauss**:

$$\text{Gauss: } P(N, n) \xrightarrow{n \approx Np} \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(n - Np)^2}{2Np(1-p)}\right)$$

• Si  $N \gg n$  et  $p \ll 1$ , nous attendons ainsi un événement rare en répétant  $N$  réalisations, alors  $P$  tend vers la **distribution de Poisson**:

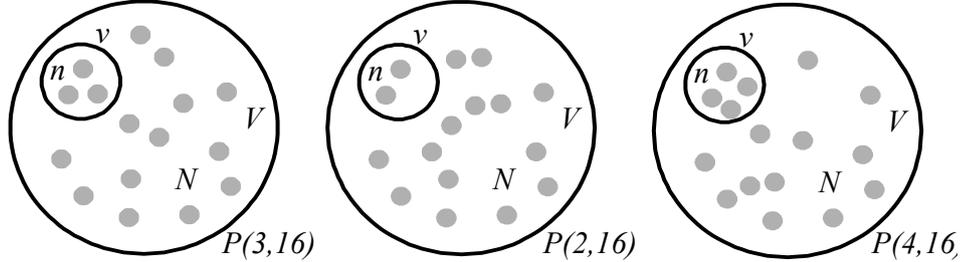
$$\text{Poisson: } P(N, n) \xrightarrow{n \ll N} \frac{(Np)^n}{n!} \exp -Np$$

où la valeur moyenne  $\bar{n} = Np$ . Ces deux limites sont obtenues en considérant  $\log P$  pour la distribution de Bernouilli, puis en effectuant des limites appropriées pour la loi de Poisson ; la loi de Gauss nécessite un développement de Taylor au deuxième ordre au voisinage de  $\bar{n}$  et l'usage de la formule asymptotique de Stirling

pour  $\log N!$ . La loi de Gauss décrit la somme normalisée des variables aléatoires associées à un grand nombre d'événements indépendants et la loi de Poisson l'attente d'événement rares et indépendants.

Illustrons la loi de Poisson dans un plasma. Considérons un petit volume  $v$  contenu dans un grand volume  $V \gg v$ , ainsi que  $N$  particules distribuées aléatoirement, uniformément et isotropiquement, dans ce grand volume  $V$ . Soit  $P(n, N)$  la probabilité de mesurer  $n$  particules dans le volume  $v$ .

$$P(n, N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-n}$$



Définissons  $\langle n \rangle \equiv Nv/V$  le nombre moyen de particules dans le petit volume  $v$ .

$$\begin{aligned} P(n, N) &= \frac{1}{n!} N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1) \left(\frac{\langle n \rangle}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^{N-n} \\ &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^{N-n} \end{aligned}$$

Suivant la limite thermodynamique  $N \rightarrow +\infty$  et  $V \rightarrow +\infty$  lorsque  $N/V$  reste fini  $\rightarrow \langle n \rangle$  finie, la loi de répartition limite  $\lim P(n, N \rightarrow +\infty)$  est alors une loi de Poisson :

$$\text{Distribution de Poisson : } P(n, \langle n \rangle) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \exp - \langle n \rangle$$

Au delà de cette aspect structurel, la loi de Poisson est aussi présente au sein des plasmas au niveau dynamique. Considérons la loi  $P(n, t)$  décrivant la probabilité pour qu'une particule subisse  $n$  collisions durant un intervalle de temps  $t$ . Plusieurs propriétés de cette distribution peuvent être établies aux temps courts  $\delta t \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} n &= 0 \rightarrow P(0, 0) = 1, P(0, \delta t) + P(1, \delta t) = 1 \\ n &= 1 \rightarrow P(1, \delta t) = \nu \delta t \rightarrow P(0, \delta t) = 1 - \nu \delta t \end{aligned}$$

et  $n > 1 \rightarrow P(n, \delta t) = 0$  où  $\nu$  est une fréquence que nous interpréterons ultérieurement. En effet, sur une durée infinitésimale  $\delta t$ , il ne peut pas se produire plus d'une collision. Supposons que la probabilité de collision durant un intervalle de temps donné soit indépendante de l'histoire de la particule, c'est-à-dire indépendante du fait que la particule ait ou n'ait pas subi de collisions dans un passé récent, une telle hypothèse est dite markovienne et permet d'établir :

$$\text{Hypothèse markovienne : } P(0, t + \delta t) = P(0, t) P(0, \delta t)$$

Le développement de Taylor du premier membre conduit à :

$$\text{Loi de Poisson simple : } \frac{dP(0, t)}{dt} = -\nu P(0, t) \rightarrow P(0, t) = \exp -\nu t$$

Nous obtenons ainsi la loi de décroissance exponentielle dites loi de Poisson simple. Considérons ensuite la loi  $P(n, t)$ , une particule subit  $n$  collisions durant une période  $t + \delta t$  : (i) si elle en subit  $n-1$  durant la période  $t$  et 1 durant  $\delta t$  ou (ii) si elle en subit  $n$  durant  $t$  et 0 durant  $\delta t$  :

$$\begin{aligned} P(n, t + \delta t) &= P(n, t) + \delta t \frac{dP(n, t)}{dt} = P(n-1, t) \nu \delta t + P(n, t) (1 - \nu \delta t) \\ \frac{dP(n, t)}{dt} + \nu P(n, t) &= \nu P(n-1, t) \xrightarrow{P(n, 0)=0} P(n, t) = \nu \exp(-\nu t) \int_0^t \exp(\nu \tau) P(n-1, \tau) d\tau \end{aligned}$$

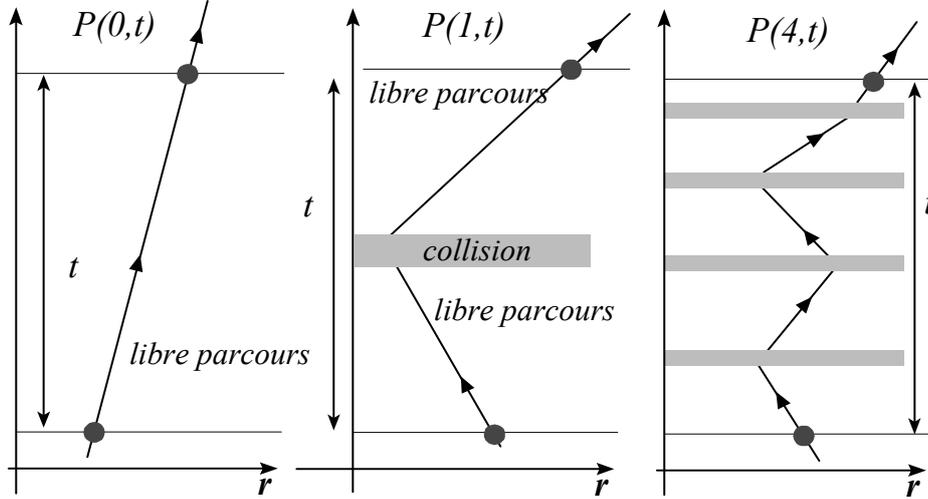
Ainsi :

$$\begin{aligned} P(1, t) &= \nu \exp(-\nu t) \int_0^t \exp(\nu \tau) P(0, \tau) d\tau = \nu t \exp(-\nu t) \\ P(2, t) &= \nu \exp(-\nu t) \int_0^t \exp(\nu \tau) P(1, \tau) d\tau = \frac{(\nu t)^2}{2} \exp(-\nu t) \\ P(n, t) &= \nu \exp(-\nu t) \int_0^t \exp(\nu \tau) P(n-1, \tau) d\tau = \frac{(\nu t)^n}{n!} \exp(-\nu t) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi établi la *loi de Poisson* décrivant la probabilité d'observer  $n$  collisions durant un intervalle de durée  $t$ .

$$\text{Loi de Poisson : } P(n, t) = \frac{(\nu t)^n}{n!} \exp(-\nu t)$$

Résultat attendu car nous recherchons la distribution d'événements aléatoires, les collisions, dont la moyenne est  $\nu t$ .



Il serait faux de croire que les lois de Gauss et de Poisson épuisent la diversité des distributions statistiques en physique des plasmas. Si nous étudions les champs, et non les particules, une loi de distribution importante doit être considérée : la *distribution de Holtmark*.

Soit  $N$  particules chargées de charge  $q$  distribuées aléatoirement, uniformément et isotropiquement, dans une sphère de rayon  $R$  et de volume  $V = 4\pi R^3/3$ . Les vecteurs positions par rapport au centre de la sphère de ces  $N$  particules sont notées  $\mathbf{r}_i$  où  $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , ainsi le champ électrique  $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{E}_i$  au centre de la sphère est donné par la somme des champs coulombiens engendrés par chaque particule :

$$\mathbf{E}_i = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}$$

Les positions  $\mathbf{r}_i$  étant des vecteurs aléatoires dont la distribution est uniforme radialement et isotrope angulairement, la probabilité  $P(\mathbf{E}) d\mathbf{E}$  d'observer un champ de valeur  $\mathbf{E}$  au centre de la sphère, dans un volume de champ  $d\mathbf{E}$ , est donc égale à :

$$P(\mathbf{E}) = \int_V \frac{d\mathbf{r}_1}{V} \int_V \frac{d\mathbf{r}_2}{V} \dots \int_V \frac{d\mathbf{r}_N}{V} \delta\left(\mathbf{E} - \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{E}_i\right)$$

La distribution de Dirac est exprimée sur la base de sa représentation de Fourier,  $\int d\mathbf{k} \exp j\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{u})$  suivant la relation :

$$P(\mathbf{E}) = \prod_{i=1}^{i=N} \int_V \frac{d\mathbf{r}_i}{V} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp j\mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{E} - \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{E}_i\right)$$

et les particules étant supposées indépendantes, l'évaluation de la distribution  $P(\mathbf{E})$  se réduit donc à la réduction de la quadrature :

$$P(\mathbf{E}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \exp j \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right]^N \exp j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$$

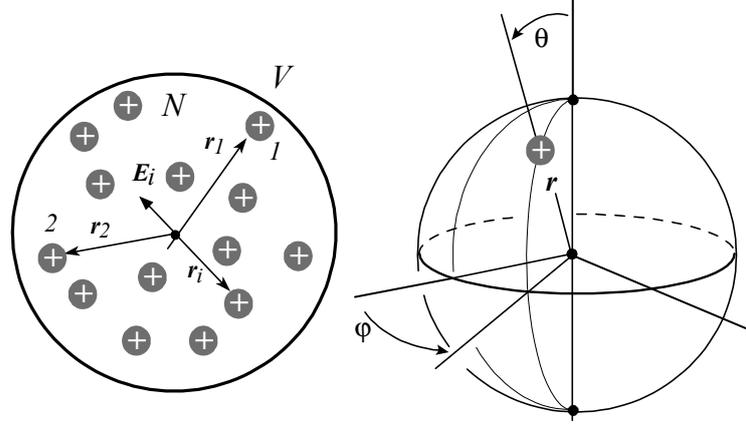
L'isotropie de la distribution de particules permet d'évaluer le facteur entre crochets dans le cadre d'une représentation sphérique  $d\mathbf{r} = r \sin\theta d\varphi r d\theta dr$  :

$$\int_V d\mathbf{r} \exp j \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi \int_0^R r^2 dr \frac{\sin\left(\frac{qk}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)}{qk/4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Cette dernière quadrature radiale peut être réduite : (i) par le changement de variable  $u = kq/4\pi\epsilon_0 r^2$

$$\frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \exp j \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 1 - \frac{2\pi}{V} \left(\frac{qk}{4\pi\epsilon_0}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{qk}{4\pi\epsilon_0 R^2}}^{\infty} du u^{-\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\sin u}{u}\right)$$

et (ii) par le passage à la limite des grands volumes  $R \rightarrow +\infty$  qui permet d'exprimer  $\int_0^\infty du u^{-\frac{5}{2}} (1 - \sin u/u) = 4\sqrt{2\pi}/15$  et  $(1 + x/N)^N \rightarrow \exp x$  en considérant (iii) la limite thermodynamique  $N \rightarrow +\infty$  et  $V \rightarrow +\infty$  lorsque la densité  $N/V = n$  est maintenu constante.



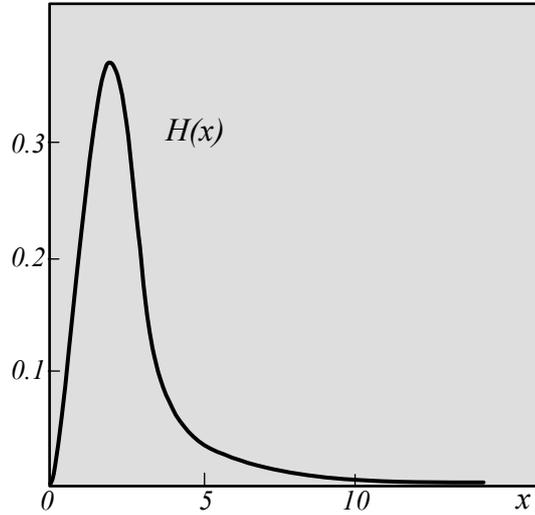
Ainsi,

$$P(\mathbf{E}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp - (kE_H)^{\frac{3}{2}} \exp j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$$

où nous avons introduit le *champ de Holtmark*  $E_H$  défini par la relation :

$$\text{Champ de Holtmark : } \boxed{\frac{E_H}{2\pi(4/15)^{\frac{2}{3}}} \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0 n^{-\frac{2}{3}}}}$$

L'expression finale de la distribution  $P(\mathbf{E})$  est obtenue en considérant un système de coordonnées sphériques, dans l'espace des  $\mathbf{k}$ ,  $d\mathbf{k} = k \sin\theta d\phi k d\theta dk$ , et en définissant la distribution de Holtmark  $H(x)$  telle que  $\int_0^\infty H(x) dx = 1$ .



$$\text{Distribution de Holtmark : } H(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^\infty u \sin(xu) \exp(-u^{3/2}) du$$

Ainsi, La distribution du champ électrique aléatoire généré par des particules chargées de positions aléatoire,

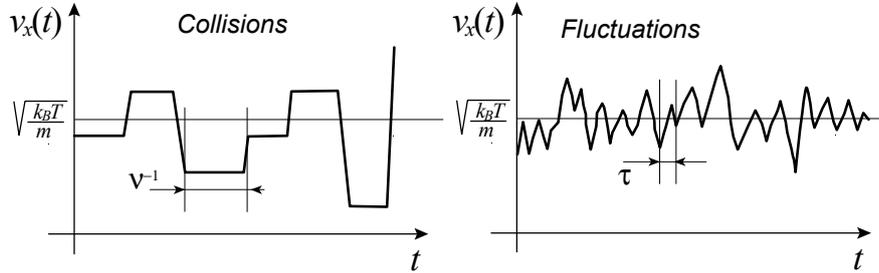
$$\text{Distribution du champ de Holtmark : } \boxed{4\pi E^2 P(E) = H(E/E_H)/E_H}$$

est donc isotrope, ce résultat était attendu compte tenu de l'isotropie de la distribution de charges, et ce résultat est non singulier ce qui n'était pas garantie a priori car  $E \sim r^{-2}$  et  $dN \sim r^2 dr$ .

### 4.3 Fokker-Planck Equation

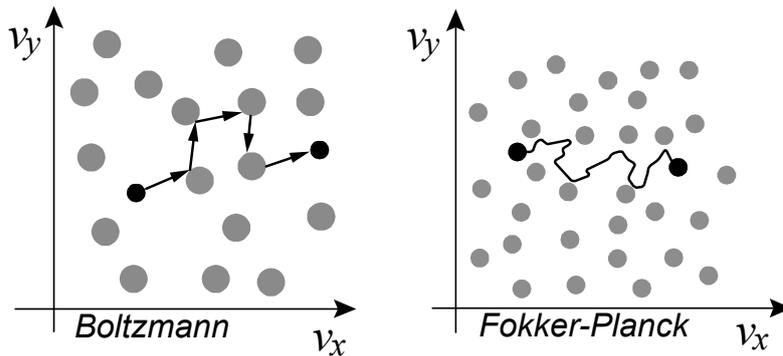
Deux grandes classes de modèles peuvent être construites :

- les milieux dilués, où la variation d'énergie-impulsion d'une entité microscopique constitue une phase de courte durée, comparée à des phases de mouvement libre de plus longue durée ;
- les milieux denses où le modèle précédant d'interaction localisée à deux particules est inopérant pour construire une description et où le concept de *fluctuation* doit être substitué au concept de *collisions*.



Dans le cas d'une théorie markovienne de l'évolution de la fonction de distribution des vitesses des électrons et des ions au sein d'un plasma, deux régimes de collisions doivent donc être considérés.

- Les interactions telles que la variation relative de vitesse  $\delta v/v$  (ou des angles de diffusion  $\delta\theta$  et  $\delta\varphi$ ), à l'issue d'une collision, ne sont pas petites devant 1 (ou  $\pi$ ), on parle alors de grands transferts d'énergie et de *collisions aux grands angles*.
- Les interactions telles que la variation relative  $\delta v/v$  de vitesse (ou les angles de diffusion  $\delta\theta$  et  $\delta\varphi$ ), à l'issue d'une collision, sont petites devant 1 (ou  $\pi$ ), on parle alors de petits transferts d'énergie et de *collisions aux petits angles* ; dans ce deuxième régime, l'orbite dans l'espace des vitesses peut être considérée comme une succession continue d'états, mais la courbe  $\mathbf{v}(t)$  n'est pas nécessairement différentiable.



Considérons l'évolution d'une loi de probabilité dans un espace d'états physiques  $\mathbf{v}$ . La *théorie des processus markoviens continus* a pour objectif de construire un certain nombre de méthodes et d'établir un ensemble de résultats permettant de calculer cette densité de probabilité  $F(\mathbf{v}, t)$  à un instant  $t$ , à partir de la connaissance de cette densité à un instant antérieur  $t - dt$ .

Introduisons la probabilité conditionnelle  $w(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{s}) dt$  mesurant la probabilité d'observer le système dans l'état  $\mathbf{v}$  à l'instant  $t + dt$  s'il a été préparé dans l'état  $\mathbf{s}$  à l'instant  $t$ ,  $w(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{s})$  est donc une *probabilité de transition par unité de temps*. Les simples lois des compositions, additives (ou,  $\cup$ ) et multiplicatives (et,  $\cap$ ), des probabilités conduisent alors à l'écriture de l'équation maîtresse :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int w(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{s}) F(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} - \int w(\mathbf{s}' \leftarrow \mathbf{v}) F(\mathbf{v}, t) d\mathbf{s}'$$

Le premier terme du membre de droite s'interprète comme un gain, depuis tous les états  $\mathbf{s}$  transitant vers  $\mathbf{v}$  durant une durée infinitésimale  $dt$ , et le deuxième terme s'interprète comme une perte, due à toutes les transitions depuis  $\mathbf{v}$  vers l'un quelconque des autres états  $\mathbf{s}$  durant une durée infinitésimale  $dt$ . Cette évolution peut aussi être décrite en introduisant une variable  $\mathbf{x}$  de description des états de départ ou d'arrivée,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int w(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \mathbf{x}) F(\mathbf{v} + \mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int w(\mathbf{v} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) F(\mathbf{v}, t) d\mathbf{x} .$$

L'hypothèse de petite variation se traduit par la pertinence d'un développement de Taylor :

$$w(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \mathbf{x}) F(\mathbf{v} + \mathbf{x}) = w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) F(\mathbf{v}) + O(\mathbf{x}) + O(\mathbf{x}\mathbf{x}) + \dots \text{ où :}$$

$$O(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) F(\mathbf{v}) , \quad O(\mathbf{x}\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) F(\mathbf{v}) .$$

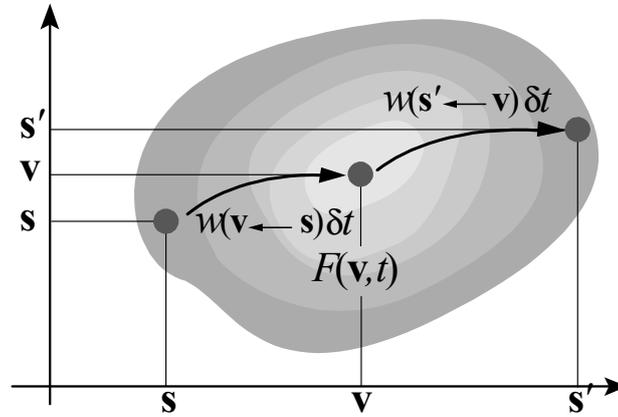
La somme  $\int d\mathbf{x}w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) = \int d\mathbf{x}w(\mathbf{v} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v})$  pouvant s'exprimer de deux manières différentes, le terme proportionnel à  $F(\mathbf{v})$  dans le développement est nul. Définissons les coefficients de friction  $\langle \delta\mathbf{v} \rangle / \delta t$  et de diffusion  $\langle \delta\mathbf{v} \otimes \delta\mathbf{v} \rangle / \delta t$  suivant deux relations équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta\mathbf{v} \rangle}{\delta t} &\equiv - \int \mathbf{x}w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{x}w(\mathbf{v} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) d\mathbf{x} , \\ \frac{\langle \delta\mathbf{v} \otimes \delta\mathbf{v} \rangle}{\delta t} &\equiv \int \mathbf{x}\mathbf{x}w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}w(\mathbf{v} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) d\mathbf{x} , \end{aligned}$$

ainsi les termes du premier ordre,  $O(\mathbf{x})$ , et du deuxième ordre,  $O(\mathbf{x}\mathbf{x})$ , du développement conduisent à la forme classique des équations de type Fokker-Planck :

$$FPE : \left[ \frac{\partial F}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[ \frac{\langle \delta\mathbf{v} \rangle}{\delta t} F - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta\mathbf{v} \otimes \delta\mathbf{v} \rangle}{2\delta t} F \right] \right] .$$

À ce stade de développement, nous n'avons pas formulé d'hypothèse sur les contraintes associées au système, nous allons maintenant distinguer les évolutions FPE microcanoniques d'un système isolé et les évolutions FPE canoniques d'un système fermé, mais non isolé, en contact avec un thermostat.



Pour le premier cas, le bilan détaillé microcanonique s'exprime suivant la relation :

$$\text{Bilan détaillé microcanonique : } w(\mathbf{v} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) = w(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \mathbf{x})$$

dont le développement de Taylor aux petits  $\mathbf{x}$  :

$$w(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \mathbf{x}) = w(\mathbf{v} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) = w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) + \mathbf{x} \cdot \frac{\partial w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \dots ,$$

et l'expression symétrisée du coefficient de friction :

$$\frac{\langle \delta\mathbf{v} \rangle}{\delta t} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}w(\mathbf{v} + \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \mathbf{x}w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} w(\mathbf{v} - \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{v}) d\mathbf{x} ,$$

permettent d'établir la **relation d'Einstein entre friction et diffusion**.

$$\text{Relation d'Einstein microcanonique : } \frac{\langle \delta\mathbf{v} \rangle}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta\mathbf{v} \otimes \delta\mathbf{v} \rangle}{2\delta t}$$

L'équation de Fokker-Planck se simplifie donc suivant :

$$FPE \text{ microcanonique : } \left[ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta\mathbf{v} \otimes \delta\mathbf{v} \rangle}{2\delta t} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \right]$$

L'énergie interne d'un système isolé étant conservée, il ne peut y avoir de terme de perte ou de gain d'énergie, c'est bien le cas et le flux de probabilité  $\langle \delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v} \rangle / 2\delta t \cdot \partial F / \partial \mathbf{v}$  est purement diffusif, la friction est absente. Considérons une contrainte de contact avec un réservoir de chaleur à la température  $T$ . Le principe du bilan détaillé canonique s'exprime suivant la relation :

$$\text{Bilan détaillé canonique : } w(\mathbf{v} + \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v}) \exp\left(-\frac{H(\mathbf{v})}{k_B T}\right) = w(\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \mathbf{u}) \exp\left(-\frac{H(\mathbf{v} + \mathbf{u})}{k_B T}\right)$$

où  $H$  est le hamiltonien pour le petit système. Le développement de Taylor du bilan détaillé :

$$w(\mathbf{v} + \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v}) = w(\mathbf{v} - \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v}) + \exp \frac{H(\mathbf{v})}{k_B T} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} w(\mathbf{v} - \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v}) \exp - \frac{H(\mathbf{v})}{k_B T} + \dots$$

conduit à la *relation d'Einstein* canonique :

$$\text{Relation d'Einstein canonique : } \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2 \delta t} - \frac{1}{k_B T} \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2 \delta t} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}$$

L'équation de Fokker-Planck est donc donnée par la forme classique :

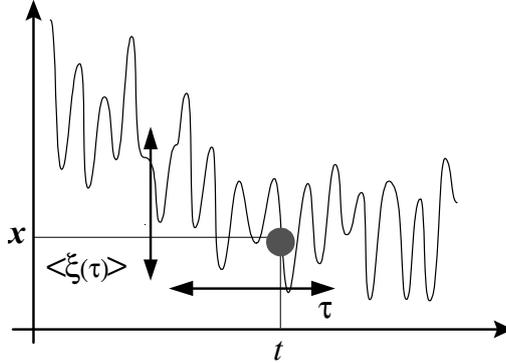
$$\text{FPE canonique : } \boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2 \delta t} \cdot \left[ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{k_B T} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \right) F \right]}$$

Comme dans le cas microcanonique, cette équation est conforme aux propriétés d'équilibre car  $F \sim \exp -H/k_B T \rightarrow \partial F / \partial t = 0$ . Les deux principales situations où cette relation s'applique sont relatives à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle.

$$\begin{aligned} \text{Potentielle} & : H(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \right) = q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \rightarrow \text{Nernst-Planck} \\ \text{Cinétique} & : H(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \right) = m \mathbf{v} \rightarrow \text{Rayleigh-Brown} \end{aligned}$$

Dans le premier cas,  $\langle \delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} \rangle / 2 \delta t \equiv k_B T / m v$ , nous avons ainsi établi l'équation de Nernst-Planck décrivant le transport au sein d'un plasma.

Soit  $P(\mathbf{x}, t)$  la densité de probabilité de présence de particules dans un espace d'états  $[\mathbf{x}]$  quelconques (vitesse, position, énergie, moment cinétique...) à un instant  $t$ . Définissons la fonction  $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t)$  telle que  $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$  mesure la probabilité d'observer une particule au voisinage du point  $\mathbf{x}$  dans l'élément de volume  $d\mathbf{x}$  à un instant  $t > t_0$ , sachant qu'elle a été observée en  $\mathbf{x}_0$  à l'instant  $t_0 < t$ .  $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t)$  est donc un propagateur du passé vers le futur, dont l'équation d'évolution doit être établie sur la base de la dynamique microscopique dans l'espace d'états  $[\mathbf{x}]$ . Mais, nous pouvons aussi considérer le point de vue de Kolmogorov où  $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}_0$  mesure la probabilité que la particule, observée en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t > t_0$ , provienne du voisinage du point  $\mathbf{x}_0$  dans l'élément de volume  $d\mathbf{x}_0$ , à un instant  $t_0 < t$ . La même fonction  $P(\mathbf{x}_0, t_0 \rightarrow \mathbf{x}, t)$  répond aux problématiques de ces deux situations.



Soit  $\tau$  un temps infinitésimal, une particule en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  est déplacée en  $\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau)$  à l'instant  $t + \tau$  et une particule en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  provient de la position  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}, \tau)$  à l'instant  $t - \tau$ ; le déplacement infinitésimal  $\boldsymbol{\xi}(\tau)$  peut être étudié sur la base d'une modélisation microscopique de la dynamique des particules. Au niveau macroscopique, les déplacements microscopiques  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau)$  sont des variables aléatoires dont nous supposons les deux premiers moments connus :  $\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) \rangle$  et  $\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) \otimes \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) \rangle$ ; les moyennes  $\langle \rangle$  sont associées au caractère stochastique des processus de fluctuations et collisions. Connaissant la densité de probabilité de présence  $P(\mathbf{x}, t)$ , à l'instant  $t$  en tout point de l'espace des  $\mathbf{x}$ , comment calculer la nouvelle densité  $P(\mathbf{x}, t \pm \tau)$ , en tout point de l'espace des  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t \pm \tau$ , résultant des déplacements microscopiques  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau)$  de chaque particule durant la durée infinitésimale  $\tau$ ? La probabilité qu'une particule initialement en  $\mathbf{s}$  à l'instant  $t$  soit en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t + \tau$  est donnée par :

$$P(\mathbf{s}, t \rightarrow \mathbf{x}, t + \tau) = \langle \delta[\mathbf{x} - (\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \tau))] \rangle$$

La probabilité qu'une particule en  $\mathbf{s}$  à l'instant  $t$  provienne du point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t - \tau$  est donnée par :

$$P(\mathbf{x}, t - \tau \rightarrow \mathbf{s}, t) = \langle \delta[(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau)) - \mathbf{s}] \rangle$$

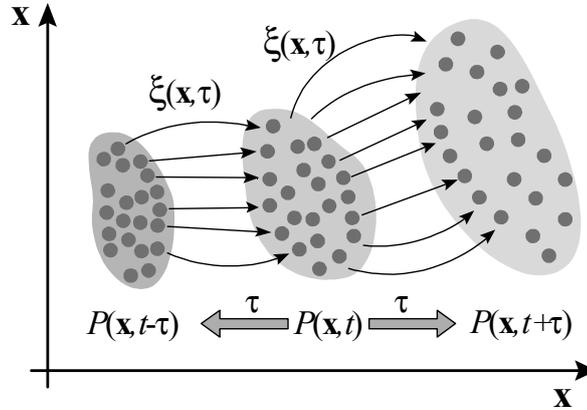
où  $\delta[\ ]$  représente la distribution de Dirac et nous avons considéré un processus invariant par translation dans le temps. Ainsi, les probabilités  $P(\mathbf{x}, t \pm \tau)$  sont obtenues en sommant sur toutes les positions  $\mathbf{s}$  à l'instant  $t$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\tau} P(\mathbf{x}, t + \tau) &= \int \langle \delta[(\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \tau)) - \mathbf{x}] \rangle P(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \\ P(\mathbf{x}, t) \xleftarrow{\tau} P(\mathbf{x}, t - \tau) &= \int \langle \delta[\mathbf{s} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau))] \rangle P(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \end{aligned}$$

La variation  $P(\mathbf{x}, t \pm \tau) - P(\mathbf{x}, t)$  et les déplacements microscopiques  $\boldsymbol{\xi}$  sont supposés suffisamment petits pour permettre un développement de Taylor des *propagateurs direct*,  $\langle \delta[\mathbf{x} - (\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi})] \rangle$ , et *inverse*,  $\langle \delta[\mathbf{s} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})] \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle \delta[(\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \tau)) - \mathbf{x}] \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) - \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \tau) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \tau) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}, \tau) \rangle}{2} \cdot \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + O[\xi^3] \\ \langle \delta[\mathbf{s} - (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau))] \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) \rangle}{2} \cdot \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + O[\xi^3] \end{aligned}$$

Les dérivées par rapport à la position  $\mathbf{x}$  peuvent être prises par rapport à la position générique  $\mathbf{s}$ .



La fonction de distribution  $P(\mathbf{x}, t \pm \tau)$ , à l'issue de la déformation décrite par le champ de déplacements aléatoires  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau)$ , de déplacements moyens, le vecteur  $\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle$  et le tenseur  $\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \otimes \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle$ , est donc donnée par :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, t + \tau) &\approx \int P(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int P(\mathbf{s}, t) \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d\mathbf{s} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int P(\mathbf{s}, t) \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \otimes \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d\mathbf{s} \\ P(\mathbf{x}, t - \tau) &\approx \int P(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int P(\mathbf{s}, t) \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d\mathbf{s} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int P(\mathbf{s}, t) \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \otimes \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d\mathbf{s} \end{aligned}$$

Le théorème d'intégration par partie est ensuite utilisé sur chaque terme pour éliminer toutes les dérivées de distributions de Dirac, permettant ainsi d'intégrer les sommes et d'obtenir le résultat final, le taux de variation temporelle de la distribution  $(P(\mathbf{x}, t \pm \tau) - P(\mathbf{x}, t))/\tau$ . Ainsi, nous obtenons l'**équation de Fokker-Planck** pour prédire l'avenir.

$$\text{Fokker-Planck: } \boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle}{\tau} P + \frac{\partial \partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \otimes \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle}{2\tau} P}$$

lorsque le présent est donné, et l'**équation de Kolmogorov** pour reconstruire le passé.

$$\text{Kolmogorov: } \frac{\partial P}{\partial t_0} = - \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) \rangle}{\tau} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_0} - \frac{\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) \otimes \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) \rangle}{2\tau} \cdot \frac{\partial \partial P}{\partial \mathbf{x}_0 \partial \mathbf{x}_0}$$

lorsque le présent est donné. L'équation de Fokker-Planck décrit l'évolution comme la divergence d'un flux local,  $(\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle / \tau) P + \partial / \partial \mathbf{x} (\langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \rangle / 2\tau) P$ , présentant deux termes, un terme de convection et un terme

de dérive. Dans le cadre de l'analyse des plasmas nous étudierons deux équations de Fokker-Planck, l'équation cinétique et l'équation de transport,

$$\begin{aligned} \text{Cinétique} & : \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[ \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} f - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} f \right] \\ \text{Transport} & : \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[ \frac{\langle \delta \mathbf{r} \rangle}{\delta t} n - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{r} \otimes \delta \mathbf{r} \rangle}{2\delta t} n \right] \end{aligned}$$

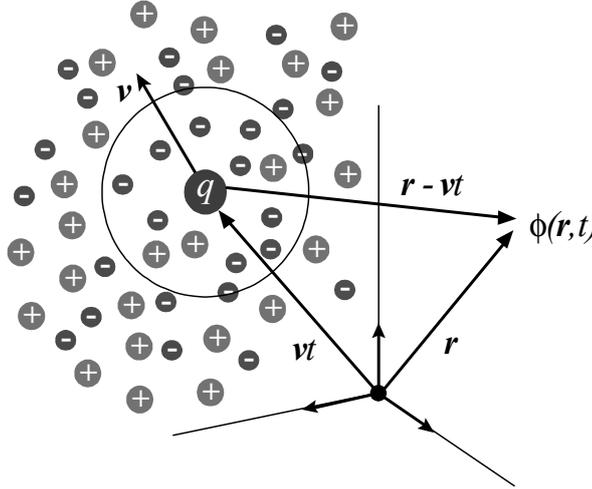
associées à l'évolution des densités de probabilités  $f(\mathbf{v}, t)$  et  $n(\mathbf{r}, t)$  dans les espaces des *vitesse*  $\mathbf{v}$  et *positions*  $\mathbf{r}$ . Les incréments de variations d'états  $\xi$  étant ici notés  $\delta \mathbf{v}$  et  $\delta \mathbf{r}$ ;  $\delta t$  indiquant le temps  $\tau$ .

## 4.4 Debye and Landau Spheres

Considérons une particule de charge  $q$  et de vitesse  $\mathbf{v}$  au sein d'un milieu diélectrique de permittivité  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ , la densité volumique de charge  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et sa représentation de Fourier  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$  sont données par :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \rightarrow \rho(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{r} dt \rho(\mathbf{r}, t) \exp -j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = 2\pi q\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$$

L'équation de Maxwell-Gauss  $\nabla \cdot \epsilon \cdot \mathbf{E} = \rho$  étant linéaire, elle se réduit à une simple équation algébrique dans l'espace de Fourier  $(\mathbf{k}, \omega)$ .



$$\begin{aligned} \nabla \cdot \epsilon \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi \end{aligned} \rightarrow \mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{k} \tilde{\phi}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi q\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$$

Ainsi, le potentiel électrostatique généré par une particule de charge  $q$  et de vitesse  $\mathbf{v}$  s'exprime suivant la relation :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} q \int d\mathbf{k} d\omega \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{k}} \exp j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

Dans le cas d'un plasma isotrope la permittivité électrique est un scalaire dont l'expression peut être déduite des relations déterminant le courant de polarisation  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{P} / \partial t \rightarrow \mathbf{P} = -j\omega^{-1} \mathbf{J}$ ; ainsi comme  $\epsilon \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  nous pouvons utiliser l'expression obtenu lors de l'étude des plasmons et des phonons dans un plasma isotrope, pour chaque population :

$$\text{Polarisation} : \quad \mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)}{j\omega} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)}{\underbrace{k^2 \lambda_D^2}_{\text{compressibilité}} - \underbrace{\omega^2 / \omega_p^2}_{\text{inertie}}}$$

Si nous considérons une particule telle que  $v \ll \sqrt{k_B T / m} \rightarrow \omega \sim kv \ll k\sqrt{k_B T / m} \sim k\lambda_D \omega_p$  la permittivité décrivant la réponse de la population considérée à  $q$  est donc simplement :  $\epsilon = \epsilon_0 \mathbf{I} (1 + k^{-2} \lambda_D^{-2})$  et le potentiel  $\phi(\mathbf{r}, t)$  de la charge  $q$  au sein d'un plasma composé d'électrons et d'ion :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \sum_{p=e,i} \int d\mathbf{k} \frac{\exp j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{k^2 + \lambda_{Dp}^{-2}}$$

La restriction de l'analyse à la réponse électronique et une intégration suivant un système de coordonnées sphériques  $d\mathbf{k} = k \sin \theta d\varphi k d\theta dk$ ,

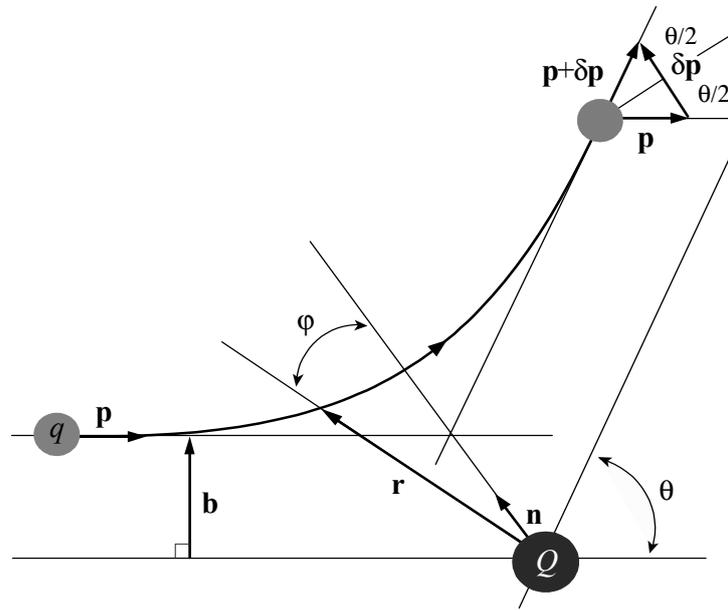
$$\int k \sin \theta d\varphi k d\theta dk \frac{\exp jk \|\mathbf{r} - \mathbf{v}t\| \cos \theta}{k^2 + \lambda_{De}^{-2}} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2}{k^2 + \lambda_{De}^{-2}} dk \frac{\sin k \|\mathbf{r} - \mathbf{v}t\|}{k \|\mathbf{r} - \mathbf{v}t\|} = 2\pi^2 \frac{\exp -\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{v}t\|}{\lambda_{De}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{v}t\|}$$

conduisent alors à l'expression du potentiel coulombien écranté pour une charge  $q$  au repos :

$$\text{Ecrantage électronique : } \boxed{\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp -\frac{r}{\lambda_{De}}}$$

Ainsi au voisinage de chaque particule dans un plasma, au-delà d'une longueur de Debye  $\lambda_D$ , le potentiel coulombien de cette particule est écranté et peut être négligé. La question se pose alors de la dynamique au sein de la *sphère de Debye* ainsi identifiée.

Considérons une particule chargée, de masse  $m$  et de charge  $q$ , interagissant avec un centre diffuseur constitué par une charge fixe  $Q$ . Initialement ( $t = -\infty$ ), bien avant l'interaction ( $t \approx 0$ ), cette particule possède une impulsion (quantité de mouvement)  $\mathbf{p}$ , puis, bien après ( $t = +\infty$ ) l'interaction coulombienne avec la charge  $Q$ , une impulsion  $\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$ .



Entre ces deux états asymptotiques la particule décrit une trajectoire hyperbolique. Notons  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire dirigeant l'axe de symétrie de cette hyperbole,  $\mathbf{b}$  le vecteur paramètre d'impact et  $\theta$  l'angle de déflexion entre les états asymptotiques  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$ . Le vecteur position de la charge mobile par rapport à la charge fixe est noté  $\mathbf{r}(t)$  et l'angle entre  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{n}$  est repéré par  $\varphi(t)$ .

L'incrément total d'impulsion  $\delta\mathbf{p}$  est égal à la somme des incréments infinitésimaux entre  $t = +\infty$  et  $t = -\infty$ .

$$\delta\mathbf{p} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qQ\mathbf{r}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3(t)} dt = \delta p \mathbf{n}$$

La trajectoire hyperbolique étant symétrique par rapport à  $\mathbf{n}$  le transfert total d'impulsion perpendiculairement à  $\mathbf{n}$  est nul. En effet, la projection de la force de Coulomb perpendiculairement à  $\mathbf{n}$  est alternativement positive (négative) puis négative (positive) sur les deux demi-hyperboles. Ainsi le transfert total est dirigé suivant  $\mathbf{n}$ . La valeur de cette variation d'impulsion  $\delta p$  peut être exprimée en fonction de l'angle de déflexion  $\theta$  en considérant la relation  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r \cos \varphi$ .

$$\delta p = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{qQ \cos \varphi(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2(t)} dt = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{\cos \varphi}{r^2 \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|} d\varphi$$

L'interaction coulombienne étant une force centrale, le moment cinétique est conservé :

$$|m\mathbf{v}(t) \times \mathbf{r}(t)| = mr^2 |d\varphi/dt| = |\mathbf{p} \times \mathbf{b}| = pb$$

où  $b = |\mathbf{b}|$ . Substituons la valeur de  $r^2 |d\varphi/dt|$  ainsi obtenue dans la quadrature  $\delta p$ , la variation totale d'impulsion s'exprime alors comme :

$$\text{Conservation du moment angulaire : } \frac{\delta p}{p} = \frac{qQm}{2\pi\epsilon_0 b} \cos \theta/2$$

, ainsi  $\delta p/p = (\lambda_L/b) \cos \theta/2$  où pour une impulsion incidente  $p$  donnée nous avons défini la distance minimum d'approche, correspondant au choc frontal,  $b = 0 \rightarrow \theta = \pi$  aussi appelée longueur de Landau  $\lambda_L$ .

$$\text{Longueur de Landau : } \lambda_L(p) \equiv \frac{qQm}{2\pi\epsilon_0 p^2}$$

Le problème que nous étudions est conservatif car le potentiel coulombien est indépendant du temps, l'énergie cinétique initiale à  $t = -\infty$  est donc égale à l'énergie cinétique finale à  $t = +\infty$ . L'énergie potentielle est nulle pour ces deux états asymptotiques ( $r = \pm\infty$ ) ainsi  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}|$ . Le triangle  $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{p}]$ , illustré sur la figure, est donc isocèle, la hauteur et la médiane abaissée sur  $\delta\mathbf{p}$  sont confondues et  $\delta p$  s'exprime simplement en fonction de l'angle de déflexion  $\theta$ :

$$\text{Conservation de l'énergie : } \frac{\delta p}{p} = 2 \sin \theta/2$$

. Eliminons l'angle de déflexion  $\theta$  entre les identités  $\delta p = \lambda_L p \cos(\theta/2)/b$  et  $\delta p = 2p \sin(\theta/2)$  et exprimons la variation d'impulsion  $\delta p$ , résultant de la diffusion Rutherford sur un centre coulombien fixe, en fonction de l'impulsion initiale  $p$  et du paramètre d'impact  $b$ .

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{2 \frac{\lambda_L}{b}}{\sqrt{4 + \left(\frac{\lambda_L}{b}\right)^2}}$$

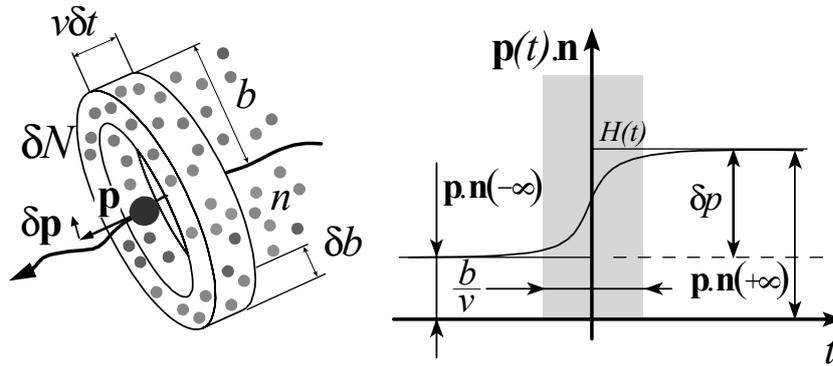
Compte tenu de la relation :  $\mathbf{n} \equiv \cos(\theta/2) \mathbf{b}/b - \sin(\theta/2) \mathbf{p}/p$  la variation totale d'impulsion  $\delta p \mathbf{n}$  peut aussi s'exprimer comme :

$$\text{Diffusion Rutherford : } \frac{\delta \mathbf{p}}{p} = \left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 \frac{\mathbf{b}}{\lambda_L} - \left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 \frac{\mathbf{p}}{2p}$$

La force de Coulomb décroissant comme le carré de la distance entre les charges, l'essentiel de la variation d'impulsion s'effectue dans la partie courbe de la trajectoire hyperbolique, les deux branches asymptotiques pouvant être assimilées à des mouvements de translation uniforme :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(-\infty) + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \frac{\mathbf{r}(u)}{r^3(u)} du \rightarrow \mathbf{p}(t) \approx \mathbf{p}(-\infty) + H(t) \delta \mathbf{p}$$

où  $H(t)$  est une distribution de Heaviside, centrée sur l'instant  $t = 0$  ( $H(t < 0) = 0$ ,  $H(t > 0) = +1$ ), primitive de la distribution de Dirac  $\delta$  ( $dH/dt = \delta(t)$ ). Dans un plasma, une particule n'interagit pas avec une autre particule unique, mais avec un ensemble de centres diffuseurs. Pendant une durée infinitésimale  $\delta t$  il faut donc sommer les effets de l'ensemble des collisions avec ces centres diffuseurs sur le trajet  $v\delta t$  où  $v = p/m$ . La densité volumique de centres diffuseurs  $n$  est supposée uniforme, pendant une durée infinitésimale  $\delta t$  le nombre d'interactions  $\delta N$  avec les centres situés entre une distance  $b$  et une distance  $b + \delta b$  est égal à  $\delta N = nv\delta t 2\pi b \delta b$ .



Le taux de variation temporelle de l'impulsion est proportionnel à la somme suivant  $b$  du produit du transfert par un centre unique  $\delta p(b)$  par le nombre de centres diffuseurs  $\delta N(b) = nv\delta t 2\pi b \delta b$  dans la couronne cylindrique de rayons  $b$  et  $b + \delta b$  et d'épaisseur  $v\delta t$ . La fonction  $\delta p(b)$  est une fonction décroissante avec  $b$  qui présente un maximum  $\delta p = 2p$  en  $b = 0$ . Par contre, la fonction  $\delta N(b)/\delta b \delta t$  est une fonction croissante qui est nulle en  $b = 0$  et devient infinie lorsque  $b$  tend vers l'infini. Ce comportement à l'infini ne présente pas de signification physique car nous savons que l'interaction coulombienne dans un plasma est exponentiellement faible au-delà de la longueur de Debye  $\lambda_D$  (chapitre suivant). Il est donc inutile de sommer le produit  $\delta p(b) \delta N(b)/\delta b \delta t$  au-delà de  $b = \lambda_D$ ; il est tout aussi inutile de prendre en compte les petites valeurs de  $b$  entre 0 et  $\lambda_L$  car le facteur  $\delta N(b)/\delta b \delta t$  est négligeable pour cette gamme de paramètres d'impacts. Physiquement cette dernière

approximation traduit le fait suivant : les collisions présentant un petit paramètre d'impact ( $b \approx 0$ ) sont certes violentes ( $\delta p \approx p$ ), mais elles sont extrêmement rares ( $\delta N(b)/\delta b \delta t \approx 0$ ).

Le facteur géométrique  $\delta N(b)/\delta b \delta t$  est dominant par rapport au facteur dynamique  $\delta p(b)$  il est donc légitime de négliger les collisions aux petits paramètres d'impacts ( $b < \lambda_L$ ) et de considérer l'approximation des petits transferts d'impulsion :  $\lambda_L/b < 1 \rightarrow \delta p/p < 1$  ou approximation de Landau.

$$\text{Diffusion Landau : } \frac{\delta \mathbf{p}}{p} = \frac{\lambda_L}{b} \frac{\mathbf{b}}{b} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_L^2}{b^2} \frac{\mathbf{p}}{p} + O \left[ \frac{\lambda_L^3}{b^3} \right] \dots$$

Pour certaines conditions de température, la description classique tombe en défaut pour les petits paramètres d'impacts, lorsque la longueur de de Broglie de la particule  $\lambda_B = \hbar/p$  est plus grande que la longueur de Landau  $\lambda_L = qQm2\pi\epsilon_0 p^2$  ; les collisions aux petits paramètres d'impacts doivent alors être décrites dans un cadre quantique.

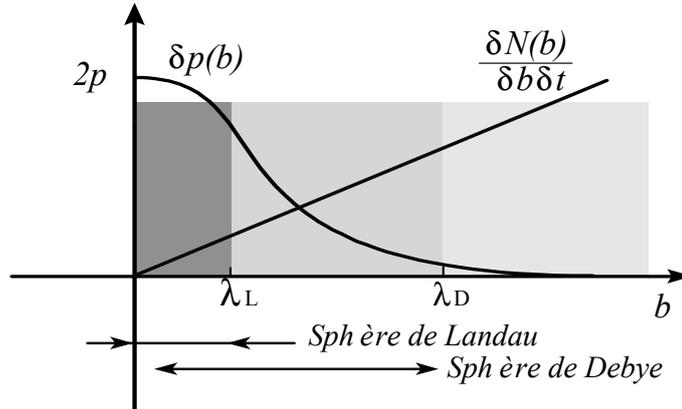
Mais, l'argument justifiant la dominance des collisions aux grands  $b$  reste valable, aussi la somme sur  $b$  doit alors être restreinte à l'intervalle  $\lambda_B < b < \lambda_D$ . Définissons la longueur de coupure  $\lambda_C$  :

$$\lambda_C \equiv \max \left[ \lambda_L = \frac{qQm}{2\pi\epsilon_0 p^2} \approx \frac{10^{-9} [\text{m}]}{T [\text{eV}]}, \lambda_B = \frac{\hbar}{p} \approx \frac{10^{-10} [\text{m}]}{\sqrt{T [\text{eV}]}} \right]$$

où  $T$  désigne la température.

Sphère de Landau	$r < \lambda_L = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 k_B T}$	collisions aux grands angles $\phi \sim \frac{1}{r} \rightarrow \frac{\delta p}{p} \sim 1$
Sphère de Debye	$\lambda_L < r < \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{nq^2}}$	collisions aux petits angles $\phi \sim \frac{1}{r} \rightarrow \frac{\delta p}{p} \sim \frac{\lambda_L}{b} < 1$
Sphère de quasi-neutre	$\lambda_L < \lambda_D < r$	réponse diélectrique $\phi \sim \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r} \rightarrow \frac{\delta p}{p} \sim 0$

Dans la suite de cette étude nous considérerons uniquement les collisions aux grands paramètres d'impact :  $\lambda_C < b < \lambda_D$ , indépendamment de la nature classique ou quantique de la longueur de coupure  $\lambda_C$ .



Afin d'évaluer la friction coulombienne  $\langle \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$ , il est nécessaire de sommer pendant une durée infinitésimale  $\delta t$  l'effet total de l'ensemble des collisions se déroulant sur le trajet  $v \delta t$ . Il faut donc intégrer les effets de tous les centres diffuseurs se trouvant dans une couronne cylindrique d'épaisseur  $v \delta t$ , de rayon maximum égal à la longueur de Debye  $\lambda_D$  et de rayon minimum égal à la longueur de coupure  $\lambda_C$  ; cette somme est notée  $\langle \rangle$ .

Une telle intégrale sur le vecteur  $p \lambda_L \mathbf{b} / b^2$  donne un résultat nul car les probabilités de déflexion vers le haut, vers le bas, vers la gauche et vers la droite sont égales : considérons la représentation polaire ( $\cos \alpha, \sin \alpha$ ) du vecteur unitaire  $\mathbf{b}/b$  dans le plan perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{p}$  ; la moyenne sur l'angle  $\alpha$  donne  $\langle \mathbf{b}/b \rangle = \mathbf{0}$ . Ainsi le terme de friction coulombienne  $\langle \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$  se réduit à une composante unique suivant  $\mathbf{p}$ .

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} = - \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \frac{\delta N}{\delta b \delta t} \frac{\lambda_L^2}{2b^2} \mathbf{p} db = - \mathbf{p} \frac{\pi n p \lambda_L^2}{m} \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \frac{db}{b} = - \frac{n m q^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2} \frac{\mathbf{p}}{p^3}$$

Nous avons introduit le *logarithme coulombien*  $\Lambda \equiv \log [\lambda_D / \lambda_C]$ , typiquement  $10 < \Lambda < 20$  pour un plasma de tokamak. Définissons la *fréquence de collision*  $\nu$ .

$$\text{Fréquence de collision : } \nu(v) \equiv \frac{n q^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^2 v^3} \rightarrow \nu \approx \left[ \frac{10^{-5}}{\text{Hz}} \right] \left[ \frac{n}{\text{cm}^{-3}} \right] \left[ \frac{\text{eV}}{m v^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

Ainsi l'évolution moyenne de l'impulsion s'exprime comme une simple friction suivant  $\mathbf{p}$  si nous assimilons les bilans précédent à des bilans infinitésimaux :

$$\text{Friction : } \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} = -\nu(p) \mathbf{p} \rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nu(p) \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} = p(t) \frac{\mathbf{p}_0}{p_0}, \quad t(p) = \int_p^{p_0} \frac{du}{u \nu(u)}$$

Pour le calcul du tenseur de diffusion  $\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle / 2\delta t$ , à l'ordre le plus bas en  $\lambda_L/b < 1$ , nous considérerons uniquement les termes suivant  $\mathbf{b}\mathbf{b}/b^2$ , les termes en  $\mathbf{b}\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p}\mathbf{p}$  étant d'ordres supérieurs en  $\lambda_L/b$ . La représentation polaire du vecteur unitaire  $\mathbf{b}/b$  dans le plan perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{p}$  permet d'établir :

$$\frac{\mathbf{b}}{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \rightarrow \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \frac{\sin 2\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\langle \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} \right\rangle = \frac{\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}}{2p^2}$$

où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité. L'expression du coefficient de diffusion se réduit donc à :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} = \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} \frac{\delta N}{2\delta b \delta t} \left( p \frac{\lambda_L}{b} \right)^2 \left\langle \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{b^2} \right\rangle db = \frac{nmq^2 Q^2 \Lambda}{8\pi \varepsilon_0^2 p^3} (\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p})$$

La forme fonctionnelle des coefficients de friction et de diffusion nous amène à définir la *fréquence de collision*  $\nu$ .

$$\text{Fréquence de collision: } \nu(v) \equiv \frac{nmq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m^2 v^3} \rightarrow \nu \approx \left[ \frac{10^{-5}}{\text{Hz}} \right] \left[ \frac{n}{\text{cm}^{-3}} \right] \left[ \frac{\text{eV}}{mv^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

Ainsi les deux coefficients, appelés coefficients de Chandrasekhar, s'expriment comme une simple friction et un tenseur isotrope dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{p}$ .

$$\text{Friction: } \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} = -\nu(p) \mathbf{p}, \text{ Diffusion: } \frac{\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} = \nu(p) \frac{p^2 \mathbf{I} - \mathbf{p}\mathbf{p}}{2}$$

Ce résultat classique appelle plusieurs remarques.

- Notons d'abord une relation remarquable entre le coefficient de diffusion et le coefficient de friction :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left[ \frac{\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}}{2p^3} \right] = -\frac{\mathbf{p}}{p^3} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} = \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t}$$

cette relation sera mise à profit lors de la construction et de l'étude de l'équation cinétique de Landau.

- Nous venons de traiter le cas de la diffusion Rutherford sur un centre fixe, or dans un plasma thermonucléaire toutes les particules sont en mouvement, aussi le modèle précédent doit être complété pour décrire la dynamique des populations chargées cibles. Une telle étude complète est présentée dans le chapitre consacré aux relaxations cinétiques. Néanmoins, compte tenu de la différence de masses entre électrons et ions et de la différence de vitesses moyennes résultante, les résultats précédents sont pertinents pour décrire la cinétique des électrons dans les tokamaks.

- Le logarithme coulombien pour les transferts d'impulsion électron-ion, dans la gamme des températures caractéristiques du bord et du centre d'un plasma de tokamak est donné par : dans la SOL :  $\Lambda \approx 23.4 - 1, 15 \times \ln n [\text{cm}^{-3}] + 3.45 \times \ln T [\text{eV}]$  et au centre :  $\Lambda \approx 25.3 - 1, 15 \times \ln n [\text{cm}^{-3}] + 2.30 \times \ln T [\text{eV}]$ .

- au-delà de la longueur de Debye  $\lambda_D$ , les interactions collisionnelles sont négligeables mais les interactions collectives doivent être prises en compte. Ces interactions se manifestent, entre autres, par l'émission spontanée d'ondes plasmas. Pour une particule se déplaçant à vitesse constante cette émission Cerenkov induit un ralentissement supplémentaire dont la dépendance fonctionnelle en les différents paramètres est similaire au cas collisionnel. Ce terme supplémentaire se traduit donc uniquement par une faible modification du logarithme coulombien  $\Lambda$ .

- Il existe, non pas une fréquence de collision coulombienne dans un plasma thermonucléaire, mais un ensemble de fréquences de collisions correspondant aux interactions : ion-ion, électron-électron, électron-ion et aux processus tels que : le ralentissement, l'isotropisation et la thermalisation. La fréquence  $\nu$  identifiée dans ce paragraphe est la fréquence d'isotropisation électrons-ions pour une vitesse donnée. La moyenne de cette fréquence sur une distribution de Maxwell :

$$\nu_{e \rightarrow i} \equiv \frac{Zn_e e^4 \Lambda}{3\varepsilon_0^2 m_e^2} \left( \frac{2\pi k_B T_e}{m_e} \right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1.6 \times 10^{-15} [\text{Hz}] \times \frac{n [\text{m}^{-3}]}{T [\text{keV}]^{\frac{3}{2}}}$$

et son adaptation au cas ionique permettent de définir les fréquences de collisions électronique et ionique standards :  $\nu_{e \rightarrow e} \approx \nu_{e \rightarrow i}$ ,  $\sqrt{m_i} \nu_{i \rightarrow i} \approx \sqrt{m_e} \nu_{e \rightarrow i}$ ,  $m_i \nu_{i \rightarrow e} = m_e \nu_{e \rightarrow i}$  où le facteur  $\sqrt{m_e/m_i}$  résulte du rapport des vitesses thermiques qui déterminent le flux incident donc le taux de collisions.

La fréquence  $\nu_{ei}$  est extrêmement importante en physique des plasmas thermonucléaires car elle détermine les conductivités électrique et thermique électronique (en l'absence de turbulence). Le fait que cette fréquence diminue avec  $T$  peut paraître contre intuitif en première analyse, mais une réflexion sur la nature des transferts lors d'une collision permet de préciser ce point : le transfert d'impulsion dans une collision est proportionnel au temps d'interaction, or plus un électron est rapide plus ce temps est court, la quantité de mouvement échangé diminue donc avec la vitesse. Nous venons de traiter le cas de la diffusion Rutherford sur un centre fixe, or dans un plasma toutes les particules sont en mouvement, aussi le modèle précédent doit être complété pour décrire la dynamique des populations chargées cibles. • Le logarithme coulombien pour les transferts d'impulsion électron-ion, dans la gamme des températures caractéristiques du bord et du centre d'un plasma de tokamak est donné par : dans la SOL :  $\Lambda \approx 23.4 - 1, 15 \times \ln n [\text{cm}^{-3}] + 3.45 \times \ln T [\text{eV}]$  et au centre :  $\Lambda \approx 25.3 - 1, 15 \times \ln n [\text{cm}^{-3}] + 2.30 \times \ln T [\text{eV}]$ .

## 4.5 Scattering cross section

Soient deux particules, de masses  $m_1$  et  $m_2$ , décrites par leur positions,  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , leurs vitesses,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ , et leurs quantités de mouvement:  $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2$  dans un référentiel inertiel. L'énergie de ce système de deux particules est donnée par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle  $U$  d'interaction entre les deux particules.

$$\text{Energie : } E = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Ce problème d'interaction particule-particule est considérablement simplifié si nous introduisons les changements de variables :

- *Masses effective et totale*  $[m_1, m_2] \rightarrow [\mu, M]$ :

$$\text{Masse effective : } \frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \text{ Masse totale : } M \equiv m_1 + m_2$$

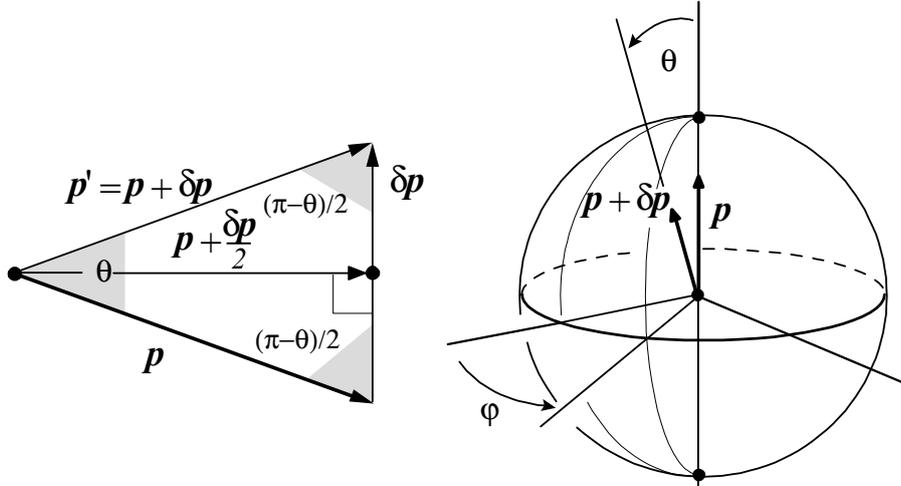
- *Positions relative et du centre de masses*  $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] \rightarrow [\mathbf{r}, \mathbf{R}]$ :

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r}$$

- *Vitesses relative et du centre de masses*  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \rightarrow [\mathbf{v}, \mathbf{V}]$ :

$$\mathbf{V} \equiv \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{v}, \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}$$

Les variables relatives  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$  sont associées à une particule fictive de masse  $\mu$ , la *masse effective*, et de quantité de mouvement  $\mathbf{p} = \mu\mathbf{v}$ .



Les variables du centre de masse  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{V}$  décrivent la position et la vitesse du centre de masse auquel nous associons la masse  $M$ .

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}, m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2} \rightarrow M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0, \mu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

L'énergie de ce système se décompose ainsi en deux parties découplées correspondant à la particule fictive de masse  $\mu$  et vitesse  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  soumise au potentiel  $U(\mathbf{r})$  et au centre de masse  $M$  effectuant une translation uniforme de vitesse  $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ .

$$\text{Energie : } E = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(\mathbf{r})$$

Les problèmes associés au mouvement relatif  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  et au mouvement du centre de masse  $(\mathbf{R}, \mathbf{V})$  sont conservatifs, le mouvement barycentrique  $\mathbf{R}(t)$  est intégrable, c'est une translation uniforme:  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{V}(t - t_0)$  et en particulier:  $\mathbf{P}(t = -\infty) = \mathbf{P}(t = +\infty)$ . Le problème associé au mouvement relatif  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  se réduit au mouvement d'une masse au sein d'un potentiel statique s'annulant à l'infini, aussi la norme de la vitesse relative  $|\mathbf{v}|$  avant ( $t = -\infty$ ) et après ( $t = +\infty$ ) la collision reste inchangée:  $\mathbf{p}(t = -\infty) \neq \mathbf{p}(t = +\infty)$  mais  $U(\mathbf{r} = \pm\infty) = 0 \rightarrow \mathbf{p}^2(t = -\infty) = \mathbf{p}^2(t = +\infty)$ . Le seul effet de la collision est donc une rotation de la vitesse relative  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\mu$ . Nous noterons  $\delta$  les variations des quantités entre les deux états asymptotiques

( $t \rightarrow \pm\infty$ ) avant ( ) et après (') la collision:  $\delta\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ,  $\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v} \neq 0$ ,  $\delta|\mathbf{v}| = 0$ . Ainsi  $\delta\mathbf{v}_1 = \mu\delta\mathbf{v}/m_1$ ,  $\delta\mathbf{v}_2 = -\mu\delta\mathbf{v}/m_2$  et compte tenu de l'invariance de la norme de la vitesse relative  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}|$ , les trois vecteurs  $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{v})$  forment un triangle isocèle de base  $\delta\mathbf{v}$ . On a donc l'identité :

$$\left(\mathbf{v} + \frac{\delta\mathbf{v}}{2}\right) \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \rightarrow \delta v = 2v \sin \frac{\theta}{2} \rightarrow \delta p = 2p \sin \frac{\theta}{2}$$

la variation  $\delta v$  et l'angle de rotation  $\theta$  ne sont pas des variables indépendantes. L'analyse d'une collision sur la base des 4 équations que constituent la conservation de l'énergie et la conservation de l'impulsion, conduit donc aux relations:  $\delta\mathbf{p} \equiv \delta\mathbf{p}_1 = -\delta\mathbf{p}_2 = \mu\delta\mathbf{v}$  où le vecteur unitaire  $\mathbf{u} = \delta\mathbf{v}/\delta v$  reste inconnu, en effet il y a 6 inconnues et nous avons utilisé 4 relations (impulsion et énergie), le problème reste donc indéterminé au sein d'une variété de dimension deux qui est simplement une sphère  $|\mathbf{u}| = 1$ ,  $\mathbf{v} + \delta v\mathbf{u}$  étant ainsi repéré par ses deux angle sphérique  $(\theta, \varphi)$  par rapport à  $\mathbf{v}$ . Cette variation d'impulsion,  $\delta\mathbf{p} = \mu\delta v\mathbf{u}$ , entre les deux états asymptotiques ( $t = -\infty$ ) et ( $t = +\infty$ ) est associée à un échange d'énergie  $E' - E = 0$ .

$$E' - E = \frac{\mu}{2} (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})^2 - \frac{\mu}{2} \mathbf{v}^2 = \mu \left( \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + \frac{\delta v^2}{2} \right) = \frac{\delta p^2}{2\mu} - \delta p v \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

compte tenu de la relation  $(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}/2) \cdot \delta\mathbf{v} = 0$ . L'ensemble des relations ainsi obtenues est particulièrement utile pour élaborer l'équation de Boltzmann décrivant l'évolution cinétique d'une population de particules décrite par la fonction de distribution  $f(\mathbf{p}, t)$ , population  $f$  interagissant avec une population  $g$  à travers des collisions binaires. Considérons l'équation régissant l'évolution markovienne (master équation) de la fonction de distribution  $f(\mathbf{p}, t)$  ( $\int f d\mathbf{p} = 1$ )

$$\text{Boltzmann: } \boxed{\partial f(\mathbf{p}, t) / \partial t = \int W(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') f(\mathbf{p}', t) d\mathbf{p}' - \int W(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) f(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}'}$$

décrivant une population de particules interagissant avec une autre population décrite par la distribution  $g(\mathbf{q})$  ( $\int g d\mathbf{q} = 1$ ) dans l'espace des impulsions  $\mathbf{q}$  et de densité homogène  $n$  [ $\text{m}^{-3}$ ] dans l'espace des configurations. Si l'analyse de la dynamique est réduite aux collisions à deux particules alors la probabilité de transition  $W$  est nécessairement de la forme.

$$\begin{aligned} W(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) d\mathbf{p}' &= d\delta\mathbf{p} \int d\mathbf{q} w(\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{q} - \delta\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}, \mathbf{q}) n g(\mathbf{q}) \\ W(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') d\mathbf{p}' &= d\delta\mathbf{p} \int d\mathbf{q} w(\mathbf{p}, \mathbf{q} \leftarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{q} - \delta\mathbf{p}) n g(\mathbf{q} - \delta\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Cette écriture de la probabilité de transition sous la forme  $w(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{q} - \delta\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}, \mathbf{q})$  prend donc en compte la conservation de l'impulsion; la conservation de l'énergie,  $E - E' = 0$ , implique que la forme fonctionnelle finale de  $w$  soit du type :

$$\text{Section efficace de diffusion: } \boxed{w(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{q} - \delta\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mu^{-2} \frac{d\sigma(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{d\Omega} \delta(E - E')}$$

où  $d\sigma/d\Omega$  présente la dimension d'une surface et n'est autre que la section efficace de diffusion d'une masse  $\mu$  dans le potentiel  $U$ . En effet, la somme sur les échanges d'impulsion  $\delta\mathbf{p}$  possibles pour un  $\mathbf{p}$  donné est alors égale à :

$$\begin{aligned} \int w(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{q} - \delta\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}, \mathbf{q}) d\delta\mathbf{p} &= \int \mu^{-2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \delta \left( \frac{\delta p^2}{2\mu} - \delta p v \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) d\varphi d \left( \frac{\theta}{2} \right) (\delta p)^2 d\delta p \\ &= \int \mu^{-1} \frac{d\sigma}{d\Omega} \delta \left( \delta p - 2\mu v \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) d\varphi d\theta \delta p d\delta p \\ &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} v^2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) d\varphi d\theta = \int \frac{d\sigma(v, \theta, \varphi)}{d\Omega} v d\Omega \end{aligned}$$

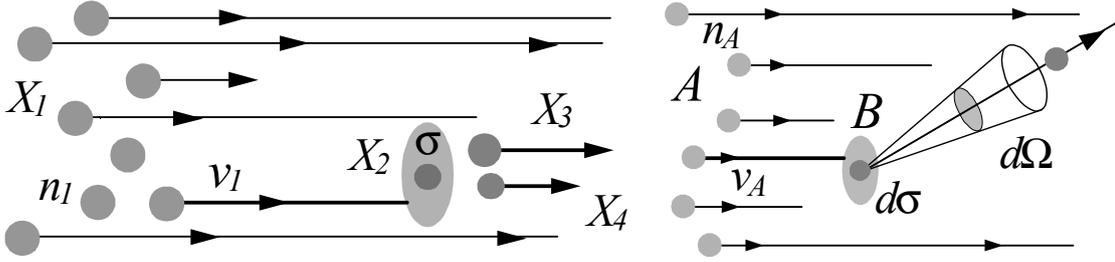
ainsi la vitesse  $v$  que multiplie la surface  $d\sigma$  et la densité  $n$  mesure un taux de diffusion angulaire  $nvd\sigma$  [ $\text{s}^{-1}$ ] conformément aux définitions classique et quantique de la section efficace de diffusion  $d\sigma/d\Omega$  présentées ci-dessous.

Considérons la figure ci-dessous représentant un flux de particules  $X_1$  réagissant sur une particule  $X_2$  telle que  $X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4$ . La particule  $X_2$  est au repos et exposée à un flux  $n_1 v_1$  [ $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ] de particules  $X_1$ , de vitesse  $v_1$  et densité  $n_1$ . Si cette cible unique  $X_2$  est constamment renouvelée, nous obtenons un régime stationnaire où le nombre de réactions durant un temps  $dt$  est proportionnel à  $dt$  et au flux incident  $n_1 v_1$ ; ainsi, l'information pertinente sur l'interaction  $X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4$  est obtenue en divisant ce nombre de réactions par le flux incident  $n_1 v_1$  et le temps  $dt$ . Ce rapport présente la dimension d'une surface et définit la *section efficace de réaction*  $\sigma$  :

$$\text{Section efficace de réaction: } \sigma \equiv \frac{\left[ \frac{\text{Nombre de } X_1 \text{ tels que } X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4}{\text{Par unité de temps } dt} \right]}{\left[ \frac{\text{Nombre de } X_1 \text{ incidents sur une particule } X_2}{\text{Par unité de surface } dS \text{ et unité de temps } dt} \right]}$$

comme le coefficient de proportionnalité entre ce nombre de réactions par unité de temps sur une cible (supposée unique et constamment renouvelée) et le flux d'espèces projectiles  $n_1 v_1$ .

Considérons une collision non réactive donnant lieu à un échange d'impulsion entre des particules projectiles  $A$  et une particule cible unique  $B$  supposée au repos et constamment renouvelée pour assurer un régime stationnaire. La vitesse de l'un des projectiles  $A$ , après réaction sur la cible  $B$ , est paramétrée par deux angles  $\theta$  et  $\varphi$  décrivant la direction de sortie du projectile dans un repère sphérique centré sur la particule  $B$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  prenant leurs valeurs dans l'intervalle  $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ :  $A(\theta = 0, \varphi = 0) + B \rightarrow A(\theta, \varphi) + B$ .



La description de la collision nécessite la prise en compte d'un angle solide élémentaire de diffusion  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  et le nombre de particules  $A$  sortant durant un temps  $dt$  dans un angle solide  $d\Omega$  est proportionnel au flux incident  $n_A v_A$ ; ainsi, l'information pertinente sur la collision  $A/B$  est obtenue en divisant le flux angulaire sortant d'espèces  $A$  par le flux surfacique entrant d'espèces  $A$ ,  $n_A v_A$ . Ce rapport présente la dimension d'une surface ramenée à un angle solide et définit la *section efficace différentielle de collision* notée  $\sigma$  ou plus justement  $d\sigma/d\Omega$ :

$$\text{Section efficace de diffusion: } \frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\left[ \frac{\text{Nombre de particules } A \text{ diffusées dans } d\Omega}{\text{Par unité d'angle solide } d\Omega \text{ et unité de temps } dt} \right]}{\left[ \frac{\text{Nombre de particules } A \text{ incidents sur une particule } B}{\text{Par unité de surface } dS \text{ et unité de temps } dt} \right]}$$

La situation générique des interactions entre particules se présente suivant des configurations offrant une densité volumique de cibles  $B$  ou  $X_2$ . Considérons la figure suivante et un couple de particules réactives  $X_1$  et  $X_2$  tel que  $X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4$ , construisons une cible au repos constituée de particules  $X_2$  de densité  $n_2$ ; cette cible est soumise à un flux  $n_1 v_1$  de particules  $X_1$ , de vitesse  $v_1$  et densité  $n_1$ .

Le nombre de réactions  $dN$  par unité de temps  $dt$  et unité de volume  $dx dy dz$  est donné par  $dN/dx dy dz dt$ . Une telle configuration projectile  $X_1 \rightarrow$  cible  $X_2$  permet de définir la section efficace de réaction  $\sigma$  comme le coefficient de proportionnalité entre ce nombre de réactions par unité de temps et de volume  $dN/dx dy dz dt$  et la densité de l'espèce cible  $n_2$  que multiplie le flux d'espèces projectiles  $n_1 v_1$ . Le nombre de réactions  $dN$  étant nécessairement proportionnel aux deux quantités  $n_2$  et  $n_1 v_1$ . Ainsi, le taux de réactions est de la forme :

$$\text{Taux de réactions: } \left. \frac{dN}{dx dy dz dt} \right|_{X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4} \equiv n_2 n_1 v_1 \sigma(v_1) ,$$

et le coefficient de proportionnalité  $\sigma$  peut donc s'interpréter comme la surface effective d'interaction entre  $X_1$  et  $X_2$ .

La section efficace de la réaction  $X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4$  est donc définie par le rapport d'un nombre de particules réagissant sur un flux incident lorsque la densité de particules cibles est prise égale à l'unité, la vitesse  $v$  étant la vitesse relative du système  $[X_1, X_2]$ .

Considérons une collision élastique non réactive donnant lieu à un échange d'impulsions, la vitesse du projectile  $A$ , après interaction sur la cible  $B$ , est paramétrée par deux angles  $\theta$  et  $\varphi$  décrivant la direction de sortie du projectile dans un repère sphérique centré sur la cible,  $\theta$  et  $\varphi$ .

Pour ce type d'interaction, présentant une infinité de voies de sortie  $(\theta, \varphi)$ , la définition la section efficace nécessite la prise en compte d'un angle solide élémentaire de diffusion  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  et du nombre de particules  $d^2 n_A(\theta, \varphi)$  sortant, après l'échange d'impulsions, dans cet angle solide élémentaire  $d\Omega$ . La définition de la section efficace différentielle de diffusion angulaire  $d\sigma/d\Omega$  est ainsi donnée par :

$$\text{Taux de diffusion: } \left. \frac{dN_A(\theta, \varphi)}{dx dy dz dt d\Omega} \right|_{A+B \rightarrow A(\theta, \varphi)+B} \equiv v_A n_A n_B \frac{d\sigma}{d\Omega} .$$

La définition précédente peut s'interpréter comme le rapport du flux angulaire sortant sur le flux surfacique entrant. Partant de ces définitions, il est d'usage d'introduire la section efficace totale

$$\text{Section efficace totale : } \sigma_0(v) \equiv \int d\sigma$$

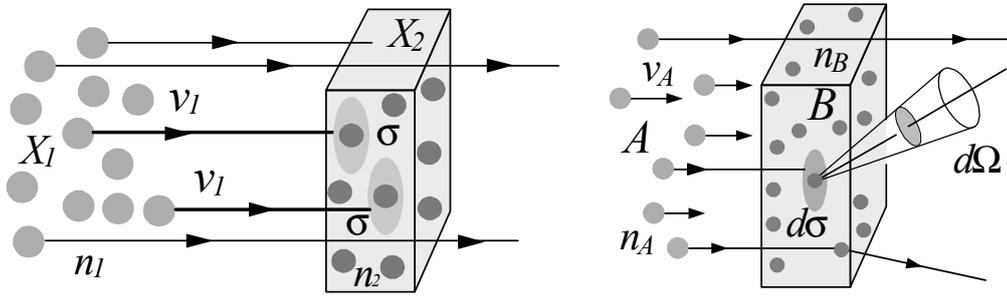
et la section efficace de transfert d'impulsion  $\sigma_1$ .  $\sigma_0$  peut être interprétée comme la valeur de la surface de section d'un obstacle ayant le même effet que le centre diffuseur en termes d'interception de flux.

$$\text{Section efficace de transfert d'impulsion : } \sigma_1 \equiv \int (1 - \cos \theta) d\sigma(\theta)$$

Pour les collisions élastiques au sein des plasmas, deux types d'interactions peuvent être distinguées sur la base des valeurs relatives de  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$ .

- Si  $\sigma_0 \gg \sigma_1$ , la diffusion est principalement vers l'avant et les transferts d'impulsion s'effectuent dans le régime dit des *petits transferts d'impulsion*, ou de la *diffusion aux petits angles*, c'est le cas des interactions électrons-ions, ions-ions et électrons-électrons.

- Si  $\sigma_0 \approx \sigma_1$ , la diffusion est isotrope, c'est le cas des collisions électrons-neutres et neutres-neutres. Considérons brièvement les modèles classique et quantique de sections efficaces  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$ .

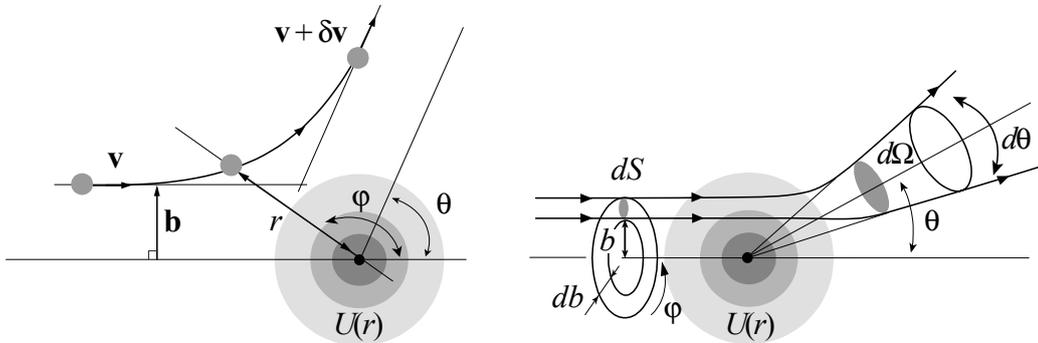


Lors d'une collision élastique sur une cible immobile, pour les potentiels isotropes, les intégrales premières de l'énergie et du moment cinétique permettent de ramener l'évaluation de l'angle de déflexion  $\theta$  à une quadrature; pour cela, il est utile de considérer un système de coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  dans le plan de la trajectoire.

La conservation du moment cinétique et la conservation de l'énergie s'expriment suivant les relations: moment angulaire :  $vb = r^2 d\varphi/dt$  et énergie mécanique:

$$\begin{aligned} \text{Moment angulaire} & : v = \frac{r^2}{b} \frac{d\varphi}{dt} \\ \text{Energie} & : v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{2}{\mu} U(r) \end{aligned}$$

où  $U$  est l'énergie potentielle d'interaction et  $b$  le paramètre d'impact. Le facteur  $dt$  peut être éliminé entre ces deux intégrales premières pour exprimer l'équation polaire de la trajectoire:  $d\varphi = \pm bdr / r^2 \sqrt{1 - 2U(r)/\mu v^2 - b^2/r^2}$ .



L'angle de déflexion  $\theta$  est obtenu en sommant cette déflexion infinitésimale

$$\theta(v, b) = \pi - 2 \int_{r_m(b,v)}^{+\infty} \frac{bdr}{r^2} \left(1 - \frac{2U(r)}{\mu v^2} - \frac{b^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow b(\theta, v)$$

où  $r_m$  est le rayon minimal d'approche obtenu sur la base de la conservation de l'énergie  $\mu v^2(1 - b^2/r_m^2) = 2U(r_m)$ . Compte tenu de la valeur de l'angle solide en fonction de l'angle de déflexion:  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  et

de la valeur de l'élément de surface correspondant :  $dS(b) = 2\pi b db$ , la conservation du nombre de particules avant et après la collision, au voisinage d'une orbite de référence, permet d'établir la relation entre la section efficace et la déflexion :

$$\frac{d\sigma(v, \theta)}{d\Omega} \equiv \frac{\left[ \frac{\text{Nombre de particules difusées}}{\text{Par unité d'angle solide } d\Omega(\theta)} \right]}{\left[ \frac{\text{Nombre de particule incidentes}}{\text{Par unité de surface } dS(b)} \right]} = \frac{dS(b)}{d\Omega(\theta)} = \left| \frac{b(\theta, v) db}{\sin \theta d\theta} \right| .$$

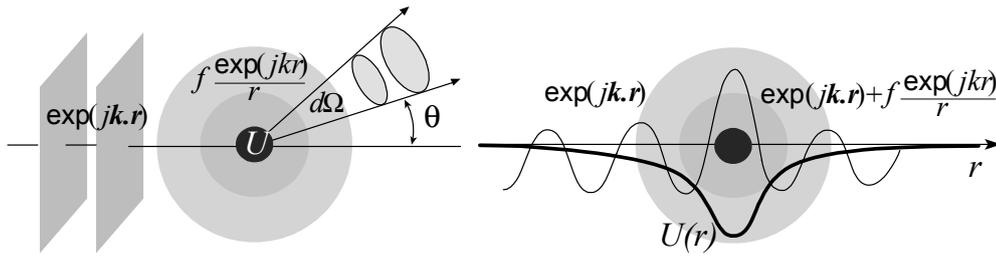
L'étude précédente a permis d'obtenir la formule de la section efficace de diffusion élastique dans le cadre d'un formalisme classique, nous allons maintenant brièvement étudier ce même problème dans le cadre d'un formalisme quantique. Pour établir la formule de la section efficace, considérons le cas d'une onde stationnaire de diffusion dans un potentiel statique  $U$ . L'équation de Schrödinger stationnaire,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}^2} + U(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})$$

possède une infinité de solutions, il convient donc de fixer des conditions aux limites spécifiques au problème de la diffusion. De telles conditions sont obtenues en considérant la forme asymptotique lorsque  $r \rightarrow +\infty$ , loin du centre diffuseur  $r = 0$  la fonction d'onde  $\Psi$  doit être la somme d'une onde plane,  $\exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , décrivant une particule incidente d'impulsion bien définie  $\hbar\mathbf{k}$ , et d'une onde sphérique centrée en  $r = 0$ ,  $(\exp ikr)/r$ , non nécessairement isotrope, décrivant l'onde diffusée,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow \Psi(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \underbrace{f(k, \theta)}_{\text{Amplitude de diffusion}} \frac{\exp ikr}{r} .$$

C'est l'amplitude relative des deux termes, plan et sphérique, qui détermine la nature du processus de diffusion. La fonction  $f(k, \theta)$  est appelée amplitude de diffusion et permet le calcul de la section efficace à partir de la définition du rapport du nombre de particules diffusées sur le flux incident.



En effet, le flux est défini à partir du vecteur densité de courant de probabilité :

$$\mathbf{J} = i\hbar \frac{\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi}{2m}$$

ainsi, le terme d'onde plane  $\exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , décrivant un flux incident entrant, donne lieu à une densité de courant de probabilité  $\mathbf{J}_I = \hbar\mathbf{k}/m$  et le terme d'onde sphérique  $f \exp(ikr)/r$ , décrivant le flux diffusé sortant, donne lieu à une densité de courant de probabilité radiale d'amplitude  $J_D = \hbar k f^2 / mr^2$ , les termes d'interférence entre l'onde plane incidente et l'onde sphérique diffusée assurent la conservation du nombre de particules mais n'interviennent pas dans les directions autres que celle du flux incident. Le nombre  $dN$  de particules diffusées dans l'angle solide  $d\Omega$  est donc proportionnel à :  $dN|_{A \rightarrow A(\Omega)} = \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S} = \hbar k f^2 d\Omega / m$ . Lorsque ce nombre est ramené au nombre de particules incidentes par unité de surface  $J_I = \hbar k / m$ , la définition de la section efficace permet d'établir la relation :

$$\frac{d\sigma(v, \theta)}{d\Omega} \equiv \frac{\left[ \frac{\text{Nombre de particules difusées}}{\text{Par unité d'angle solide}} \right]}{\left[ \frac{\text{Nombre de particule incidentes}}{\text{Par unité de surface}} \right]} = \frac{J_D(k, \theta)}{J_I(\mathbf{k})} = |f(k, \theta)|^2 .$$

Tout le problème du calcul de la section efficace de diffusion se ramène donc au problème de l'évaluation de la forme asymptotique de l'amplitude de diffusion stationnaire  $f(k, \theta)$ ; plusieurs méthodes permettent une telle évaluation.

Pour conclure cette présentation des sections efficaces, considérons la correspondance classique/quantique. En mécanique classique, les variables décrivant la collision sont la vitesse initiale  $\mathbf{v}$  et le paramètre d'impact  $\mathbf{b}$ ,

Diffusion classique
Vitesse : $\mathbf{v}$
Paramètre d'impact $\mathbf{b} \rightarrow$ Moment angulaire $m\mathbf{b} \times \mathbf{v}$
Angle de déflexion $\theta(v, b)$
Section efficace différentielle $d\sigma(v, \theta) = (b/\sin \theta)  db/d\theta  d\Omega$

Dans le cadre du formalisme quantique, ce sont le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  pour une base d'ondes planes et le moment angulaire  $l(l+1)\hbar$  pour une base d'ondes sphériques qui décrivent l'état de la particule. Le processus de collision consiste en une conversion de l'onde plane incidente en un ensemble d'ondes sphériques, l'étude de l'interférence de ce système d'ondes permet de définir la section efficace.

Diffusion quantique	
Vitesse $\frac{\hbar}{m}k$	→ Vecteur d'onde $k$
Harmonique sphérique $l$	→ Moment angulaire $\sqrt{l(l+1)}\hbar$
	Amplitude de diffusion $f(\theta, k)$
Section efficace différentielle $d\sigma(k, \theta) =  f(k, \theta) ^2 d\Omega$	

## 4.6 Mean free path and collision frequency

Le libre parcours d'une particule projectile, interagissant avec une population de particules cibles, est défini comme la distance parcourue par cette particule test entre deux collisions ou réactions successives. Le **libre parcours moyen**  $\lambda$  est la valeur moyenne de cette quantité. La **fréquence de collision**  $\nu$  est l'inverse du temps entre deux collisions ou réactions successives, par extension, sa valeur moyenne est aussi dénommée fréquence de collision. Considérons une particule subissant un choc à l'instant  $t = 0$  et qui, au temps  $t > 0$ , n'a pas subi de deuxième choc. Soit  $p(t)$  la probabilité qu'elle n'ait pas subi de deuxième choc à l'instant  $t$ . De même considérons une particule subissant un choc au point  $x = 0$  et qui, en  $x > 0$ , n'a pas subi de deuxième choc. Soit  $P(x)$  la probabilité qu'elle ait parcouru la distance  $x$  sans subir de deuxième choc. D'une part, les chocs étant des événements indépendants, la probabilité de choc durant l'intervalle  $[t, t + dt]$ , ou sur la distance  $[x, x + dx]$ , est indépendante de l'histoire de la particule durant l'intervalle  $[0, t]$ , ou suivant le parcours  $[0, x]$ . D'autre part, compte tenu du caractère infinitésimal de l'instant  $dt$ , ou de la distance  $dx$ , la probabilité d'observer au moins un choc, durant  $[t, t + dt]$  ou sur  $[x, x + dx]$ , est nécessairement proportionnelle à l'incrément de temps  $dt$  ou à la longueur  $dx$ . Les probabilités de parcours sans choc  $p(dt)$  et  $P(dx)$  sont complémentaires de ces probabilités de choc, donc de la forme:  $p(dt) = 1 - dt/\tau$  et  $P(dx) = 1 - dx/\lambda$ , où  $\tau$  et  $\lambda$  sont des constantes qui seront déterminées *a posteriori*. La loi de combinaison des probabilités d'événements indépendants permet d'énoncer:  $p(t + dt) = p(t)p(dt)$  et  $P(x + dx) = P(x)P(dx)$ ; ainsi, les lois de probabilité  $p$  et  $P$  sont solutions d'équations différentielles ordinaires linéaires et  $p$  et  $P$  suivent les lois classiques de Poisson. L'inverse de la valeur moyenne du temps entre deux collisions et la valeur moyenne de la distance parcourue entre deux collisions définissent la fréquence de collision  $\nu = \tau^{-1}$  et le libre parcours moyen  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \text{Fréquence de collision} & : p(t) = \exp -\nu t \rightarrow \nu \equiv \frac{1}{\langle t \rangle} = \frac{\int_0^{+\infty} p(t) dt}{\int_0^{+\infty} t p(t) dt} \\ \text{Libre parcours moyen} & : P(x) = \exp -\frac{x}{\lambda} \rightarrow \lambda \equiv \langle x \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} x P(x) dx}{\int_0^{+\infty} P(x) dx} \end{aligned}$$

On notera les relations :

$$\langle t^2 \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} t^2 p(t) dt}{\int_0^{+\infty} p(t) dt} = 2\nu^{-2}, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} x^2 P(x) dx}{\int_0^{+\infty} P(x) dx} = 2\lambda^2$$

Le libre parcours moyen  $\lambda$  et la fréquence de collision  $\nu$  peuvent être exprimés en fonction de la section efficace  $\sigma_1$ . Considérons, à nouveau, la réaction projectile sur cible:  $A + B \rightarrow C + D$ , les produits de réaction  $C$  et  $D$  pouvant être simplement les espèces  $A$  et  $B$  après un échange d'énergie-impulsion. Pour une cible au repos constituée d'espèces  $B$ , de densité  $n_B$ , et un flux d'espèces  $A$ , de vitesse  $v$ , le nombre de réactions permet de définir la section efficace de réaction comme le coefficient de proportionnalité entre le nombre de réactions par unités de temps et de volume et le produit de la densité de cibles par le flux incident:  $dx = vdt \rightarrow dn_A = -\sigma_1 n_A n_B dt = -\sigma_1 n_A n_B dx$ . Lorsque la déplétion de la cible peut être négligée, cette équation peut être intégrée par rapport au temps,  $n_A(t) = n_A(0) \exp -\nu t$ , ou par rapport à la distance  $x$ ,  $n_A(x) = n_A(0) \exp -x/\lambda$ , telle que  $dx = vdt$ . Le libre parcours moyen de la réaction,  $\lambda$ , et la fréquence de collisions,  $\nu$ , sont donc reliés à la section efficace,  $\sigma_1$ , et à la densité de particules cibles  $n_0$  à travers les relations.

Section efficace	$\sigma_1$	$[\text{m}^2]$
Libre parcours moyen	$\lambda^{-1} \equiv \sigma_1 n_0$	$[\text{m}^{-1}]$
Fréquence de collision	$\nu \equiv \sigma_1 n_0 v$	$[\text{s}^{-1}]$

La section efficace est une grandeur caractéristique primaire, c'est-à-dire issue de l'analyse microscopique de l'interaction; le libre parcours moyen et la fréquence de collisions sont des grandeurs secondaires permettant d'établir des bilans macroscopiques.

Dans le cadre de la théorie des collisions, le concept de libre parcours moyen permet de développer une théorie simple du transport. Dans ce paragraphe, nous allons déduire, successivement, les expressions des coefficients de viscosité, de diffusion et de mobilité afin d'illustrer les concepts et méthodes de la théorie du libre parcours moyen.

Considérons le problème des flux dans un milieu en équilibre sans collision. Lorsqu'un ensemble de particules relaxe vers l'équilibre thermodynamique, la probabilité qu'une particule présente une vitesse  $v$  dans un intervalle  $dv$  est donnée par la distribution de Maxwell des vitesses  $f_0(v)dv$  :

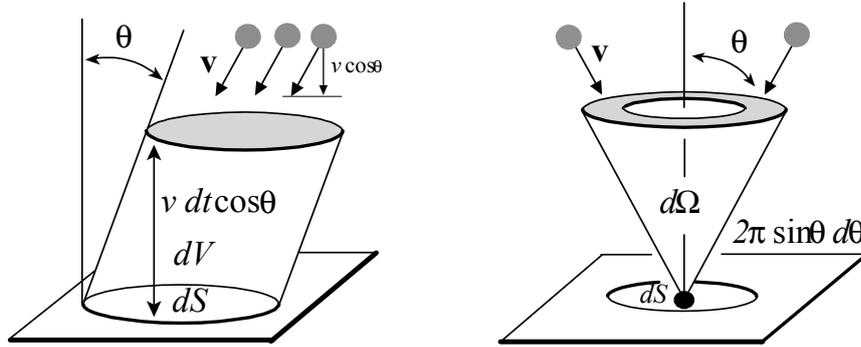
$$\text{Distribution de Maxwell: } f_0(v) = 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp -\frac{mv^2}{2kT} ,$$

Dans ce paragraphe, nous considérerons cette distribution  $f_0(v)$  normalisée à l'unité,  $\int_0^{+\infty} f_0(v)dv = 1$ , et nous introduirons séparément la densité  $n$ . Deux vitesses caractérisent une distribution maxwellienne, la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  et la vitesse quadratique moyenne  $\langle v^2 \rangle$ . Ces deux vitesses sont respectivement définies comme le premier et le deuxième moment de la fonction de distribution  $f_0(v)$ .

Vitesse moyenne	$\langle v \rangle \equiv \int_0^{+\infty} v f_0(v) dv = \sqrt{8k_B T / \pi m}$
Vitesse quadratique moyenne	$\langle v^2 \rangle \equiv \int_0^{+\infty} v^2 f_0(v) dv = 3k_B T / m$

Ces vitesses caractéristiques permettent d'exprimer la température et la pression, la densité d'énergie, le flux de particules et le flux d'énergie cinétique.

Afin de calculer le flux de particules  $\Gamma$  suivant une direction donnée, *le flux moléculaire*, calculons le nombre de particules,  $dN(v, \theta)$ , par unité de volume, dont la vitesse fait un angle  $\theta$  avec la direction de référence et dont le module de vitesse est égal à  $v$ .



Ce nombre est donné par la fonction de distribution des vitesses pondérée par le rapport de l'angle solide infinitésimal autour de  $\theta$  ramené à l'angle solide total :

$$\frac{dN(v, \theta)}{n} = \frac{d\Omega}{4\pi} f_0(v) dv = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} f_0(v) dv .$$

Le nombre de particules traversant un élément de surface  $dS$ , dans le plan perpendiculaire à la direction de référence, durant un temps  $dt$ , sous un angle  $\theta$ , est alors obtenu en multipliant  $dN$  par le volume  $dV$  accessible à l'élément de surface  $dS$  durant un temps  $dt$  :

$$dV = v \cos \theta dS dt \rightarrow dN(v, \theta) v \cos \theta dS dt = \frac{1}{2} n \sin \theta v \cos \theta f_0(v) dv d\theta dS dt .$$

Le flux infinitésimal de particules  $d\Gamma(v, \theta)$  possédant un module de vitesse égal à  $v$  est obtenu en divisant ce nombre de particules par l'unité de temps  $dt$  et l'élément de surface  $dS$  :

$$d\Gamma(v, \theta) = dN(v, \theta) v \cos \theta \rightarrow d\Gamma(v, \theta) = \frac{1}{2} n v \cos \theta \sin \theta f_0(v) d\theta dv$$

Le nombre total de particules traversant une surface  $dS$ , par unité de temps,  $\Gamma$ , a pour valeur la somme des flux infinitésimaux lorsque l'angle  $\theta$  varie de  $0$  à  $\pi/2$  et le module de la vitesse  $v$  varie de  $0$  à  $+\infty$ .

$$\Gamma = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} d\theta \int_0^{+\infty} v f_0(v) dv = \frac{n}{4} \int_0^{+\infty} v f_0(v) dv$$

L'intégrale sur le module de la vitesse n'est autre que la définition de la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$ . Le résultat final constitue l'expression du flux moléculaire au sein d'un milieu dilué :

$$\text{Flux moléculaire de Knudsen: } \Gamma \left[ \frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] = \frac{n \langle v \rangle}{4} = n \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$$

Le calcul du flux de chaleur,  $Q$ , suit la même démarche que l'évaluation du flux de particules : le calcul est d'abord effectué pour une vitesse donnée  $v$  et une direction donnée  $\theta$ , puis le résultat final est obtenu par sommation sur les différentes incidences  $\theta$  et sur la vitesse  $v$ , mais dans ce cas une pondération supplémentaire par le facteur  $mv^2/2$  est nécessaire, ainsi :

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} dv \frac{n}{8} m v^3 \cos \theta \sin \theta f_0(v)$$

L'expression du flux de chaleur en régime moléculaire est donc :

$$\text{Flux moléculaire de chaleur: } Q \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] = k_B T \frac{n \langle v \rangle}{2} = 2nk_B T \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$$

La directivité de ces flux est perturbée par les collisions. À l'échelle microscopique, la dynamique collisionnelle est appréhendée à travers la notion de *section efficace* qui présente un caractère plus opérationnel que la notion de force.

Le flux de particules, au voisinage du plan  $z = 0$ , provient de la dernière collision d'une particule avant son passage en  $z = 0$  ; c'est-à-dire des plans  $z = +\lambda$  et  $z = -\lambda$  où  $\lambda$  est le libre parcours moyen.

Le flux de particules se dirigeant du plan  $z = +\lambda$  vers le plan  $z = 0$  est égal à  $\Gamma_{0\leftarrow} = -n(+\lambda) \langle v \rangle / 4$ , le flux de particules se dirigeant du plan  $z = -\lambda$  vers le plan  $z = 0$  est égal à  $\Gamma_{\rightarrow 0} = n(-\lambda) \langle v \rangle / 4$ . La densité de particules est différente de part et d'autre du plan  $z = 0$ , le flux de particules résultant, obtenu comme la somme de ces deux flux partiels  $\Gamma_{\rightarrow 0}$  et  $\Gamma_{0\leftarrow}$ , est non nul.

Si la longueur de gradient est plus grande que le libre parcours moyen, ce bilan de flux peut être approché par le premier terme de son développement de Taylor :

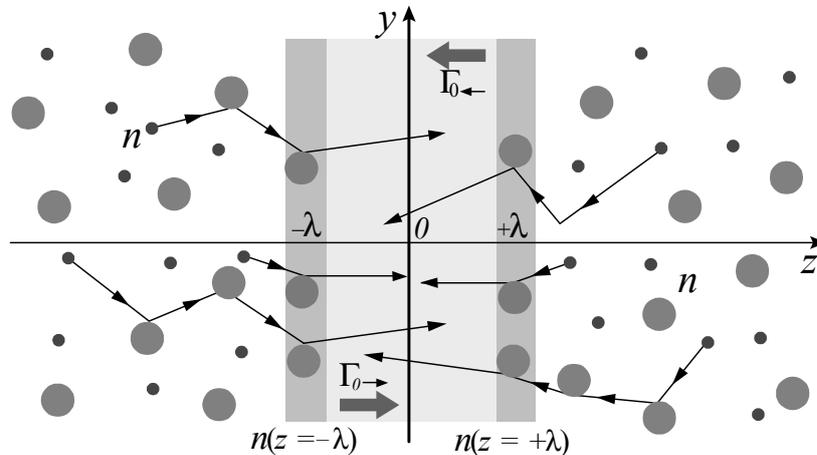
$$\Gamma = \Gamma_{0\leftarrow} + \Gamma_{\rightarrow 0} = \underbrace{\frac{n(-\lambda) \langle v \rangle}{4}}_{\text{Flux moléculaire libre}} - \underbrace{\frac{n(+\lambda) \langle v \rangle}{4}}_{\text{Flux moléculaire libre}} \approx - \underbrace{\frac{\lambda \langle v \rangle}{2} \frac{dn}{dz} \Big|_0}_{\text{Flux collisionnel}}$$

## 4.7 Nernst-Planck equation

Un modèle plus élaboré de ce bilan suivant  $z$  conduit à considérer  $\langle v_z \lambda_z \rangle = \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta (v \cos \theta) (\lambda \cos \theta) / 4\pi = 2 \langle v \lambda \rangle / 3$ . Le flux collisionnel de particules, résultant de l'inhomogénéité de la densité, est alors donné par la relation :

$$\text{Flux collisionnel de particules: } \Gamma \left[ \frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \approx - \frac{\langle \lambda v \rangle}{3} \frac{dn}{dz} \rightarrow \Gamma \equiv -D \nabla n$$

Nous avons donc identifié le coefficient de diffusion,  $D$ , égal à :  $D = \langle \lambda v \rangle / 3$ , tel que le flux collisionnel soit donné par la relation linéaire entre flux et gradient,  $\Gamma = -D \nabla n$ , ce résultat constitue la loi classique de Fick.



La présence d'un gradient de potentiel électrostatique  $d\phi/dz$  est aussi une source de transport de charges sous les influences combinées de l'accélération électrique et des collisions. Soit une population de particules

chargées plongée dans un champ électrique  $E = -d\phi/dz$  dirigé suivant l'axe des  $z$ . Sur un libre parcours  $\lambda$  l'énergie  $\frac{1}{2}mv^2(z) + e\phi(z)$  est conservée.

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{2}mv^2(z) + e\phi(z) \right]_{z \leq \lambda} = 0 \rightarrow \left. \frac{dv^2(z)}{dz} \right|_{z \leq \lambda} = \frac{2e}{m}E$$

La vitesse microscopique, sur une distance  $z$  plus petite que le libre parcours moyen, a donc pour expression :

$$v(z) \approx v(0) + z \left. \frac{dv}{dz} \right|_0 \rightarrow v(z) - v(0) \approx \left. \frac{ez}{mv(0)}E \right|_{z \leq \lambda}$$

La vitesse macroscopique est obtenue comme la moyenne de la somme des vitesses microscopiques  $v(z)$ . Le flux microscopique se dirigeant du plan  $z = \lambda$  vers le plan  $z = 0$  donne une contribution  $v_{0\leftarrow}(\lambda) \approx v(\lambda) - e\lambda E/mv$  et le flux de particules se dirigeant du plan  $z = -\lambda$  vers le plan  $z = 0$  une contribution  $v_{\rightarrow 0}(-\lambda) \approx v(-\lambda) + e\lambda E/mv$ ; ainsi la vitesse résultante dans le plan  $z = 0$  est obtenue comme la moyenne de ces deux flux :

$$\text{Flux collisionnel de particules : } \Gamma \left[ \frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \approx n \langle v_{\rightarrow 0}(0) - v_{0\leftarrow}(0) \rangle = \frac{2e}{m}n \left\langle \frac{\lambda}{v} \right\rangle E \rightarrow \Gamma \equiv n\mu\mathbf{E}$$

L'effet des collisions est donc d'inhiber le développement d'une accélération constante et de ramener le mouvement macroscopique à une translation uniforme proportionnelle au champ électrique. Ce coefficient de proportionnalité entre champ et vitesse définit la mobilité,  $\mu = e \langle 2\lambda/mv \rangle$ , de l'espèce considérée.

Dans le paragraphe consacré à l'équation de Fokker-Planck, nous avons rappelé l'origine et la structure des équations de transport linéaires locales associées à la densité de particules  $n$  et au flux de particules  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \text{Continuité} & : \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \Gamma \\ \text{Flux de Nernst-Planck} & : \quad \Gamma = -\left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} n + D \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \right) \end{aligned}$$

Pour compléter l'analyse précédente, nous allons établir les expressions du coefficient de mobilité  $\mu$  et du coefficient de diffusion  $D$  sur la base de la théorie de la fréquence de collision et du modèle Fokker-Planck.

$$\text{Nernst-Planck} : \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[ \frac{\langle \delta \mathbf{r} \rangle}{\delta t} n - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{r} \delta \mathbf{r} \rangle}{2\delta t} n \right]$$

L'histoire d'une particule, comme une succession de libres parcours et de collisions, se traduit en termes quantitatifs par une série de temps aléatoires,  $t_1/t_2/t_3/t_4/\dots/t_i/\dots$ , correspondant à la durée de chaque libre parcours, les collisions, quant à elles, étant considérées comme des événements beaucoup plus courts que les libres parcours. Le rapport d'un temps de libre parcours sur une durée de collision est donné par le rapport de la distance entre deux atomes sur la dimension d'un atome, il est donc grand et justifie l'approximation précédente.

Ces différents temps sont des variables aléatoires dont nous avons établi la loi de probabilité de Poisson,  $P(0, t) = \exp(-t/\tau)$ , précédemment; en particulier, la moyenne  $\langle t_i \rangle$  et la dispersion quadratique  $\langle t_i^2 \rangle$  de ces temps sont données par :

$$P(0, t_i) = \exp(-t_i/\tau) \rightarrow \langle t_i \rangle = \tau, \quad \langle t_i^2 \rangle = 2\tau^2$$

Chaque libre parcours, entre deux collisions, est décrit par une vitesse, elle aussi aléatoire. La série des vitesses correspondant à l'histoire d'une particule est donc une série de vecteurs aléatoires:  $\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_3/\mathbf{v}_4/\dots/\mathbf{v}_i/\dots$  dont nous connaissons la loi de probabilité de Maxwell-Boltzman, c'est-à-dire une Gaussienne dans l'espace des vitesses. Compte tenu du caractère isotrope du problème, la valeur moyenne de la vitesse entre deux collisions est nécessairement nulle et, si la population de particules est décrite par une température  $T$ , la valeur quadratique moyenne de la vitesse vaut  $3k_B T/m$ .

Les deux premiers moments sont donc donnés par :

$$P(\mathbf{v}_i) = \exp(-m\mathbf{v}_i^2/2k_B T) / (2\pi k_B T/m)^{3/2} \rightarrow \langle \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \rangle = 3k_B T \delta_j^i / m$$

. Enfin, chaque libre parcours est décrit par un vecteur déplacement  $\mathbf{r}_i$  tel que  $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i t_i$ ; l'ensemble des libres parcours est donc une série de vecteurs aléatoires:  $\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2/\mathbf{r}_3/\mathbf{r}_4/\dots/\mathbf{r}_i/\dots$ . La loi de probabilité de ces déplacements aléatoires est inconnue, mais, compte tenu des résultats précédents, nous pouvons exprimer les deux premiers moments de ces variables en fonction des données du problème:  $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i t_i$ , ainsi:  $\langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{0}$ ,  $\langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle = 3k_B T 2\tau^2 / m$  et  $\langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \rangle_{i \neq j} = 0$ . Considérons maintenant une durée  $\delta t$ , beaucoup plus longue que le temps moyen entre deux collisions  $\tau$ , et beaucoup plus courte que l'échelle caractéristique de temps associée à la dynamique macroscopique;  $\delta t$  est une échelle mésoscopique, intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique.

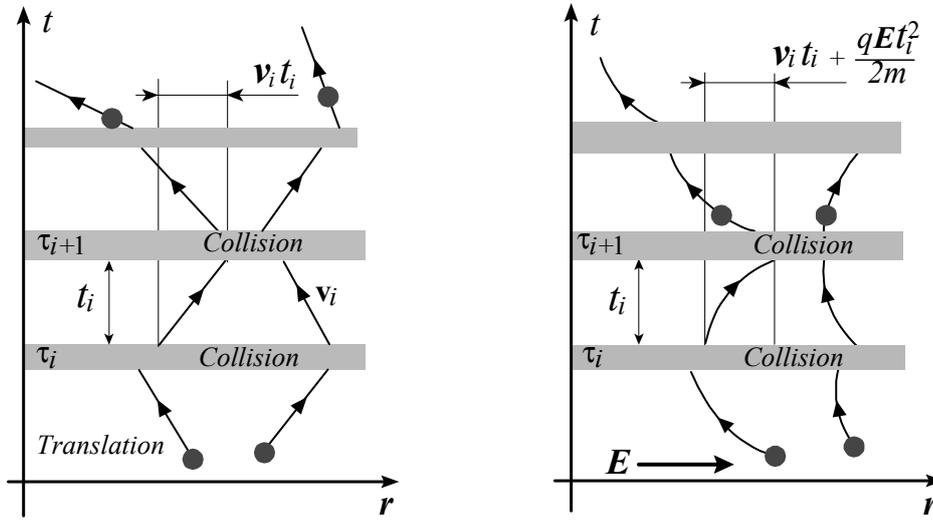
Calculons la valeur moyenne du déplacement mésoscopique  $\delta\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{r}_i$  durant un intervalle de temps mésoscopique :  $\delta t = \sum_{i=1}^{i=N} t_i$ , ainsi :  $\langle \delta t \rangle = N\tau$ ,  $\delta\mathbf{r}(\delta t) = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{r}_i$ , ainsi :  $\langle \delta\mathbf{r}(\delta t) \rangle = \sum_{i=1}^{i=N} \langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{0}$ . Ce dernier résultat est conforme à l'intuition physique. En effet, les probabilités de déplacement vers le haut, vers le bas, vers l'avant, vers l'arrière, vers la gauche et vers la droite sont égales ; en conséquence, la moyenne de la somme de ces déplacements est nécessairement nulle. Calculons maintenant l'écart quadratique moyen de ce déplacement :

$$\langle \delta\mathbf{r}(\delta t) \cdot \delta\mathbf{r}(\delta t) \rangle = \sum_{i=1}^{i=N} \langle \mathbf{r}_i^2 \rangle = 2N \frac{3k_B T}{m} \tau^2 .$$

Cette quantité n'est pas nulle et son rapport au temps mésoscopique  $\langle \delta t \rangle = N\tau$  définit le coefficient de diffusion  $D$  suivant la relation :

$$\text{Diffusion : } D \equiv \frac{\langle \delta\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r} \rangle}{6 \langle \delta t \rangle} = \frac{k_B T}{m\nu}$$

En présence d'un champ électrique quasi-statique,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , cette analyse, en termes de translations uniformes interrompues par des collisions : libre parcours / collision / libre parcours / collision / libre parcours... doit être modifiée. Entre deux collisions, le mouvement n'est pas uniforme, mais uniformément accéléré sous l'action du champ électrique : accélération / collision / accélération / collision / accélération / collision... Considérons donc une suite de phases accélérées interrompues par des collisions de durée nulle.



La série des temps,  $t_1/t_2/t_3/t_4/\dots/t_i/\dots$ , décrivant la durée de ces phases d'accélération est de nature aléatoire, mais ses propriétés statistiques sont connues, en particulier les deux premiers moments :  $\langle t_i \rangle = \tau$  et  $\langle t_i^2 \rangle = 2\tau^2$ . La série des déplacements entre deux collisions :  $\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2/\mathbf{r}_3/\mathbf{r}_4/\dots/\mathbf{r}_i/\dots$  est considérablement modifiée par le champ électrique. Le mouvement entre deux collisions est uniformément accéléré et cette modification de la nature du mouvement se traduit par un déplacement mésoscopique moyen non nul :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i t_i + \frac{1}{2} \frac{q\mathbf{E}}{m} t_i^2 \rightarrow \langle \delta\mathbf{r}(\delta t) \rangle = \sum_{i=1}^{i=N} \langle \mathbf{r}_i \rangle = \frac{q\mathbf{E}}{m} N\tau^2 .$$

où  $q$  est la charge de la particule. Introduisons la vitesse  $\langle \delta\mathbf{r} \rangle / \delta\tau$  sur la durée mésoscopique moyenne  $\langle \delta t \rangle = N\tau$  et définissons la mobilité électrique  $\mu$

$$\text{Mobilité : } \mu\mathbf{E} \equiv \frac{\langle \delta\mathbf{r} \rangle}{\langle \delta t \rangle} = \frac{q}{m\nu} \mathbf{E}$$

Les deux coefficients ainsi exprimés vérifient la relation d'Einstein :  $\mu/D = q/k_B T$  et la relation de Boltzman :  $\Gamma_{\text{équilibre}} = \mathbf{0} \rightarrow n \sim \exp -q\phi/k_B T$ .

## 4.8 Fluctuations, conduction, diffusion

La forme générale du coefficient de diffusion  $D$  peut être construite comme suit. Restreignons l'analyse suivant une direction et considérons une particule dont la position est repérée par  $x$  et la vitesse (aléatoire) par  $v = d(\delta x)/dt$ . Durant un temps  $t$  mésoscopique son déplacement  $\delta x(t)$  est défini par la relation :

$$\delta x(t) = \int_0^t v(u) du \rightarrow \delta x(t) \frac{d\delta x(t)}{dt} = \int_0^t v(t)v(t') dt' = \int_0^t v(t)v(t-\tau) d\tau,$$

où nous avons introduit  $\tau \equiv t - t'$ . En présence de collisions, la vitesse  $v(t)$  est une fonction aléatoire et le déplacement  $x(t)$  un processus stochastique.

Ce processus stochastique est stationnaire et nous supposons que les deux premiers moments de la fonction aléatoire  $v(t)$  vérifient :  $\langle v(t) \rangle = 0$  et  $\langle v(t + \tau)v(t) \rangle = \langle v(\tau)v(0) \rangle$  la fonction d'autocorrélation des vitesses. La valeur moyenne du carré du déplacement évolue donc suivant la relation

$$\frac{d \langle \delta x(t) \delta x(t) \rangle}{dt} = 2 \int_0^t \langle v(\tau)v(0) \rangle d\tau.$$

Pour un intervalle de temps  $t$  plus petit que le temps caractéristique de corrélation qui est de l'ordre de l'inverse de la fréquence de collisions  $\nu^{-1}$   $\langle v(t)v(0) \rangle \sim \langle v(0)v(0) \rangle$  et  $\langle v(t)v(0) \rangle \sim 0$  au delà de  $\nu^{-1}$ , nous pouvons donc prendre la limite  $t \rightarrow +\infty$  et obtenir ainsi le résultat classique reliant le coefficient de diffusion et la fonction d'autocorrélation des vitesses, cette relation constitue la relation de Green-Kubo,

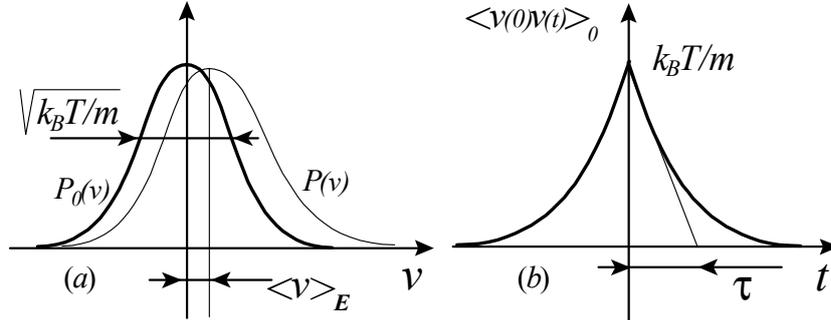
$$\text{Diffusion : } \frac{\langle \delta x \delta x \rangle}{2\delta t} = \boxed{D = \int_0^{+\infty} \langle v(t)v(0) \rangle dt \approx \frac{k_B T}{m\nu}} \leftarrow \langle v(t) \cdot v(0) \rangle \approx \frac{k_B T}{m} \exp -\nu t$$

où nous avons considéré la loi d'autocorrélation la plus simple et la plus répandue : une loi exponentielle entièrement caractérisée par un temps de corrélation  $\tau = \nu^{-1}$  ainsi que l'équilibre canonique des vitesses  $\langle v(0)v(0) \rangle = k_B T/m$ . La relation d'Einstein  $qD/k_B T = \eta/nq$  constitue une conséquence directe de cette formule.

Soit  $P(\mathbf{v}, t)$  la loi de distribution des vitesses  $\mathbf{v}$  des porteurs de charges libres au sein d'un conducteur à l'instant  $t$  dans l'intervalle  $[\mathbf{v} - d\mathbf{v}/2, \mathbf{v} + d\mathbf{v}/2]$ . L'évolution de cette loi constitue un processus markovien qui peut être décrit par une équation d'évolution,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{L} \left( \int d\mathbf{v}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v} \right) \cdot P(\mathbf{v}, t) = 0,$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire décrivant les collisions (Boltzmann ou Fokker-Planck) dans l'approximation cinétique.



Définissons aussi la distribution stationnaire d'équilibre  $P_0(\mathbf{v})$  qui est en l'occurrence une distribution maxwellienne des vitesses,

$$\mathcal{L} \left( \int d\mathbf{v}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v} \right) \cdot P_0(\mathbf{v}) = 0.$$

Considérons la fonction de Green  $K(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, t)$  causale ( $K(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, t \leq 0) = 0$ ) de cet opérateur d'évaluation,

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \mathcal{L} \cdot K(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(t).$$

D'un point de vue physique,  $K(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, t - t')$  décrit la probabilité d'observer une particule avec la vitesse  $\mathbf{v}$  dans l'intervalle  $[\mathbf{v} - d\mathbf{v}/2, \mathbf{v} + d\mathbf{v}/2]$  à l'instant  $t$  si elle a été préparée dans l'état  $\mathbf{v}'$  à l'instant initial  $t = 0$ . Une intégration par rapport au temps (physiquement  $K$  vérifie :  $K(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, t = +\infty) = 0$  et  $K(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, t = 0) = 0$ ) conduit à l'identification d'un inverse formel  $\mathcal{L}^{-1}$ ,

$$\mathcal{L} \cdot \int_0^{+\infty} dt K(t) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \rightarrow \int_0^{+\infty} dt K(t) = \mathcal{L}^{-1} \cdot \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}').$$

Mais  $\mathcal{L}^{-1}$  n'est pas unique car  $\mathcal{L}$  possède un noyau qui n'est pas restreint à la fonction nulle puisque pour toutes les températures  $\mathcal{L} \cdot P_0 = 0$ . Définissons la fonction de Green stationnaire  $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  suivant

$$G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \equiv \int_0^{+\infty} dt K(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, t) \rightarrow \mathcal{L} \cdot G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}').$$

En présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$ , allumé adiabatiquement dans un passé lointain, l'état stationnaire, atteint à l'issue d'une phase transitoire, est décrit par la distribution stationnaire hors équilibre  $P(\mathbf{v}) \neq P_0(\mathbf{v})$  qui vérifie la relation

$$\mathcal{L} \cdot P + \frac{q\mathbf{E}}{m} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{v}} = 0 \rightarrow P(\mathbf{v}) = -\frac{q\mathbf{E}}{m} \cdot \int d\mathbf{v}' G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \frac{\partial P(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'},$$

où  $m$  et  $q$  sont respectivement la masse et la charge d'un porteur de charge libre électron ou ion. Au voisinage de l'équilibre ( $P - P_0 \ll P_0$ ) considérons le développement suivant les puissances du champ électrique:

$$P(\mathbf{v}) = P_0(\mathbf{v}) - \frac{q\mathbf{E}}{m} \cdot \int d\mathbf{v}' G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \frac{\partial P_0(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} + \frac{q^2 \mathbf{E} \mathbf{E}}{m^2} \cdot \int \int G \partial G \partial \dots$$

La théorie de la réponse linéaire conduit alors à la relation fluctuation-dissipation entre moment hors équilibre d'ordre 1  $\langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}}$  et moment d'autocorrélation à l'équilibre d'ordre deux  $\langle \mathbf{v}(t) \otimes \mathbf{v}(0) \rangle_0$  illustré sur le schéma (b) de la figure,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}} &= \int \mathbf{v} d\mathbf{v} P_0(\mathbf{v}) - \frac{q\mathbf{E}}{m} \cdot \int \mathbf{v} d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \frac{\partial P_0(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \\ &= \frac{q\mathbf{E}}{k_B T} \cdot \int_0^{+\infty} dt \iint d\mathbf{v} d\mathbf{v}' (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}') K(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, t) P_0(\mathbf{v}'), \\ \langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}} &= \int_0^{+\infty} dt \frac{\langle \mathbf{v}(0) \otimes \mathbf{v}(t) \rangle_0}{k_B T} \cdot q\mathbf{E} + O\left[\frac{q^2 E^2}{m^2}\right]. \end{aligned}$$

Cette dernière ligne résulte de l'interprétation physique de  $K$  :  $K$  décrit la probabilité d'observer une particule avec la vitesse  $\mathbf{v}$  à l'instant  $t$  si elle a été préparée dans l'état  $\mathbf{v}'$  à l'instant initial  $t = 0$  et de la définition de  $P_0$  qui décrit la probabilité de préparation dans l'état  $\mathbf{v}'$  à l'équilibre.

L'autocorrélation des vitesses  $\langle v(0) v(t) \rangle_0$  est une loi décroissante en fonction du temps  $t$  à partir d'un maximum pour  $t = 0$  illustrée sur la figure (a), elle est en général entièrement caractérisée par un temps de décorrélation  $\tau$ . La relation fluctuation-dissipation  $k_B T \langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}} = q \int_0^{+\infty} dt \langle \mathbf{v}(0) \otimes \mathbf{v}(t) \rangle_0 \cdot \mathbf{E}$ , obtenue dans le complément ci-dessus, permet de définir sans ambiguïtés et de façon universelle la conductivité Ohmique  $\eta$  d'un plasma à partir de la densité  $n$ , de la température  $T$  et des fluctuations des vitesses des porteurs de charges libres électrons ou ions. Pour un plasma isotrope, la relation conduit donc à la définition

$$\text{Conduction : } \boxed{\eta = \frac{nq^2}{3k_B T} \int_0^{+\infty} \langle \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{v}(t) \rangle dt \approx \frac{nq^2}{m\nu}} \leftarrow \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(0) \rangle \approx \frac{3k_B T}{m} \exp -\nu t \quad (4.1)$$

où nous avons considéré la loi d'autocorrélation la plus simple et la plus répandue : une loi exponentielle entièrement caractérisée par un temps de corrélation  $\tau = \nu^{-1}$ , le facteur 1/3 résulte de l'isotropie de l'équilibre  $\langle v_x(0) \cdot v_x(t) \rangle = \langle v_y(0) \cdot v_y(t) \rangle = \langle v_z(0) \cdot v_z(t) \rangle$ .

## 4.9 Loi de Saha

Les vapeurs aisément ionisables occupent une place bien définie dans la classification périodique des éléments, au croisement des périodes 2 à 6 et des colonnes I à II. Afin de développer la théorie de l'ionisation thermique dans un gaz haute température, commençons par calculer la fonction de partition d'un gaz parfait constitué de particules de masse  $M$ , occupant un volume  $V^3$  à l'intérieur d'un cube dont les faces sont les plans  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = V^{1/3}$ ,  $y = V^{1/3}$ ,  $z = V^{1/3}$  illustrés sur la figure 6.10. La fonction de partition  $Z$  est obtenue conformément aux règles établies en physique statistique comme la somme sur tout l'espace des états accessibles du facteur de Boltzmann, sous une hypothèse de non-dégénérescence :  $\hbar^2/MV^{2/3} \ll k_B T$ . Pour un gaz présentant une multiplicité d'états internes d'énergie  $\varepsilon_{int}$ , la somme doit prendre en compte ces états internes et s'exprime suivant :

$$\sum_{int} \sum_l \sum_m \sum_n \exp -\frac{\varepsilon_{lmn} + \varepsilon_{int}}{k_B T} \approx \mathcal{Z}_{int}(T) Z(T, V),$$

où la fonction de partition interne  $\mathcal{Z}_{int}(T)$  est alors définie par une somme discrète sur les quelques états internes susceptibles de présenter un peuplement significatif à la température considérée :

$$\mathcal{Z}_{int}(T) \equiv \sum_{int} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{int}}{k_B T}\right).$$

Le potentiel chimique  $\mu$  d'un gaz suffisamment chaud pour que certains degrés de liberté internes soient excités est donc donné par la relation complétée par  $\mathcal{Z}_{int}(T)$  :

$$\mu(T, V, N) = k_B T \log \left( \frac{N}{V} \right) + \frac{3}{2} k_B T \log \left( \frac{2\pi\hbar^2}{Mk_B T} \right) - k_B T \log \mathcal{Z}_{int}(T) .$$

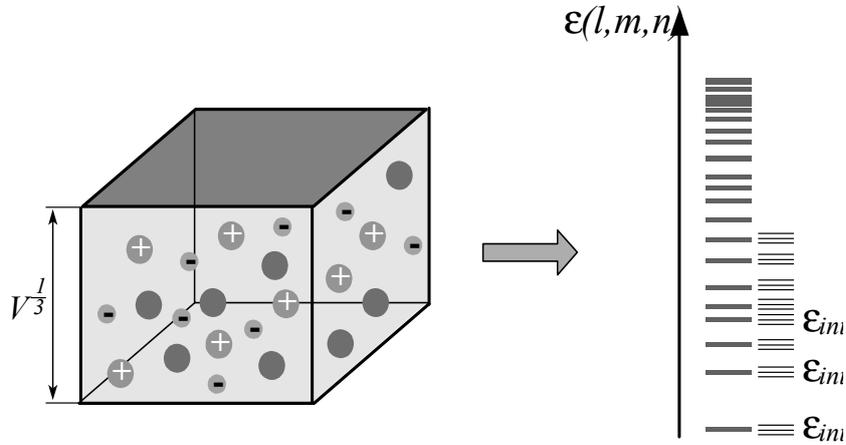
Sur la base de cette formule, considérons l'équilibre d'ionisation thermique d'une espèce atomique  $A$  :  $A \rightleftharpoons A^+ + e$ . L'égalité des potentiels chimiques,  $\mu_A = \mu_{A^+} + \mu_e$ , traduisant l'équilibre des échanges de matière entre les phases neutre et ionisée, conduit à la relation :

$$\log \left( \frac{n_e n_{A^+}}{n_A} \right) + \log \left( \frac{2\pi\hbar^2}{Mk_B T} \right)^{\frac{3}{2}} + \log \frac{\mathcal{Z}_A(T)}{\mathcal{Z}_e(T) \mathcal{Z}_{A^+}(T)} = 0 ,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{n_e n_{A^+}}{n_A} = \left( \frac{Mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathcal{Z}_e(T) \mathcal{Z}_{A^+}(T)}{\mathcal{Z}_A(T)} .$$

L'évaluation du rapport des fonctions de partitions internes est aisée pour la réaction  $A \rightleftharpoons A^+ + e$  car nous sommes simplement en présence de deux états séparés par une différence d'énergie égale à l'énergie d'ionisation  $I$ .



Équilibre d'ionisation thermique : fonctions de partitions volumique et interne.

L'usage est d'introduire les facteurs de dégénérescence  $g$  traduisant la multiplicité des états neutres fondamentaux et ionisés fondamentaux, le facteur de dégénérescence d'un électron libre étant égal à 2 compte tenu de son spin,

$$\frac{\mathcal{Z}_e(T) \mathcal{Z}_{A^+}(T)}{\mathcal{Z}_A(T)} = 2 \frac{g_{A^+}}{g_A} \exp - \frac{I}{k_B T} .$$

Les facteurs de dégénérescence des principaux gaz utilisés dans les générateurs MHD sont rappelés dans le tableau.

Éléments	$I$	$g_{A^+}$	$g_A$
Li	5,39	1	2
K	4,34	1	2
Cs	3,89	1	2
N <sub>2</sub>	15,6	2	1
O <sub>2</sub>	12,05	4	3

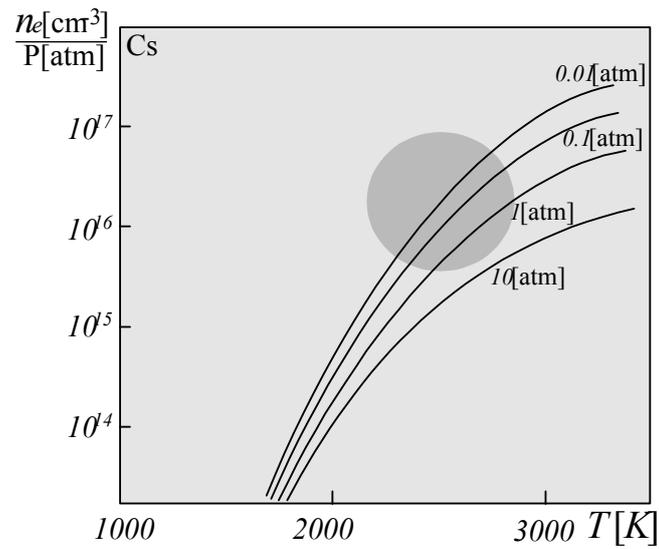
L'ensemble de ces considérations sur la multiplicité des états d'énergie associés aux mouvements de translation et aux processus d'ionisation permet donc d'établir la loi, dite **de Saha**, décrivant l'équilibre d'ionisation thermique d'un gaz porté à haute température.

$$\text{Relation de Saha : } \frac{n_e n_{A^+}}{n_A} = \left( \frac{Mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} 2 \frac{g_{A^+}}{g_A} \exp - \frac{I}{k_B T}$$

Cette relation indique clairement tout l'intérêt que présente l'utilisation d'un gaz de faible énergie d'ionisation  $I$ , tel qu'une vapeur alcaline ou alcalino-terreuse. En fait, il n'est pas nécessaire d'utiliser de telles vapeurs pures et l'ensemencement d'un gaz moléculaire ordinaire par de tels éléments alcalins ou alcalino-terreux offre un fluide adapté aux contraintes mécaniques, thermiques, chimiques et électriques d'un générateur MHD. Le taux d'ionisation est donné par la formule numérique :

$$\log \frac{n_e [\text{m}^{-3}] n_{A^+} [\text{m}^{-3}]}{n_A [\text{m}^{-3}]} = 26,93 + \log 2 \frac{g_{A^+}}{g_A} - \frac{5,040}{T [\text{K}]} E_I [\text{eV}] - 1,5 \log \frac{5,040}{T [\text{K}]} ,$$

dont l'application au cas du mélange air/césium, représenté sur le diagramme de la figure ci-dessous, démontre qu'un taux d'ionisation significatif peut être obtenu par ensemencement.



Densité électronique  $n_e$  d'une vapeur thermique de césium en fonction de la température  $T$  et de la pression  $P$  de l'air chaud.

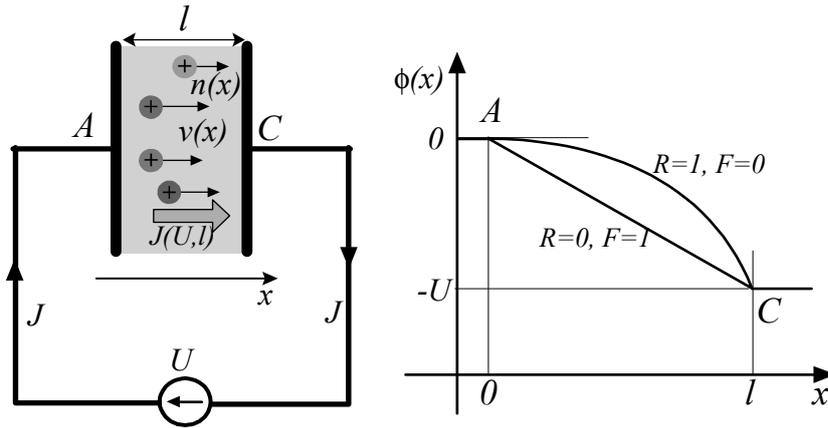
La zone opérationnelle pour la génération MHD est identifiée par le cercle gris.

# Chapitre 5

## Some Historical Problems

### 5.1 Child-Langmuir current

Considérons un écoulement ionique, non neutre, unidimensionnel et stationnaire, suivant l'axe des  $x$  entre le plan  $x = 0$ , l'anode  $A$ , et le plan  $x = l$ , la cathode  $C$ . Les ions de charge  $q$  et de masse  $m$  sont décrits par la densité  $n(x)$  et par la vitesse  $v(x)$ . La différence de potentiel entre les électrodes est égale à  $U$  :  $\phi(x = 0) = 0$ ,  $\phi(x = l) = -U < 0$ . En régime stationnaire, la vitesse  $v(x)$  et la densité  $n(x)$  obéissent à l'équation de continuité et à l'équation du mouvement (équivalente à l'équation de conservation de l'énergie dans ce cas inertielle); l'équation d'état de la population ionique est une isentropique. Ces trois équations peuvent être exprimées sous la forme de trois invariants; introduisons pour cela la vitesse  $v_0 = v(x = 0)$ , la densité de courant entre les deux électrodes  $j \equiv nqv$  est constante et constitue une donnée du modèle ainsi que la la pression  $P_0 = P(x = 0)$ .



Nous obtenons alors un système algébrique de trois équations à quatre inconnues,  $n$ ,  $v$ ,  $P$  et  $\phi$  le potentiel; une quatrième équation, l'équation de Poisson, complète ce système.

$$\text{Conservation de la charge} : nqv = j$$

$$\text{Conservation de l'énergie} : \frac{m}{2}v^2 + \frac{3P}{2n} + q\phi = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{3P_0qv_0}{2j}$$

$$\text{Conservation de l'entropie} : Pn^{-3} = P_0 \left( \frac{j}{qv_0} \right)^{-3}$$

$$\text{Equation de Poisson} : \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{q}{\epsilon_0}n$$

Ce système de quatre équations met en jeu deux tendances opposées, une tendance à l'écoulement suivant la chute de potentiel et une tendance s'opposant à cette chute de potentiel à travers la création d'une charge d'espace. La densité peut être exprimée en fonction du potentiel en éliminant la vitesse et la pression dans le système pour obtenir une équation algébrique unique sur  $n$ .

$$n^4 \frac{3P_0}{2} \left( \frac{j}{qv_0} \right)^{-3} + n^2 \left( q\phi - \frac{mv_0^2}{2} - \frac{3P_0qv_0}{2j} \right) + \frac{mj^2}{2q^2} = 0$$

Ainsi  $n(\phi, j, v_0, P_0)$  peut être exprimée pour établir une équation de Poisson non-linéaire. En général, les énergies associées à la vitesse initiale  $v_0$  et à la température sont négligeables devant la différence de potentiel  $U$ ; on peut donc simplifier l'équation du quatrième degré précédente.

$$P_0 = 0, v_0 = 0 \rightarrow n(\phi, j) = \frac{j}{q} \sqrt{-\frac{m}{2q\phi}} \leftarrow$$

Le problème de l'écoulement d'une espèce chargée entre deux électrodes polarisées se ramène donc à l'analyse de l'équation de Poisson non-linéaire :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{j}{\varepsilon_0} \sqrt{-\frac{m}{2q\phi}}$$

Introduisons le paramètre  $F$  caractérisant le champ électrique sur l'anode, compte tenu des conditions aux limites,  $\phi(x=0) = 0$  et  $\phi(x=l) = -U$ . Introduisons une mesure du champ électrique sur l'anode, le paramètre  $F$  tel que :

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} \equiv -F \frac{U}{l}$$

Ce paramètre offre la possibilité d'étudier les caractéristiques du flux limité par charge d'espace en fonction du champ sur l'anode ; en particulier, il permet d'identifier pour quelle valeur optimale du champ, le flux est maximum :  $\partial j(F, U, l) / \partial F = 0 \rightarrow F = F_M \rightarrow j_M(F_M, U, l)$ . Le flux maximum ainsi identifié,  $j_M$ , n'est autre que le courant limite de Child-Langmuir :  $j_M(F_M, U, l) = J_{CL}(U, l)$  défini par :

$$\begin{aligned} \text{Courant de Child-Langmuir} & : J_{CL}(U, l) \equiv \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2q}{m}} \frac{U^{\frac{3}{2}}}{l^2} \\ \text{Courant de Child-Langmuir électronique} & : J_e \left[ \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} \right] = 2.3 \times 10^{-6} \frac{\left[ \frac{U}{\text{V}} \right]^{\frac{3}{2}}}{\left[ \frac{d}{\text{cm}} \right]^2} \\ \text{Courant de Child-Langmuir ionique} & : J_i \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right] = 5.4 \times 10^{-8} \sqrt{\frac{Z}{A}} \frac{\left[ \frac{U}{\text{V}} \right]^{\frac{3}{2}}}{\left[ \frac{d}{\text{m}} \right]^2} \end{aligned}$$

Pour établir ce résultat fondamental et analyser le problème de Child-Langmuir, introduisons les variables normalisées  $X$  et  $\Phi$  :  $[\phi(x)] \rightarrow [\Phi(X)]$  et le paramètre de contrôle  $R$ .

$$X \equiv \frac{x}{l}, \quad R \equiv \frac{j}{J_{CL}}, \quad \Phi(X) \equiv -\frac{\phi(x)}{U}$$

L'ordre de l'équation de Poisson normalisée peut être abaissé en multipliant de part et d'autre du signe égal par la dérivée de  $\Phi$ .

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = \frac{4}{9} \frac{R}{\sqrt{\Phi}} \rightarrow \frac{d\Phi}{dX} = \sqrt{F^2 + \frac{16R}{9} \sqrt{\Phi}}$$

Définissons  $S = 3F/4\sqrt{R}$ , après intégration la relation implicite entre potentiel  $\Phi$  et position  $X$ , la relation :

$$X = 2 \frac{S^3}{\sqrt{R}} + \frac{\sqrt{\Phi} - 2S^2}{\sqrt{R}} \sqrt{\sqrt{\Phi} + S^2}$$

offre le point de départ d'une discussion physique. Compte tenu de la condition aux limites en  $X = 1$  :  $\Phi(1) = 1$ , la densité de courant  $j = RJ_{CL}$  est donc une fonction du champ électrique normalisé en  $X = 0$  :  $F$  ; ainsi,

$$\sqrt{R} = 2S^3 + (1 - 2S^2) \sqrt{1 + S^2}$$

La fonction implicite  $R(F)$  ainsi définie par cette relation est monotone décroissante entre ( $R = 1, F = 0$ ) et ( $R = 0, F = 1$ ). Le premier point correspond à l'optimum de courant pouvant être écoulé entre les deux électrodes : le courant de Child-Langmuir défini par ; le deuxième point correspond à un courant nul, la chute de tension s'effectuant dans le vide, linéairement entre les deux électrodes.

$$\text{Courant nul, champ maximum} : R = 0, F = 1 \rightarrow \phi(x) = -U \left( \frac{x}{l} \right) \rightarrow J = 0$$

$$\text{Courant maximum, champ nul} : R = 1, F = 0 \rightarrow \phi(x) = -U \left( \frac{x}{l} \right)^{\frac{4}{3}} \rightarrow J = J_{CL}$$

Le courant maximum qui peut être extrait d'un plasma ( $R = 1, F = 0$ ) est donc donné par la formule de Child-Langmuir. Les formules précédentes révèlent une singularité de densité en  $x = 0$ . Une telle singularité peut être aisément régularisée en incluant des effets de vitesse initiale  $v_0$  et de pression  $P_0$  qui modifient

peu le résultat final concernant le courant maximum. Considérons le cas optimum identifié précédemment :  $e(x=0) = 0$ .

Afin de résoudre l'équation de Poisson non-linéaire, introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées :  $[\phi(x)] \rightarrow [\Phi(X)]$  :

$$X \equiv \frac{x}{l}, \quad J \equiv \frac{j}{J_A}, \quad \Phi(X) \equiv -\frac{q\phi(x)}{mc^2}$$

où le courant limite d'Alfvén  $J_A$  est défini par :  $J_A \equiv \varepsilon_0 mc^3 / ql^2$ . Éliminons la vitesse entre l'équation de conservation de la charge et l'équation de conservation de l'énergie pour exprimer la densité en fonction du potentiel dans l'équation de Poisson qui s'intègre alors aisément :

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = \frac{J}{\sqrt{2\Phi}} \rightarrow \Phi = \frac{3^{\frac{4}{3}} 2^{\frac{1}{3}}}{4} X^{\frac{4}{3}} J^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{X=1} j \equiv \frac{4\varepsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2q}{m}} \frac{U^{\frac{3}{2}}}{l^2}$$

et la relation courant-tension de Child-Langmuir en régime inertiel peut ainsi être établie.

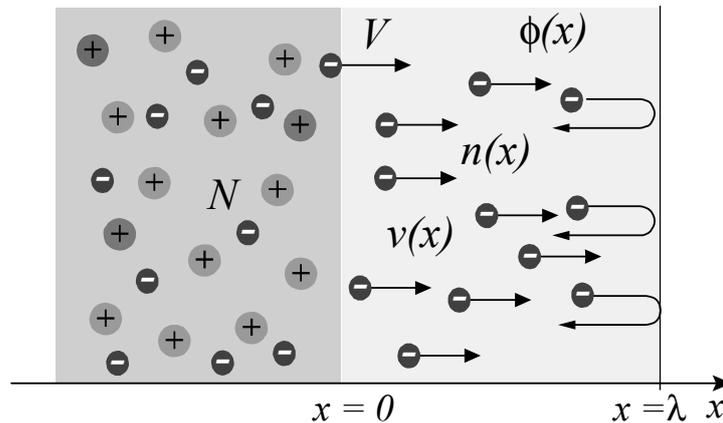
## 5.2 Debye sheath

Soit un plasma décrit par une densité d'électrons  $n$  et une densité d'ions  $n_i$ . A l'intérieur du plasma,  $n = n_i = N$ . Ce plasma, semi-infini, occupe la région de l'espace  $x \leq 0$ . Les ions sont supposés infiniment lourds et sont donc au repos, les électrons possèdent une vitesse non nulle suivant l'axe des  $x$ .

Cette vitesse permet aux électrons de s'éloigner de l'interface plasma-vide en  $x = 0$ , mais, ce faisant, les ions et les électrons ne se neutralisent plus mutuellement et créent, par séparation de charges, un champ électrique qui induit une force de rappel sur la population électronique. Les électrons rebroussement donc chemin au bout d'une distance  $\lambda$ .

Soit  $v(x)\mathbf{e}_x$  la vitesse d'un électron à une distance  $x$  de l'interface  $x = 0$ . On a donc  $v(x = \lambda) = 0$  et on pose  $v(x = 0) = \pm V$ . La densité d'électrons  $n(x)$  à une distance  $x$  de l'interface  $x = 0$  vérifie  $n(x > \lambda) = 0$  et  $n(x \leq 0) = N$ . On appelle  $\phi(x)$  le potentiel électrostatique à une distance  $x$  de l'interface  $x = 0$ , ce potentiel électrostatique vérifie les conditions aux limites  $\phi(x = 0) = 0$  et  $\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=\lambda} = 0$ . En effet, pour  $x > \lambda$  le champ électrique est nul car la somme totale des charges est nulle pour  $x < \lambda$  (théorème de Gauss).

La longueur  $\lambda$  est donc la longueur caractéristique de brisure de la neutralité lorsque les électrons ont une vitesse  $V$ . La valeur de  $\lambda$  s'obtient aisément en considérant la conservation de la charge et de l'impulsion ainsi que la relation de Poisson. Le principe de conservation de la charge, en régime stationnaire, s'exprime par la nullité de la divergence du flux électronique  $d[n(x)v(x)]/dx = 0$ .



Les trois inconnues de ce problème,  $n(x)$ ,  $v(x)$  et  $\phi(x)$ , vérifient donc un système de trois équations.

$$\text{Conservation de l'énergie} : \frac{m}{2} v^2(x) - e\phi(x) = \frac{m}{2} V^2$$

$$\text{Conservation de la charge} : n(x)v(x) = NV$$

$$\text{Equation de Poisson} : \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{ne}{\varepsilon_0}$$

où  $-e$  est la charge de l'électron et  $m$  sa masse. Les deux premières équations étant de nature algébrique et non différentielle, elles constituent naturellement le point de départ du processus d'élimination.

Le théorème de conservation de l'énergie mécanique permet en effet d'exprimer  $v(x)$  en fonction de  $\phi(x)$ . La densité électronique peut ensuite être exprimée en fonction du potentiel électrostatique en éliminant la vitesse dans l'équation de conservation de la charge.

$$v(x) = \sqrt{V^2 + \frac{2e\phi(x)}{m}} \rightarrow n(x) = \frac{NV}{\sqrt{V^2 + \frac{2e\phi(x)}{m}}}$$

Afin de faciliter la résolution finale et le calcul de  $\lambda$ , introduisons des variables normalisées de potentiel et de position :  $\phi(x) \rightarrow \Phi(X)$  où

$$x \rightarrow X = \sqrt{\frac{2Ne^2}{\epsilon_0 m V^2}} x, \quad \phi \rightarrow \Phi = \frac{2e}{mV^2} \phi$$

Ces variables permettent de simplifier l'écriture de la relation de Poisson reliant potentiel et charges.

Cette relation est semblable à l'équation décrivant un mouvement unidimensionnel dans un potentiel statique et admet donc une intégrale première qui, compte tenu des conditions aux limites sur la dérivée du potentiel, s'écrit :

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi}} \rightarrow \left(\frac{d\Phi}{dX}\right)^2 = 4\sqrt{1+\Phi}$$

Cette dernière équation s'intègre aisément et permet d'exprimer le potentiel en fonction de la distance à l'interface, le choix du signe étant dicté par la contrainte de croissance ou de décroissance à partir de  $X = 0$ .

$$d\Phi = \pm 2dX (1 + \Phi)^{\frac{1}{4}} \rightarrow \Phi(X) = \left[1 - \frac{3X}{2}\right]^{\frac{4}{3}} - 1$$

La longueur caractéristique  $\lambda$  est donc donnée par  $X = \frac{2}{3}$ .

$$\lambda = \frac{V}{3} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 m}{Ne^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{V}{\omega_p}$$

C'est ce type de gaine inertielle, générée par émission thermoïonique, qui est au coeur des générateurs thermoïoniques, dont la physique est plus complexe que ce simple modèle.

### 5.3 Chapman-Ferraro layer

Afin de comprendre comment la pression magnétique  $P_M$  :

$$\text{Pression magnétique : } P_M \equiv \frac{B^2}{2\mu_0}$$

peut équilibrer une pression cinétique, c'est-à-dire présenter des propriétés de confinement d'un fluide chaud, considérons l'interaction entre un flux de plasma et un champ magnétique. Soit un flux de particules chargées (électrons), de charge  $q$  et de masse  $m$ , interagissant avec un champ magnétique. Les orbites des particules chargées génèrent un champ (dia)magnétique et la force de Laplace associée au champ modifie les orbites. Cette population mobile est neutralisée par un fond continu de particules chargées (ions) de charge  $-q$  et de masse  $M = +\infty$ . Soit un système de coordonnées cartésiennes  $[x, y, z]$  associé à une base orthonormée directe  $[\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z]$ .

Le plasma est situé dans la région des  $x \sim 0$  et le champ confinant de part et d'autre du plasma  $x \leq 0$ ; pour simplifier l'analyse nous considérerons que loin de l'interface où le champ et les électrons interagissent, le champ magnétique  $b(x) \mathbf{u}_z$  est nul et que ce problème est équivalent au problème d'un plasma occupant le demi espace  $x$  négatif interagissant au voisinage de  $x \geq 0$  avec un champ occupant le demi espace  $x$  positif. Le champ magnétique présente une valeur constante dans la zone des  $x$  positifs grands où la densité devient nulle.

Appelons  $n(x)$  et  $u(x)$  la densité et la vitesse suivant  $x$  des particules se dirigeant vers l'interface champ-particules. En  $x = -\infty$  l'écoulement vers l'interface présente une vitesse :  $u(x = -\infty) \mathbf{u}_x = u_0 \mathbf{u}_x$ . Notons  $v(x)$  la vitesse suivant l'axe des  $y$ ; en  $x = -\infty$  (i) cette vitesse  $v(x = -\infty) = 0$ , (ii) la densité  $n(x = -\infty) = n_0$  et (iii) le champ magnétique  $b(x = -\infty) = 0$ . En  $x = +\infty$  la densité est nulle  $n(x = +\infty) = 0$  et le champ magnétique atteint une valeur de référence  $b(x = +\infty) = B_0$ . Le champ magnétique  $b(x) \mathbf{u}_z$  dérive d'un potentiel vecteur  $a(x) \mathbf{u}_y$  ( $b(x) = da/dx$  et  $a(x = -\infty) = 0$ ). Définissons le paramètre  $\beta$  qui constituera l'unique paramètre de contrôle de ce problème lorsque les variables seront normalisées.

$$\beta \equiv \frac{[\text{Pression cinétique du plasma}]}{[\text{Pression magnétique du champ}]} = \frac{n_0 m u_0^2}{B_0^2 / 2\mu_0}$$

Un courant  $\mathbf{J}$  apparaît au voisinage de l'interface champ-particules, ce courant permet le confinement du plasma à travers la force de Laplace à l'échelle fluide; nous allons démontrer que l'équilibre entre pression magnétique et pression cinétique constitue la condition de confinement  $\beta \sim 1$  de cette configuration simplifiée.

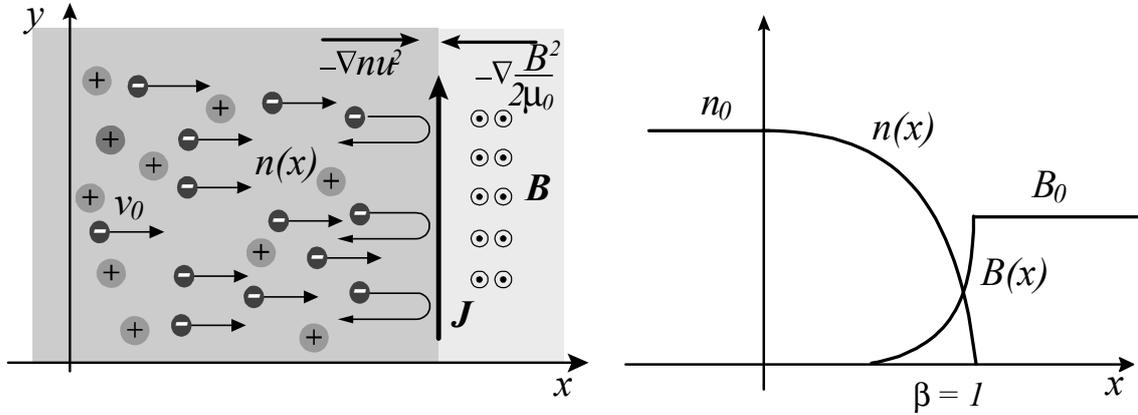
Les quatre inconnues décrivant le fluide et le champ,  $[n(x), u(x), v(x), b(x)]$ , sont solutions de l'équation d'Euler et de l'équation de continuité complétée par l'équation de Maxwell-Ampère décrivant la génération de champ magnétique par les courants diamagnétiques au niveau de l'interface plasma-champ :

$$\begin{aligned} \text{Euler} & : \quad mu \frac{du}{dx} = qvb, \quad mu \frac{dv}{dx} = -qub \\ \text{Consevation de la charge} & : \quad \frac{dnu}{dx} = 0 \\ \text{Ampère} & : \quad \frac{db}{dx} = -q\mu_0 nv \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues introduisons un nouveau système de variables et d'inconnues:  $[N(R), U(R), V(R), B(R)]$  et  $A(R)$ , où la variable de position normalisée  $R$  et les densité, vitesses et champs normalisés sont définis par :

$$N \equiv \frac{n}{n_0}, \quad U \equiv \frac{u}{u_0}, \quad V \equiv \frac{v}{u_0}, \quad B \equiv \frac{b}{B_0}, \quad A \equiv \frac{qa}{mu_0}$$

et  $X \equiv qB_0x/mu_0 \equiv x/\rho_{L0}$ ,  $\rho_{L0}$  est le rayon de Larmor associé à la vitesse  $u_0$  dans le champ de référence  $B_0$ .



Le système des quatre équations différentielles vérifiées par  $[N(X), U(X), V(X), B(X)]$  et  $A(X)$ , complété par la relation entre induction magnétique et potentiel vecteur ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) est donc donné par la transformation du système pour obtenir le système.

$$\begin{aligned} \text{Euler} & : \quad U \frac{dU}{dX} = VB, \quad U \frac{dV}{dX} = -UB \\ \text{Consevation de la charge} & : \quad \frac{dNU}{dX} = 0 \\ \text{Ampère} & : \quad \frac{dB}{dX} = -\frac{\beta}{2}NV, \quad \frac{dA}{dX} = B \end{aligned}$$

A partir du système trois invariants peuvent être identifiés, traduisant respectivement la conservation de l'énergie, la conservation du nombre de particules et la conservation du moment canonique suivant la direction des  $y$ .

$$U^2 + A^2 = 1, \quad NU = 1, \quad V + A = 0$$

La substitution de ces relations algébriques dans les équations différentielles permet de découpler la dynamique du potentiel vecteur  $A$ .

$$\frac{d^2A}{dX^2} = \frac{\beta}{2}A(1 - A^2)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow B = \frac{dA}{dX} = \sqrt{\beta} \left(1 - (1 - A^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans la zone d'interface champ/particules posons:  $A = \sin \theta \rightarrow B = \sqrt{2\beta} \sin \theta/2$  où  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . La relation de Maxwell-Ampère peut être intégrée pour exprimer  $X$  en fonction de  $\theta$  et le profil du champ normalisé  $B$  établi en fonction de  $X$ :  $\sqrt{\beta/2}X(\theta/2) = \log |\tan \theta| + 2 \cos(\theta/2)$ , où nous avons utilisé  $\int^x du/\sin u = \ln(\tan |x/2|)$ . Le point d'arrêt du plasma est défini par  $U = 0 \rightarrow A = 1$  et  $B = 1$  par définition, ce point d'arrêt est donc donné par  $\theta = \pi/2 \rightarrow B = \sqrt{\beta} \rightarrow \beta = 1$ . La relation  $\beta = 1$  exprime la condition d'équilibre mécanique entre la pression cinétique et la pression magnétique, sous cette condition d'équilibre de l'interface champ-particules, le confinement du plasma est donc possible pour la configuration représentée sur la figure et valide l'interprétation de la densité volumique d'énergie magnétique en terme de pression.

## 5.4 Lawson theorem

La force pondéromotrice est un effet quadratique en l'amplitude du champ électrique et la possibilité de générer des pulses laser intense présentant des flux de puissance de l'ordre de  $10^{20}$  Watt/cm<sup>2</sup> a ouvert la possibilité de mettre cette force au travail pour accélérer des particules chargées.

Considérons, sur le schéma de la figure 10.6, l'interaction entre (i) une impulsion électromagnétique, décrite par un potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  se propageant à la vitesse de la lumière dans l'espace  $\mathbf{r}$  en fonction du temps  $t$  et (ii) une particule de masse  $m$  et de charge  $e$ . Ce schéma d'interaction est contraint par le *théorème de Lawson* et oblige à substituer aux schémas laser/particules le schéma laser/plasma/particules qui ne sera pas présenté ici. Le théorème de Lawson, que nous allons démontrer, s'énonce ainsi.

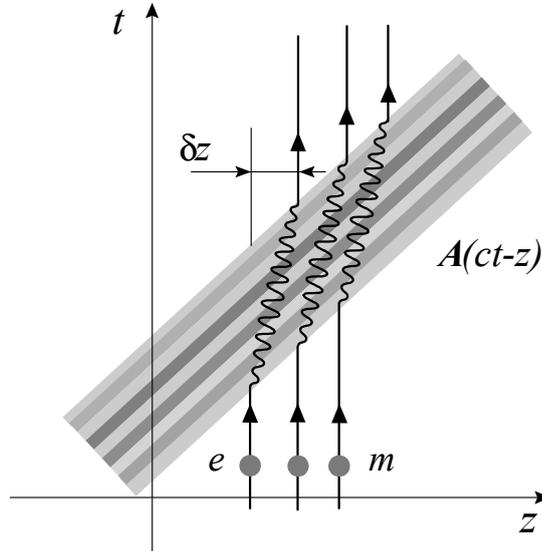
**Théorème de Lawson** : *Il est impossible de transférer de l'impulsion-énergie depuis une onde électromagnétique plane de durée finie, se propageant dans le vide, vers une particule chargée se déplaçant dans le vide.*

Ce résultat est lié à la contrainte de conservation de l'impulsion et de l'énergie qui est impossible à satisfaire pour la réaction *électron + photon → électron*.

Soit un repère cartésien orthonormé direct  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$  et un *pulse* électromagnétique transverse se propageant dans le vide suivant  $z$  et décrit par le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_x(ct - z)\mathbf{e}_x + A_y(ct - z)\mathbf{e}_y \rightarrow A^2 = A_x^2 + A_y^2,$$

et le potentiel scalaire  $\phi = 0$ , tel que  $A_x(\pm\infty) = A_y(\pm\infty) = 0$ , interagissant avec une particule de charge  $e$ , de masse  $m$  et de vitesse  $\mathbf{v}$ , initialement au repos.



Anticipons les résultats du chapitre suivant et considérons la *force de Lorentz-Coulomb-Laplace relativiste* ainsi que la version relativiste de la *seconde loi de Newton*,

$$\begin{aligned} \text{Transfert d'impulsion} & : m \frac{d\gamma \mathbf{v}}{dt} = -e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + e \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}), \\ \text{Transfert d'énergie} & : mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

où le facteur  $\gamma = \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  permet simplement la généralisation à haute vitesse des équations dynamiques classiques. Définissons le moment canonique,

$$\text{Moment canonique} : \mathbf{p} \equiv m\gamma \mathbf{v}(t) + e\mathbf{A}(ct - z).$$

Considérons la relation :  $\nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ , appliquée au produit scalaire  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ ,

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

qui permet la réécriture des équations du mouvement (5.1) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} & = \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ m \frac{d\gamma v_z}{dt} & = e \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_z = e \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Les composantes transverses de la vitesse sont donc égales au potentiel vecteur lors de l'interaction et reprennent leurs valeurs initiales (avant l'interaction) après l'interaction,

$$\begin{aligned} p_x = 0 &\rightarrow mv_x = -e\gamma^{-1}A_x \rightarrow v_x(t = +\infty) = v_x(t = -\infty), \\ p_y = 0 &\rightarrow mv_y = -e\gamma^{-1}A_y \rightarrow v_y(t = +\infty) = v_y(t = -\infty). \end{aligned}$$

Sur la base de ce résultat nous pouvons exprimer  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -eA^2/m\gamma$ , puis substituer cette expression dans les équations relatives à la composante  $z$  et à l'énergie,

$$\begin{aligned} \text{Impulsion longitudinale} &: \frac{d\gamma v_z}{dt} = -\frac{e^2}{2m^2} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial A^2}{\partial z}, \\ \text{Energie} &: \frac{d\gamma}{dt} = \frac{e^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial A^2}{\partial t}. \end{aligned}$$

Cette forme réduite permet d'identifier un invariant du mouvement :  $c\gamma - \gamma v_z$  qui est associé à la propagation à la vitesse de la lumière du pulse  $\mathbf{A}$  car  $c\partial A^2/\partial z = -\partial A^2/\partial t$ ,

$$c \frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\gamma v_z}{dt} = 0 \rightarrow c\gamma - \gamma v_z = c \rightarrow ct - z \equiv c\tau,$$

où nous avons considéré que les particules sont initialement au repos, c'est-à-dire  $\gamma = 1$  et  $v_z = 0$ . Définissons le temps propre  $\tau$  suivant la relation  $\gamma \equiv dt/d\tau$ , alors  $c\gamma - \gamma v_z = c$  conduit à l'expression de la phase du pulse  $ct - z \equiv c\tau$  qui permet d'intégrer les équations dynamiques précédentes,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma v_z}{d\tau} &= \frac{e^2}{2m^2 c} \frac{\partial A^2}{\partial \tau} \rightarrow \gamma v_z = \frac{e^2 A^2}{2m^2 c} \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= \frac{e^2}{2m^2 c^2} \frac{\partial A^2}{\partial \tau} \rightarrow \gamma = 1 + \frac{e^2 A^2}{2m^2 c^2}. \end{aligned}$$

L'effet du passage du pulse est donc (i) un simple déplacement  $\delta z = \int v_z dt = \int \gamma v_z d\tau$  suivant la direction de propagation du pulse et (ii) un transfert d'énergie nul, ce résultat constitue le *théorème de Lawson*,

$$\text{Théorème de Lawson 1 : } \boxed{mc^2 \delta\gamma|_{t=-\infty \rightarrow t=+\infty} = 0.}$$

L'origine de cette absence de transfert est aisée à identifier, la force pondéromotrice se présente comme le gradient de l'enveloppe quadratique de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{A}$ , la partie avant du pulse pousse la particule suivant la direction de propagation et la partie arrière suivant la direction opposée (figure 10.6), le bilan global est donc nul. Par contre la particule est déplacée par le pulse suivant la direction de propagation :

$$\text{Théorème de Lawson 2 : } \delta z|_{t=-\infty \rightarrow t=+\infty} = \frac{e^2}{2m^2 c} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} A^2(\tau) d\tau.$$

Cette conclusion défavorable à l'usage des laser intense pour l'accélération de particules n'est évidemment pas définitive, il suffit de considérer des configurations d'interaction où ce théorème n'est plus applicable (en particulier en relaxant les deux contraintes *dans le vide*) pour obtenir un transfert d'impulsion-énergie du champ vers les particules ; de nombreuses expériences ont démontrées l'existence de ce transfert lors de l'interaction laser/plasma ouvrant ainsi la perspective de l'accélération par laser.

## 5.5 Bohr-Bethe slowing down

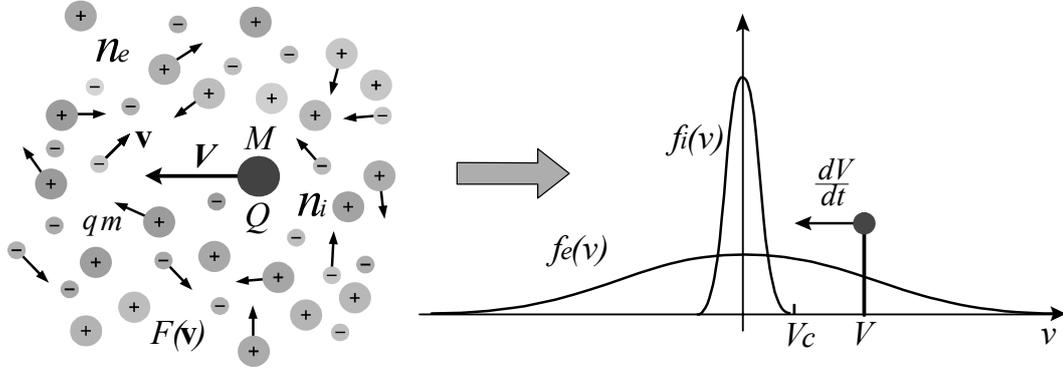
Le ralentissement des ions rapides au sein d'un plasma thermonucléaire constitue un problème important dans le contexte du chauffage ; que ce soit (i) les ions hydrogène présentant une énergie de l'ordre de la centaine de KeV, injectés dans les tokamaks pour déposer leur énergie afin d'atteindre la température d'allumage, ou, après allumage, (ii) les particules alpha présentant une énergie de 3.5 MeV résultant des réactions de fusion. Le ralentissement de ces ions suprathermiques et l'étude du transfert d'énergie cinétique vers le plasma relève de la théorie du ralentissement que nous allons développer dans ce paragraphe. L'équation du ralentissement d'un ion rapide interagissant avec une population ionique et une population électronique, illustrée sur la figure (4.16), peut être établie à partir des coefficients de friction et de diffusion comme suit :

$$\frac{d\langle V^2 \rangle}{dt} \equiv \frac{\langle [\mathbf{V} + \delta\mathbf{V}(\delta t)]^2 - \mathbf{V}^2 \rangle}{\delta t \rightarrow 0} = 2\mathbf{V} \cdot \frac{\langle \delta\mathbf{V} \rangle}{\delta t} + \frac{\langle \delta\mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{V} \rangle}{\delta t}$$

Dans la suite de ce paragraphe nous assimilerons  $dV^2/dt$  à sa valeur moyenne  $d\langle V^2 \rangle/dt$ ; la décélération collisionnelle est alors décrite par l'équation :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\mathbf{V}}{V} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} + \frac{1}{V} \text{Tr} \frac{\langle \delta \mathbf{V} \delta \mathbf{V} \rangle}{2\delta t}$$

où  $\text{Tr}$  désigne la trace de la matrice  $\langle \delta \mathbf{V} \delta \mathbf{V} \rangle / 2\delta t$ . Nous avons étudié l'expression du taux de destruction de l'impulsion d'une particule de vitesse  $\mathbf{V}$  de masse  $M$  et de charge  $q$  par une population au repos de charge  $Q$  et de densité  $n$ ,  $\langle \delta \mathbf{V} \rangle / \delta t = -\nu(v) \mathbf{V}$ .



Ralentissement coulombien des ions suprathermiques.

Au sein d'un plasma thermonucléaire les vitesses des électrons et des ions sont réparties suivant une distribution de Maxwell et il est donc nécessaire d'adapter cette relation  $\langle \delta \mathbf{V} \rangle / \delta t = -nq^2 Q^2 \Lambda \mathbf{V} / 4\pi \epsilon_0^2 M^2 V^3$  au cas d'une collision sur une cible mobile de vitesse  $\mathbf{v}$  pour évaluer le ralentissement des ions rapides sur un plasma thermonucléaire chaud.

Le problème de l'interaction entre deux particules, couplées par un potentiel  $U(\mathbf{r})$ , de masses respectives  $M$  et  $m$  et de vitesses respectives  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{v}$ , peut être résolu en considérant la vitesse du centre de masse  $\mathbf{v}_B$  et la vitesse relative  $\mathbf{v}_R$  :  $\mathbf{v}_B \equiv (M\mathbf{V} + m\mathbf{v}) / (M + m)$ ,  $\mathbf{v}_R \equiv \mathbf{V} - \mathbf{v}$ . Suivant cette décomposition classique (i) le centre de masse effectue un mouvement de translation uniforme et (ii) la vitesse relative effectue un mouvement varié dans le potentiel d'interaction  $U(\mathbf{r})$ . La masse associée à ce mouvement relatif étant la masse effective ou fictive  $\mu \equiv mM / (M + m)$ . Ainsi, considérant les deux états asymptotiques, bien avant la collision et bien après la collision, les variations de vitesses associées à la collision peuvent être déduites des variations de vitesses du problème décomposé :  $\delta \mathbf{v}_B = \mathbf{0}$  et  $\delta \mathbf{v}_R \neq \mathbf{0}$  :  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_B + \mu \mathbf{v}_R / M \rightarrow \delta \mathbf{V} = \mu \delta \mathbf{v}_R / M$ . Les relations explicitant la friction et la diffusion sont donc aisément adaptables au problème de la collision coulombienne de deux particules en mouvement, un ion rapide de vitesse  $\mathbf{V}$  et une particule (thermique) de vitesse  $\mathbf{v}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta \mathbf{v}_R \rangle}{\delta t} &= -\frac{nq^2 Q^2 \Lambda \mathbf{v}_R}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2 v_R^3} \rightarrow \frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} = -\frac{nq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu M} \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} \\ \frac{\langle \delta \mathbf{v}_R \delta \mathbf{v}_R \rangle}{2\delta t} &= \frac{nq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu^2} \frac{\mathbf{I} v_R^2 - \mathbf{v}_R \mathbf{v}_R}{2v_R^3} \rightarrow \text{Tr} \frac{\langle \delta \mathbf{V} \delta \mathbf{V} \rangle}{2\delta t} = \frac{nq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 M^2} \frac{1}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|} \end{aligned}$$

Ces deux relations sont ensuite sommées sur la fonction de distribution des vitesses des particules thermiques :  $F(v) = (\pi v_T^2)^{-\frac{3}{2}} \exp(-v^2/v_T^2)$ .

$$\frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} = -\left( \frac{nq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu M} \right) \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{(\pi v_T^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} d\mathbf{v}, \quad \text{Tr} \frac{\langle \delta \mathbf{V} \delta \mathbf{V} \rangle}{2\delta t} = \left( \frac{nq^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 M^2} \right) \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{(\pi v_T^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|} d\mathbf{v}$$

L'intégrale sur les vitesses électroniques apparaissant dans l'évaluation de la friction peut être interprétée dans un cadre électrostatique, figure (4.17). En effet, considérons les vitesses comme des positions, alors l'intégrand décrit une force centrale proportionnelle au carré de l'inverse de la distance, et l'intégrale la somme de telles forces pour une distribution isotrope. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Gauss avec comme surface de Gauss une sphère centrée à l'origine  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Ainsi, le calcul du coefficient de friction, illustré sur la figure (4.17), est simplifié pour les cas des ions suprathermiques  $V > v_T$  et subthermiques  $V < v_T$  car il se réduit à l'évaluation du champ électrique loin d'une sphère chargée et à l'intérieur d'une sphère de charge isotrope et homogène.

$$\begin{aligned} V > v_T : \int \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) d\mathbf{v} &\approx \frac{\mathbf{V}}{V^3} \int_0^{+\infty} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) dv = \pi^{\frac{3}{2}} \frac{v_T^3}{V^3} \mathbf{V} \\ V < v_T : \int \frac{\mathbf{V} - \mathbf{v}}{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) d\mathbf{v} &\approx \frac{\mathbf{V}}{V^3} \int_0^V 4\pi v^2 dv = \frac{4}{3} \pi \mathbf{V} \end{aligned}$$

Le cas de la diffusion peut être traité en remarquant que l'analogie électrostatique est aussi recevable, mais en considérant une intégrale de potentiel électrostatique. Le coefficient de friction est analogue à une intégrale de champ en vertu de la relation :  $-\partial|\mathbf{V}-\mathbf{v}|^{-1}/\partial\mathbf{V}=\mathbf{V}-\mathbf{v}/|\mathbf{V}-\mathbf{v}|^3$ .

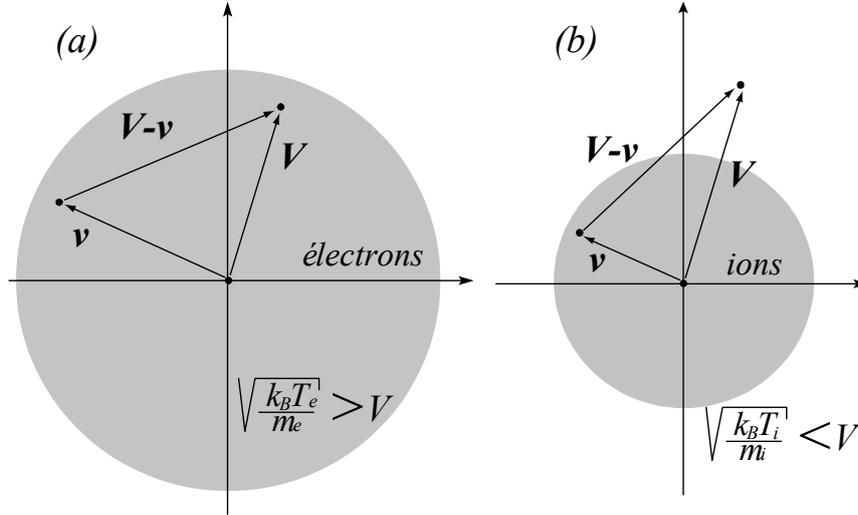


Fig. 4.17 : (a) Potentiel quasi-coulombien à l'intérieur de la sphère chargée (électrons), (b) Potentiel quasi-coulombien à l'extérieur de la sphère chargée (ions).

Les deux formes asymptotiques, haute et basse vitesses, sont donc données par :

$$V > v_T : \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{|\mathbf{V}-\mathbf{v}|} d\mathbf{v} \approx \pi^{\frac{3}{2}} \frac{v_T^3}{V}, \quad V < v_T : \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{|\mathbf{V}-\mathbf{v}|} d\mathbf{v} \approx 2\pi \left(v_T^2 - \frac{V^2}{3}\right)$$

Les deux asymptotiques  $V > v_T$  et  $V < v_T$  peuvent être raccordées par une simple représentation sous forme de fraction rationnelle.

$$\int \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) \frac{\mathbf{V}-\mathbf{v}}{|\mathbf{V}-\mathbf{v}|^3} d\mathbf{v} \approx \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{V^3}{v_T^3} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}} \mathbf{V}, \quad \int \frac{\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{|\mathbf{V}-\mathbf{v}|} d\mathbf{v} \approx \frac{\pi^{\frac{3}{2}} v_T^2}{\frac{V}{v_T} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Le cas des ions rapides dans les tokamaks est particulièrement simple car la vitesse caractéristique de ces ions est intermédiaire entre les vitesses thermique ionique et électronique :  $\sqrt{2k_B T_e/m_e} > V > \sqrt{2k_B T_i/m_i}$ ; aussi il est d'usage de considérer les deux limites, haute et basse vitesses, pour étudier le ralentissement et le dépôt de l'énergie thermonucléaire.

$$\begin{aligned} \text{Ions} & : \quad V > \sqrt{\frac{2k_B T_i}{m_i}} : \left. \frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} \right|_{i/i} = -\frac{n_i Q^2 Z^2 e^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 \mu_i M} \frac{\mathbf{V}}{V^3} \\ \text{Electrons} & : \quad V < \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e}} : \left. \frac{\langle \delta \mathbf{V} \rangle}{\delta t} \right|_{i/e} = -\frac{n_e Q^2 e^2 \Lambda}{3\epsilon_0^2 \mu_e M} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \mathbf{V} \end{aligned}$$

où les masses effectives électronique et ionique sont notées  $\mu_i = Mm_i/(M+m_i)$  et  $\mu_e = Mm_e/(M+m_e) \sim m_e$ . L'ordering des masses :  $M \sim m_i \gg m_e$  et les hypothèses :  $\sqrt{2k_B T_e/m_e} > V > \sqrt{2k_B T_i/m_i}$  impliquent  $MV^2 \sim m_i V^2 \gg k_B T \sim m_e v_T^2$ , ainsi le terme de diffusion électronique est donc négligeable devant le terme de friction électronique. La loi de ralentissement, prenant en compte les populations ionique et électronique, est donc donnée par :

$$\frac{dV}{dt} = - \underbrace{\frac{n_i Z^2 e^2 Q^2 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_i M} V^{-2}}_{\text{ions}} - \underbrace{\frac{n_e e^2 Q^2 \Lambda}{3\epsilon_0^2 m_e M} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} V}_{\text{électrons}}$$

L'équation différentielle décrivant le ralentissement présente deux termes, le terme électronique dominant à haute vitesse, et le terme ionique dominant à basse vitesse. La transition entre ces deux régimes définit la vitesse critique  $V_c$  et le temps caractéristique de décélération définit le temps de ralentissement  $\tau_S$ .

$$\begin{aligned} \text{Vitesse critique} & : \quad V_c^3 \equiv \frac{3Z\sqrt{\pi} k_B T}{2} \frac{k_B T}{m_i} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}} \\ \text{Temps de ralentissement} & : \quad \tau_S \equiv \frac{6\pi^{\frac{3}{2}} \epsilon_0^2 m_i M}{n_e e^2 Q^2 \Lambda} \frac{k_B T}{m_i} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}} \end{aligned}$$

Sur la base de ces deux définitions l'équation du ralentissement prend la forme simple,

$$\text{Slowing down: } \boxed{\frac{dV}{dt} = - \left( \frac{V_c^3 + V^3}{V^3} \right) \frac{V}{\tau_S}}$$

et peut être intégrée à partir d'une vitesse initiale  $V(t=0) = V_0$ .

$$V(t) = \left[ V_0^3 \exp -\frac{3t}{\tau_S} + V_c^3 \left( \exp -\frac{3t}{\tau_S} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

Les ions suprathermiques piégés à travers l'échange de charges des neutres rapides injectés au sein du plasma, ainsi que les particules alpha, suivent cette loi de ralentissement; dans le paragraphe consacré à la théorie cinétique nous analyserons, sur la base de ce résultat la nature du dépôt d'énergie sur les différentes populations thermiques. Pour les alpha thermonucléaires les temps caractéristiques de transfert d'impulsion-énergie au plasma thermique est donné par :

Alphas Rapides $MV^2/2 = 3.5 \text{ MeV}$	électrons $\sim 0.18s$	Alphas Suprathermiques $MV^2/2 = MV_c^2/2 \approx 500 \text{ KeV}$	ions $\sim 0.07s$	Alphas Thermiques
----------------------------------------------	---------------------------	-----------------------------------------------------------------------	----------------------	-------------------

## 5.6 Paschen-Townsend condition

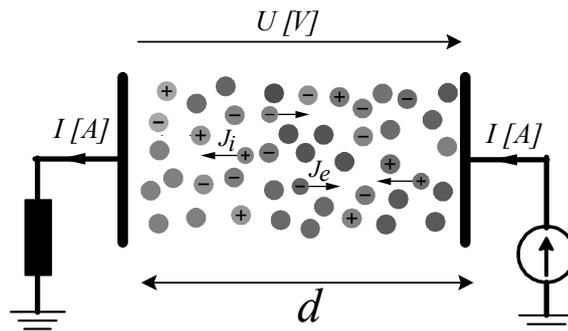
La figure ci-dessous illustre les principales caractéristiques d'une décharges électrique; dans un récipient, fermé (souvent transparent pour observer, voire utiliser, les effets lumineux annexes), un gaz est maintenu à une faible pression  $P$  et un champ électrique est généré, à l'aide d'un générateur de tension, entre une cathode et une anode séparées par une distance  $d$ .

La physique des décharges électriques s'attache à l'analyse de l'ensemble des phénomènes électriques se déroulant dans le récipient et en particulier à l'étude la relation courant-tension  $U(I)$ . Cette relation dépend de la nature du gaz, de sa pression  $P$  et de la distance entre les électrodes  $d$ ; néanmoins, l'allure de la caractéristique  $U(I)$  est universelle.

La figure présente cette caractéristique courant-tension universelle pour les décharges électriques dans des conditions typiques (quelques dizaines de centimètres pour l'espace inter-électrodes, un gaz usuel et des pressions inférieures à la pression atmosphérique). Plusieurs zones doivent être distinguées :

- La partie très basse tension,  $A$ , où le début de la courbe correspond à une simple collecte des charges déjà présentes dans le gaz et renouvelées par les agents énergétiques naturels de l'environnement; la faible croissance du courant en fonction de la tension sature rapidement car le courant est limité par la production d'espèces chargées par ces agents énergétiques.

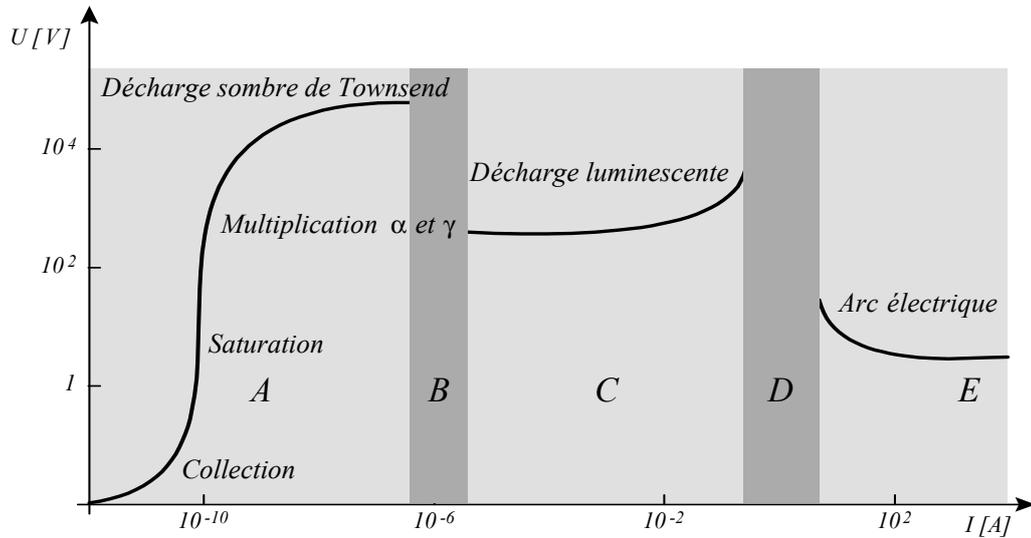
Puis, à plus haute tension, sous l'effet de l'accélération électrique, le phénomène d'ionisation par impact électronique entre en jeu et résulte en une multiplication des charges, donc en une croissance du courant, les deux processus de Townsend  $\alpha$  et  $\gamma$ , sont alors responsables d'une croissance exponentielle du courant  $I$  en fonction de la tension  $U$ .



- Cette production massive d'ions et d'électrons par accélération électrique et impact sur les atomes de gaz, atteint ensuite un seuil car les effets de charges d'espace et d'écrantage étudiés au chapitre trois deviennent dominant, c'est la zone  $B$ , électriquement instable, donc représentée par une bande sombre, le phénomène observé est appelé *transition de la décharge sombre de Townsend vers la décharge luminescente*.

- En effet, la zone  $C$  présente les caractéristiques d'une **décharge haute tension bas courant** et se singularise par une forte émissivité dans les domaines optique et ultra-violet, ainsi est définie la décharge luminescente ou *glow*, sa structure spatiale est complexe et ses applications multiples.

- Enfin, une transition vers l'arc électrique est observée pour les fort courants, c'est la zone  $D$ ; l'arc est une **décharge électrique basse tension fort courant** ( $E$ ). La *transition glow-arc* trouve sont origine dans les phénomènes thermiques, au niveau de la cathode où l'émission thermoionique prend le relais de l'émission secondaire et une tendance à l'équilibre thermodynamique entre le gaz neutre et le plasma apparaît. Les applications de la décharge d'arc sont aussi nombreuses et variées.



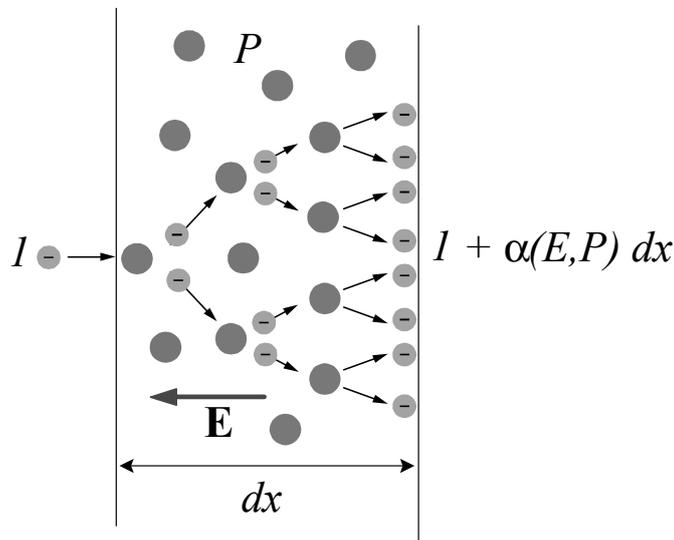
Le phénomène d’ionisation non thermique, par impact électronique, est caractérisé par un coefficient : le premier coefficient de Townsend,  $\alpha(E, P)$ , défini comme le nombre moyen de paires électron-ion créées, par unité de longueur, par un électron soumis au champ électrique  $E$  sous une pression de gaz neutre  $P$ .

$$\text{Coefficient de Townsend: } \alpha \equiv \frac{[\text{Nombre d'ionisations par unité de longueur}]}{[\text{Nombre d'électrons}]}$$

Le premier coefficient de Townsend décrit donc la génération d’une avalanche électronique élémentaire :

$$1 \text{ électrons} \rightarrow 2 \text{ électrons} \rightarrow 4 \text{ électrons} \rightarrow 8 \text{ électrons} \rightarrow \dots$$

Le modèle de libre parcours moyen permet d’évaluer ce premier coefficient d’ionisation comme suit.



Un électron pourra ioniser un atome si son énergie cinétique est supérieure à l’énergie d’ionisation  $E_I$ . Dans les plasmas dont la température est trop faible pour qu’une fraction non négligeable de la population électronique satisfasse cette condition, l’énergie nécessaire à la création d’une paire électron-ion est donc fournie par l’accélération due au champ électrique. Entre deux collisions un électron parcourant une distance  $x$  doit acquérir une énergie  $E_I$  on a donc la condition d’ionisation :  $eEx > E_I$ . La dynamique de l’électron est une série de mouvements libres interrompus par des collisions :

$$\text{Libre Parcours} / \text{Collision} / \text{Libre Parcours} / \text{Collision} / \text{Libre Parcours} / \dots$$

Afin de décrire cette dynamique, introduisons une loi de probabilité décrivant la probabilité pour qu’un libre parcours ait une longueur  $x$  ; appelons cette probabilité  $p(x)$ . Sur un parcours infinitésimal  $dx$  la probabilité de collision est proportionnelle à  $dx$  et la probabilité de non collision, correspondant à l’événement complémentaire, est donc donnée par 1 moins cette probabilité de collision ; en effet, il n’y a que deux possibilités : collision

ou libre parcours. Indépendamment de toute considération dynamique sur la nature exacte des collisions  $p(x)$  est donc de la forme :

$$p(dx) = 1 - \frac{dx}{\lambda}$$

où  $\lambda$  est le libre parcours moyen. La probabilité d'un libre parcours sans collision de longueur  $dx_1 + dx_2 + dx_3$  est donnée par le produit  $p(dx_1)p(dx_2)p(dx_3)$  car les différentes sections de ce libre parcours constituent des événements indépendants.

$$p(dx_1 + dx_2 + dx_3) = \left[1 - \frac{dx_1}{\lambda}\right] \left[1 - \frac{dx_2}{\lambda}\right] \left[1 - \frac{dx_3}{\lambda}\right]$$

Considérons maintenant une longueur finie  $x$  et décomposons la en une somme de  $K$  segments infinitésimaux  $dx$  :  $x = Kdx$ .

Les arguments précédents permettent alors d'établir la loi de probabilité des libres parcours.

$$p(x) = \left[1 - \frac{x}{K\lambda}\right]^K \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \exp\left[-\frac{x}{\lambda}\right]$$

Le résultat final est donc une loi de Poisson. Pour acquérir une énergie cinétique égale à l'énergie d'ionisation, et induire ainsi une réaction, un électron doit être accéléré sur une longueur  $x = E_I/eE$ . La probabilité de réalisation d'un libre parcours de longueur  $x = E_I/eE$ , suivie d'une collision ionisante, est le produit de la probabilité d'un libre parcours d'accélération  $x = E_I/eE$  que multiplie la probabilité d'une collision dans la section finale du parcours  $dx$  ; les deux événements étant indépendants.

$$\underbrace{\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\Big|_{x=\frac{E_I}{eE}}}_{\text{Probabilité de libre parcours } x} \times \underbrace{\frac{dx}{\lambda}}_{\text{Probabilité de collision}}$$

En toute rigueur il serai nécessaire de distinguer le libre parcours pour le transfert d'impulsion et le libre parcours pour l'ionisation, mais ces deux quantités sont du même ordre de grandeur pour les électrons de quelques dizaines d'eV.

Considérons maintenant  $N$  électrons entrant dans une tranche  $dx$  du plasma ; une fraction significative de ces électrons a été accélérée au dessus du seuil d'ionisation  $E_I$  et va donc déclencher une avalanche électronique ; à la sortie de la tranche  $dx$  le nombre d'électrons sera  $N + dN$ . Le processus de multiplication électronique en présence d'un champ électrique est donc décrit par la relation :

$$\frac{dN}{dx} = N \frac{\exp - \frac{E_I}{eE\lambda}}{\lambda} \equiv \alpha N \rightarrow \alpha = \frac{\exp - \frac{E_I}{\lambda eE}}{\lambda}$$

définissant ainsi le premier coefficient de Townsend. L'usage est d'exprimer le libre parcours moyen en fonction de la pression  $P$ ,  $\lambda \sim 1/P$ , et de définir les constantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$\text{Premier coefficient de Townsend : } \alpha = AP \exp\left(-\frac{B}{E/P}\right)$$

Malgré la simplicité du modèle construit pour élaborer cette formule, ce type de dépendance fonctionnelle est effectivement observée expérimentalement ; la figure : présente un ensemble de données pour les gaz rares conforme à cette formule.

Ainsi, les constantes  $A$  et  $B$  constituent les données de base pour étudier les processus d'ionisation dans les décharges électriques ; quelques unes de ces données sont présentées dans le tableau :

	$A$ [torr × cm] <sup>-1</sup>	$B$ [V/torr × cm]	$\frac{E}{P}$ [V/torr × cm]
He	3	34	20-200
Ne	4	100	100-400
Xe	26	350	200-800
H <sub>2</sub>	5	130	100-600
Air	15	365	100-800

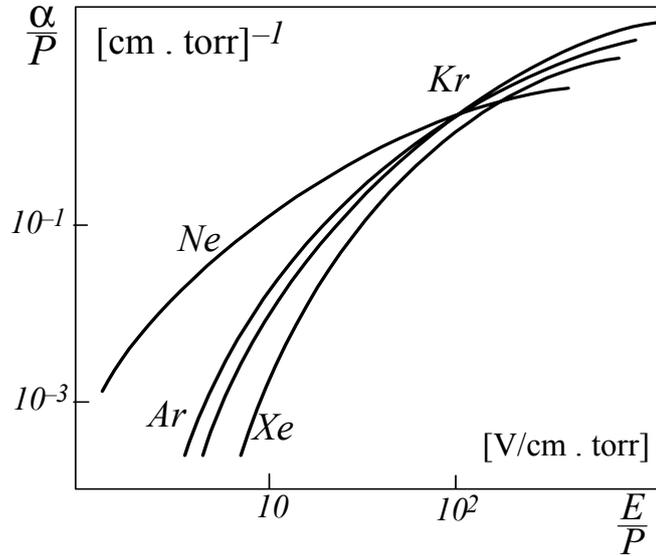
Le premier coefficient de Townsend permet de quantifier le phénomène d'amplification de l'ionisation induite par un champ électrique ; c'est-à-dire d'avalanche résultant d'un électron, mais il ne permet pas d'expliquer l'existence de décharges stationnaires autonomes en régime continu.

En effet, en plus d'un phénomène d'amplification, un phénomène de régénération est nécessaire à l'entretien d'une décharge dans un volume fini car les charges sont ultimement collectées à l'anode et à la cathode. Ce phénomène de régénération existe et est décrit par le deuxième coefficient de Townsend  $\gamma$ . Considérons une décharge entre une cathode et une anode, lorsque un ion arrive sur la cathode il peut expulser un électron

secondaire par conversion de ses énergies cinétique et potentiel, le nombre d'électrons secondaires pour un ion incident définit le coefficient  $\gamma$ .

$$\text{Deuxième coefficient de Townsend: } \gamma \equiv \frac{[\text{Nombre d'électrons secondaires}]}{[\text{Nombre d'ions incidents}]}$$

Ce deuxième coefficient de Townsend est uniquement fonction de la nature de la cathode, par exemple pour une cathode en tungstène les valeurs de  $\gamma$  sont comprises entre 0.1 et 0.3 à des énergie de quelques eV. Les deux coefficients d'ionisation de Townsend,  $\alpha$  et  $\gamma$ , permettent d'établir les conditions d'entretien d'une décharge comme suit.



Chaque électron quittant la cathode induit une avalanche décrite par  $N(x)$ , le nombre d'électrons à une distance  $x$  de la cathode  $N(x) = \exp \alpha x$ . Au niveau de l'anode arrivent donc  $\exp \alpha d$  électrons. Chaque électron quittant la cathode, et terminant son transit sur l'anode, génère ainsi  $\exp \alpha d - 1$  électrons et ions. Les  $\exp \alpha d - 1$  ions ainsi générés arrivent sur la cathode et en extraient  $\gamma (\exp \alpha d - 1)$  électrons secondaires. Cette deuxième génération d'électrons issus de la cathode va développer un processus d'avalanche. L'électron unique initialement issu de la cathode est donc la source d'une multiplicité de générations :

$$1 \rightarrow \underbrace{\exp \alpha d - 1}_{\text{Première génération}} \rightarrow \underbrace{\gamma (\exp \alpha d - 1) \exp \alpha d}_{\text{Deuxième génération}} \rightarrow \underbrace{\gamma^2 (\exp \alpha d - 1)^2 \exp \alpha d}_{\text{Troisième génération}} \rightarrow \dots$$

Cette série géométrique décrivant la filiation d'un électron unique issu de la cathode peut être sommée ( $1 + u + u^2 + u^3 + \dots = 1/1 - u$  où  $u = \gamma (\exp \alpha d - 1)$ ) et le résultat final donne le coefficient d'amplification de la décharge compte tenu des processus primaires  $\alpha$  et secondaires  $\gamma$ ,

$$1 \text{ électron à la cathode} \rightarrow \frac{\exp \alpha d}{1 - \gamma (\exp \alpha d - 1)} \text{ électrons à l'anode}$$

Lorsque le dénominateur devient nul, nous sommes en présence d'un phénomène de claquage c'est-à-dire de transition entre une phase faiblement conductrice vers un gaz ionisé bon conducteur ( $1 \text{ électron} \rightarrow +\infty \text{ électrons}$ ). Le courant dans la décharge n'est limité que par la résistance extérieure et aucun apport de charges extérieures n'est nécessaire à l'entretien de la décharge.

La condition d'auto-entretien de la décharge, ou *condition de Townsend*, s'écrit donc :

$$\text{Condition de Townsend: } \alpha (E, P) d = \log(1 + 1/\gamma)$$

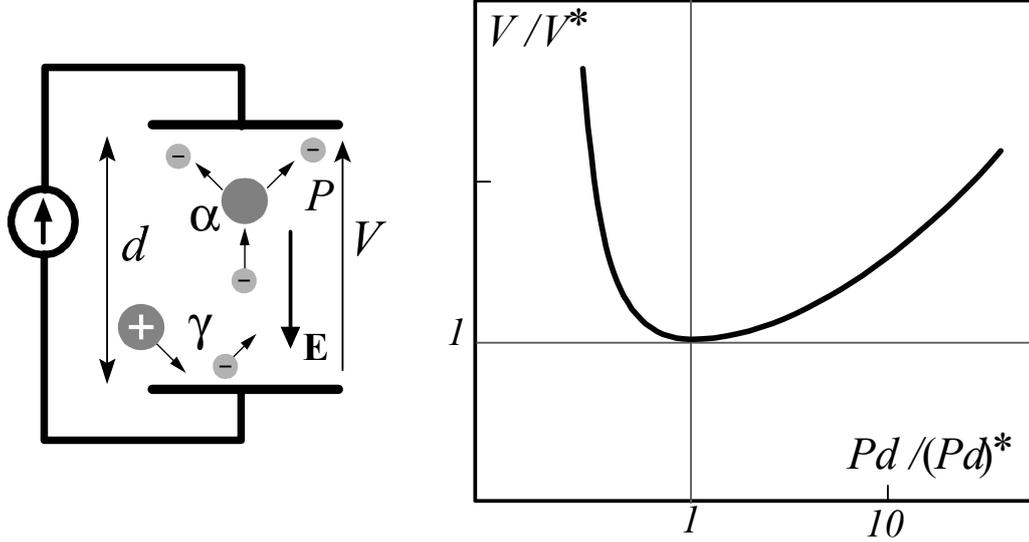
Attachons-nous, maintenant, à l'étude des dépendances paramétriques du critère de Townsend. En effet, nous avons obtenu l'expression du coefficient  $\alpha$  en fonction de la pression du gaz neutre  $P$  et du champ électrique  $V/d$ . Sur la base de cette expression du premier coefficient de Townsend, il est possible d'exprimer la tension de claquage en fonction du produit  $Pd$ ,

$$\alpha (V/d, P) d = \log \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \rightarrow APd \exp \left( -\frac{BPd}{V} \right) = \log \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right)$$

L'usage est d'introduire le potentiel minimum de claquage  $V^*$  et le produit pression  $\times$  longueur critique  $Pd^*$  :  $V^* \equiv B \exp(1) \log(1 + 1/\gamma) / A$  et  $Pd^* \equiv \exp(1) \log(1 + 1/\gamma) / A$ , afin d'exprimer la tension de claquage sous une forme universelle.

$$\text{Loi de Paschen : } \frac{V}{V^*} = \frac{\frac{Pd}{Pd^*}}{1 + \log \frac{Pd}{Pd^*}}$$

La représentation graphique de cette loi, dite de Paschen, est appelée *courbe de Paschen*.



Les valeurs spécifiques des deux coefficients  $V^*$  et  $(Pd)^*$  pour les gaz usuels sont données dans le tableau :

	$V^*$ [V]	$(Pd)^*$ [torr · cm]
He	156	4,0
H <sub>2</sub>	273	1,15
N <sub>2</sub>	251	0,67
O <sub>2</sub>	450	0,7
Air	327	0,56

L'existence d'un minimum s'interprète aisément en remarquant qu'à distance interélectrodes et tension données, à basse pression, le libre parcours des électrons est très long et les probabilités de collisions ionisantes donc très faibles. Par contre, à haute pression, les électrons ne peuvent acquérir l'énergie d'ionisation entre deux collisions ; entre ces deux extrêmes, également défavorables au développement de l'ionisation, il est possible de trouver un compromis optimal assurant le claquage.

Si les charges ne sont pas collectées à l'anode et à la cathode et si la recombinaison en volume est significative par rapport à la recombinaison aux parois, un modèle d'ionisation/recombinaison est pertinent. Pour construire un tel modèle, introduisons  $S$  le nombre d'ionisations par unité de volume et unité de temps, et  $R$  le taux de recombinaison en volume. Ces deux paramètres primaires conduisent à l'identification de deux paramètres secondaires, un temps  $\tau$  et une densité  $n_0$  que nous interpréterons dans la suite.

$$\begin{aligned} \text{Ionisation} & : S \left[ \frac{1}{\text{m}^3\text{s}} \right], \text{ Recombinaison} : R \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \\ \tau [\text{s}] & \equiv \frac{1}{\sqrt{RS}}, n_0 [\text{m}^{-3}] \equiv \sqrt{\frac{S}{R}} \end{aligned}$$

L'équation décrivant l'évolution de la densité  $n$ , en fonction du temps  $t$ , est un simple bilan gains/pertes :

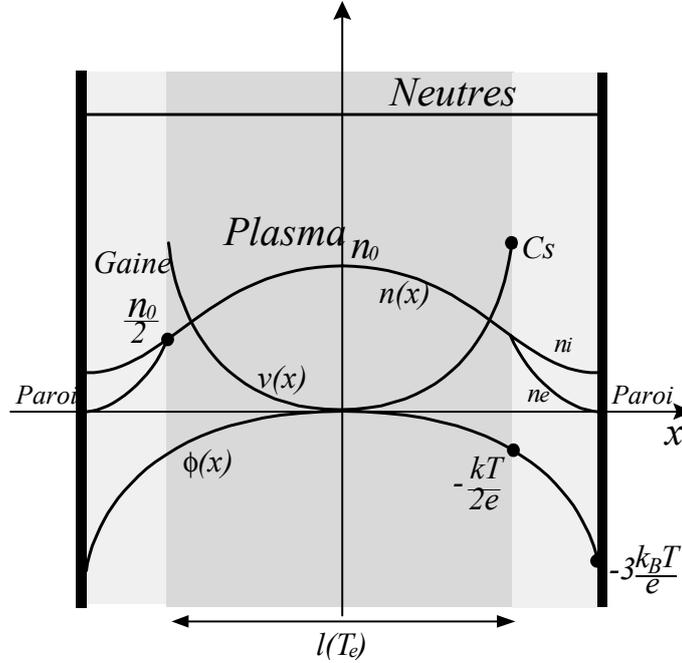
$$\frac{dn}{dt} = S - Rn^2 \rightarrow \frac{dn/\sqrt{\frac{S}{R}}}{\sqrt{RS}dt} = 1 - \frac{R}{S}n^2 \rightarrow \int \frac{dn/n_0}{1 - (n/n_0)^2} = \int dt/\tau \rightarrow \frac{n(t)}{n_0} = \tanh \frac{t}{\tau}$$

La densité d'équilibre  $n_0$  est donc atteinte au bout d'une durée caractéristique  $\tau$ .

## 5.7 Schottky/Tonks-Langmuir discharges

La diffusion et la convection sont les deux processus dynamiques des différents modèles d'écoulements quasi-neutres utilisés pour décrire les plasmas faiblement ionisés. Selon les régimes de collisionnalité, différents types

de réponses ioniques et électroniques doivent être considérés, pour cela nous allons étudier trois modèles classiques. Tout d’abord nous considérerons deux régimes collisionnels asymptotiques : (i) en champ faible et (ii) en champ fort (ou à haute et basse pressions puisque le paramètre de contrôle est le rapport  $E/P$ ), ce sont les modèles de Schottky. Ensuite, un modèle permettant d’appréhender le comportement des décharges à basse pression, en régime non-collisionnel ou inertiel, sera étudié, c’est le modèle de Tonks-Langmuir. Malgré leurs différences tous ces modèles ont en commun l’existence d’une densité critique où s’effectue une transition subsonique/supersonique. Au niveau de cette transition l’hypothèse de quasi-neutralité cesse d’être valable et un modèle de gaine doit être construit pour achever la description du plasma dans l’intégralité du volume de la décharge.



Considérons d’abord une décharge collisionnelle où les ions seront traités comme un fluide collisionnel sans inertie et les électrons comme une population sans inertie à l’équilibre en régime boltzmannien. La conservation du nombre d’ions, de l’impulsion ionique et l’hypothèse d’équilibre électronique se traduisent par le système d’équations :

$$\begin{aligned}
 \text{Conservation de la charge ionique} & : \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = \nu_i n_e \\
 \text{Transport ionique} & : \mathbf{v} = \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla n_i}{n_i} \\
 \text{Relation de Boltzmann électronique} & : n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)
 \end{aligned}$$

où  $n_e$  et  $n_i$  sont respectivement les densités électronique et ionique,  $\mathbf{v}$  est la vitesse ionique,  $n_0$  la densité au centre de la décharge,  $\phi$  est le potentiel électrostatique,  $\mu$  le coefficient de mobilité ionique,  $-e$  la charge de l’électron,  $T_e$  la température électronique et  $D$  le coefficient de diffusion ionique,  $\nu_i$  est la fréquence d’ionisation,  $\nu_i n_e$  est le nombre d’ions créés par unité de volume et unité de temps ; en général ce processus de génération est dû à l’impact électronique, afin de préserver la généralité des résultats nous ne précisons pas la nature exact du mécanisme d’ionisation et nous considérerons cette fréquence d’ionisation comme une constante, donnée de base du modèle.

Nous disposons donc de trois équations qui ne permettent pas de déterminer les quatre inconnues,  $n_e$ ,  $n_i$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\phi$  ; une hypothèse supplémentaire est nécessaire, la quasi-neutralité :  $n_e = n_i = n$ . Le modèle étant restreint à l’étude des écoulements unidimensionnels suivant l’axe des  $x$ , le système décrivant la structure des couplages dynamiques se réduit à :

$$\begin{aligned}
 \text{Plasma} & : \frac{d}{dx} [nv] = \nu_i n, & nv = -\mu n \frac{d\phi}{dx} - D \frac{dn}{dx} \\
 \text{Champ} & : \frac{d\phi}{dx} = \frac{kT_e}{en} \frac{dn}{dx}
 \end{aligned}$$

Introduisons  $\nu_c$  la fréquence de transfert d’impulsion ionique qui permet d’exprimer les coefficients de mobilité

et diffusion ionique en fonction de la masse des ions  $m_i$  et de leur température  $T_i$ .

$$\mu \equiv \frac{e}{m_i \nu_c}, \quad D \equiv \frac{kT_i}{m_i \nu_c}$$

Afin de résoudre le système de trois équations à trois inconnues introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées:  $[n(x), v(x), \phi(x)] \rightarrow [N(X), V(X), \Phi(X)]$  où les variables de position, densité, vitesse et potentiel normalisés sont définies par:

$$\frac{X}{x} \equiv \frac{\sqrt{\nu_i \nu_c}}{C_s}, \quad N \equiv \frac{n}{n_0}, \quad V \equiv \frac{v}{C_s}, \quad \Phi \equiv \frac{e\phi}{kT_e}$$

La vitesse acoustique ionique  $C_s$  est donnée par  $C_s = \sqrt{kT_e/m_i}$ .

Les conditions aux limites sur la densité, la vitesse et le potentiel sont:  $N(X=0) = 1$ ,  $V(X=0) = 0$ ,  $\Phi(X=0) = 0$ . Supposons  $T_e \gg T_i$ , effectuons les approximations qui résultent de cette hypothèse et éliminons le potentiel électrostatique du système; le système de deux équations différentielles du premier ordre, vérifié par  $N(X)$  et  $V(X)$ , ainsi obtenu,

$$\frac{d}{dX} [NV] = \sqrt{\frac{\nu_i}{\nu_c}} N, \quad \frac{dN}{dX} = -\sqrt{\frac{\nu_c}{\nu_i}} NV$$

s'intègre aisément et les profils de vitesse et potentiel,  $V(X)$  et  $\Phi(X)$ , s'expriment simplement en fonction de  $X$ .

$$N = \cos X, \quad V = \sqrt{\frac{\nu_i}{\nu_c}} \tan X$$

La condition aux limites sur la paroi  $N = 0$  est singulière car la vitesse de l'écoulement devient infinie:  $N = 0 \rightarrow V = +\infty$ . Afin de régulariser ce comportement singulier nous considérerons que le modèle quasi-neutre,  $n_e = n_i = n$ , cesse d'être valable lorsque la vitesse devient supersonique; ainsi définissons le point de coordonnée  $X^* = \arctan \sqrt{\frac{\nu_c}{\nu_i}}$  tel que  $V(X^*) = 1 \rightarrow N(X^*) = 1/\sqrt{1 + \nu_c/\nu_i}$  et  $\Phi(X^*) = -\log \sqrt{1 + \nu_c/\nu_i}$ . Ce point marque le seuil d'entrée de la zone de raccordement entre le plasma quasi-neutre et la gaine non-neutre. Le potentiel de seuil  $\phi_s$  et la densité de seuil  $n_s$  en ce point sont donc donnés par:

$$n_s = \frac{n_0}{\sqrt{1 + \frac{\nu_i}{\nu_c}}}, \quad \phi_s = -\frac{kT_e}{2e} \log \left[ 1 + \frac{\nu_i}{\nu_c} \right]$$

Nous démontrerons que l'allure général de ces profils et les valeurs au seuil de transition sont indépendantes du modèle et universelles.

Nous verrons que l'épaisseur de la gaine est de quelques longueurs de Debye, aussi, peut-on considérer que le plasma occupe tout le récipient; si la dimension d'extension du récipient est égale à  $l$  alors, en  $x = l$ , la condition  $N = \cos X \approx 0 \rightarrow \pi/2 = \sqrt{\nu_i \nu_c} l / C_s$ ; cette condition impose une contrainte qui peut sembler difficile à satisfaire, comme la vitesse acoustique ionique,  $C_s$ , la fréquence d'ionisation,  $\nu_i$ , et la fréquence de collision,  $\nu_c$ , sont des données de base du modèle et non des paramètres libres. En fait, ces trois paramètres sont fonctions de la température électronique,  $T_e$ , et l'équation  $l \approx \pi C_s / 2\sqrt{\nu_i \nu_c}$  fixe la température de la décharge. Dans une décharge électrique le bilan de particules détermine la température (et le bilan d'énergie la densité mais nous ne considérerons pas ce problème ici).

$$C_s(T_e) \approx l \sqrt{\nu_i(T_e) \nu_c(T_e)} \rightarrow T_e$$

L'interprétation physique de cette dernière relation est directe. Soit  $\lambda_i$  et  $\lambda_c$  les libres parcours d'ionisation et de transfert d'impulsion. La condition d'existence de la décharge peut-être formulée en exprimant la condition que chaque électron, avant de quitter la décharge, se reproduise une fois et génère ainsi au moins un deuxième électron par ionisation par impact électronique. D'une part, le transport électronique étant diffusif, un électron effectue une marche aléatoire et rencontre la paroi au bout de  $N$  pas:  $l^2 \approx N \lambda_c^2$ ; d'autre part, la condition de reproduction s'exprime par la relation:  $\lambda_i \approx N \lambda_c$ . Éliminons  $N$  entre ces deux identités et nous obtenons la condition dites de Schottky:

$$\text{Condition de Schottky: } l \approx \sqrt{\lambda_i(T_e) \lambda_c(T_e)}$$

qui n'est autre que la condition  $C_s \approx l \sqrt{\nu_i \nu_c}$ .

Considérons, maintenant, le cas des champs forts, c'est-à-dire lorsque le paramètre  $E/P > \sigma_B T / e T_n$ ; introduisons  $\lambda_c$  un libre parcours moyen effectif, supposé constant, qui permet d'exprimer les coefficients de mobilité et diffusion ionique en fonction de la masse des ions  $m_i$  et de leur température  $T_i$ .

$$\mu = \frac{e \lambda_c}{m_i v}, \quad D = \frac{kT_i \lambda_c}{m_i v}$$

Afin de résoudre le système de trois équations à trois inconnues on introduit un système de variables et d'inconnues normalisées :  $[n(x), v(x), \phi(x)] \rightarrow [N(X), V(X), \Phi(X)]$  où les variables normalisées sont définies par :

$$\frac{X}{x} \equiv \nu_i (C_s^2 \lambda_c \nu_i)^{-\frac{1}{3}}, \quad N \equiv \frac{n}{n_0}, \quad V \equiv v (C_s^2 \lambda_c \nu_i)^{-\frac{1}{3}}, \quad \Phi \equiv \frac{e\phi}{kT_e}$$

Les conditions aux limites sur la densité la vitesse et le potentiel sont :  $N(X=0) = 1, V(X=0) = 0, \Phi(X=0) = 0$ . Supposons  $T_e \gg T_i$ ; les deux équations différentielles ordinaires du premier ordre vérifiées par  $N(X)$  et  $V(X)$  deviennent :

$$\frac{d}{dX} [NV] = N, \quad \frac{dN}{dX} = -NV^2$$

Ainsi,  $dV/dX = 1 + V^3$  et une quadrature permet d'exprimer la position  $X$  en fonction de la vitesse  $V$ .

$$X = \frac{1}{6} \log \left[ \frac{1+2V+V^2}{1-V+V^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[ \frac{2V-1}{\sqrt{3}} \right] + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \quad N^3 = \frac{1}{1+V^3}$$

Définissons  $X^*$ , le point où la vitesse devient supersonique :  $V(X^*) = 1 \rightarrow N(X^*) = 2^{-1/3}, \Phi(X^*) = -(\log 2)/3$ . Nous obtenons ainsi les expressions des densité et potentiel de seuil en régime de champ fort :

$$n_s = n_0 2^{-\frac{1}{3}}, \quad \phi_s = -\frac{kT_e}{3e} \log [2]$$

Les profils représentés sur la figure 6.16 sont aussi pertinents pour ce modèle, ainsi que les différents ordres de grandeur caractéristiques.

Si la collisionnalité devient extrêmement faible, alors l'inertie est dominante et la construction d'un modèle non-dissipatif s'impose, le modèle de Tonks-Langmuir.

Le type de décharges que nous allons étudier maintenant est complémentaire des précédents en terme de description de régime. En effet, les ions sont considérés ici en régime inertiel, sans collision, et les électrons à l'équilibre en régime boltzmannien. La conservation du nombre d'ions, de l'énergie/impulsion ionique et l'hypothèse d'équilibre électronique se traduisent par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \text{Conservation de la charge ionique} & : \quad \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = \nu_i n_e \\ \text{Conservation de l'énergie} & : \quad \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}^2 + e\phi \right] = 0 \\ \text{Relation de Boltzmann} & : \quad n_e = n_0 \exp \left( \frac{e\phi}{kT_e} \right) \end{aligned}$$

où  $n_e$  et  $n_i$  sont respectivement les densités électronique et ionique,  $n_0$  la densité au centre de la décharge,  $\nu_i$  est la fréquence d'ionisation. Nous disposons donc de trois équations qui ne permettent pas de déterminer les quatre inconnues ; une hypothèse supplémentaire est nécessaire, la quasi-neutralité :  $n_e = n_i = n$ . Le modèle étant restreint à l'étude des écoulements unidimensionnels, le système décrivant cet écoulement basse pression se réduit à :

$$\begin{aligned} \text{Plasma} & : \quad \frac{d}{dx} (nv) = \nu_i n, \quad v^2 = -\frac{2e\phi}{m_i} \\ \text{Champ} & : \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{kT_e}{ne} \frac{dn}{dx} \end{aligned}$$

Afin de résoudre ce système de trois équations à trois inconnues introduisons un système de variables et d'inconnues normalisées :  $[n(x), v(x), \phi(x)] \rightarrow [N(X), V(X), \Phi(X)]$ .

$$\frac{X}{x} \equiv \frac{\nu_i}{C_s}, \quad \Phi \equiv \frac{e\phi}{kT_e}, \quad V \equiv \frac{v}{C_s}, \quad N \equiv \frac{n}{n_0}$$

Les équations normalisées deviennent :

$$\frac{d}{dX} [NV] = N, \quad V^2 = -2 \log N$$

Ainsi,  $d[N\sqrt{-2 \log N}]/dX = N$  qui peut être aisément ramené à une quadrature afin d'exprimer  $X$  en fonction de  $N$  ; la solution implicite du système précédent est donc donnée par :

$$X = [-2 \log N]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} [-2 \log N]^{\frac{3}{2}}, \quad X = V - \frac{1}{3} V^3$$

Soit  $X^*$  le point où la vitesse devient supersonique :  $V(X^*) = 1 \rightarrow N(X^*) = \exp(-1/2)$ ,  $\Phi(X^*) = -1/2$ . Ce point marque le seuil d'entrée dans la gaine non-neutre, en ce point la densité et le potentiel prennent les valeurs caractéristiques suivantes :

$$n_s = n_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \phi_s = -\frac{kT_e}{2e}$$

Ce dernier modèle de Tonks-Langmuir présente quelques faiblesses, car, si le fluide ionique est en régime inertiel, le bilan de particules ne peut pas être traduit par une équation locale ; mais doit être décrit par une convolution spatiale. Historiquement, Tonks et Langmuir ont décrit et analysé ce problème plus complexe de transport non-local. Pour simplifier la présentation, nous avons fait le choix d'une description locale qui ne modifie pas l'ordre de grandeur des résultats de Tonks et Langmuir.

Chacune de ces trois études spécifiques considérée séparément est de peu d'intérêt, c'est la comparaison des trois résultats qui permet de comprendre l'universalité de la transition subsonique/supersonique ; en effet, les valeurs de seuil, résumées dans le tableau ci-dessous, sont remarquablement voisines compte tenu de la grande différence entre les hypothèses de construction des trois modèles.

Modèle	Vitesse ionique	$n_s/n_0$	$-e\phi_s/kT_e$
Schottky linéaire ( $\nu_i \approx \nu_c$ )	$\frac{e}{m_i \nu_c} E$	$1/\sqrt{2}$	$\log(2)/2$
Schottky non-linéaire ( $\nu_i, \lambda_c$ )	$\sqrt{\frac{e\lambda_c}{m_i} E}$	$1/\sqrt[3]{2}$	$\log(2)/3$
Tonks-Langmuir ( $\nu_i$ )	$\sqrt{-\frac{2e\phi}{m_i}}$	$1/\sqrt{e}$	$\log(e)/2$

Les valeurs  $n_s/n_0$  et  $e\phi_s/kT_e$  sont donc universelles et faiblement dépendantes du détail des conditions de la décharge (on ne confondra pas la charge de l'électron  $e$  et  $e = 2.718$ ).

# Chapitre 6

## Collectives and dissipative processes

L'extrême variété des conditions de température, degré d'ionisation, densité et champ magnétique, des plasmas spatiaux, thermonucléaires et industriels, se traduit par une grande richesse de comportement physique. Afin de maîtriser cette diversité phénoménologique, la première étape d'un travail de modélisation est donc l'identification des différents paramètres caractéristiques (temps, longueurs, énergie...) associés à un plasma et aux processus considérés. Ce travail d'identification des paramètres caractéristiques implique, en premier lieu, un recensement de toutes les quantités dimensionnées (densité, masse de l'électron, température...) intervenant dans la description du plasma et des processus dynamiques; puis, à partir de ces paramètres primaires, la construction d'un jeu de paramètres secondaires (fréquence de Langmuir, vitesse d'Alfvén, fréquence cyclotron...) d'usage plus courant et plus adapté à la discussion des différents régimes physiques.

C'est cet ensemble de paramètres secondaires, présenté dans ce chapitre, que nous appellerons échelles caractéristiques des phénomènes collectifs car ils sont caractéristiques d'un certain nombre de phénomènes génériques (écranage, quasi-neutralité, relaxation...) associés aux réponses collectives du plasma. La discussion finale des différents régimes physiques pourrait s'effectuer en termes de nombres caractéristiques sans dimension (nombre de Mach, nombre de Reynolds, nombre de Knudsen,... en mécanique des fluides) construits à partir de ces échelles caractéristiques. Mais, en physique des plasmas, bien que certains de ces nombres sans dimension apparaissent dans des contextes particuliers (paramètre de Hall, paramètre bêta...), l'usage des nombres adimensionnés est beaucoup moins systématisé qu'en hydrodynamique et thermique.

La modélisation d'un plasma se présente toujours comme l'étude d'un problème de couplage champ électromagnétique-matière ionisée. La description de la matière ionisée en termes de densité, température et champ magnétique... ainsi que la description des processus considérés en termes de longueurs et de temps typiques introduisent d'autres grandeurs caractéristiques. Compte tenu de la multiplicité de ces paramètres dimensionnés indépendants décrivant la matière, on conçoit donc aisément qu'une classification générale des différents régimes de la dynamique des plasmas soit impossible. Néanmoins, au cas par cas, la complexité des problèmes de physique des plasmas peut être appréhendée à l'aide d'un certain nombre d'échelles caractéristiques, qui apparaissent de manière récurrente dans nombre de problèmes classiques. Le choix de ces paramètres est donc dicté par l'usage et, pour un problème donné, ces échelles caractéristiques permettent d'établir un ordering permettant d'identifier les processus dominants et d'associer à cette hiérarchie de processus des méthodes d'approximation opérationnelles facilitant la construction d'un modèle pertinent. Cette discussion générale sur la nécessité d'organiser la construction d'un modèle et la solution d'un problème autour de l'ordering de quelques échelles caractéristiques prendra toute sa valeur pratique dans les chapitres consacrés aux processus cinétiques, aux structures électriques, aux structures magnétiques et aux ondes.

Un plasma est soumis à deux tendances :

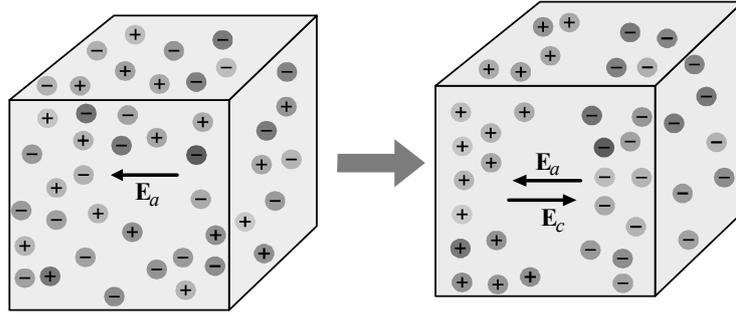
- une tendance au désordre due à l'agitation thermique, et
- une tendance à l'organisation due à l'aspect collectif que peut manifester l'interaction coulombienne.

On retrouve ici le compromis de l'énergie libre :  $\delta(U - TS) = 0$ . Ces deux tendances permettent aux plasmas de rester sous forme ionisée, tout en restant globalement neutre, en créant des conditions s'opposant à la séparation de charges sur des distances supérieures à une échelle de longueur  $L$  et, pour des processus dynamiques, plus lents qu'une échelle de temps  $T$ . Une telle neutralité, dans un volume supérieur à  $L^3$  et pour une durée supérieure à  $T$  est appelée quasi-neutralité car pour des volumes inférieurs à  $L^3$  et une dynamique plus rapide que  $T$  une séparation de charges et un champ électrique peuvent apparaître.

Sur la base de cette définition de la quasi-neutralité, il convient maintenant d'identifier les deux échelles caractéristiques mésoscopiques  $L$  et  $T$ . Ces deux échelles caractéristiques sont en fait universelles pour tous les plasmas : ce sont la longueur de Debye et la fréquence de Langmuir ou fréquence plasma. La quasi-neutralité se décline aussi en terme d'écranage électrique et magnétique et la quantification de ces phénomènes d'écranage débouche sur les mêmes échelles caractéristiques de temps et longueur  $L$  et  $T$ .

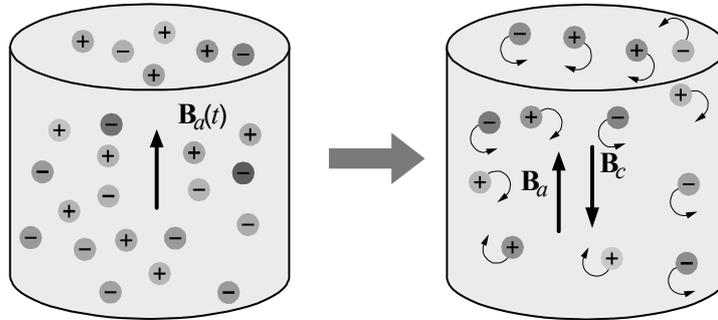
Considérons un système de charges libres, globalement neutre, et appliquons un champ généré par des sources extérieures  $\mathbf{E}_a$ . La force de coulomb crée une séparation de charges et cette séparation est la source d'un champ, d'origine interne,  $\mathbf{E}_c$ . Un équilibre électrostatique est atteint lorsque  $\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_c \approx \mathbf{0}$ . Le champ appliqué est ainsi écranté; la description complète de ce processus passe par la réponse à deux questions

dynamique et structurelle: (i) quelle est l'extension spatiale de la région où l'identité  $\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_c \approx \mathbf{0}$  est vérifiée?



et (ii) quel est le temps caractéristique d'établissement de cet équilibre électrostatique?

Considérons toujours le même système de charges libres, globalement neutre. Appliquons, à l'aide de sources extérieures, un champ magnétique  $\mathbf{B}_a(t)$ . Le champ électrique d'induction ainsi généré par la variation temporelle de ce champ magnétique met en mouvement les charges, et les courants, résultant de ce mouvement engendrent un champ magnétique d'origine interne  $\mathbf{B}_c$ . Un équilibre est atteint lorsque  $\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_c \approx \mathbf{0}$ : c'est le phénomène d'écrantage magnétique. La description complète de ce processus passe par la réponse à deux questions: (i) sur quelle échelle de longueur l'identité  $\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_c \approx \mathbf{0}$  est elle vérifiée? et (ii) quel est le temps caractéristique d'établissement de cet écrantage magnétique?



L'identification des échelles de temps associées à la quasi-neutralité et à l'écrantage répondra à ces questions fondamentales sur l'interaction champs-particules. Au-delà de la tendance à l'écrantage des champs, les charges de même signe se repoussent et les courants de même sens s'attirent, ainsi une distribution de charges globalement non neutre présente une tendance à l'éclatement et une distribution de courants une tendance locale à l'implosion. Le temps caractéristique de l'éclatement coulombien définit le temps de Langmuir et le pincement ampérien est associé à un courant critique caractéristique, le courant d'Alfvén, la tendance au collapse magnétique étant en général inhibée par les forces de pression cinétique dans les phases fluides ou les forces de cohésion dans les phases solides.

## 6.1 Langmuir frequency

La tendance vers la quasi-neutralité (écrantage) peut être explorée à travers l'étude de la réponse électronique à une perturbation électrique interne: des processus rapides pourront briser la neutralité et induire une séparation de charges; des processus lents laisseront au plasma le temps de se réorganiser afin de neutraliser la perturbation.

La transition entre ces deux régimes définira l'échelle de temps recherchée. Nous allons étudier un modèle unidimensionnel de perturbation électronique permettant d'identifier la fréquence plasma, ou fréquence de Langmuir, qui définit cette échelle. Soit un plasma constitué d'ions, supposés infiniment lourds, donc au repos, et d'électrons mobiles de charge  $-e$ . A l'équilibre, la densité ionique et la densité électronique  $n_0$  sont homogènes.

Considérons une perturbation unidimensionnelle, le long de l'axe des  $x$ , telle que tous les électrons appartenant au plan  $x = x_0$  à l'équilibre soient déplacés dans le plan  $x = x_0 + \xi(x_0, t)$  à l'instant  $t$ ,

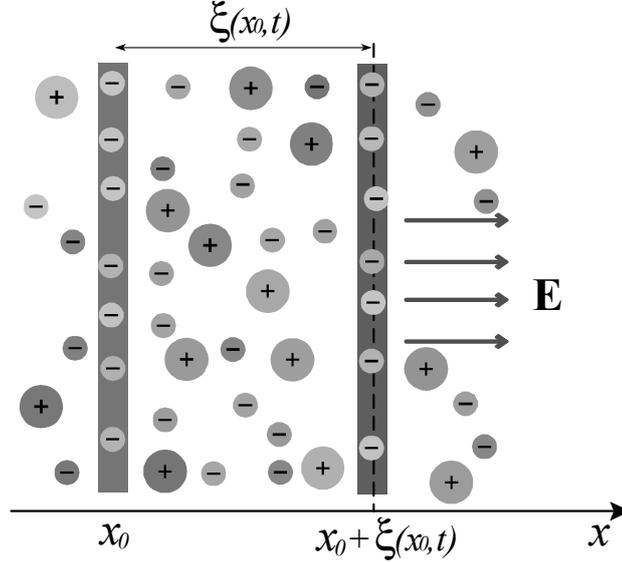
$$\text{Déplacement lagrangien: } x_0 \rightarrow x_0 + \xi(x_0, t)$$

les ions restant au repos et le mouvement thermique des électrons étant négligé devant le mouvement dû à la perturbation.  $\xi$  étant une fonction de la position au repos  $x_0$  la densité devient inhomogène car les différentes tranches ne sont pas déplacées du même incrément. Ainsi, la séparation de charges résultante génère un champ électrique. Tous les électrons situés initialement entre le plan  $x = x_0$  et le plan  $x = x_0 + \xi$  sont déplacés vers des coordonnées  $x > x_0 + \xi$  afin de préserver l'ordre initial entre les différentes couches d'électrons. On observe

donc à l'instant  $t$  un déficit de charges négatives à gauche du plan  $x = x_0 + \xi$ . La valeur de cette séparation de charges doit être évaluée afin d'appliquer le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique  $E$  ainsi créé en  $x_0 + \xi$ .

$$\text{Théorème de Gauss : } ES = \frac{n_0 e S \xi(x_0, t)}{\varepsilon_0}$$

$S$  est une surface quelconque parallèle au plan  $yOz$ .



Ce champ électrique est la source d'une accélération et le principe fondamental de la dynamique fournit une deuxième relation entre  $E$  et  $\xi$ .

$$\text{Deuxième loi de Newton : } m_e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -eE$$

L'élimination du champ électrique entre ces deux équations permet d'obtenir l'équation décrivant la dynamique du déplacement lagrangien  $\xi(x_0, t)$ .

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} \xi = 0$$

L'échelle de temps associée à la réponse électronique est donc l'inverse de la pulsation plasma ou Langmuir  $\omega_p$  définie comme :

$$\text{Pulsation de Langmuir : } \omega_p \equiv \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \rightarrow \frac{\omega_p [\text{Hz}]}{2\pi} = 8981 \sqrt{n_0 [\text{cm}^{-3}]}$$

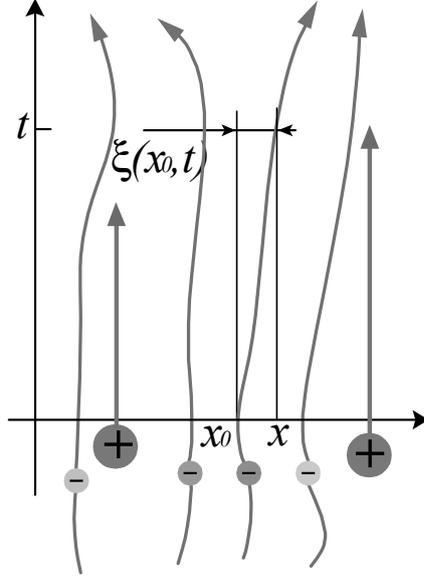
Cette échelle de temps traduit le caractère collectif des forces coulombiennes. L'équation précédente décrit une force de rappel linéaire, opérant sur une échelle de temps  $\omega_p^{-1}$ . Bien que cette force de rappel ait tendance à restaurer la neutralité du plasma, elle ne peut y parvenir car à l'instant où la tranche de plasma  $x_0$  regagne sa position initiale,  $\xi = 0$ , l'énergie potentielle du déplacement est convertie en énergie cinétique et le résultat est une oscillation autour de la position assurant la neutralité.

$$\xi(x_0, t) = \xi_0(x_0) \cos[\omega_p t + \theta_0(x_0)]$$

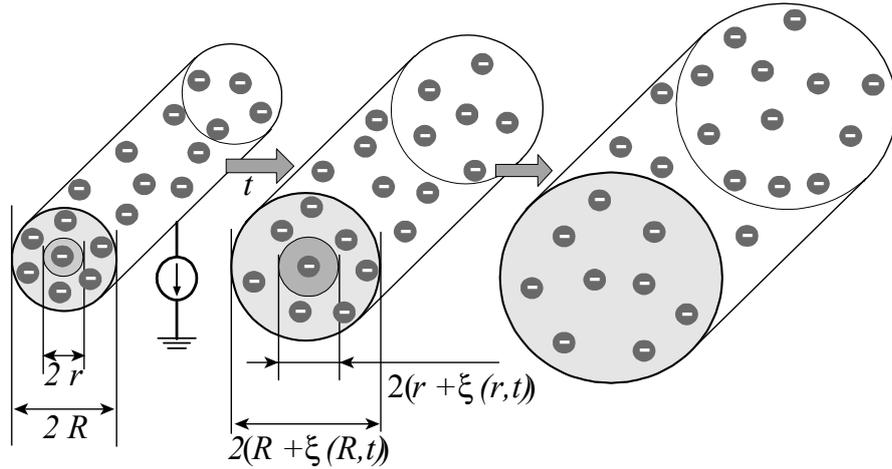
$\xi_0(x_0)$  et  $\theta_0(x_0)$  étant les conditions initiales de la perturbation. Tous les électrons situés initialement entre le plan  $x = x_0$  et le plan  $x = x_0 + dx_0$  sont déplacés entre les plans de coordonnées  $x = x_0 + \xi(x_0, t)$  et  $x = x_0 + dx_0 + \xi(x_0, t) + \partial\xi/\partial x_0 dx_0$ . La conservation du nombre de particules se traduit donc par l'identité :  $n_0 dx_0 = n(x, t) [dx_0 + \partial\xi/\partial x_0 dx_0]$ . La densité électronique eulérienne  $n(x, t)$  résultante peut ainsi être exprimée en fonction du déplacement lagrangien  $\xi$ .

$$\left. \frac{n(x, t)}{n_0} \right|_{x=x_0+\xi(x_0, t)} = \frac{1}{1 + \frac{\partial\xi}{\partial x_0}} \approx 1 - \frac{\partial\xi_0}{\partial x_0} \cos[\omega_p t + \theta_0] + \xi_0 \frac{\partial\theta_0}{\partial x_0} \sin[\omega_p t + \theta_0]$$

Ce modèle unidimensionnel permet d'identifier la fréquence de Langmuir comme l'échelle de temps caractéristique de la réponse électronique à une perturbation initiale et fait apparaître cette réponse comme une superposition d'oscillations.



La fréquence de Langmuir est aussi associée au phénomène d'éclatement coulombien des structures non-neutres, par exemple les faisceaux de particules chargées. L'éclatement coulombien est simplement dû au fait qu'un ensemble de particules de même charge, non neutralisé, présente une tendance à éclater sous l'effet des répulsions électrostatiques mutuelles. Soit donc un cylindre homogène, infini, constitué de particules identiques de charge  $q$  et de masse  $m$ . Sous l'effet des forces de répulsion électrostatique ce cylindre va avoir tendance à éclater. A l'instant initial  $t = 0$ , le rayon de ce cylindre est  $R$ .



On appelle  $\xi(r, t)$  le déplacement radial à l'instant  $t$  des électrons de la couronne cylindrique de rayon initial  $r$ . A l'instant  $t = 0$  on a donc  $\xi(r, 0) = 0$  et  $\partial\xi/\partial t = 0$ . A l'instant  $t > 0$  le théorème de Gauss appliqué à une surface cylindrique permet de calculer le champ électrique radial en un point de coordonnée  $r + \xi$  et la force de Coulomb ainsi créée produit une accélération  $\partial^2\xi/\partial t^2$ .

$$E(r + \xi) = \frac{nq}{2\epsilon_0} \frac{r^2}{r + \xi} \rightarrow \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{nq^2}{2\epsilon_0 m} \frac{r^2}{r + \xi}$$

Une intégrale première, où l'on reconnaît l'énergie cinétique électronique et l'énergie potentielle d'une distribution cylindrique, permet d'abaisser l'ordre du problème d'un degré. L'intégration de cette équation du premier degré par quadrature fournit la relation implicite  $t(\xi, r)$  décrivant l'éclatement coulombien du cylindre.

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \omega_p^2 r^2 \ln\left[\frac{r + \xi}{r}\right] \rightarrow \omega_p t(\xi, r) = \int_1^{1+\frac{\xi}{r}} \frac{du}{\sqrt{\ln u}}$$

Le temps de doublement du rayon du faisceau donne l'échelle caractéristique du phénomène d'éclatement coulombien.

$$t(R \rightarrow 2R) = \frac{1}{\omega_p} \int_1^2 (\ln u)^{-\frac{1}{2}} du \approx \omega_p^{-1}$$

L'échelle caractéristique de temps associée à l'éclatement coulombien est donc l'inverse de la pulsation plasma  $\omega_p^2 = nq^2/\epsilon_0 m$ .

Ce phénomène oblige donc à neutraliser en charge les faisceaux lents si l'on souhaite les manipuler pendant un temps grand devant la période plasma. Pour les faisceaux rapides la force de Laplace due au champ magnétique généré par le faisceau s'oppose à l'éclatement coulombien et induit un phénomène de pincement (des charges de même signe se repoussent, mais des courant de même signe s'attirent) or le champ magnétique est proportionnel au courant donc à la vitesse.

## 6.2 Hybrid frequencies

La fréquence de Langmuir est la fréquence associée à la réponse des électrons le long des lignes de champ ;  $\omega_p^{-1}$  est l'échelle de temps caractéristique du réarrangement des charges électroniques sous l'effet d'une perturbation électrique, c'est-à-dire le temps caractéristique d'écrantage des champs électriques. Nous avons étudié la rotation cyclotronique des particules chargées à la pulsation  $\omega_c$  ; puis nous avons analysé l'oscillation de Langmuir, ou oscillation plasma, de pulsation  $\omega_p$  ; les quatre fréquences ainsi identifiées sont rappelées et évaluées dans la table ci-dessous.

<i>Cyclotron électronique</i>	$\omega_{ce} = \frac{ q_e B}{m_e}$	28 [GHz] $\times B$ [T]
<i>Cyclotron ionique</i>	$\omega_{ci} = \frac{ q_i B}{m_i}$	15 [MHz] $\times B$ [T] $\cdot A^{-1}$
<i>Plasma électronique</i>	$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e}$	8.98 [kHz] $\times \sqrt{n_e}$ [cm <sup>-3</sup> ]
<i>Plasma ionique</i>	$\omega_{pi}^2 = \frac{n_i q_i^2}{\varepsilon_0 m_i}$	210 [Hz] $\times \sqrt{n_i}$ [cm <sup>-3</sup> ] $\cdot A^{-\frac{1}{2}}$

Nous allons maintenant analyser les *résonances hybrides*, combinaisons de ces quatre pulsations, qui caractérisent la réponse d'un plasma magnétisé perpendiculairement au champ magnétique. Considérons un plasma constitué d'électrons et d'ions hydrogénéoïdes, plongés dans un champ magnétique statique homogène  $\mathbf{B}$ .

Les pulsations (i) plasma électronique  $\omega_{pe}$ , (ii) plasma ionique  $\omega_{pi}$ , (iii) cyclotron électronique  $\omega_{ce}$  et (iv) cyclotron ionique  $\omega_{ci}$  vérifient l'ordering  $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{pi}^2$  et  $\omega_{ce} \gg \omega_{ci}$ , et pour un plasma typique de tokamak :  $\omega_{ce} \sim \omega_{pe}$  et  $\omega_{pi} > \omega_{ci}$ . Au voisinage de l'équilibre les ions et les électrons développent une vitesse  $\mathbf{v}_{ie} = d\boldsymbol{\xi}_{ie}/dt$  et une accélération  $d\mathbf{v}_{ie}/dt = d^2\boldsymbol{\xi}_{ie}/dt^2$  en réponse à un champ électrique  $\mathbf{E}$  et ce champ électrique trouve son origine dans la séparation de charges résultant des déplacements  $\boldsymbol{\xi}_{ie}$ . Ainsi, en régime linéaire, un plasma présente des modes propres d'oscillations, les *résonances hybrides*. Afin d'identifier ces modes propres reprenons le schéma d'analyse de la pulsation plasma, mais étendu ici aux électrons et ions et à leur dynamique perpendiculairement au champ magnétique.

$$\begin{aligned}
 \text{Coulomb-Laplace électronique} & : m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -q\mathbf{E} - q\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \\
 \text{Coulomb-Laplace ionique} & : m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_i \times \mathbf{B} \\
 \text{Maxwell-Ampère électrique} & : \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -nq(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)
 \end{aligned}$$

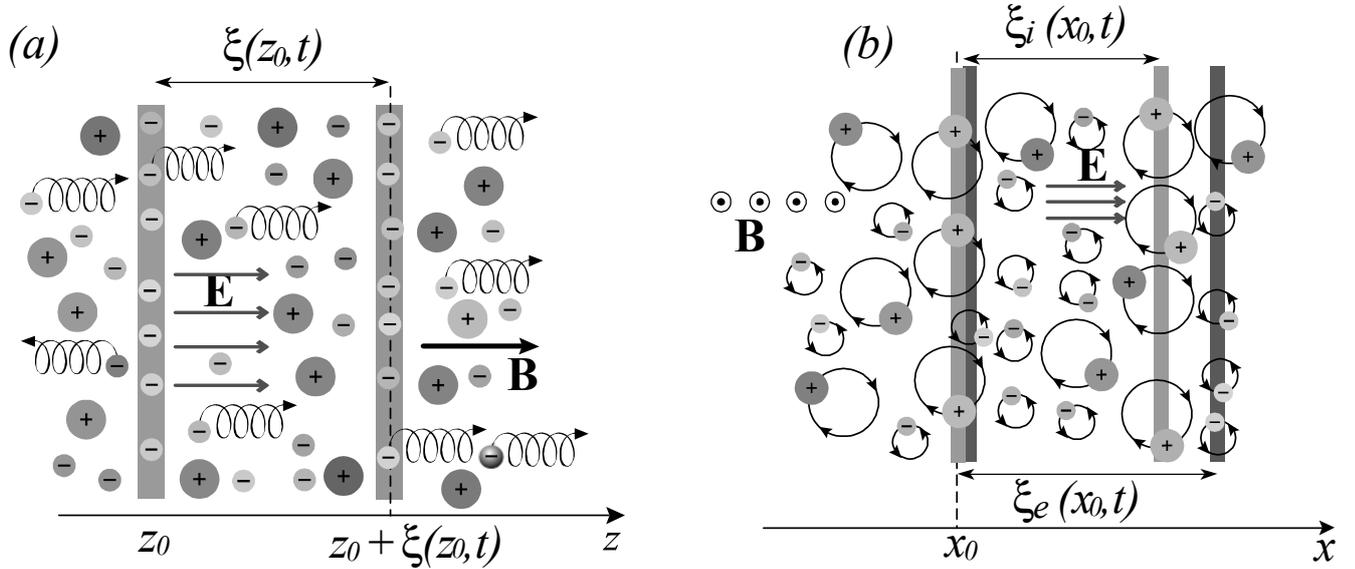
Projetons ces équations suivant la direction du champ électrique  $\mathbf{E}$ , perpendiculairement au champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Nous obtenons un système de trois équations à trois inconnues :  $v_e$  la composante de la vitesse électronique le long du champ électrique,  $v_i$  la composante de la vitesse ionique le long du champ électrique et  $E$  le champ électrique.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 v_e}{dt^2} & = -\omega_{ce}^2 v_e - \frac{q}{m_e} \frac{\partial E}{\partial t} \\
 \frac{d^2 v_i}{dt^2} & = -\omega_{ci}^2 v_i + \frac{q}{m_i} \frac{\partial E}{\partial t} \\
 \frac{\partial E}{\partial t} & = \frac{nq}{\varepsilon_0} (v_e - v_i)
 \end{aligned}$$

L'élimination du champ électrique  $E$  entre ces trois équations conduit aux équations régissant les déplacements électronique  $\xi_e$  et ionique  $\xi_i$  perpendiculaires au champ magnétique.

$$\begin{aligned}
 \text{Electrons} & : \frac{d^2 \xi_e}{dt^2} = \underbrace{-\omega_{ce}^2 \xi_e}_{\text{Laplace}} - \underbrace{\omega_{pe}^2 (\xi_e - \xi_i)}_{\text{Coulomb}} \\
 \text{Ions} & : \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \underbrace{-\omega_{ci}^2 \xi_i}_{\text{Laplace}} - \underbrace{\omega_{pi}^2 (\xi_i - \xi_e)}_{\text{Coulomb}}
 \end{aligned}$$

Perpendiculairement au champ magnétique les dynamiques des perturbations de densités ionique et électronique sont couplées car leurs mouvements relatifs sont la source du déplacement électrique  $\partial E/\partial t$ . Au-delà de la solution d'équilibre  $\xi_e = \xi_i = 0$  il existe deux modes propres.



En régime harmonique  $\xi_{ie} \sim \xi_0 \exp j\omega t$  les déplacements ionique et électronique obéissent à un système linéaire homogène dont les solutions sont des combinaisons linéaires des deux modes propres d'oscillations obtenus en annulant le déterminant caractéristique  $D$  du système.

$$D = \begin{vmatrix} \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 - \omega^2 & -\omega_{pe}^2 \\ -\omega_{pi}^2 & \omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Nous allons successivement considérer les cas haute et basse fréquences et identifier ainsi les résonances hybrides dites haute et basse  $\omega_{uh}$  et  $\omega_{lh}$ . Notons la relation classique du produit des deux racines d'un trinôme du second (quatrième) degré :

$$\omega_{uh}^2 \omega_{lh}^2 = (\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2) (\omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2$$

Commençons par le cas haute fréquence, soit  $\omega_{uh}$  la racine haute fréquence de l'équation caractéristique  $D = 0$  telle que  $\omega_{uh} \gg \omega_{pi}$ ,  $\omega_{uh} \gg \omega_{ci} \rightarrow D \approx \omega_{uh}^2 (\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 - \omega_{uh}^2)$ . La pulsation caractéristique de réponse d'un plasma pour les perturbations hautes fréquences perpendiculaires au champ magnétique est donc :

$$\text{Fréquence hybride haute : } \omega_{uh} \equiv \sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}$$

Soit  $\omega_{lh}$  la racine basse fréquence de l'équation caractéristique  $D = 0$  telle que  $\omega_{lh} \ll \omega_{pe}$ ,  $\omega_{lh} \ll \omega_{ce} \rightarrow D \approx (\omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2 - \omega_{lh}^2) \omega_{uh}^2 - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2$ . Compte tenu des ordering :  $\omega_{ci}^2 \omega_{pe}^2 \ll \omega_{ce}^2 \omega_{pi}^2$  et  $\omega_{ce} \omega_{ci} \ll \omega_{pe}^2$  la racine basse fréquence est donnée par :

$$\text{Fréquence hybride basse : } \frac{1}{\omega_{lh}^2} \equiv \frac{1}{|\omega_{ce} \omega_{ci}|} + \frac{1}{\omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2}$$

Dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ un plasma thermonucléaire présente donc deux fréquences propres, les résonances hybrides haute et basse. La résonance hybride haute correspond à une oscillation purement électronique qui est la version magnétisée de l'oscillation plasma. Au centre d'un plasma de tokamak la fréquence cyclotronique électronique est du même ordre de grandeur (légèrement supérieure) que la fréquence plasma électronique et la fréquence cyclotronique ionique est plus petite que la fréquence plasma ionique ; on peut donc considérer l'approximation  $\omega_{lh} \sqrt{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2} \approx \omega_{pi}$ .

Au sein d'un plasma thermonucléaire coexistent trois types d'ions : les ions deutérium et tritium (le combustible) et les particules alpha (les cendres). Soit un tel mélange au sein duquel nous négligerons l'impact des cendres, la proportion de deutérium est  $\alpha_D$  et la proportion de tritium  $\alpha_T$  ( $\alpha_D + \alpha_T = 1$ ) ; le courant ionique prend alors la forme  $\mathbf{J} = nq [\alpha_D \mathbf{v}_D + \alpha_T \mathbf{v}_T]$ . La dynamique électronique n'est pas pertinente dans cette dernière étude car nous cherchons à identifier une fréquence de l'ordre de grandeur des fréquences de Larmor ioniques, la fréquence hybride ion-ion  $\omega_{ih} \ll \omega_{lh} \ll \omega_{pe}$ . Suivant le schéma d'analyse précédent, les déplacements perpendiculaires au champ,  $\xi_D$  et  $\xi_T$ , présentent les caractéristiques d'un oscillateur à deux degrés de liberté.

$$\begin{aligned}
 \text{Deutérium} & : \frac{d^2\xi_D}{dt^2} = -\omega_{cD}^2\xi_D - \omega_{pD}^2(\alpha_D\xi_D + \alpha_T\xi_T) \\
 \text{Tritium} & : \frac{d^2\xi_T}{dt^2} = -\omega_{cT}^2\xi_T - \omega_{pT}^2(\alpha_D\xi_D + \alpha_T\xi_T)
 \end{aligned}$$

où  $\omega_{pD}^2 = nq^2/\varepsilon_0 m_D$ ,  $\omega_{pT}^2 = nq^2/\varepsilon_0 m_T$ ,  $\omega_{cD} = qB/m_D$  et  $\omega_{cT} = qB/m_T$ . Les modes propres ion-ion sont obtenus en annulant le déterminant caractéristique.

$$\begin{vmatrix} \omega_{cD}^2 + \alpha_D\omega_{pD}^2 - \omega^2 & \alpha_T\omega_{pD}^2 \\ \alpha_D\omega_{pD}^2 & \omega_{cT}^2 + \alpha_T\omega_{pT}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \frac{\alpha_D\omega_{pD}^2}{\omega_{ih}^2 - \omega_{cD}^2} + \frac{\alpha_T\omega_{pT}^2}{\omega_{ih}^2 - \omega_{cT}^2} \approx 0$$

Bien que cette nouvelle fréquence caractéristique soit de nature collective et décrive une oscillation électrostatique, son expression est indépendante de la densité totale et ne fait intervenir que les fréquences cyclotrons et les proportions ioniques. Nous venons d'identifier la résonance de Buchsbaum caractérisée par la fréquence hybride ion-ion.

$$\text{Fréquence hybride ion-ion} : \omega_{ih} \equiv \sqrt{\omega_{cT}\omega_{cD}} \sqrt{\frac{\alpha_D m_D + \alpha_T m_T}{\alpha_D m_T + \alpha_T m_D}}$$

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des fréquences hybrides caractéristiques d'un plasma thermonucléaire. Cet ensemble d'échelles de temps caractéristiques permet de délimiter des régimes de comportement dynamique collectif perpendiculairement au champ magnétique dans un tokamak.

Hybride ion-ion	$\omega_{ih} \approx \sqrt{\omega_{cT}\omega_{cD}}$	$\sim 30$ [MHz]
Hybride basse	$\omega_{lh} \approx \sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}} \approx \omega_{pi}$	$\sim 3$ [GHz]
Hybride haute	$\omega_{uh} \approx \omega_{pe} \approx \omega_{ce}$	$\sim 150$ [GHz]

Le phénomène de résonance collective, identifié et étudié dans ce paragraphe, sera utile pour comprendre les mécanismes de chauffage; en effet, les modes propres harmoniques peuvent être mis à profit pour stocker de la puissance réactive au voisinage des résonances dissipatives de nature cinétique que nous étudierons dans le chapitre suivant.

### 6.3 Debye length

Considérons un plasma d'hydrogène, à l'équilibre thermodynamique, caractérisé par une densité d'électrons  $n_e(x)$  et une densité d'ions  $n_i(x)$ ; à l'équilibre  $n_e = n_0 = n_i$ . Ces deux populations sont maintenues à une température  $T$ , le plasma est infini, globalement neutre et le potentiel électrique  $\phi$  étant uniforme peut être pris égal à zéro. En  $x = 0$ , introduisons une électrode plane et infinie, parallèle aux plans  $yOz$ . Etudions les perturbations de potentiel et de densité lorsque cette électrode est portée à un potentiel  $\phi_0$ . Le potentiel  $\phi(x)$  en un point de coordonnées  $x$  vérifie l'équation de Poisson:

$$\text{Equation de Poisson} : \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{n_e(x)q_e + n_i(x)q_i}{\varepsilon_0}$$

et satisfait aux conditions aux limites  $\phi(-\infty) = \phi(+\infty) = 0$ ,  $d\phi(-\infty)/dx = d\phi(+\infty)/dx = 0$  (champ et potentiel nuls à l'infini),  $\phi(0) = \phi_0$ . En réponse au potentiel électrique les électrons vont avoir tendance à rechercher les zones de potentiel fort et les ions les zones de potentiel faible. Cette tendance est atténuée par l'agitation thermique qui va étaler les distributions ionique et électronique dans les minima et les maxima du potentiel. Le compromis entre ces tendances à la minimalisation de l'énergie et à la maximalisation de l'entropie est obtenue pour une distribution boltzmanienne de la densité.

$$\text{Relation de Boltzmann} : n_e q_e + n_i q_i = n_0 q_e \exp\left[\frac{-q_e \phi}{k_B T}\right] + n_0 q_i \exp\left[\frac{-q_i \phi}{k_B T}\right]$$

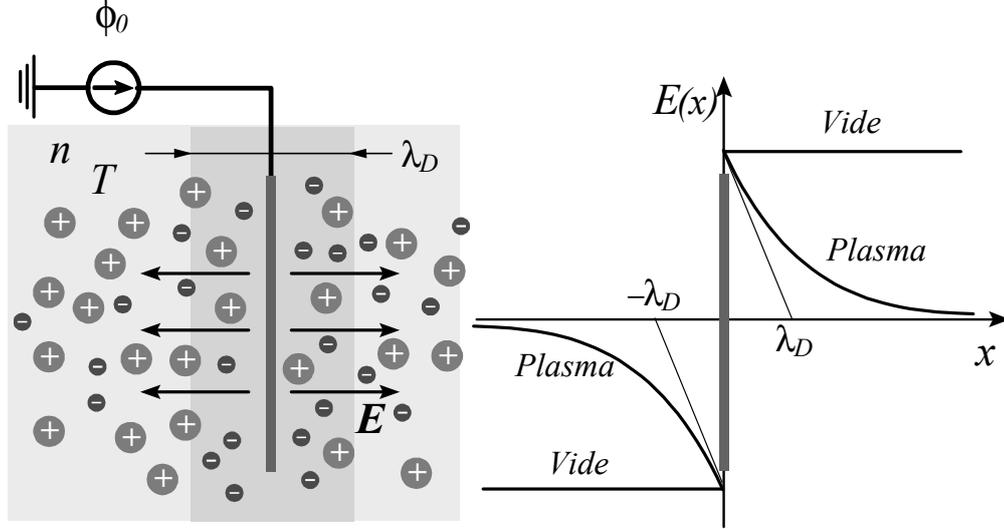
où  $q_e = -q_i = -e$ . Cette distribution d'équilibre peut être obtenue, soit à partir de la mécanique statistique, soit à partir de la statique des fluides en considérant la densité volumique de force de pression  $-\nabla P$  et la densité volumique de force électrique  $-nq\nabla\phi$  dans le cadre d'un comportement isotherme  $P = nk_B T$  des deux populations ionique et électronique. A l'équilibre ces deux densités de force présentent une résultante nulle :

$$\frac{dn k_B T}{dx} + nq \frac{d\phi}{dx} = 0 \rightarrow \log n \sim -q\phi/k_B T$$

La solution de l'équation de Poisson avec un terme source non-linéaire du type Boltzmann se simplifie en introduisant des variables normalisées de position et le potentiel:  $\phi(x) \rightarrow \Phi(X)$  où

$$\Phi = \frac{e}{k_B T} \phi, \quad X = \sqrt{\frac{2n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T}} x$$

Ces grandeurs normalisées permettent une réécriture simplifiée de l'équation de Poisson-Boltzmann. Cette équation est semblable à celle décrivant un mouvement unidimensionnel dans un potentiel statique de type cosh.



Elle admet donc une intégrale première qui, compte tenu des conditions aux limites sur la dérivée du potentiel, s'écrit :

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = \sinh \Phi \rightarrow \left( \frac{d\Phi}{dX} \right)^2 = 2 [\cosh \Phi - 1]$$

Compte tenu de l'identité  $\cosh \Phi - 1 = 2 \sinh^2 \Phi/2$ , cette dernière relation est ensuite ramenée à deux quadratures :

$$\int \sinh \frac{\Phi}{2} d\frac{\Phi}{2} = \pm \int dX$$

Le choix du signe est imposé par la contrainte de croissance ou de décroissance à partir de  $X = 0$  selon le signe de  $\phi_0$ . Le résultat final est donné par :

$$\frac{e\phi}{2k_B T} = \log \frac{1 + \tanh \left| \frac{e\phi_0}{4k_B T} \right| \exp \left( -\sqrt{\frac{2n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T}} |x| \right)}{1 - \tanh \left| \frac{e\phi_0}{4k_B T} \right| \exp \left( -\sqrt{\frac{2n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T}} |x| \right)} \approx \frac{e\phi_0}{2k_B T} \exp \left( -\frac{|x|}{\lambda_D} \right)$$

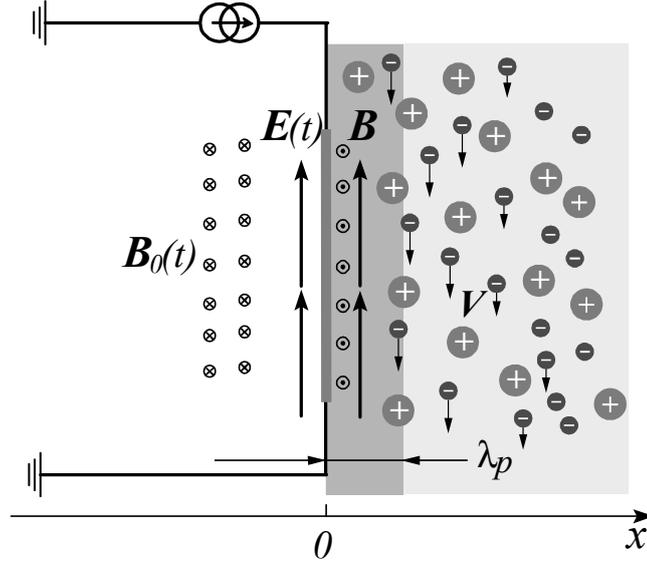
L'étude de ce résultat démontre clairement que pour des distances supérieures à  $\lambda_D = \sqrt{\varepsilon_0 k_B T / n_0 e^2}$  le potentiel électrostatique est écranté et décroît exponentiellement vers zéro. Cette écrantage résulte de la réorganisation des électrons et des ions au voisinage de l'électrode, sous l'effet du champ appliqué, afin de créer un champ opposé. La longueur caractéristique d'écrantage de Debye  $\lambda_D$  est ainsi identifiée et définie.

$$\text{Longueur de Debye : } \lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} \rightarrow \lambda_D [\text{cm}] = 743 \sqrt{\frac{T [\text{eV}]}{n [\text{cm}^{-3}]}}$$

En fait la polarisation d'un plasma au voisinage d'une paroi ou d'une électrode est un phénomène plus complexe ; néanmoins, le modèle précédent permet d'identifier clairement la longueur de Debye comme l'échelle de longueur caractéristique en dessous de laquelle une séparation de charge statique donc une polarisation statique peut exister. Lorsque  $x < \sqrt{\varepsilon_0 k_B T / n_0 e^2}$  la quasi-neutralité n'est plus assurée. Au voisinage des parois, ou lors de détentes dans le vide, les zones non neutres polarisées ont en général une structure plus complexe que celle prédite par l'équation précédente : de telles structures sont appelées gaines et constituent avec les faisceaux les deux grandes familles de plasmas où l'hypothèse de quasi-neutralité n'est pas vérifiée. La longueur de Debye est l'échelle de longueur caractéristique en dessous de laquelle une séparation quasi-statique de charges, donc une polarisation quasi-statique, peut être observée au sein d'un plasma.

## 6.4 London length

Après avoir étudié et caractérisé les réponses électriques, il convient maintenant d'étudier et de caractériser le comportement d'un plasma en réponse à une perturbation magnétique. Dans ce cas aussi les effets vont s'opposer aux causes qui leur donnent naissance et les charges libres d'un plasma vont avoir un comportement diamagnétique : sous l'influence d'un champ magnétique appliqué les charges vont s'organiser en courants tendant à créer des champs opposés aux champs appliqués.



La force créant ces courants est la force électromotrice d'induction due aux variations temporelles du champ magnétique.

Considérons un plasma homogène, occupant le demi-espace  $x > 0$ , formé d'électrons, de densité  $n_e$ , et d'un fond neutralisant d'ions, supposés infiniment lourds donc immobiles. Le demi espace  $x < 0$  est vide et soumis à un champ magnétique homogène, dépendant du temps, dirigé suivant l'axe des  $z$ :  $\mathbf{B}(t) = B_0(t) \mathbf{u}_z$ . Les variations temporelles de ce champ induisent un champ électrique d'induction  $\mathbf{E}$ , dirigé suivant l'axe des  $y$ :  $\mathbf{E} = E \mathbf{u}_y$  et ce champ est la source d'un mouvement électronique de vitesse:  $\mathbf{V}_e = V_e \mathbf{u}_y$ , donc d'un courant, ce courant crée un champ magnétique de direction opposée à celui appliqué et sa valeur détermine le processus de pénétration magnétique dans le plasma en  $x > 0$ . Ce processus est décrit par les équations de Maxwell-Faraday pour l'induction, de Maxwell-Ampère pour la génération de champ magnétique et de Newton pour la dynamique des électrons.

$$\begin{aligned} \text{Equation de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{Equation de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 n_e e \mathbf{V}_e \\ \text{Loi de Newton} & : m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -e \mathbf{E} \end{aligned}$$

où  $e$  et  $m_e$  sont respectivement la charge et la masse de l'électron.

Dans le cadre du modèle unidimensionnel précédent ce système se réduit à trois équations scalaires.

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 n_e e V_e, \quad \frac{\partial V_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E$$

L'élimination du champ magnétique et de la vitesse entre ces trois équations permet d'établir l'équation décrivant la dynamique du champ électrique.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} E = \frac{\omega_p^2}{c^2} E = \frac{E}{\lambda_p^2}$$

où la longueur de London  $\lambda_p$  est définie comme le rapport de la vitesse de la lumière  $c$  sur la pulsation de Langmuir.

$$\text{Longueur de London : } \lambda_p \equiv c \sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_e}{n e^2}} = \frac{c}{\omega_p} \rightarrow \lambda_p [\text{m}] = \frac{5298}{\sqrt{n [\text{cm}^{-3}]}}$$

Compte tenu de la condition aux limites:  $B(x < 0, t) = B_0(t)$  la solution décrivant le phénomène d'écrantage magnétique est donc donnée par:

$$B(x, t) = B_0(t) \exp\left[-\frac{x}{\lambda_p}\right], \quad E(x, t) = \lambda_p \frac{\partial B_0}{\partial t} \exp\left[-\frac{x}{\lambda_p}\right]$$

Le champ magnétique est exponentiellement faible et pénètre à l'intérieur du plasma sur une longueur appelée épaisseur de peau inertielle ou longueur de London. Ce phénomène d'écrantage magnétique implique que des zones de plasma initialement magnétisées restent magnétisées et que des zones initialement non magnétisées

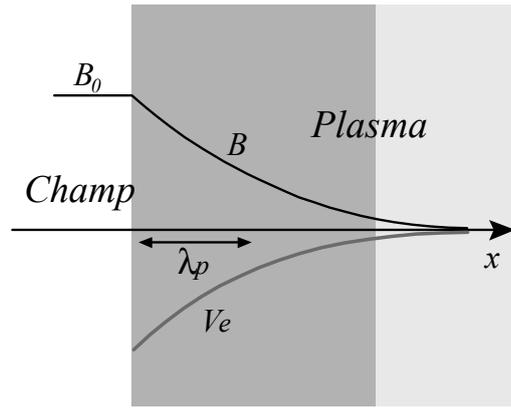


Figure 6.1:

restent non magnétisées, l'échange entre ces zones étant restreint à des interfaces dont l'épaisseur est de l'ordre de la longueur de London.

Dans le cadre de la magnétohydrodynamique cette propriété constitue le théorème du gel d'Alfvén.

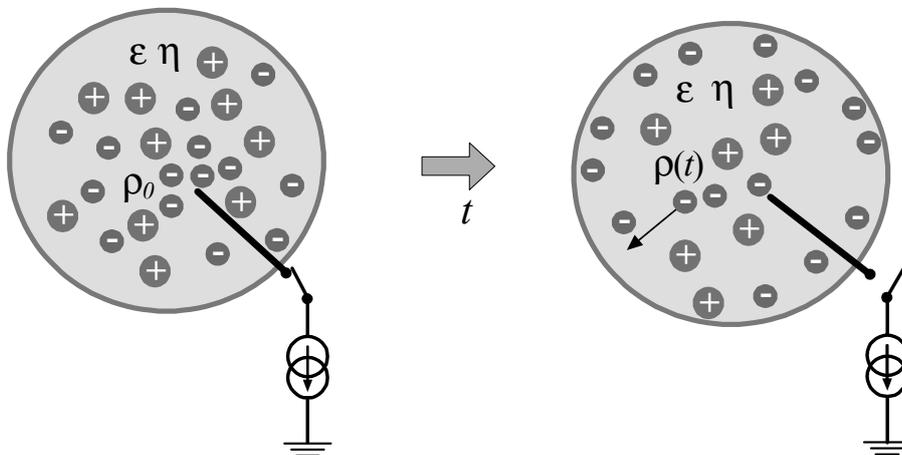
L'ensemble des échelles caractéristiques associées aux réponses collectives électroniques, ioniques et magnétiques d'un plasma est résumé dans le tableau :

	Définition	Valeur
Longueur Debye	$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{ne^2}}$	743 [cm] $\sqrt{\frac{T[\text{eV}]}{n[\text{cm}^{-3}]}}$
Fréquence de Langmuir	$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$	8981 [Hz] $\sqrt{n_0 [\text{cm}^{-3}]}$
Longueur de London	$\lambda_p \equiv c \sqrt{\frac{\epsilon_0 m_e}{ne^2}}$	5298 [m] $\frac{1}{\sqrt{n[\text{cm}^{-3}]}}$
Vitesse d'Alfvén	$V_A \equiv \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0 n_i m_i}}$	72758 c $\frac{B[\text{T}]}{\sqrt{n_i [\text{cm}^{-3}]}}$
Vitesse de Bohm	$C_B \equiv \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$	9789 [m/s] $\sqrt{T_e [\text{eV}]}$

Ces échelles de temps, longueurs et vitesses permettent de développer la construction de modèles en s'appuyant sur l'ordering relatif entre les échelles caractéristiques d'un problème spécifique et ces échelles associées aux réponses collectives du plasma.

## 6.5 Maxwell time

Le *temps de relaxation de Maxwell*, décrit le processus de disparition des charges libres en volume, sous l'effet de leurs répulsions mutuelles, au sein d'un milieu conducteur de conductivité  $\eta$ . Pour un plasma d'hydrogène à 100 eV la conductivité de *Drude-Lorentz-Spitzer*  $\eta \equiv nq^2/m\nu = \epsilon_0 \omega_p^2/\nu$  est de l'ordre de grandeur de celle de l'acier, pour une température de quelques keV elle devient comparable à la conductivité de l'argent.



Considérons un plasma globalement chargé, présentant une densité volumique de charges  $\rho(\mathbf{r}, t = 0)$  à un instant initial  $t = 0$ . Cette densité volumique de charges crée un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et ce champ électrique met en mouvement les charges générant ainsi une densité volumique de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ .

Nous avons ainsi trois inconnues  $\rho$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$  décrivant la dynamique de la relaxation de ces charges libres dans ce milieu conducteur. La loi d'Ohm et l'équation de Maxwell-Gauss, complétées par le principe de conservation de la charge, constituent un système de trois équations auxquelles obéissent ces trois inconnues.

$$\begin{aligned} \text{Equation de Maxwell-Gauss} & : \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{Conservation de la charge} & : \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \text{Loi d'Ohm} & : \quad \mathbf{J} = \eta \mathbf{E} \end{aligned}$$

Nous avons introduit  $\eta$  la conductivité du milieu résultant des collisions :  $\eta = nq^2/m\nu$  suivant la formule de Drude-Lorentz où  $\nu$  est la fréquence de collision. Le champ électrique et le vecteur densité de courant peuvent être éliminés et nous obtenons ainsi une équation décrivant la dynamique de la densité volumique de charges.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\eta}{\varepsilon_0} \rho = 0 \rightarrow \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t = 0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right)$$

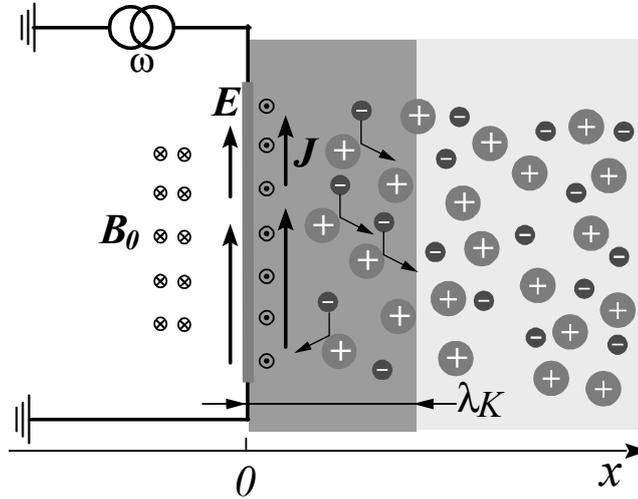
La relaxation des charges libres dans un plasma s'effectue donc suivant une loi exponentielle dont le temps caractéristique est donné par l'échelle de temps  $\tau_M$ .

$$\text{Temps de Maxwell : } \boxed{\tau_M \equiv \frac{\varepsilon_0}{\eta}} = \frac{\nu}{\omega_p^2}$$

Le temps caractéristique associé à cette décroissance exponentielle n'est pas l'inverse de la fréquence de collision mais l'inverse d'une combinaison de la fréquence de collision et de la fréquence de Langmuir, c'est le *temps de Maxwell*.

## 6.6 Kelvin length

Le modèle qui nous a permis d'identifier la longueur de London  $\lambda_p$  était construit sous l'hypothèse d'un milieu sans collision. Il est donc pertinent pour la phase dynamique rapide, sur une échelle de temps plus courte que l'inverse de la fréquence de collision  $\nu$ .



Pour les temps longs, le système de Faraday-Ampère-Euler doit être modifié et un système du type Faraday-Ampère-Ohm devient pertinent pour la description de l'interaction champ-matière.  $[\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z]$  est un repère Cartésien orthonormé direct. Les variations temporelles du champ magnétique  $\mathbf{B}(x, t) = B(x, t) \mathbf{u}_z$  induisent un champ électrique d'induction  $\mathbf{E}$ , dirigé suivant l'axe des  $y$  :  $\mathbf{E} = E(x, t) \mathbf{u}_y$  et ce champ est la source d'un courant :  $\mathbf{J} = J(x, t) \mathbf{u}_y$  :

$$\begin{aligned} \text{Equation de Maxwell-Faraday} & : \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{Equation de Maxwell-Ampère} & : \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \text{Loi d'Ohm} & : \quad \mathbf{J} = \eta \mathbf{E} \end{aligned}$$

L'équation de la dynamique des électrons est remplacée par la loi d'Ohm où  $\eta$  est la conductivité du plasma résultant des collisions. Dans le cadre géométrique du modèle unidimensionnel décrit lors de l'étude de la

longueur de London, modifié pour prendre en compte les collisions, ce système Faraday-Ampère-Ohm se réduit à:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = -\mu_0 \eta E(x, t)$$

où l'élimination du champ électrique entre ces deux équations conduit à une équation de diffusion sur le champ magnétique:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \eta \frac{\partial B}{\partial t}$$

La caractéristique essentielle du phénomène de pénétration diffusive du champ magnétique est une pénétration d'une longueur  $L$  au bout d'un temps  $t = L^2/D_M$  où  $D_M$  est le coefficient de diffusion magnétique.

$$\text{Diffusion magnétique : } \boxed{D_M \equiv \frac{1}{\mu_0 \eta}} = c^2 \tau_M = \lambda_p^2 \nu$$

Une situation couramment rencontrée est le cas d'un champ oscillant à la frontière d'un milieu semi-infini :  $B(x < 0, t) = B_0 \exp(i\omega t)$  et  $B(x > 0, t) = B(x) \exp(i\omega t)$ .

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = i\mu_0 \eta \omega B \rightarrow B = B_0 \exp(i\omega t) \exp\left[-(1+i) \frac{|x|}{\lambda_K}\right]$$

Cette solution décrit une pénétration du champ magnétique sur une longueur définissant l'épaisseur de peau résistive ou longueur de Kelvin  $\lambda_K$ .

$$\text{Longueur de Kelvin : } \boxed{\lambda_K \equiv \sqrt{\frac{2D_M}{\omega}}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \eta \omega}}$$

Les phénomènes d'écrantage et de diffusion magnétiques, qui viennent d'être décrits ici, complètent l'ensemble des échelles caractéristiques. Dans les métaux ces phénomènes sont connus sous le nom d'*effet de peau*. Les phénomènes de relaxation électrique, d'écrantage et de diffusion magnétique, qui viennent d'être décrits ici, complètent l'ensemble des échelles caractéristiques associées aux réponses collectives d'un plasma. Les relaxations des charges et des courants ne sont pas caractérisées par la fréquence de collision  $\nu$  mais par une combinaison des échelles collectives précédentes ( $\omega_p$  et  $\lambda_p$ ) et de la fréquence de collision  $\nu$ ; ces résultats fondamentaux sont résumés dans le tableau :

	Inertiel	Résistif
<i>Relaxation/écrantage des charges</i>	Langmuir : $\tau_p = \frac{1}{\omega_p}$	Maxwell : $\tau_M = \frac{\nu}{\omega_p^2}$
<i>Relaxation/écrantage des courants</i>	London : $\lambda_p = \frac{c}{\omega_p}$	Kelvin : $\lambda_K = \lambda_p \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$

Lorsque l'on s'intéresse à l'électrodynamique d'un plasma, les régimes sans et avec collisions sont dénommés **inertiel et résistif**, car c'est l'inertie qui contrôle la dynamique des réponses en l'absence de collisions, et la dynamique des courants est ohmique en présence de collisions.

## 6.7 Magnetic Reynolds and $\beta$ numbers

Considérons un plasma magnétisé, deux dynamiques doivent être étudiées : (i) le champ diffuse dans la matière et (ii) la matière diffuse dans le champ.

Nous allons voir que la transition entre ces deux régimes est contrôlée par un paramètre caractéristique : le paramètre  $\beta$  qui mesure le rapport de l'énergie thermique du plasma sur son énergie magnétique :

$$\beta \equiv \frac{\text{[Pression cinétique du plasma]}}{\text{[Pression magnétique du champ]}} = \frac{nk_B T}{B^2/2\mu_0} \sim 4 \times 10^{-16} \frac{n [\text{cm}^{-3}] T [\text{keV}]}{B^2 [\text{T}]}$$

Considérons d'abord une situation où le champ magnétique est maintenu constant et où le plasma est en quasi-équilibre avec ce champ magnétique en l'absence de champ électrique et de mouvement le long des lignes de champ. Dans un plasma isotherme le coefficient de diffusion du plasma est donné par :

$$\text{Diffusion plasma} \rightarrow \text{champ : } D_{\perp} = \frac{D}{1 + \frac{\omega^2}{\nu^2}} \underset{\nu/\omega_c \rightarrow 0}{\approx} \frac{k_B T \nu}{m \omega_c^2} \approx \rho_L^2 \nu$$

Etudions maintenant le problème complémentaire de la diffusion du champ magnétique dans un plasma infini au repos.

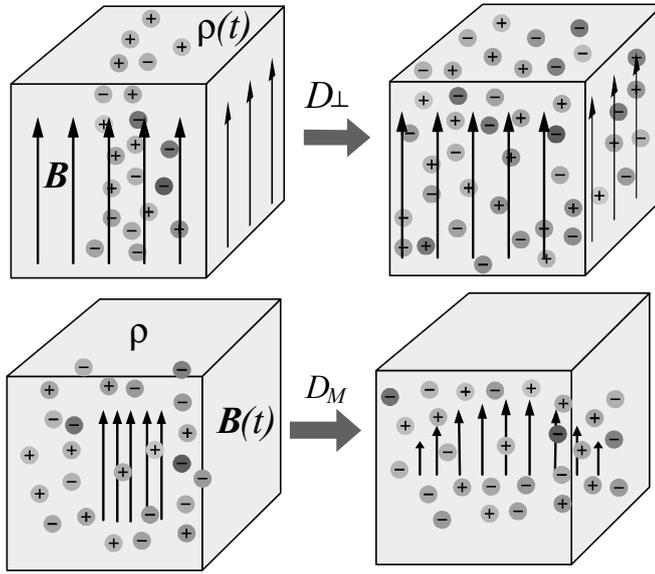
Ce problème a été résolu. Les équations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère et Ohm décrivant ce phénomène,

$$\begin{aligned}
 \text{Equation de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \text{Equation de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\
 \text{Loi d'Ohm} & : \mathbf{J} = \eta \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

permettent d'obtenir une équation de diffusion pour le champ magnétique par élimination du champ électrique :  $-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \eta \partial \mathbf{B} / \partial t$ . Le coefficient de diffusion du champ magnétique dans la matière est donc donné par :

$$\text{Diffusion champ} \rightarrow \text{plasma} : D_M = \frac{1}{\mu_0 \eta} \approx \lambda_p^2 \nu$$

La question est maintenant d'identifier le phénomène dominant dans une situation où le plasma et le champ sont libres : la matière diffuse-t-elle plus vite dans le champ que le champ dans la matière ?



La réponse est donnée par la valeur du rapport des coefficients de diffusion.

$$\frac{D_{\perp}}{D_M} = \frac{\beta}{2} \approx \left( \frac{\rho_L}{\lambda_p} \right)^2$$

Dans les plasmas à faible  $\beta$  il nous faudra prendre en compte la diffusion du champ dans la matière et dans les plasmas à fort  $\beta$  la diffusion de la matière dans le champ.

Un deuxième paramètre caractéristique permet la classification des interaction champ magnétique-plasma : le nombre de Reynolds magnétique  $\mathcal{R}_M$  permet de quantifier l'importance relative de la convection du champ par la matière par rapport à la diffusion du champ dans la matière. Considérons un écoulement décrit par une vitesse fluide  $\mathbf{v}$  donnée.

$$\begin{aligned}
 \text{Equation de Maxwell-Faraday} & : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \text{Equation de Maxwell-Ampère} & : \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\
 \text{Loi d'Ohm} & : \mathbf{J} = \eta (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})
 \end{aligned}$$

Éliminons le courant et le champ électrique entre ces trois équations pour obtenir l'équation de transport du champ magnétique.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 \eta} \Delta \mathbf{B}$$

Le transport du champ apparaît comme la combinaison d'un terme convectif,  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , que nous décrirons plus en détail à l'aide des théorèmes d'Alfvén, et du terme de diffusion magnétique, identifié précédemment dans le cadre de l'étude de la relaxation électronique.

L'ordre de grandeur du rapport de ces deux termes permet d'introduire le nombre de Reynolds magnétique. Si nous normalisons les vitesses à une vitesse caractéristique  $V$  et les longueurs à une longueur caractéristique  $L$  :  $\mathbf{V} = \mathbf{v}/V$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{x}/L$ , l'équation de transport magnétique en régime stationnaire se réécrit sous forme normalisée :

$$\text{Nombre de Reynolds : } \Delta \mathbf{B} + \mathcal{R}_{\mathcal{M}} \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Le nombre de Reynolds magnétique  $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} = \mu_0 \eta V L$  apparaît comme paramètre de contrôle de l'équation du transport magnétique stationnaire.

$$\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \equiv \frac{[\text{Convection du champ magnétique}]}{[\text{Diffusion du champ magnétique}]} \approx \mu_0 \eta V L = \frac{V L}{D_M} = \frac{V \omega_p}{c} \frac{L}{\nu \lambda_p}$$

- Lorsque la conductivité  $\eta \rightarrow +\infty$  alors  $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \rightarrow +\infty$  et le mélange diffusif champ-plasma est extrêmement lent car  $D_M \rightarrow 0$ ; le terme de convection est alors dominant et la dynamique du fluide MHD est idéale. Dans ce cas il est possible de construire des invariants quantifiant l'impossibilité de mélanger ou de séparer le champ et le plasma.

- Lorsque  $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \lesssim 1$ , la dynamique du plasma est contrôlée par sa résistivité et la diffusion devient dominante.

Il est instructif d'étudier le phénomène de pénétration diffusive et convective en présence d'un écoulement perpendiculaire aux lignes de champ magnétique. Afin d'illustrer les caractéristiques de cette diffusion forcée par un écoulement, considérons une structure simple d'écoulement et de champ :

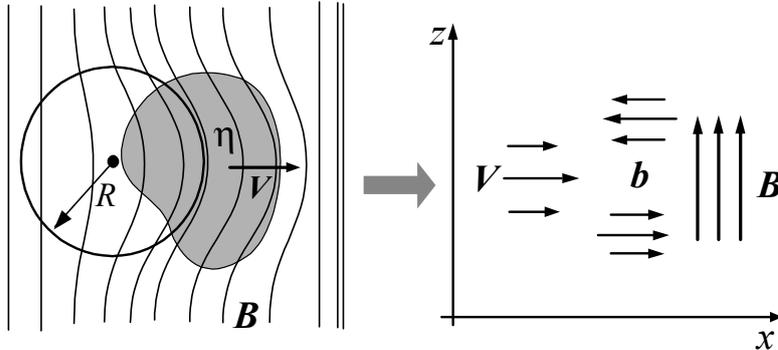
$$\text{Plasma : } \mathbf{V} = V(z) \mathbf{u}_x, \text{ Champ : } \mathbf{B} = b(z) \mathbf{u}_x + B \mathbf{u}_z$$

En régime stationnaire, la dynamique du champ  $\mathbf{B}$  subissant l'influence d'un écoulement donné  $\mathbf{V}$  est décrite par l'équation :

$$\mu_0 \eta \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B} \rightarrow \mu_0 \eta B \frac{dV}{dz} = -\frac{d^2 b}{dz^2} \rightarrow \mu_0 \eta B V = -\frac{db}{dz}$$

D'une part, cette dernière relation permet d'établir l'équation des lignes du champ en présence de l'écoulement.

$$\frac{dx}{dz} = \frac{b(z)}{B} \rightarrow \frac{d^2 x}{dz^2} = -\mu_0 \eta V(z)$$



D'autre part, le rayon de courbure  $R$  des lignes de champ est défini par :

$$\text{Courbure des lignes : } \frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{R(z)}$$

La vitesse du plasma et le rayon de courbure des lignes de champ, qui constitue la seule échelle de longueur du problème, sont donc reliés par :

$$V(z) R(z) \mu_0 \eta = -1 \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{M}} = 1$$

Le nombre de Reynolds magnétique est donc de l'ordre de 1 dans un écoulement perpendiculaire à un champ donné.

Si la conductivité est finie un plasma peut s'écouler perpendiculairement à un champ magnétique, ce que n'autorise pas le théorème du gel dans le cas idéal. Si  $\eta$  est grand le champ est fortement déformé par l'écoulement car les conditions sont voisines de la MHD idéale et le système doit générer une longueur de gradient petite en déformant les lignes de champ, ainsi  $R$  diminue pour abaisser la valeur de  $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \approx \mu_0 \eta V R$ . Il y a donc une forme de synergie entre le transport convectif et le transport diffusif.

Le terme convectif déforme les lignes de champ afin que l'écoulement génère une zone à petite échelle de longueur telle que  $\mathcal{R}_M \approx 1$  pour assurer la pénétration ultime du champ par diffusion. Ce résultat est confirmé par l'étude du phénomène de pénétration en présence d'un écoulement et le calcul de la longueur de pénétration dynamique  $\delta$  qui avec  $\lambda_p$  et  $\lambda_K$  constituent les trois longueurs caractéristiques d'interaction entre un champ magnétique et un plasma, selon la situation. Considérons, en régime stationnaire, un écoulement  $\mathbf{V} = V \cos(z/L) \mathbf{u}_x$  interagissant avec un champ magnétique  $\mathbf{B} = b(z) \mathbf{u}_x + B \mathbf{u}_z$ .

Le champ obéit à l'équation du transport magnétique :  $\Delta \mathbf{B} + \mu_0 \eta \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$ .

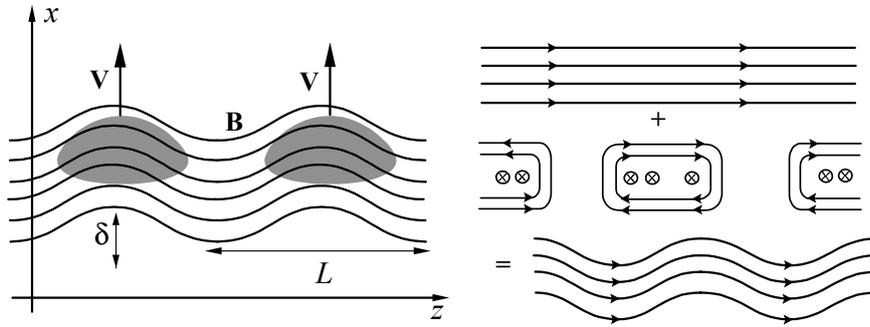
$$\frac{d^2 b}{dz^2} = \mathcal{R}_M \frac{B}{L^2} \sin\left(\frac{z}{L}\right)$$

où  $\mathcal{R}_M = \mu_0 \eta V L$ . L'équation des lignes de champ,  $x(z)$ , est donc donnée par :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{b(z)}{B} = -\mathcal{R}_M \sin \frac{z}{L} \rightarrow x(z) = L \mathcal{R}_M \cos\left(\frac{z}{L}\right)$$

L'amplitude de la déformation des lignes de champ définit la longueur de pénétration  $\delta$ .

$$\delta = \mathcal{R}_M L$$



• Si  $\mathcal{R}_M \gg 1$ , c'est-à-dire pour les faibles dissipations et les grandes vitesses, nous retrouvons le théorème du gel et l'écoulement enfonce le champ mais ne diffuse pas à l'intérieur de la zone magnétisée. • Si  $\mathcal{R}_M \ll 1$ , il n'y a pas de déformation des lignes de champ et le champ diffuse dans la zone magnétisée.

Nous avons ainsi identifié deux paramètres de contrôles : le paramètre bêta  $\beta$  et le nombre de Reynolds magnétique  $\mathcal{R}_M$ .

$$\begin{aligned} \text{Plasma} & : \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{\rho \mu_0} \rightarrow \text{Bêta} : \beta \approx \mu_0 \frac{|\nabla P|}{|\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}|} \\ \text{Champ} & : \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\Delta \mathbf{B}}{\mu_0 \eta} \rightarrow \text{Reynolds} : \mathcal{R}_M \approx \mu_0 \eta \frac{|\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})|}{|\Delta \mathbf{B}|} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des études précédentes sur le paramètre  $\beta \approx D_\perp / D_M$  et le nombre de Reynolds magnétique  $\mathcal{R}_M$  permet de construire une classification des régimes d'écoulement plasmas, classification résumée dans le tableau :

	$\mathcal{R}_M \gg 1$	$\mathcal{R}_M \ll 1$
$\beta \gg 1$	Le champ est convecté par le plasma	Le plasma diffuse dans le champ
$\beta \ll 1$	Le plasma est convecté par le champ	Le champ diffuse dans le plasma

Enfin, notons que le paramètre  $\beta$  peut être évalué sur la base de la pression cinétique, tel que nous l'avons défini initialement par la relation, mais nous pouvons aussi considérer la pression équivalente associée à un écoulement en calculant la densité volumique d'énergie résultant du mouvement macroscopique.

# Chapitre 7

## Adiabaticity, resonances and heating

### 7.1 Gradient, curvature, and shear

Les équations de Maxwell énoncent les propriétés des champs uniquement à travers les combinaisons de dérivées partielles que sont la divergence et le rotationnel, le *théorème de Helmholtz* confirme que la donnée de ces deux combinaisons détermine un champ physique unique.

**Théorème de représentation de Helmholtz**: *un champ de vecteurs, différentiable presque partout et s'annulant suffisamment rapidement à l'infini, est entièrement déterminé par les données de sa divergence et de son rotationnel en tous points de l'espace.*

Ce théorème n'est en fait qu'une généralisation "3D" d'un autre théorème "1D" bien connu: *une fonction dérivable s'annulant à l'infini est entièrement déterminée par sa dérivée,*

$$\text{Fonction scalaire: } \left\{ \frac{df}{du}, f(-\infty) = 0 \right\} \rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{df}{du} du.$$

Un théorème de représentation vectorielle peut aussi être établi et il s'énonce: *un vecteur  $\mathbf{X}$  est entièrement déterminé par son produit scalaire et son produit vectoriel avec un vecteur donné  $\mathbf{A}$ ,*

$$\text{Vecteur: } \{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}), (\mathbf{A} \times \mathbf{X})\} \rightarrow \mathbf{X} = \frac{(\mathbf{A} \times \mathbf{X}) \times \mathbf{A}}{A^2} + \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{A}}{A^2}.$$

Sur la base de ce résultat, il n'est pas surprenant qu'un champ de vecteur soit entièrement déterminé par la donnée de son rotationnel et de sa divergence car dans l'espace de Fourier, décrit par  $\mathbf{k}$ :  $\nabla \cdot \mathbf{V} \rightarrow j\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{V}}$  et  $\nabla \times \mathbf{V} \rightarrow j\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{V}}$ , nous donnerons néanmoins ici la démonstration classique sans l'aide de la représentation de Fourier,

$$\{\nabla \cdot \mathbf{V}, \nabla \times \mathbf{V}\} \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left( \iiint \frac{\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{u})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{u}|} d^3u \right) - \nabla \left( \iiint \frac{\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{u})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{u}|} d^3u \right). \quad (7.1)$$

Démontrons ce résultat classique de représentation des champs vectoriels.

Dans l'espace, muni de sa structure euclidienne classique, fixons une origine et mesurons les distances  $r$  à cette origine, puis considérons le champ scalaire  $1/r$  et l'opérateur laplacien scalaire  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$ ,

$$\begin{aligned} \forall r \neq 0 \rightarrow \Delta \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = 0, \\ \forall V \text{ centrée sur } r &= 0 \rightarrow - \iiint_V d^3r \nabla \cdot \nabla r^{-1} = \iint_{\Sigma} dS r^{-2} = \iint d\Omega = 4\pi, \end{aligned} \quad (7.2)$$

où nous avons utilisé le théorème d'Ostrogradski pour transformer l'intégrale de volume sur le volume  $V$  en un flux à travers la surface  $\Sigma$  délimitant  $V$ . Ainsi,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint d^3u \mathbf{V}(\mathbf{u}) \Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|}, \quad (7.3)$$

car au voisinage de  $\mathbf{r} \sim \mathbf{u} \rightarrow V(\mathbf{u}) \sim V(\mathbf{r})$ , le champ est ici exprimé en fonction du champ et le gain en représentation semble nul, mais cette relation de départ va permettre d'établir le théorème de représentation de Helmholtz par *intégration par partie*. Considérant l'électromagnétisme au sens des distributions, la fonction de Green de l'opérateur laplacien  $\Delta$  dans l'espace libre est donc donnée par:

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \iiint d^3u \mathbf{V}(\mathbf{u}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{u}).$$

Dans la suite de ce cours nous noterons simplement :  $\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ .

Soit l'opérateur laplacien vectoriel :  $\Delta \equiv \nabla(\nabla \cdot) - \nabla \times (\nabla \times)$  qui, en coordonnées cartésiennes, se réduit à l'opérateur laplacien scalaire  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$  sur chaque composante cartésienne,

$$\Delta_{\mathbf{r}} \iiint d^3u \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} = \nabla_{\mathbf{r}} \iiint d^3u \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} - \nabla_{\mathbf{r}} \times \iiint d^3u \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|}. \quad (7.4)$$

Les divergence et rotationnel du produit d'une fonction scalaire par un champ de vecteur sont rappelées dans le formulaire à la fin de l'ouvrage,

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} = \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} - \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|}, \quad \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} = \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \times \mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} - \nabla_{\mathbf{u}} \times \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|}.$$

Substituons ces identités dans l'expression précédente,

$$\begin{aligned} \iiint d^3u \Delta_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} &= \nabla_{\mathbf{r}} \iiint d^3u \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} - \nabla_{\mathbf{r}} \times \iiint d^3u \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \times \mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} \\ &\quad - \nabla_{\mathbf{r}} \iiint d^3u \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} + \nabla_{\mathbf{r}} \times \iiint d^3u \nabla_{\mathbf{u}} \times \frac{\mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|}. \end{aligned}$$

Les deux dernières sommes peuvent être ramenées à des flux à l'infini où les champs s'annulent,

$$\iiint d^3u \mathbf{V}(\mathbf{u}) \Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} = \nabla_{\mathbf{r}} \iiint d^3u \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} - \nabla_{\mathbf{r}} \times \iiint d^3u \frac{\nabla_{\mathbf{u}} \times \mathbf{V}(\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|}. \quad (7.5)$$

Le théorème de représentation de Helmholtz est ainsi démontré,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \nabla \times \iiint d^3u \frac{\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{u})}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{u}|} - \nabla \iiint d^3u \frac{\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{u})}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{u}|},$$

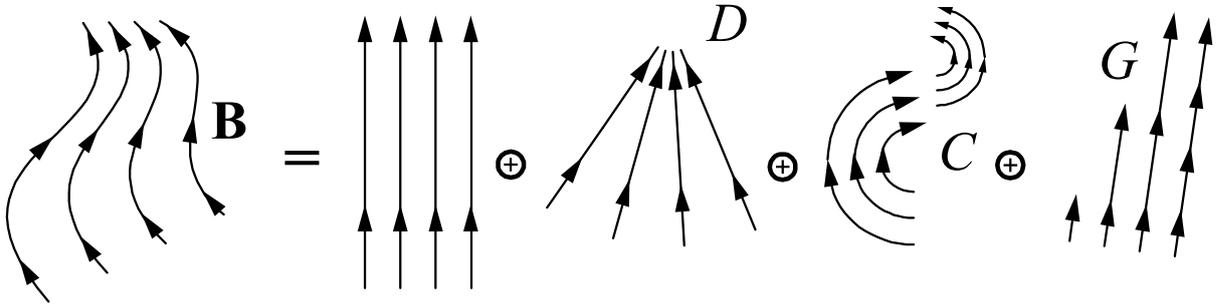
la donnée de la divergence et du rotationnel caractérise sans ambiguïté un champ vectoriel s'annulant à l'infini.

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow k^2 \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}) = \overbrace{j\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k})}^{\text{rotationnel}} - \overbrace{j\mathbf{k} [\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k})]}^{\text{divergence}},$$

le facteur en  $1/k^2$  étant simplement la représentation de Fourier de  $1/r$ .

La figure ci-dessous présente la décomposition d'un champ inhomogène en la somme d'un champ homogène plus un ensemble d'inhomogénéités canoniques que nous allons identifier et étudier. Au voisinage d'un point  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , pris comme référence, le champ peut être développé en une série de Taylor :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla \otimes \mathbf{B}|_{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{B}|_{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \dots$$



La matrice des dérivées partielles  $\nabla \otimes \mathbf{B}|_{\mathbf{r}}$  décrit la structure local du champ.

$$\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z + (\mathbf{u}_x \quad \mathbf{u}_y \quad \mathbf{u}_z) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \dots$$

Compte tenu de la relation  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , il existe, a priori,  $9 - 1 = 8$  longueurs de gradients indépendantes caractérisant l'inhomogénéité du champ. Ce résultat doit être mis en correspondance avec une analyse géométrique afin de dégager la signification des différents éléments de matrice et des différentes longueurs de gradient pour

réduire le problème à l'identification de quatre types d'inhomogénéités, dites canoniques, que nous étudierons séparément : le gradient, la courbure, la divergence/convergence et le cisaillement.

Considérons successivement les différents éléments de la matrice  $\nabla \mathbf{B}$  et mettons en correspondance ces éléments de matrice avec des configurations canoniques de champs.

• **Gradient G** : les lignes de champ restent parallèles à  $\mathbf{u}_z$  et  $B$  ne dépend que de  $x$  ou  $y$  ; cette configuration est caractérisée par deux nombres, les longueurs de gradient suivant  $x$  et  $y$  :  $L$  et  $D$ .

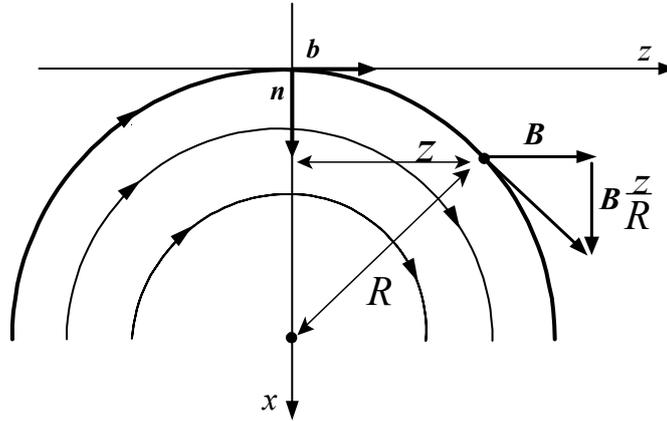
$$\left(0, 0, B + \frac{x}{L}B\right), \left(0, 0, B + \frac{y}{D}B\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ BL^{-1} & BD^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

C'est la composante (G).

• **Courbure C** : les lignes de champ sont des arcs de cercles concentriques dans les plans  $x$  ou  $y$  ; cette configuration est caractérisée par deux nombres, les deux rayons de courbure suivant  $x$  ou  $y$  :  $R$  et  $S$ .

$$\left(B\frac{z}{R}, 0, B\right), \left(0, B\frac{z}{S}, B\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & BR^{-1} \\ 0 & 0 & BS^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est la composante (C). Le lien entre ces deux éléments de matrice et la courbure des lignes de champ peut être établi en considérant l'équation des lignes de champ :  $dz/dx = R/z \rightarrow x = z^2/2R$ , qui est semblable au développement de l'équation du cercle de rayon  $R$  tangent au champ au point de référence :  $(x - R)^2 + z^2 = R^2 \rightarrow x \approx z^2/2R$ .



• **Convergence/divergence D** : la ligne de champ passant par l'origine coïncide avec l'axe des  $z$  et les lignes de force voisines convergent (divergent) vers (depuis) cette ligne de référence ; cette configuration est caractérisée par les deux nombres. En effet, considérons un tube de flux de section circulaire en  $z = 0$ , sa surface de section en  $z \neq 0$  est une ellipse caractérisée par la longueur de ses deux axes.

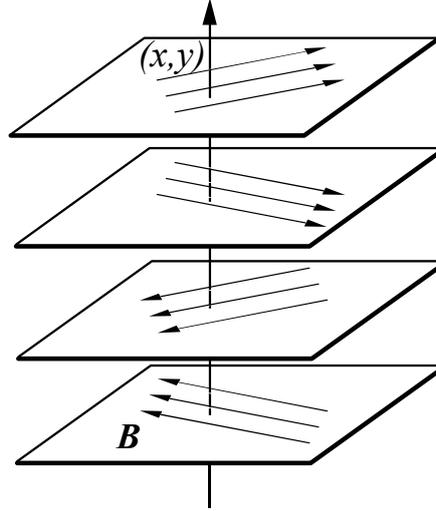
$$\left(B\frac{x}{U}, 0, B - \frac{z}{U}B\right), \left(0, B\frac{y}{V}, B - \frac{z}{V}B\right) \rightarrow \begin{pmatrix} BU^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & BV^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -B(U^{-1} + V^{-1}) \end{pmatrix}$$

La description de ce type de configuration magnétique semble nécessiter un troisième paramètre car la section circulaire se transforme en une ellipse, mais, en général, les axes de cette ellipse tournent lorsque l'on s'éloigne du point de référence et possèdent donc une orientation quelconque, l'angle entre ces axes et une direction de référence semble donc nécessaire pour caractériser la configuration magnétique ; en fait cet angle est une fonction de  $U$  et  $V$  et cette relation n'est autre que la traduction géométrique de la relation  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Nous venons d'identifier la composante (D).

Deux paramètres indépendants caractérisent le gradient, deux la courbure, deux (trois dépendants) la convergence ou la divergence des lignes de champ, au total sept paramètres de la matrice gradient peuvent être interprétées géométriquement.

• **Cisaillement** : les huitième et neuvième paramètres sont associés au cisaillement des lignes de champ lorsque les lignes de champ sont rectilignes, parallèles entre elles et s'organisent en familles de plans parallèles ; le passage d'un plan au plan voisin s'effectue à travers une rotation, une telle configuration de champ est caractérisée par deux nombres : le pas de l'hélice ainsi identifiée,  $H$  ou  $K$ , suivant  $x$  ou  $y$ .

$$\left(B\frac{y}{H}, 0, B\right), \left(0, B\frac{x}{K}, B\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & BH^{-1} & 0 \\ BK^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Afin de résoudre le problème de la dynamique d'une particule chargée dans un champ magnétique inhomogène caractérisé localement par les 8 paramètres  $L, D, R, S, H, K, U$  et  $V$ ,

- supposons que les échelles de variations spatiales du champ vérifient un ordering adiabatique par rapport au rayon de Larmor:  $L, D, R, S, H, K, U, V \gg \rho_L$ ; puis,
- analysons la position comme la somme de la position du centre guide plus le rayon de Larmor:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}_L(t)$ ; et
- décomposons la vitesse perpendiculaire en la somme d'une rotation cyclotronique plus une vitesse de dérive  $\mathbf{V}_D$ :  $\mathbf{V}_\perp(t) = \mathbf{V}_c(t) + \mathbf{V}_\parallel + \mathbf{V}_D$  où  $\mathbf{V}_D = d\mathbf{R}_\perp/dt$ .

Ces hypothèses et décompositions correspondent à un ordering de la dynamique ainsi séparée en mouvements lent et rapide,  $\mathbf{V}_\parallel$  et  $\mathbf{V}_c = d\boldsymbol{\rho}_L/dt$  où  $\boldsymbol{\rho}_L$  décrit la partie cyclotronique rapide et  $\mathbf{V}_D = d\mathbf{R}_\perp/dt$  les mouvements lents induits par les inhomogénéités du champ; le caractère lent, à l'échelle cyclotronique, de ces composantes permet de définir  $\mathbf{V}_D = \langle \mathbf{V}_\perp \rangle$  la moyenne étant ici une moyenne temporelle sur une période cyclotronique.

## 7.2 Magnetic drifts

Au-delà de la divergence des lignes de champs et de l'invariance adiabatique du moment magnétique, étudions les caractéristiques générales du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique statique inhomogène  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ .

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Afin de résoudre ce problème, nous supposons que les échelles des variations spatiales du champ vérifient un ordering adiabatique: le rayon de Larmor sera supposé plus petit que les longueurs de gradient caractéristiques dans le plan perpendiculaire au champ, et le rapport de la vitesse parallèle au champ sur la fréquence cyclotron plus petit que la longueur de gradient parallèle.

Si le champ est représenté par une amplitude  $B$  et un vecteur directeur unitaire  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{B}(x, y, z) = B(x, y, z)\mathbf{b}(x, y, z)$ , dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  associé à une base orthonormée directe  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$  où l'axe des  $z$  est choisi tangent à la ligne de champ à l'origine:  $\mathbf{b}(x=0, y=0, z=0) = \mathbf{u}_z$  et  $B(x=0, y=0, z=0) = B$ , alors les hypothèses d'adiabaticité se traduisent par:

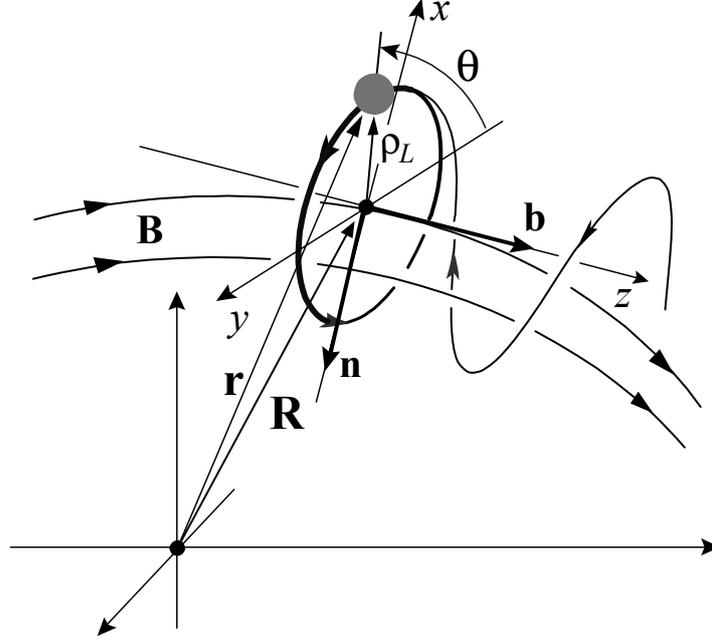
$$\rho_L \frac{\partial B}{\partial x} \ll B, \quad \rho_L \frac{\partial B}{\partial y} \ll B, \quad V_\parallel \frac{\partial B}{\partial z} \ll \omega_c B$$

Sous ces hypothèses, le champ apparaît localement (presque) homogène à la particule qui effectue un grand nombre de rotations cyclotroniques avant d'explorer, sur des échelles de temps longues, les variations spatiales du champ en accumulant de petites déviations du mouvement cyclotronique dues à ces variations; nous étudions donc ce que les mécaniciens célestes nomment des **effets séculaires**: une légère déviation (par exemple 1%) d'un mouvement périodique, qui, par accumulation sur un grand nombre de périodes (par exemple 100), induit un effet significatif ( $100 \times 1\% = 1$ ).

Décomposons la position d'une particule en la somme de la position du centre guide  $\mathbf{R}$  plus le rayon de Larmor tournant  $\boldsymbol{\rho}_L(t)$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_L(t) = \int^t \mathbf{v}_\parallel(u) du + \mathbf{R}_\perp + \boldsymbol{\rho}_L(t)$$

Cette décomposition sépare le mouvement en mouvements lent,  $\mathbf{v}_D = d\mathbf{R}_\perp/dt$ , et rapide,  $\mathbf{v}_\parallel$  et  $\mathbf{v}_c = d\boldsymbol{\rho}_L/dt$  et  $\boldsymbol{\rho}_L$ , et cette séparation conduit à définir  $\mathbf{v}_D$  comme la moyenne temporelle sur une période cyclotronique de la vitesse perpendiculaire. Afin d'exprimer  $\mathbf{v}_D$  nous supposons que les échelles de variations spatiales du champ vérifient un ordering adiabatique : le rayon de Larmor sera supposé plus petit que les longueurs de gradient dans le plan perpendiculaire au champ, et le rapport de la vitesse parallèle au champ sur la fréquence cyclotron plus petit que la longueur de gradient parallèle.



Le champ sera représenté par  $\mathbf{B}(x, y, z) = B(x, y, z)\mathbf{b}(x, y, z)$  où  $\mathbf{b}$  est un vecteur unitaire dans un système de coordonnées cartésiennes  $[x, y, z]$  associé à une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x = -\mathbf{n}, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z = \mathbf{b}]$ . L'axe des  $z$  est pris tangent à la ligne de champ à l'origine :  $\mathbf{b}(x=0, y=0, z=0) = \mathbf{e}_z$ . Les hypothèses d'adiabaticité sont donc :  $\rho_L \partial B / \partial x \ll B$ ,  $\rho_L \partial B / \partial y \ll B$ ,  $v_\parallel \partial B / \partial z \ll \omega_c B$  où la fréquence cyclotron  $\omega_c$  et le rayon de Larmor  $\rho_L$  sont calculés au point de référence  $(0, 0, 0)$ . La position de la particule est égale la somme de la position du centre guide  $\mathbf{R}(t)$  et du rayon vecteur de l'orbite cyclotronique locale  $\boldsymbol{\rho}(t)$  :

$$\text{Position : } \mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}_L(t) = \mathbf{R}(t) + \rho_L [\cos(\omega_c t) \mathbf{e}_x - \sin(\omega_c t) \mathbf{e}_y]$$

Cette décomposition de la position entraîne une décomposition de la vitesse en la somme de la vitesse cyclotronique, de la vitesse le long de la ligne de champ, et d'une dérive lente perpendiculairement aux lignes de champ :

$$\text{Vitesse : } \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}_\parallel(t) + \mathbf{v}_c(t) + \mathbf{v}_D = v_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}_D + \omega_c [\boldsymbol{\rho}_L(t) \times \mathbf{b}]$$

Les inconnues de cette décomposition en mouvements lent et rapide sont les composantes du mouvement lent, c'est-à-dire la variation temporelle de la vitesse parallèle  $dv_\parallel/dt$  et la valeur de la vitesse de dérive  $\mathbf{v}_D$ . A l'ordre un en les petits paramètres  $\rho_L \partial \ln B / \partial x$ ,  $\rho_L \partial \ln B / \partial y$  nous effectuons un développement limité du champ au voisinage du centre guide.

$$\text{Champ : } \mathbf{B}(\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_L) = \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla \mathbf{B}|_{\mathbf{R}}$$

A l'ordre zéro en les petits paramètres  $\rho_L \partial \ln B / \partial x$ ,  $\rho_L \partial \ln B / \partial y$  et  $v_\parallel \partial \ln B / \partial z \omega_c$  l'orbite est décrite par les variables de position et vitesse obtenues dans un champ homogène :  $\boldsymbol{\rho}_L = \rho_{Lx} \mathbf{e}_x - \rho_{Ly} \mathbf{e}_y = \rho_L [\cos(\omega_c t) \mathbf{e}_x - \sin(\omega_c t) \mathbf{e}_y]$ .

$$\text{Ordre } O(0) : \quad \mathbf{v}_\parallel = v_\parallel \mathbf{b}, \quad \mathbf{v}_c(t) = \omega_c \boldsymbol{\rho}_L(t) \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{v}_D = \mathbf{0}$$

où  $\omega_c = qB(R)/m$ . Afin de calculer l'ordre suivant, compte tenu : (i) de la décomposition de la vitesse et (ii) du développement du champ, l'équation du mouvement peut être écrite :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_D) = \frac{q}{m} (\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_D) \times [\mathbf{B}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \mathbf{B}|_{\mathbf{R}}]$$

Afin d'extraire la partie lente de la trajectoire nous utilisons l'expression de la trajectoire à l'ordre zéro et nous prenons la moyenne  $\langle \rangle$  de cette équation sur une période cyclotronique. Seuls subsistent alors les termes lents et les carrés de termes rapides.

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \frac{q}{m} \omega_c \langle (\boldsymbol{\rho}_L \times \mathbf{b}) \times (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle_{\mathbf{R}} + \dots$$

Le double produit vectoriel  $\langle (\boldsymbol{\rho}_L \times \mathbf{b}) \times (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle$  peut être évalué par projection sur la base cartésienne locale  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z = \mathbf{b}]$ :

$$\begin{aligned} \langle (\boldsymbol{\rho}_L \times \mathbf{b}) \times (\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle &= - \left\langle \rho_{Lx} \left( \rho_{Lx} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \rho_{Ly} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \right\rangle \\ &= - \left\langle \rho_{Ly} \left( \rho_{Lx} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \rho_{Ly} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \right\rangle \\ &\quad \left\langle \rho_{Ly} \left( \rho_{Lx} \frac{\partial B_y}{\partial x} + \rho_{Ly} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \right\rangle + \left\langle \rho_{Lx} \left( \rho_{Lx} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \rho_{Ly} \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right\rangle \\ &= - \langle \rho_{Lx} \rho_{Lx} \rangle \frac{\partial B_z}{\partial x} - \langle \rho_{Ly} \rho_{Ly} \rangle \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ &\quad \langle \rho_{Ly} \rho_{Lx} \rangle \frac{\partial B_y}{\partial x} + \langle \rho_{Lx} \rho_{Lx} \rangle \frac{\partial B_x}{\partial x} \end{aligned}$$

Où nous avons utilisé: (i) l'identité  $2\langle \rho_{Li} \rho_{Lj} \rangle = \rho_L^2 \delta_{ij}$ , (ii) l'équation de la divergence du champ  $\partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0$  et (iii) l'expression  $(\boldsymbol{\rho}_L \cdot \nabla) = \rho_{Lx} \partial / \partial x + \rho_{Ly} \partial / \partial y$ , l'équation de la force de Laplace moyennée sur une période cyclotron se réduit donc à:

$$\text{Ordre } O(1) : m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) - \mu \nabla B|_{\mathbf{R}}$$

Cette relation est ensuite projetée parallèlement à  $\mathbf{b}$  et perpendiculairement à  $\mathbf{b}$ . Pour ce faire introduisons  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à une ligne de champ magnétique,  $R$  son rayon de courbure et  $s$  l'abscisse curviligne le long de cette ligne. La relation classique de géométrie différentielle des courbes:  $d\mathbf{b}/ds = \mathbf{n}/R$  conduit à l'expression:

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = \frac{d(v_{\parallel} \mathbf{b})}{dt} = \frac{dv_{\parallel}}{dt} \mathbf{b} + v_{\parallel}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}) = \frac{dv_{\parallel}}{dt} \mathbf{b} + \frac{v_{\parallel}^2}{R} \mathbf{n}$$

Le produit scalaire de cette équation avec  $\mathbf{b}$  permet d'exprimer le terme de force diamagnétique:  $m dv_{\parallel} / dt = -\mu \mathbf{b} \cdot \nabla B$  et de retrouver ainsi un résultat déjà établi; le produit vectoriel avec  $\mathbf{b}$  permet d'exprimer les termes de vitesses de dérives de gradient et de courbure:

$$m \mathbf{b} \times v_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{n}}{R} = q \mathbf{b} \times (\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}) - \mu \mathbf{b} \times \nabla B$$

la solution de cette équation algébrique, d'inconnue  $\mathbf{v}_D$ , est:

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mu}{qB} \mathbf{b} \times \nabla B + \frac{m v_{\parallel}^2}{qB} \mathbf{b} \times \frac{\mathbf{n}}{R} \equiv \mathbf{v}_{DG} + \mathbf{v}_{DC}$$

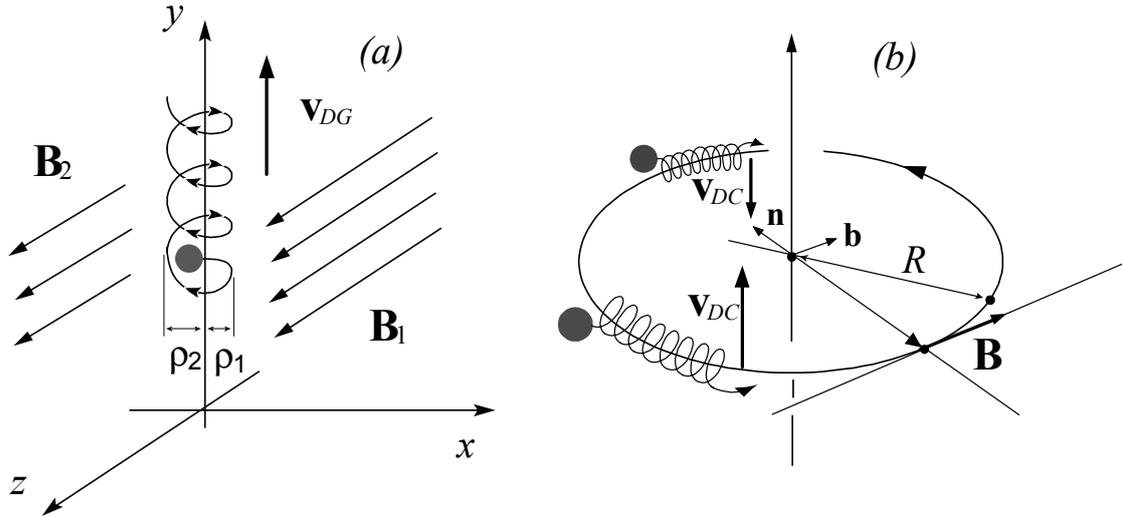
L'origine physique de la dérive de gradient  $\mathbf{v}_{DG}$  est une lente accumulation de faibles déviations, non compensées, du rayon de Larmor entre les zones de champ fort et de champ faible illustré sur la figure où le champ indexé 1 est plus intense que le champ 2, le rayon de Larmor  $\rho_1$  est donc plus petit que  $\rho_2$  et une dérive est nécessaire pour ajuster ces deux demi cercle en un mouvement continu.

$$\mathbf{v}_{DG} \equiv \frac{v_c^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{B}, \quad \mathbf{v}_{DC} \equiv \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R} \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_c(t) + \mathbf{v}_{DG} + \mathbf{v}_{DC} + \dots$$

L'origine physique de la dérive de courbure  $\mathbf{v}_{DC}$  est simplement la force centrifuge  $\mathbf{F}_c$ ; en effet, la dérive de champs croisés  $\mathbf{F}_c \times \mathbf{B} / qB^2$  générée par cette force centrifuge n'est autre que la dérive de courbure  $\mathbf{v}_{DC}$ . Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique statique présentant une courbure et un gradient est donc la superposition du mouvement cyclotronique et du mouvement parallèle ainsi que de deux mouvements de dérives, les dérives de gradient et de courbure.

$$\begin{array}{l} \text{Dérive de Gradient} \quad \mathbf{v}_{DG} = \frac{v_c^2}{\omega_c} \mathbf{b} \times \frac{\nabla B}{2B} \\ \text{Dérive de Courbure} \quad \mathbf{v}_{DC} = \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \mathbf{b} \times \frac{\mathbf{n}}{R} \end{array}$$

Ces dérives créent des courants et des séparations de charges, donc des champs électriques et magnétiques car le sens de ces deux dérives est fonction du signe de la charge de la particule. Ces courants de dérives s'écoulent dans la direction perpendiculaire au champ. L'essentiel de l'énergie cinétique est contenue dans le mouvement cyclotronique et le mouvement parallèle, le mouvement de dérive ne contenant qu'une faible fraction de l'énergie totale.



Dans un tokamak le champ  $\mathbf{B}$  est en première approximation irrotationnel, c'est-à-dire :  $\nabla \times \mathbf{B} \approx \mathbf{0} \rightarrow \nabla \times (B\mathbf{b}) \approx \mathbf{0} = B\nabla \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \nabla B$ , et  $\nabla \mathbf{b}^2/2 = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{b} \times \nabla B/B = \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}/R$ ; la somme de la dérive de gradient plus la dérive de courbure est donc égale à :

$$\text{Dérive Magnétique : } \quad \mathbf{v}_D \equiv \mathbf{v}_{DG} + \mathbf{v}_{DC} = \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}}{R\omega_c} \mathbf{b} \times \mathbf{n}$$

où  $R$  mesure le rayon de la ligne de champ, c'est-à-dire approximativement le grand rayon du tore; l'ordre de grandeur de  $\mathbf{v}_D$  en mètre par seconde est donné par la formule :  $T [\text{eV}] / R [\text{m}] B [\text{T}]$ . Sur la base de la décomposition de la vitesse d'une particule chargée en la somme (i) d'une translation le long des lignes de champ plus (ii) une rotation cyclotronique autour des lignes de champ (iii) plus une dérive lente perpendiculairement aux lignes de champ.

Considérons, sur la figure 5.5, le mouvement d'une particule chargée de charge  $e$  et de masse  $m$  interagissant avec un champ magnétique inhomogène et statique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  dérivant du potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

Définissons les champs scalaire et vectoriel  $\mathbf{b}$  et  $B$  :  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}) \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  où  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  est le champ de vecteurs unitaires dirigeant ce champ magnétique en  $\mathbf{r}$ . Introduisons un repérage cartésien local  $[x, y, z]$  sur la base locale  $[\mathbf{e}_x(\mathbf{r}), \mathbf{e}_y(\mathbf{r}), \mathbf{b}(\mathbf{r})]$ .

Le lagrangien  $L$  décrivant l'interaction magnétique est donné par :

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T - V = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Nous allons construire une description simplifiée de l'orbite sous l'hypothèse d'adiabaticité des variations du champ : l'échelle de longueur des variations spatiales du champ est supposée beaucoup plus grande que le rayon de Larmor  $\rho_L = v_c/\omega_c$  et  $v_{\parallel}/\omega_c$  où  $\omega_c = qB(\mathbf{r})/m$  est la pulsation cyclotronique locale,  $v_c$  la vitesse de rotation autour des lignes de champ  $v_c^2 = |\dot{\mathbf{r}}|^2 - |\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r})|^2$  et  $v_{\parallel} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r})$ . Ainsi, nous définissons le petit paramètre d'adiabaticité  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon \equiv \max \left[ \frac{\rho_L}{B} \frac{\partial B}{\partial x}, \frac{\rho_L}{B} \frac{\partial B}{\partial y}, \frac{\rho_L}{B} \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{v_{\parallel}}{\omega_c B} \frac{\partial B}{\partial z} \right] \ll 1$$

Sous cette **hypothèse d'adiabaticité** le mouvement de la particule chargée, restreint à une analyse locale, est semblable au mouvement dans un champ homogène étudié dans le cadre du paragraphe 2.6.

Pour étudier l'influence des inhomogénéités effectuons un changement de variable faisant apparaître (i) le centre guide  $\mathbf{R}$ , (ii) le rayon de Larmor local  $\rho_L$  et (iii) l'angle de rotation cyclotronique local  $\theta$ .

$$[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] \rightarrow [\mathbf{R}, \rho_L, \theta, \dot{\mathbf{R}}, \dot{\rho}_L, \dot{\theta}]$$

La correspondance entre anciennes et nouvelles variables s'établit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \rho_L \cos \theta \mathbf{e}_x + \rho_L \sin \theta \mathbf{e}_y \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} - \dot{\theta} \rho_L \sin \theta \mathbf{e}_x + \dot{\theta} \rho_L \cos \theta \mathbf{e}_y + O[\varepsilon^2] \end{aligned}$$

Le mouvement suivant  $\theta$  étant périodique à l'ordre le plus bas et les équations d'Euler-Lagrange dérivant d'un principe variationnel, suivant la méthode du paragraphe 5.3, il est légitime de prendre la valeur moyenne du lagrangien  $\langle L \rangle_{\theta}$  sur cette coordonnée périodique  $\theta$  et de considérer les équations d'Euler-Lagrange associées à

cette valeur moyenne  $\mathcal{L}$ . Ainsi l'énergie cinétique, à un facteur  $m/2$  près, à l'ordre le plus bas en  $\varepsilon$ , s'exprime suivant :

$$\langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle_\theta = v_\parallel^2 + v_c^2 = \left[ \mathbf{b}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} \right]^2 + \left( \rho_L \dot{\theta} \right)^2$$

L'expression du couplage gyroscopique magnétique  $e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$  moyennée nécessite un développement autour du centre guide  $\mathbf{R}$  :

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} = \left[ \dot{\mathbf{R}} - \rho_L \dot{\theta} (\sin \theta \mathbf{e}_x - \cos \theta \mathbf{e}_y) \right] \cdot \left[ \mathbf{A}(\mathbf{R}) + \rho_L \left( \cos \theta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) \right]$$

et conduit à l'expression moyenne :

$$\langle \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \rangle_\theta = \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \frac{\rho_L^2 \dot{\theta}}{2} B(\mathbf{R})$$

où  $B(\mathbf{R}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{R})$ . Ainsi, le lagrangien moyen  $\mathcal{L}$  correspond à la somme de quatre termes : (i) l'énergie cinétique le long des lignes de champ, (ii) l'énergie cinétique cyclotronique autour des lignes de champ, (iii) l'énergie d'interaction entre le dipôle magnétique associé à l'orbite cyclotronique et le champ  $\mathbf{B}$  et (iv) le couplage gyroscopique magnétique ramené au centre guide  $\mathbf{R}$ .

$$\mathcal{L} = \langle L \rangle_\theta = \frac{m}{2} \underbrace{\left[ \mathbf{b}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} \right]^2}_{v_\parallel^2 + v_c^2} + \frac{m}{2} \rho_L^2 \dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{e}{2} \rho_L^2 \dot{\theta} B(\mathbf{R})}_{-\mu B} + \underbrace{e \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}}}_{e \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}}$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour les variables  $(\rho_L, \dot{\rho}_L)$  et  $(\dot{\theta}, \theta)$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_L} = 0 \rightarrow \dot{\theta} = -\frac{e}{m} B(\mathbf{R}) \rightarrow \theta = -\int^t \omega_c[\mathbf{R}(u)] du \quad (7.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left[ m \rho_L^2 \dot{\theta} + \frac{e}{2} \rho_L^2 B(\mathbf{R}) \right] = 0 \quad (7.7)$$

confirment la cohérence de l'approximation adiabatique : (i) la première identité (7.6) décrit le mouvement de rotation cyclotronique local de pulsation cyclotronique locale  $\omega_c(\mathbf{R})$  et (ii) la deuxième (7.7) prédit l'existence d'un invariant, le **moment magnétique**  $\mu$ .

$$\omega_c(\mathbf{R}) = \frac{eB(\mathbf{R})}{m}, \quad \mu = \left| e \rho_L^2 \dot{\theta} + \frac{e}{2m} \rho_L^2 B \right| = \frac{e}{2} \rho_L^2 \omega_c \quad (7.8)$$

Les parties du lagrangien relatives au centre guide  $\mathbf{R}$  étant autonomes nous pouvons considérer un deuxième changement de variables

$$\left[ \mathbf{R}, \rho_L, \theta, \dot{\mathbf{R}}, \dot{\rho}_L, \dot{\theta} \right] \rightarrow \left[ \mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}} \right]$$

consistant à s'intéresser uniquement aux variables du centre guide, ainsi définit-on le lagrangien d'Alfven illustrée sur la figure 5.6 :

$$\text{Lagrangien d'Alfven: } \mathcal{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) = \frac{m}{2} \underbrace{\left[ \mathbf{b}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} \right]^2}_{\frac{m}{2} v_\parallel^2} + e \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} - \underbrace{\mu B(\mathbf{R})}_{\frac{m}{2} v_c^2}$$

La particule apparaît dès lors caractérisée par trois constantes : (i) sa **charge**  $e$ , (ii) sa **masse**  $m$ , mais aussi (iii) son **moment magnétique**  $\mu$ .

Les équations d'Euler-Lagrange associées à ce lagrangien du centre guide prédisent l'existence de deux vitesses de dérives séculaires perpendiculairement aux lignes de champ. Les deux termes de ces équations sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{R}} &= m v_\parallel \left[ \dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla \mathbf{b} + \dot{\mathbf{R}} \times (\nabla \times \mathbf{b}) \right] + e \left[ \dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla \mathbf{A} + \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} \right] - \mu \nabla B(\mathbf{R}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) &= m \dot{v}_\parallel \mathbf{b} + m v_\parallel \dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla \mathbf{b} + e \dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla \mathbf{A} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation  $\nabla[\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{R})] = (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{C} \times (\nabla \times \mathbf{F})$ . L'égalité de ces deux termes conduit aux relations :

$$\begin{aligned}
 m \dot{v}_{\parallel} \mathbf{b} &= e \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B + m v_{\parallel} \dot{\mathbf{R}} \times (\nabla \times \mathbf{b}) \\
 m \dot{v}_{\parallel} \mathbf{b} &= e \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B - m v_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{n}}{\mathcal{R}}
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations  $\dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{b} + O[\varepsilon]$ ,  $O[\varepsilon] = d\mathbf{R}_{\perp}/dt$ ,  $\nabla \mathbf{b}^2 = 2(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + 2\mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = 0$  et  $(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \mathbf{n}/\mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}$  est le rayon de courbure des lignes du champ magnétique et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire du trièdre de Frenet présenté dans l'annexe A.

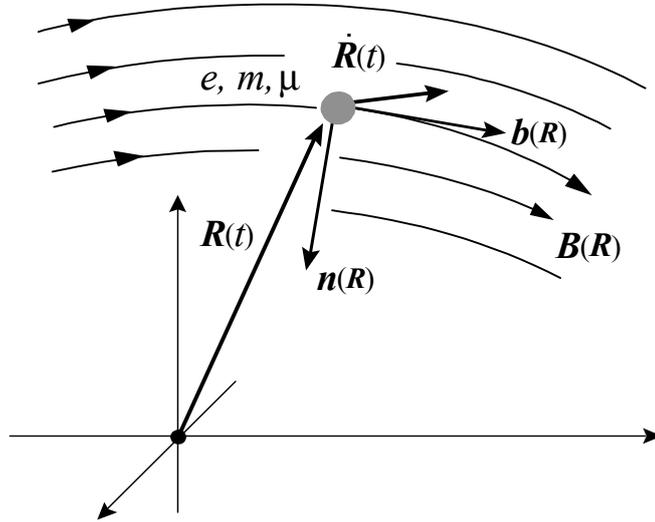


Figure 5.6 - Réduction adiabatique d'Alfvén : la particule chargée présente trois caractéristiques :  $e$ ,  $m$  et  $\mu$ .

Ainsi nous retrouvons le résultat (tableau 2.3) : le mouvement d'une particule chargée au sein d'un champs électromagnétique, dont les variations sont de nature adiabatique, est la combinaison d'une

- rotation rapide autour des lignes de champ  $\mathbf{v}_c(t)$ ,
- translation rapide le long des lignes de champ  $\mathbf{v}_{\parallel}(t)$  modulée par une
- accélération/décélération  $-\mu \partial B / \partial s$  et d'une
- lente dérive à travers les lignes de champ somme d'une dérive de gradient et d'une dérive de courbure.

$$\begin{aligned}
 \text{Rotation rapide} &: \frac{d\rho_L}{dt} = \omega_c(\mathbf{R}) \rho_L \times \mathbf{b}(\mathbf{R}) \\
 \text{Translation rapide} &: \mathbf{R}_{\parallel} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{b} \rightarrow \frac{d^2 \mathbf{R}_{\parallel}}{dt^2} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \\
 \text{Dérive lente} &: \mathbf{R}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{b}) \rightarrow \frac{d\mathbf{R}_{\perp}}{dt} = \frac{v_c^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{2B} + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{\mathcal{R}}
 \end{aligned}$$

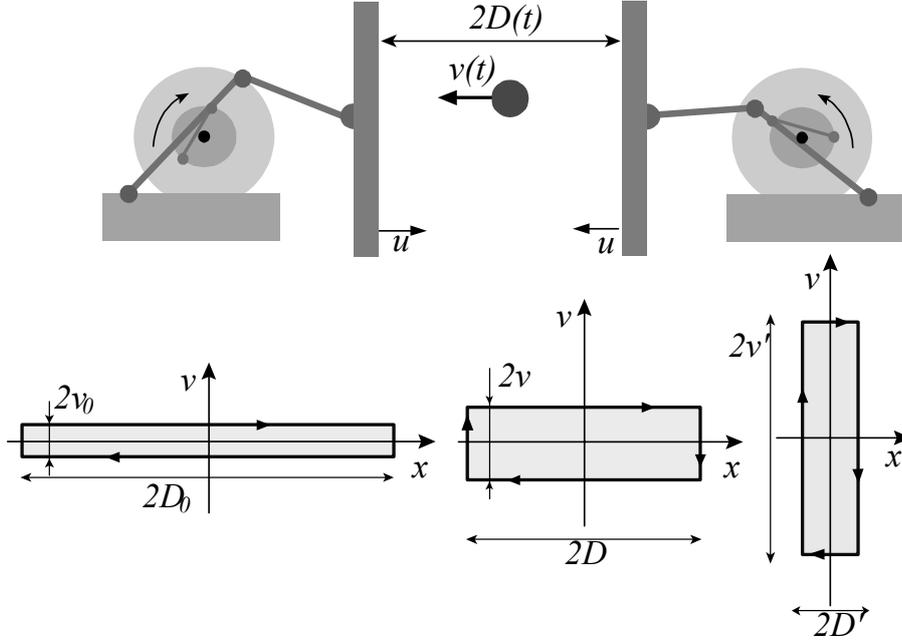
Vitesse de dérive	Expression
Champs croisé	$\mathbf{V}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$
Polarisation	$\mathbf{V}_P = \frac{1}{B \omega_c} \frac{d\mathbf{E}}{dt}$
Gradient	$\mathbf{V}_{DG} = \frac{v_c^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$
Courbure	$\mathbf{V}_{DC} = \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{\mathcal{R}}$

### 7.3 Adiabatic invariants

L'étude de la dynamique d'un système peut être entreprise de différentes manières. La plus courante consiste à exprimer les variables physiques en fonction du temps. Une autre approche consiste à rechercher des combinaisons de variables indépendantes du temps. En effet, malgré l'évolution du système, il n'est pas exclu que certaines combinaisons de variables puissent être construites de manière à compenser mutuellement leur variations temporelles ; l'exemple le plus connu étant l'énergie dans un système conservatif. Cette recherche d'invariants du mouvement peut être formalisée et systématisée dans le cadre de la mécanique hamiltonienne où les actions constituent de tels invariants, cette approche sera étudiée dans le dernier chapitre. Enfin, notons que l'existence d'invariants est garantie pour les systèmes possédant un groupe de symétrie continu, cette garantie constitue le théorème de Noether. Les invariants adiabatiques, que nous allons construire ici, ne sont pas associés aux symétries d'un système conservatif, mais à l'existence de trois échelles de temps bien

séparées, c'est-à-dire à l'existence d'un ordering séparant les composantes lentes et rapides du mouvement. Ces échelles permettent de décomposer le mouvement en trois dynamiques découplées, chacune possédant les caractéristiques d'un oscillateur.

Pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté  $X$  ( $d^2X/dt^2 + \Omega^2(t)X(t) = 0$ ) le rapport de l'énergie à la fréquence est un invariant adiabatique, parfois appelé invariant d'Erhenfest. Ce terme signifie que lorsque  $\Omega$  varie lentement,  $d\Omega/dt \ll \Omega^2$ , le rapport de l'énergie sur la pulsation reste approximativement constant. L'erreur commise en le considérant comme constant est exponentiellement petite. Ce résultat se généralise aisément au cas des oscillateurs non-linéaires ( $d^2X/dt^2 + F(X, t) = 0$ ). L'oscillateur non linéaire le plus simple illustrant cette propriété d'invariance adiabatique est constitué par une particule rebondissant entre deux murs distants d'une longueur  $2D$ ; ces murs se rapprochant lentement à la vitesse  $U = -\delta D/\delta t$ .



La vitesse de la particule sera notée  $V$  et l'hypothèse d'adiabaticité se traduit par  $U \ll V$ . Après une collision sur l'un des murs en mouvement, la particule subit une variation de vitesse  $\delta V = 2U$  et le temps entre deux collisions est donné par  $\delta t = \frac{2D}{V}$ ; on obtient donc :

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{UV}{D} = -\frac{\delta D}{\delta t} \frac{V}{D} \rightarrow \delta(VD) = 0 \rightarrow \delta \left[ \oint V dX \right] = 0$$

Pour tout mouvement périodique,  $X(t)$ , l'action  $J \equiv \frac{m}{2\pi} \oint V dX$ , où l'intégrale d'action doit être prise sur une période complète de l'oscillation, constitue un invariant adiabatique. Une interprétation géométrique de l'invariance de l'intégrale d'action peut être construite dans l'espace des phases  $(X, V)$ ; dans cet espace l'aire ( $\oint V dX$ ) sous tendu par une orbite fermée est proportionnelle à l'action  $J$  et l'invariance de l'action implique l'invariance de l'aire.

L'intégrale d'action pour un système à un degré de liberté peut être généralisée aux systèmes à plusieurs degrés de liberté, en particulier, lorsque ces différents degrés évoluent sur des échelles de temps très différentes. En présence d'un champ magnétique, dérivant du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , le moment canoniquement conjugué à la position doit être pris en compte dans le calcul de l'action.

$$J \equiv \frac{1}{2\pi} \oint m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow J \equiv \frac{1}{2\pi} \oint (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r}$$

Considérons le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, champ et particule vérifiant les hypothèses d'adiabaticité. Le mouvement le plus rapide correspond au mouvement cyclotronique. Puis, sur une échelle de temps plus longue, la particule oscille le long d'une ligne de champ (ce point va être précisé dans la suite de ce paragraphe), et enfin, sur échelle de temps plus longue, elle explore la configuration magnétique à travers les dérives de gradient et de courbure. Ce dernier mouvement peut être aussi périodique et définir ainsi une surface de dérive fermée.

Nous allons d'abord identifier l'invariant associé à l'oscillation cyclotronique. Le mouvement cyclotronique dans un champ magnétique homogène  $\mathbf{B}$ , dérivant d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$ , est décrit par l'évolution de la vitesse et de la position:  $\mathbf{r} = \rho_L [\cos(\omega_c t) \mathbf{u}_x - \sin(\omega_c t) \mathbf{u}_y]$  et  $\mathbf{V}_c = -V_c [\sin(\omega_c t) \mathbf{u}_x + \cos(\omega_c t) \mathbf{u}_y]$ . L'intégrale d'action associée à cette oscillation est donnée par :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \left( m\mathbf{V}_c + q \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2} \right) \cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{q} \mu$$

Le moment magnétique  $\mu$  défini précédemment est donc un invariant adiabatique et la théorie générale de l'invariance adiabatique des actions confirme les résultats précédents. Cette invariance a comme conséquence l'existence de points miroirs le long d'une ligne de champ. En effet, l'énergie cinétique et le moment magnétique sont conservés ; il existe donc deux relations entre l'état du système à l'instant  $t$  et son état antérieur à l'instant  $t_0$  :

$$\begin{aligned} \text{Invariance de l'énergie} & : \quad \mathbf{V}_c^2(t) + \mathbf{V}_\parallel^2(t) = \mathbf{V}_c^2(t_0) + \mathbf{V}_\parallel^2(t_0) \\ \text{Invariance du moment magnétique} & : \quad \frac{V_c^2(t)}{B(\mathbf{r}(t))} = \frac{V_c^2(t_0)}{B(\mathbf{r}(t_0))} \end{aligned}$$

Éliminons la vitesse cyclotronique pour exprimer la vitesse parallèle en fonction du champ et des caractéristiques de la particule à l'instant de référence  $t_0$ .

$$\mathbf{V}_\parallel^2(t) = \mathbf{V}_\parallel^2(t_0) - \mathbf{V}_c^2(t_0) \left[ \frac{B(\mathbf{r}(t)) - B(\mathbf{r}(t_0))}{B(\mathbf{r}(t_0))} \right]$$

Ainsi, si le rapport de la vitesse parallèle initiale  $\mathbf{V}_\parallel(t_0)$  sur la vitesse cyclotronique initiale  $\mathbf{V}_c(t_0)$  est petit, il existe un point  $\mathbf{r}$  ( $B(\mathbf{r}(t)) > B(\mathbf{r}(t_0))$ ) le long de la ligne de champ où la vitesse parallèle s'annule,  $\mathbf{V}_\parallel^2(t) = \mathbf{0}$ , une analyse plus poussée montre que la particule est réfléchiée par cette zone de champ fort ; c'est essentiellement la force diamagnétique qui est à l'oeuvre ici et ce point est appelé point miroir.

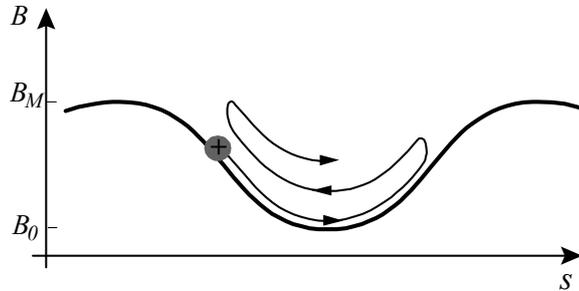
L'usage est d'introduire le "pitch angle"  $\theta$  de la particule :  $|\mathbf{V}_\parallel| = V \cos \theta$ ,  $|\mathbf{V}_c| = V \sin \theta$ . Une particule de pitch angle initial  $\theta_0$  en un point où le champ a la valeur  $B_0$  subira une réflexion en un point où le champ a la valeur  $B$  si :

$$\text{Cône de perte : } \sin \theta_0 = \sqrt{\frac{B_0}{B}}$$

Toutes les particules de pitch angle supérieur seront réfléchies avant d'atteindre le point  $B$ . Ce processus est utilisé comme principe de base des pièges thermonucléaires de type miroirs magnétiques. Ce processus est aussi présent dans la magnétosphère terrestre où il assure le confinement des électrons et des ions issus du vent solaire.

De nombreuses configurations magnétiques permettent de réaliser des lignes de champ possédant deux points miroirs entre lesquels certaines particules peuvent être piégées.

Le résultat du piégeage entre les points miroirs étant une oscillation le long des lignes de champ ou  $\mu B$  joue le rôle d'un potentiel confinant. On peut alors se poser la question de l'existence d'un invariant adiabatique associé à cette oscillation longitudinale.



La réponse est obtenue en appliquant la formule générale exprimant l'action de cet oscillateur ; cette formule permet de définir l'invariant longitudinal  $J$  d'une particule chargée dans une configuration magnétique comme :

$$J \equiv \oint (mV_\parallel + qA_\parallel) ds = \int_{s_1}^{s_2} mV_\parallel ds,$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ et  $(s_1, s_2)$  sont les deux points miroirs entre lesquels oscille la particule. Dans le troisième membre de cette identité nous avons négligé l'intégrale donnant la circulation du potentiel vecteur car elle est égale au flux du champ magnétique à travers la trajectoire fermée qui est nulle car le centre guide se déplace le long des lignes de champ. Nous verrons que pour le troisième invariant adiabatique la situation est complémentaire et ce troisième invariant est dominé par le terme de flux magnétique et non par le terme cinétique.

Afin de démontrer l'invariance de  $J$  nous allons considérer séparément le cas d'un champ inhomogène statique et le cas d'un champ dépendant du temps. Soit donc un champ magnétique statique  $\mathbf{B}(s, \mathbf{r}_\perp)$  et deux éléments de lignes de champ voisins de longueur  $ds$  et  $ds'$ , de rayon de courbure respectif  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Ces deux éléments de longueur sont vus sous un angle commun et possèdent un vecteur normal unitaire commun  $\mathbf{n}$ . Par ailleurs, les deux éléments de longueur et leurs rayons de courbure respectifs sont reliés par les relations :

$$\frac{ds'}{\mathcal{R}'} = \frac{ds}{\mathcal{R}} \rightarrow \frac{ds - ds'}{ds} = \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}'}{\mathcal{R}}$$

Une particule chargée suit les lignes de champ et dérive à travers ces lignes. Il est donc nécessaire d'évaluer la variation de la quantité  $V_{\parallel} ds$  résultant des dérives magnétiques  $\mathbf{V}_D = d\mathbf{r}_{\perp}/dt$  pendant une durée  $\delta t$  :

$$\delta(V_{\parallel} ds) = ds\delta V_{\parallel} + V_{\parallel}\delta(ds)$$

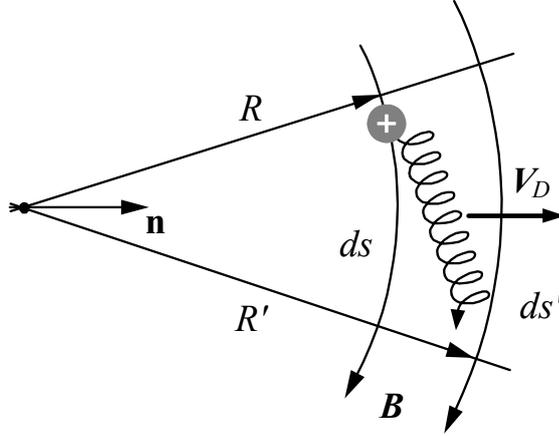
La variation du rayon de courbure est due à la dérive perpendiculaire aux lignes de champ. Pendant un temps  $\delta t$  on peut donc évaluer la variation de l'élément de longueur :

$$\frac{\delta(ds)}{ds} = \frac{ds - ds'}{ds} = \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = \frac{\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{n}\delta t}{\mathcal{R}}$$

Pendant la même durée  $\delta t$  la vitesse parallèle aux lignes de champ a varié de la quantité  $\delta V_{\parallel}$  qui peut être évaluée à l'aide de la conservation de l'énergie  $\mu B + mV_{\parallel}^2/2$ .

$$\delta\left(m\frac{V_{\parallel}^2}{2} + \mu B\right) = mV_{\parallel}\delta V_{\parallel} + \mu\mathbf{V}_D\delta t \cdot \nabla B = 0$$

Le moment magnétique  $\mu$  étant constant, la variation de champ magnétique possède ici un caractère essentiellement convectif et résulte du mouvement de la particule.



La somme des deux variations précédentes s'exprime en fonction des vitesses de dérive de gradient et de courbure et le résultat final est une variation  $\delta(V_{\parallel} ds)$  nulle.

$$\frac{\delta(ds)}{ds} + \frac{\delta V_{\parallel}}{V_{\parallel}} = \frac{V_c^2 \delta t}{2\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{B} \cdot \frac{\mathbf{n}}{\mathcal{R}} - \frac{\mu \delta t}{m\omega_c} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{b}}{\mathcal{R}} \cdot \nabla B = 0$$

Les variations de l'intégrand sont donc nulles,  $\delta(V_{\parallel} ds) = 0$  ; les variations de l'intégrale ne peuvent provenir que des bornes d'intégrations constituées par les deux points miroirs. La vitesse parallèle s'annulant en ces deux points, la variation de l'intégrale aussi, ainsi  $dJ/dt = 0$ . Considérons, à présent, le cas d'un champ  $\mathbf{B}(s, t)$  où les inhomogénéités transverses sont négligées et où la dépendance temporelle est prise en compte.

$$\text{Invariant longitudinal: } J = \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \sqrt{\frac{2}{m} (\mathcal{W}(t) - \mu B(s, t))} ds$$

L'énergie  $\mathcal{W}$  n'est pas conservée car la variation temporelle du champ magnétique induit un champ électrique d'induction. La variation temporelle de l'intégrale d'action est donc la somme de trois termes,

$$\frac{dJ}{dt} = \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{\mathcal{W}, s_{1,2}} + \left. \frac{\partial J}{\partial \mathcal{W}} \right|_{s_{1,2}, t} \frac{d\mathcal{W}}{dt} + \left. \frac{\partial J}{\partial s_{1,2}} \right|_{\mathcal{W}, t} \frac{ds_{1,2}}{dt}$$

Comme la vitesse curviligne s'annule aux points miroirs le troisième terme est nul.

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{s_1}^{s_2} -\frac{\mu}{mV_{\parallel}} \frac{\partial B}{\partial t} ds + \left( mV_{\parallel} \frac{dV_{\parallel}}{dt} + \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \mu V_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s} \right) \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{V_{\parallel}} ds$$

Compte tenu de la force diamagnétique le premier et le troisième terme, à l'intérieur de la parenthèse du deuxième membre de cette relation, se compensent. Sous l'hypothèse d'adiabaticité les variations temporelles du champ sont lentes à l'échelle de la période d'oscillation entre les deux points miroirs. Le terme de dérivée

temporelle du champ par rapport au temps peut donc être sorti de l'intégrale, il annule alors le deuxième terme de l'équation précédente. La variation temporelle de  $J$  est donc nulle. Cette intégrale d'action est un invariant adiabatique, l'invariant longitudinal. L'invariance du moment magnétique est associée au mouvement de rotation cyclotronique, celle de l'invariant longitudinal au mouvement le long des lignes de champ.

Un troisième invariant, lié au mouvement de dérive à travers les lignes de champ, peut être identifié lorsque ce mouvement est quasi périodique : c'est l'invariant dit de flux. Soit une configuration magnétique telle que le mouvement de dérive perpendiculairement aux lignes de champ soit quasi-périodique. L'intégrale d'action associée à ce mouvement est donnée par :

$$\text{Invariant de flux : } \Phi \equiv \frac{1}{2\pi} \oint (m\mathbf{V}_D + q\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r}$$

Contrairement à l'invariant longitudinal, dominé par le terme cinétique, la valeur de l'invariant de flux provient presque essentiellement du terme magnétique, d'où son nom d'invariant de flux. La démonstration de l'invariance de  $\Phi$  est facilitée par le fait que le terme cinétique est petit devant le terme magnétique. Afin d'établir ce résultat, considérons le rapport du premier terme sur le deuxième où  $R$  est le rayon de section de la surface entourée par la dérive :  $mRV_D/qR^2B$ . Ce rayon est de l'ordre de grandeur du rayon de courbure, ou de la longueur de gradient, de la configuration magnétique. Ce rapport du terme cinétique sur le terme magnétique est négligeable compte tenu de l'ordering adiabatique. L'invariant de flux peut donc être exprimé comme le flux enlacé par l'orbite de dérive.

$$\frac{mRV_D}{qR^2B} \approx \left(\frac{\rho_L}{R}\right)^2 \rightarrow \Phi \approx \frac{q}{2\pi} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Rappelons que le flux à travers une section de surface magnétique est indépendant de la section car  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Considérons maintenant une variation temporelle de champ magnétique et montrons que l'invariant de flux reste conservé.

Un champ magnétique dépendant du temps induit un champ électrique :  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$  ; ce champ électrique génère une dérive électrique  $\mathbf{V}_E$  des particules chargées. Par ailleurs la variation de l'invariant de flux doit prendre en compte la variation intrinsèque du champ et la déformation du circuit à travers lequel est calculé le flux. Ce deuxième terme est un effet de bord qui se réduit à une circulation.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{2\pi} \iint \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{q}{2\pi} \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V}_E \times d\mathbf{l})$$

L'équation de Maxwell-Faraday et le théorème de Stokes permettent d'exprimer la première intégrale comme une circulation.

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{q}{2\pi} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{q}{2\pi} \oint \left( \mathbf{B} \times \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right) \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = 0$$

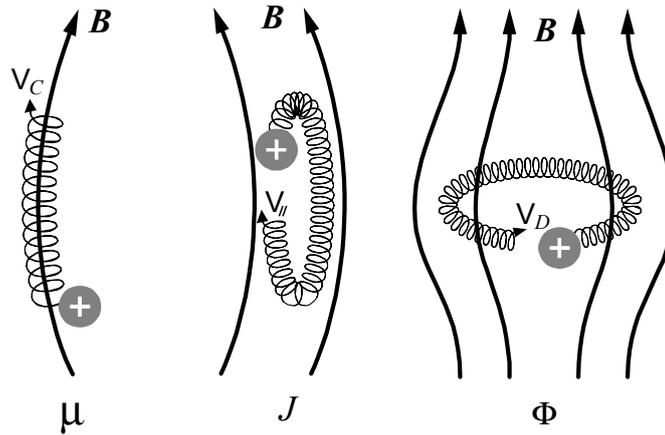
Le champ d'induction  $\mathbf{E}$  étant perpendiculaire au champ magnétique  $\mathbf{B}$ , la somme précédente est donc nulle et le flux est un invariant adiabatique. Ces trois invariants permettent une description du mouvement des particules chargées dans des champs lentement variables à l'échelle de la fréquence cyclotronique et faiblement inhomogènes à l'échelle du rayon de Larmor.

Pour garantir l'existence de ces invariants, les trois périodes associées aux trois mouvements  $\mathbf{V}_c$ ,  $\mathbf{V}_\parallel$ ,  $\mathbf{V}_D$  doivent être différentes afin d'éviter toute brisure d'invariance associée à des résonances entre degrés de liberté.

Une particule est donc repérée par un jeu de trois invariants  $(\mu, J, \Phi)$  et trois angles associés à ces actions. Ces trois angles sont respectivement la phase cyclotronique, un paramétrage entre  $[0, 2\pi]$  de l'oscillation entre les deux points miroirs le long des lignes de champ, et l'angle de rotation autour de la surface magnétique. Ces trois angles effectuent trois rotations dont les périodes respectives sont la période cyclotron :  $T_\mu$ . La période d'aller et retour entre les deux points miroirs le long des lignes de champ :  $T_J$ , et la période de rotation autour de la surface magnétique :  $T_\Phi$ .

$$T_\mu = \oint \frac{ds_c}{V_c} = \frac{2\pi}{\omega_c}, \quad T_J = 2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds_\parallel}{V_\parallel}, \quad T_\Phi = \oint \frac{ds_D}{V_D}$$

L'invariance de  $(\mu, J, \Phi)$  étant garantie sous la condition  $T_\mu \ll T_J \ll T_\Phi$ . Le contenu énergétique associé à l'intégrale d'action pour  $\mu$  est à la fois cinétique et magnétique, pour  $J$  il est principalement cinétique et pour  $\Phi$  essentiellement magnétique. L'invariant de flux est moins utile que les deux précédents, car son existence n'est garantie que pour les perturbations extrêmement lentes. Les situations réelles où il pourrait s'avérer utile pour la description du mouvement, sont souvent le siège d'une turbulence basse fréquence (préservant le premier et le deuxième invariant) à des fréquences plus petites que la fréquence cyclotron et la fréquence d'oscillation entre les points miroirs, mais de l'ordre de grandeur de la fréquence d'oscillation autour de la surface de dérive.

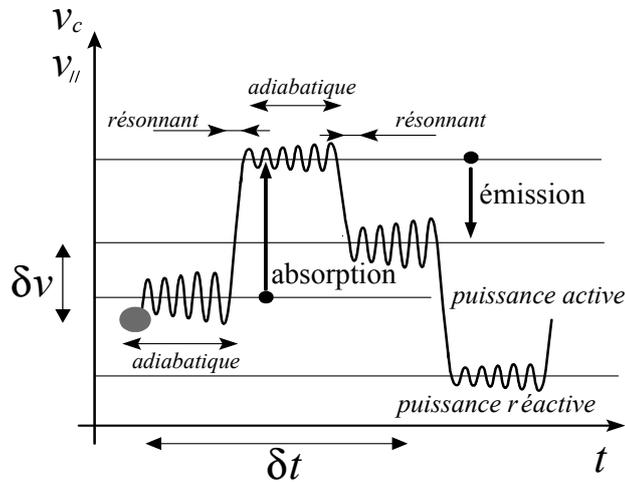


Une brisure de l'invariance adiabatique donne lieu à un transfert d'énergie du champ vers les particules. Dans le cas du premier invariant c'est par exemple le chauffage cyclotron et dans la cas du deuxième invariant le chauffage stochastique de Fermi.

Vitesse	Invariant	Définition	Période
$\mathbf{v}_c$	Moment magnétique : $\mu$	$\frac{m v_c^2}{2B}$	$T_\mu = \oint \frac{ds_c}{v_c}$
$\mathbf{v}_\parallel$	Longitudinal : $J$	$m \int_{s_1}^{s_2} v_\parallel ds$	$T_J = \oint \frac{ds_\parallel}{v_\parallel}$
$\mathbf{v}_D$	Flux : $\Phi$	$\frac{1}{2\pi} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	$T_\Phi = \oint \frac{ds_D}{v_D}$

### 7.4 Resonances and heating

Dans ce paragraphe nous allons étudier les principaux mécanismes d'absorption à l'œuvre dans les plasmas : (i) la résonance Landau, (ii) les résonances cyclotron et (iii) le bremsstrahlung inverse.



Nous considérerons l'évolution dans l'espace des vitesses comme un processus de diffusion, l'interaction onde-particule peut être vue comme une marche aléatoire dans l'espace des vitesses  $v_\parallel$  et  $v_c$ . Lorsque une particule cède une partie de son énergie cinétique à un champ oscillant le phénomène est un processus d'émission ; lorsque une particule gagne de l'énergie au détriment d'un champ oscillant c'est un processus d'absorption.

Ainsi, la théorie quasi-linéaire présentée ici doit être comprise comme le bilan macroscopique et basse fréquence, d'une dynamique microscopique markovienne haute fréquence du type marche aléatoire dans l'espace des vitesses :

Emission / Absorption / Emission / Emission / Absorption / Emission...

Cette vision est confortée par les simulations numériques représentées sur la figure ci-dessus : sous l'effet d'un spectre d'ondes une particule alterne des phases adiabatiques d'oscillations sans échange significatif d'énergie (puissance réactive) et des phases résonnantes (piégées) où l'échange est significatif (puissance active), la multiplicité des résonances et leurs proximités fait que le piégeage est transitoire.

Dans les annexes nous avons présenté l'équation de Fokker-Planck comme l'outil d'analyse des marches aléatoires. Nous allons étudier l'absorption sur la base de cette modélisation cinétique construite autour de

la fonction de distribution des vitesses  $f(\mathbf{v}, t)$  et considérer successivement les processus Landau et cyclotron puis bremsstrahlung inverse.

$$\begin{aligned}
 \text{Fokker-Planck} & : \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{x}_0}}{2\delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v}, t) \\
 \text{Landau} & : \frac{\partial f(v_{\parallel}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{\langle \delta v_{\parallel} \delta v_{\parallel} \rangle}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \\
 \text{Cyclotron} & : \frac{\partial f(v_c, t)}{\partial t} = \frac{1}{v_c} \frac{\partial}{\partial v_c} v_c \frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v_c} \\
 \text{Bremsstrahlung inverse} & : \frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\langle \delta v \delta v \rangle}{2\delta t} \frac{\partial}{\partial v} f(v, t)
 \end{aligned}$$

Soit une onde électrostatique longitudinale  $E_{\parallel} \cos(k_{\parallel} z - \omega t)$ , décrite par le potentiel électrostatique  $-\phi \sin(k_{\parallel} z - \omega t)$ , en interaction avec une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $e$ . L'équation de Newton pour chaque particule se réduit à la prise en compte de la force de Coulomb,  $v_{\parallel} = dz/dt$  et :

$$\text{Coulomb} : \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{e}{m} E_{\parallel} \cos(k_{\parallel} z - \omega t)$$

La phase relative initiale entre l'onde et la particule  $\varphi \equiv (k_{\parallel} z_0 - \omega t_0)$  n'est pas un paramètre de contrôle du problème : à un instant donné, dans un plasma, certaines particules se trouvent dans les zones de champ fort, d'autres dans les zones de champ faible, nous supposons donc que cette phase initiale  $\varphi$  entre l'onde et la particule est uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$  et nous prendrons la moyenne des quantités physiques sur  $\varphi$ , c'est-à-dire sur toutes les positions initiales accessibles  $z_0$ . La puissance transférée de l'onde vers la particule, par unité de volume, est définie par la relation :

$$w_L \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] = n \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{2} v_{\parallel}^2 f dv_{\parallel} \rightarrow w_L = -nm \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\parallel} \frac{\langle \delta v_{\parallel} \delta v_{\parallel} \rangle_{\varphi}}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} dv_{\parallel}$$

où nous avons intégré par partie pour faire apparaître le coefficient de diffusion et introduit  $n$  la densité volumique de particules. Conformément à l'hypothèse des phases aléatoires (RPA), calculons l'effet du champ électrique  $E_{\parallel}$  sur une particule de vitesse non perturbée  $v_{\parallel 0}$  et se trouvant en  $z_0$  à l'instant  $t_0 = 0$  lorsque l'interaction champ particule débute. Pour un petit temps  $\delta t$  l'orbite de la particule peut être représentée comme un développement en puissance de l'amplitude du champ :  $v_{\parallel} = v_{\parallel 0} + \delta v_{\parallel 1} + \delta v_{\parallel 2} + \dots$  et  $z = z_0 + v_{\parallel 0} t + \delta z_1 + \dots$

Le premier ordre est solution de l'équation :

$$\frac{d\delta v_{\parallel 1}}{dt} = \frac{e}{m} E_{\parallel} \cos(k_{\parallel} z - \omega t) \Big|_{z=z_0+v_{\parallel 0}t}, \quad \frac{d\delta z_1}{dt} = \delta v_{\parallel 1}$$

La solution de cette équation linéaire est donc la superposition de la translation uniforme initiale  $v_{\parallel 0}$  et d'une oscillation linéaire entretenue par le champ  $\delta v_{\parallel 1}$  :

$$\delta v_{\parallel 1}(v_{\parallel 0}, \delta t) = \frac{e}{m} \frac{E_{\parallel}}{k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega} [\sin[(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega) \delta t + \varphi] - \sin \varphi]$$

Cette solution met en évidence l'existence du phénomène de résonance de Landau, lorsque  $k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega = 0$  la perturbation induite par l'onde devient très grande et la méthode perturbative utilisée ici n'est plus valable. L'existence de cette résonance, qui traduit le fait que la particule subit un champ statique dans le repère propre de l'onde, est une des conditions d'apparition du chaos donc du caractère aléatoire des phases. Appliquons l'hypothèse des phases aléatoires (RPA) et considérons la moyenne de l'expression précédente sur la phase  $\varphi$  dont la probabilité est supposée uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$ . Le résultat est évidemment nul :  $\langle \delta v_{\parallel 1}(v_{\parallel 0}, \delta t) \rangle_{\varphi} = 0$ . Ce résultat est conforme à l'image physique de l'interaction onde-particule : un transfert cohérent d'impulsion dans une direction ne peut résulter (au premier ordre) de la superposition d'oscillations incohérentes. A l'ordre deux la variation de vitesse  $\delta v_{\parallel 2}$  est une conséquence du déplacement à l'ordre un  $\delta z_1$ .

$$\frac{d\delta v_{\parallel 2}}{dt} = -\frac{e}{m} E_{\parallel} \delta z_1 k_{\parallel} \sin[(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega) t + \varphi]$$

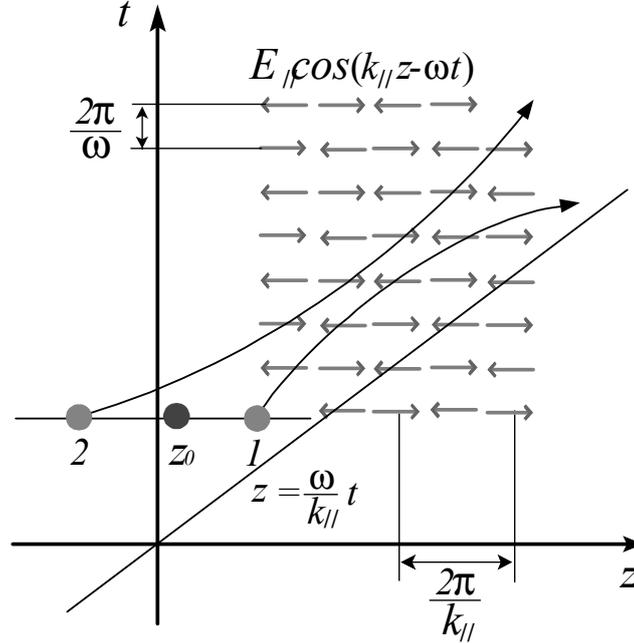
Le déplacement à l'ordre un  $\delta z_1$  est obtenu par intégration de la vitesse au même ordre.

$$\begin{aligned}
 \delta z_1(v_{\parallel 0}, \delta t) & = \frac{-eE_{\parallel}}{m(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega)^2} [\cos[(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega) \delta t + \varphi] + \cos \varphi] \\
 & \quad - \frac{eE_{\parallel}}{m(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega)} \delta t \sin \varphi
 \end{aligned}$$

Compte tenu des résultats précédents, il est aisé de vérifier l'identité :

$$\left\langle \frac{d\delta v_{\parallel 2}}{d\delta t}(v_{\parallel 0}, \delta t) \right\rangle_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel 0}} \cdot \left\langle \delta v_{\parallel 1}(v_{\parallel 0}, \delta t) \frac{d}{d\delta t} [\delta v_{\parallel 1}(v_{\parallel 0}, \delta t)] \right\rangle_{\varphi}$$

où la moyenne porte sur la phase aléatoire  $\varphi$ .



Ce dernier résultat peut être symétrisé et intégré par rapport au temps pour établir la relation  $\langle \delta v_{\parallel 2} \rangle_{\varphi} = \partial \langle \delta v_{\parallel 1} \delta v_{\parallel 1} \rangle_{\varphi} / 2 \partial v_{\parallel 0}$  ; cette relation entre la friction et la diffusion n'est autre que la relation d'Einstein. Evaluons à présent le coefficient  $\langle \delta v_{\parallel 1} \delta v_{\parallel 1} \rangle_{\varphi}$ .

$$\langle \delta v_{\parallel 1}(v_{\parallel 0}, \delta t) \delta v_{\parallel 1}(v_{\parallel 0}, \delta t) \rangle_{\varphi} = \frac{2e^2}{m^2} E_{\parallel}^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega}{2} \delta t \right)}{(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega)^2}$$

Cette dernière expression peut être simplifiée dans la limite où  $\delta t$  est petit devant l'échelle de temps de l'évolution cinétique et grand devant la période de l'onde  $\omega^{-1}$ , la limite  $\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)/x^2 \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \pi \delta(x)$  est alors légitime.

$$\frac{\langle \delta v_{\parallel} \delta v_{\parallel} \rangle_{\varphi}}{2\delta t} = \frac{\pi e^2 E_{\parallel}^2}{2 m^2} \delta(k_{\parallel} v_{\parallel 0} - \omega)$$

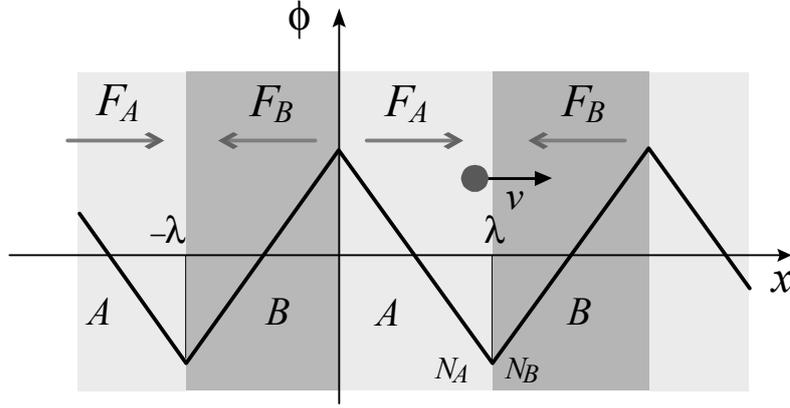
Le résultat final est donc donné par la formule classique due à Landau.

$$\text{Absorption Landau : } w_L \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] = -\pi \omega_p^2 \frac{\omega}{k_{\parallel}} \left. \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \right|_{\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{\varepsilon_0 E_{\parallel}^2}{2}$$

Sur le diagramme d'espace-temps nous avons tracé les trajectoires de particules de même vitesse initiale  $v_{\parallel 0}$ , seules les positions initiales  $z_0$ , c'est-à-dire les phases  $\varphi$ , diffèrent pour ces particules. Si  $k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega \ll 0$  ou  $k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega \gg 0$ , les particules sont en régime adiabatique et l'alternance d'accélération et de décélération se traduit par une oscillation de faible amplitude. Si  $k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega \approx 0$ , alors les particules et l'onde sont en synchronisme, l'effet de l'onde sur la particule est une accélération ou une décélération transitoirement synchronisées, particules 1 et 2 sur la figure. La vitesse évolue de façon significative pour ces particules résonnantes, le signe du transfert d'impulsion peut être positif ou négatif suivant les conditions initiales.

L'existence d'un transfert séculaire d'énergie-impulsion d'un champ de forces vers des particules lorsque ce champ est en moyenne, dans le temps et/ou l'espace, nul,  $\langle F(x, t) \rangle = 0$ , peut paraître surprenant. Un modèle de forces en dents de scie  $F_A - F_B - F_A - F_B - F_A - F_B - \dots$  permet d'éclairer ce paradoxe apparent.

Considérons une population de particules de densité  $n$ , initialement homogène. Cette population est soumise à l'influence d'une force périodique dans le temps et l'espace, se propageant à la vitesse  $\omega/k_{\parallel}$ , dont le potentiel  $\phi$  est représenté sur la figure ci-dessous. Dans le repère au repos de cette onde en dents de scie la périodicité spatiale est mesurée par la longueur  $\lambda = 2\pi/k_{\parallel}$  et les particules situées dans les zones A et B effectuent les déplacements  $\delta x_A = v\delta t + F_A \delta t^2 / 2m$ ,  $\delta x_B = v\delta t + F_B \delta t^2 / 2m$  durant un temps  $\delta t$ .



La densité est modifiée par ces déplacements, elle augmente dans les zones attractives et diminue dans les zones répulsives et le bilan dans les zones A et B, figure (8.14), est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{N_A(\delta t)}{n} &= \frac{\lambda - |\delta x_A| + |\delta x_B|}{\lambda} = 1 + \frac{F_B - F_A}{2m\lambda} \delta t^2 = 1 - \frac{F_A}{m\lambda} \delta t^2 \\ \frac{N_B(\delta t)}{n} &= \frac{\lambda + |\delta x_A| - |\delta x_B|}{\lambda} = 1 + \frac{F_A - F_B}{2m\lambda} \delta t^2 = 1 + \frac{F_A}{m\lambda} \delta t^2 \end{aligned}$$

Ce bilan a été effectué dans le repère au repos de l'onde mais il est indépendant du repère, par contre le bilan de puissance dépend du repère ; dans le repère du laboratoire les forces A et B développent une puissance  $w_{AB}$ .

$$\langle w_{AB} \rangle = \left[ N_A F_A \cdot \left( \frac{\omega}{k_{\parallel}} + v \right) + N_B F_B \cdot \left( \frac{\omega}{k_{\parallel}} + v \right) \right] \approx -2n \frac{F_A^2}{m} \frac{\omega}{k_{\parallel}} \delta t^2$$

Ainsi, bien que la force moyenne soit nulle,  $\langle \mathbf{F}(x, t) \rangle = \mathbf{0}$ , la puissance moyenne est non nulle  $\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle w \rangle \neq 0 \cdot E_{\perp}$ .

Considérons le cas des résonances cyclotrons, soit une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  plongée dans un champ magnétique statique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b}$  est un vecteur unitaire. Cette particule interagit avec un champ électrique  $E_{\perp} \cos(\omega t) \mathbf{e}_x - E_{\perp} \sin(\omega t) \mathbf{e}_y$  où  $x$  et  $y$  constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$ , système de coordonnées associé à la base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{b}]$ .

L'écriture de l'équation du mouvement de la particule se réduit à la prise en compte des forces électrique et magnétique. Afin d'étudier le phénomène de résonance cyclotronique introduisons la variable complexe  $\mathcal{V}$  :  $\mathbf{v}_c = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y \rightarrow \mathcal{V} = v_x + jv_y$ . La variable  $\mathcal{V}$  vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\text{Laplace/Coulomb} : \frac{d\mathcal{V}}{dt} + j\omega_c \mathcal{V} = \frac{eE_{\perp}}{m} \exp -j\omega t$$

Soit une population, électronique ou ionique, décrite par sa fonction de distribution du module de la vitesse cyclotronique  $f(v_c, t)$ , cette distribution étant normalisée à l'unité :  $\int f(v_c, t) 2\pi v_c dv_c = 1$ .

Cette population interagit avec un champ électrique de fréquence de l'ordre de grandeur de la fréquence cyclotronique, l'interaction onde-particules peut être vue comme une série : *émission / absorption / émission / absorption / émission / ...*. Cette série de processus peut être considérée comme une marche aléatoire dans l'espace des vitesses cyclotroniques et nous modélisons donc l'évolution de la distribution par une équation de Fokker-Planck.

L'observation d'une émission ou d'une absorption est déterminée par la phase initiale entre la rotation cyclotronique et la rotation du champ électrique. Introduisons  $n$  la densité de particules et  $w_c$  la densité de puissance déposée sur la population considérée.

$$w_c \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] = n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} 2\pi v_c \frac{mv_c^2}{2} f dv_c \rightarrow w_c = -n \int_0^{+\infty} 2\pi m v_c^2 \frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v_c} dv_c$$

L'évaluation du bilan de puissance se ramène donc au calcul du coefficient de diffusion  $\langle \delta v_c \delta v_c \rangle / 2\delta t$ . La solution de l'équation différentielle linéaire avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\mathcal{V}(t) = v_c \exp(-j\omega_c t) + \frac{eE_{\perp}}{m} \exp(-j\omega_c t) \int_0^t \exp(j\omega_c u) \exp(-j\omega u) du$$

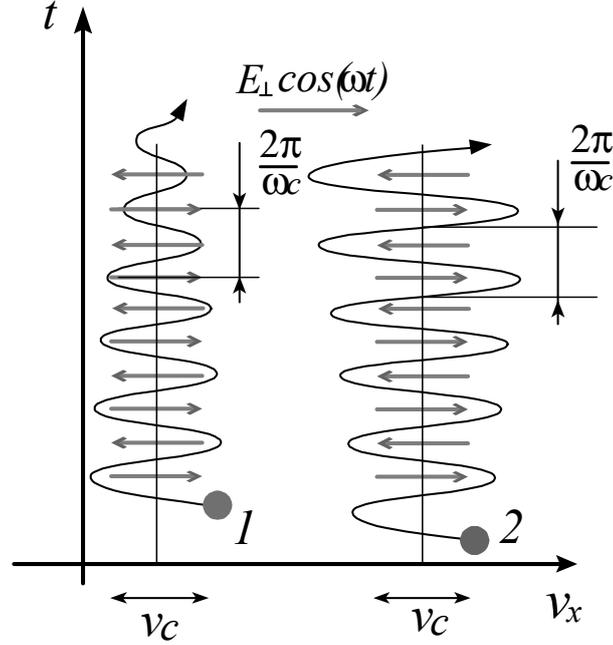
L'incrément de vitesse cyclotronique durant un temps  $\delta t$  peut être calculé suivant la variation du carré du module de la variable  $\mathcal{V}$  :  $\delta [v_c^2(v_c, \delta t)] = \text{Re}[\mathcal{V}(\delta t) \mathcal{V}^*(\delta t) - \mathcal{V}(0) \mathcal{V}^*(0)] / 2$ .

$$\frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{\delta t} = \frac{e^2 E_{\perp}^2}{4m^2} \frac{\sin^2 [(\omega_c - \omega) \delta t]}{\delta t (\omega_c - \omega)^2} \rightarrow \frac{\pi}{4} \frac{e^2 E_{\perp}^2}{m^2} \delta (\omega_c - \omega)$$

Nous avons négligé les termes quadratiques en  $E_{\perp}^2$  puis considéré le carré des termes linéaires, pour les temps longs devant l'échelle caractéristique de l'onde ( $\omega^{-1}$ ), la limite  $\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)/x^2|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \pi \delta(x)$  est légitime. Remarquons que, ici aussi, nous supposons l'existence d'une échelle de temps mésoscopique grande à l'échelle microscopique mais petite à l'échelle de l'évolution de  $f(v_c, t)$ .

$$w_c = -n \int_0^{+\infty} 2\pi m v_c^2 \frac{\pi e^2 E_{\perp}^2}{4 m^2} \delta(\omega_c - \omega) \frac{\partial f}{\partial v_c} dv_c = -n \frac{\pi e^2 E_{\perp}^2}{2 m} \delta(\omega_c - \omega)$$

Dans un tokamak le champ magnétique  $B$  n'est pas homogène et la résonance cyclotronique  $\omega = \omega_c$  apparaît de façon transitoire lorsque le mouvement du centre guide traverse la surface résonnante en  $\pm\theta_0$  et  $r_0$  conformément à la figure; ainsi nous devons moyenner le coefficient de diffusion précédent sur le mouvement périodique du centre guide.



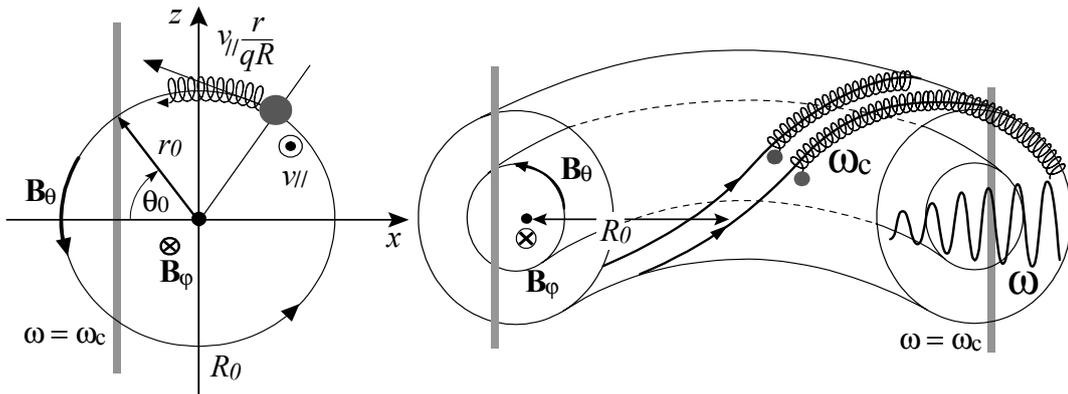
Nous sommes donc amenés à calculer  $\langle \delta(\omega - \omega_c) \rangle \equiv \oint \delta[\omega_c(\theta) - \omega] d\theta|_{r_0} / \oint d\theta$  où la moyenne doit être prise sur une rotation poloidale, rotation suivant laquelle la fréquence cyclotronique présente la variation périodique:  $\omega_c(\theta) = \omega_{c0} / (1 + r_0 \cos \theta / R_0)$ .

$$\delta \left[ \frac{\omega_{c0}}{1 + \frac{r_0}{R_0} \cos \pm \theta_0} - \frac{\omega_{c0}}{1 + \frac{r_0}{R_0} \cos \theta} \right] \Big|_{\frac{r_0}{R_0} \rightarrow 0} = \frac{R_0}{2\pi \omega_{c0} r_0} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{2^m T_m(\cos \theta_0)}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0}} \cos m\theta$$

où  $T_m$  sont les polynômes de Tchebichev:  $T_n(x) \equiv 2^{1-n} \cos(n \cos^{-1} x)$ . Ainsi nous pouvons calculer la puissance déposée à travers la résonance cyclotron sur chaque surface magnétique.

$$\text{Absorption cyclotron: } w_c \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] = -\frac{\omega_p^2 R_0}{\omega_c r_0} \frac{1}{|\sin \theta_0|_{\omega=\omega_c}} \frac{\varepsilon_0 E_{\perp}^2}{2}$$

Si la fréquence plasma est calculée à l'aide de la densité surfacique



de particules pour le dépôt de puissance nous obtenons une puissance par unité de surface sur chaque surface magnétique.

Lorsqu'un électron est soumis à l'influence d'un champ électrique oscillant  $-\mathbf{E} \sin(\omega t)$  et subit, en même temps, des collisions avec d'autres espèces, il se produit aussi un transfert irréversible d'énergie du champ vers l'électron, c'est le processus de bremsstrahlung inverse. Considérons un électron, de charge  $q$  et de masse  $m$ , soumis à l'influence d'un champ électrique oscillant et subissant des collisions aléatoires. La figure illustre son comportement : la trajectoire est la combinaison d'une translation uniforme interrompue par les collisions et d'une oscillation de vitesse  $q\mathbf{E} \cos(\omega t)/m\omega$ . Les collisions ré-initialisent le mouvement de translation de façon aléatoire, ainsi la série :

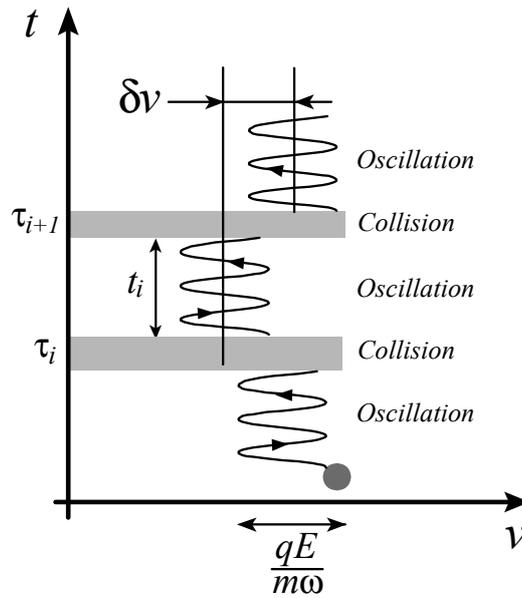
oscillation + translation / collision / oscillation + translation / collision / ...

peut être considérée comme un marche aléatoire dans l'espace des vitesses repérant le mouvement. Les gains et pertes d'énergie de la particule sont autant de pertes et gains d'énergie pour le champ, la dynamique de l'électron est donc du type :

émission / absorption / émission / émission / absorption / émission / ...

et peut être modélisée par une équation de Fokker-Planck, la seule différence avec le cas précédent et de nature géométrique car l'espace des vitesses est ici de dimension trois et nous considérons l'évolution de la fonction de distribution du module de la vitesse  $f(v, t)$ .

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\langle \delta v \delta v \rangle}{2\delta t} \frac{\partial}{\partial v} f(v, t)$$



La puissance transférée de l'onde vers la particule, par unité de volume, est donnée par :

$$\langle w \rangle \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] = n \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{2} v^2 f(v) 4\pi v^2 dv \rightarrow \langle w \rangle = -nm \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\langle \delta v \delta v \rangle_{x_0}}{2\delta t} \frac{\partial f}{\partial v} 4\pi v^2 dv$$

La probabilité qu'un électron ne subisse aucune collision durant un temps  $\tau$  et subisse une collision à l'issue de ce temps  $\tau$ , durant l'intervalle  $d\tau$ , est donnée par :  $dP(\tau)/d\tau = \nu_1 \exp(-\nu_1\tau)$  où  $\nu_1(v) = n_n v \sigma_1(v)$  est la fréquence de transfert d'impulsion.

L'équation de Newton en présence de collisions devient donc :  $d\mathbf{v}/dt = -q\mathbf{E} \sin(\omega t) + \sum_n \delta(t - \tau_n) \delta\mathbf{v}_n$ , où  $\tau_n$  sont les instants (aléatoires) de collisions. Afin de calculer le coefficient de diffusion  $\langle \delta v \delta v \rangle / 2\delta t$  étudions la dynamique d'un électron entre les instants  $t_0$  et  $t$  en l'absence de collision, supposons que l'électron vient juste de subir une collision à l'instant  $t_0$  et possède après cette collision la vitesse  $\mathbf{v}(t_0)$ . En l'absence de collision la vitesse à un instant ultérieur  $t$  est donc donnée par :

$$\mathbf{v}(t) = \underbrace{\mathbf{v}(t_0)}_{\text{oscillation}} + \underbrace{\frac{q}{m\omega} \mathbf{E} [\cos(\omega t) - \cos(\omega t_0)]}_{\text{translation}}$$

On introduit l'incrément de vitesse:  $\delta\mathbf{v}(t, t_0) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0)$ , compte tenu de l'identité:  $\cos a - \cos b = -2 \sin(a + b/2) \sin(a - b/2)$ , l'incrément de vitesse entre deux collisions s'exprime donc comme:

$$\delta\mathbf{v} = \frac{2q}{m\omega} \mathbf{E} \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \sin\left(\omega \frac{\tau}{2} + t_0\right)$$

où  $\tau = t - t_0$ . La moyenne de cet incrément sur le temps initial  $t_0$ , uniformément distribué, est nulle:  $\langle \delta\mathbf{v} \rangle_{t_0} = \mathbf{0}$ ; par contre, la moyenne de son carré, prise sur l'instant de la dernière collision  $t_0$ ,  $\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle_{t_0}$ , est non nulle et ce dernier résultat pris en moyenne sur la durée entre deux collisions,  $\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle_{\tau, t_0}$ , avec la distribution de probabilité  $\nu_1 \exp(-\nu_1 \tau)$ :

$$\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle_{t_0} = \frac{2q^2 E^2}{m^2 \omega^2} \left[ \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \right]^2 \rightarrow \frac{\langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle_{\tau, t_0}}{\delta t} = \frac{\frac{2q^2 E^2}{m^2 \omega^2} \int_0^{+\infty} \exp(-\nu_1 \tau) \left[ \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \right]^2 d\tau}{\int_0^{+\infty} \tau \exp(-\nu_1 \tau) d\tau}$$

permet d'évaluer l'incrément moyen d'énergie pendant une durée mésoscopique. Ainsi le coefficient de diffusion  $\langle \delta v \delta v \rangle = \langle \delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \rangle / 3$  peut être calculé et le résultat final est:

$$\frac{\langle \delta v \delta v \rangle}{\delta t} = \frac{q^2 E^2}{3m^2} \frac{\nu_1(v)}{\nu_1^2(v) + \omega^2}$$

Comme pour le cas de l'absorption Landau, le coefficient de diffusion dans l'espace des vitesses est proportionnel au carré du champ et dépend de la vitesse.

$$\text{Bremsstrahlung inverse: } w_b \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] = -n \frac{q^2 E^2}{6m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_1(v)}{\nu_1^2(v) + \omega^2} v \frac{\partial f}{\partial v} 4\pi v^2 dv$$

Pour certaines fonctions de distribution, le signe du transfert de puissance peut être inversé, c'est le phénomène d'émission bremsstrahlung stimulée.

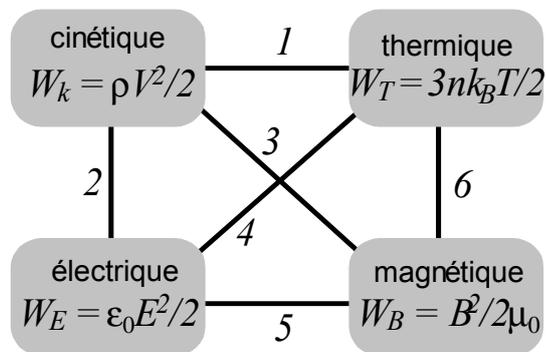
Mécanisme d'interaction	Puissance absorbée $-w_L \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$
Landau	$\omega_p^2 \frac{\varepsilon_0 E_{\parallel}^2}{2} \frac{\pi \omega}{k_{\parallel}} \frac{\partial f}{k_{\parallel} \partial v} \Big _{\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}}$
Cyclotron	$\omega_p^2 \frac{\varepsilon_0 E_{\perp}^2}{2} \frac{R_0}{\omega_c r_0} \frac{1}{ \sin \theta_0 } \Big _{\omega = \omega_c}$
Bremsstrahlung inverse	$\omega_p^2 \frac{\varepsilon_0 E^2}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_1(v)}{\nu_1^2(v) + \omega^2} v \frac{\partial f}{\partial v} 4\pi v^2 dv$

# Chapitre 8

## Waves and Instabilities

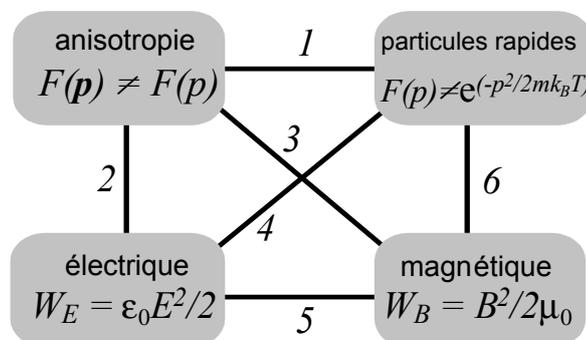
Au sein d'un plasma l'énergie se présente sous 4 formes :

- la densité d'énergie cinétique macroscopique de l'écoulement  $W_k \left[ \frac{W}{m^2} \right]$  si le plasma n'est pas au repos d'un point de vue hydrodynamique,
- la densité d'énergie cinétique microscopique d'agitation thermique des électrons et ions  $W_T \left[ \frac{W}{m^2} \right]$ ,
- la densité d'énergie électrique  $W_E \left[ \frac{W}{m^2} \right]$ ,
- la densité d'énergie magnétique  $W_B \left[ \frac{W}{m^2} \right]$ .



Les couplages induisent des échanges entre ce 4 formes, par exemple l'échange oscillant (2)  $W_k \rightleftharpoons W_E$  n'est autre que l'oscillation plasmon, l'échange oscillant (3)  $W_k \rightleftharpoons W_B$  n'est autre que l'onde d'Alfvén, l'échange (1)  $W_k \rightleftharpoons W_T$  que la détente dans le vide d'un plasma chaud... Une première manifestation de ces échanges est donc l'existence d'ondes et d'oscillations. Les instabilité constitue une deuxième manifestation de ces échanges, en effet si ces densité d'énergie présente un gradient  $\nabla W \neq \mathbf{0}$ , alors le plasma présente une densité volumique de forces et il n'est pas à l'équilibre. Ces forces induisent une dynamique d'échanges pour restaurer l'équilibre  $\nabla W = \mathbf{0}$ , la phase linéaire de cette dynamique est caractérisée par le taux de croissance de l'instabilité.

L'écart à l'homogénéité des densités d'énergie  $W$  n'est pas la seule source d'instabilité dans un plasma. Au niveau cinétique si le fonctions de distribution des vitesses ne sont pas des maxwelliennes isotropes centrées sur la vitesse nulle, différent couplages autorisent la croissance d'instabilités tendant à ramener la distributions des vitesses vers une maxwellienne isotrope.



Par exemple le couplage (3) n'est autre que l'instabilité de Weibel, le couplage (4) que l'instabilité faisceau-plasma...

Dans ce chapitre nous allons présenter les ondes dites fluides et quelques instabilité très répandues dans les plasmas thermonucléaires.

## 8.1 Plasma waves

Si la vitesse de phase de l'onde est supérieure à la vitesse thermique des particules et si la fréquence de l'onde est différente des fréquences de résonances hybrides et cyclotrons, alors il est pertinent de considérer le plasma comme froid et d'utiliser une forme asymptotique du tenseur  $\tilde{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})$ . Cette approximation correspond à un régime d'interaction adiabatique entre champs et particules. Dans un deuxième temps, au voisinage des résonances cyclotrons et Landau, les corrections thermiques au tenseur adiabatique doivent être prises en compte pour comprendre la dynamique de l'onde et son couplage résonnant au plasma. Ce paragraphe est consacré au développement de la théorie des ondes électromagnétiques hautes fréquences en régime adiabatique dans les plasmas magnétisés. Les trois équations de base du modèle fluide des ondes sont les équations de (i) Maxwell-Ampère et (ii) Maxwell-Faraday ainsi que (iii) l'équation de Newton linéarisée qui est équivalente à l'équation d'Euler linéarisée si nous négligeons les effets de la compressibilité.

$$\begin{aligned} \text{Maxwell-Faraday} & : \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \text{Maxwell-Ampère} & : \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_e - \mathbf{J}_i \\ \text{Newton} & : m_{e,i} \frac{d\mathbf{v}_{e,i}}{dt} = q\mathbf{E} + q_{ei}\mathbf{v}_{e,i} \times \mathbf{B}_0 \end{aligned}$$

où  $\mathbf{B}_0$  est le champ magnétique statique confinant et  $\mathbf{J} \equiv nq\mathbf{v}$  le courant haute fréquence associé à l'onde. Ce système linéarisé admet des solutions harmoniques suivant le temps et l'espace  $\sim \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  pour les champs  $\mathbf{E} \exp j[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$  et  $\mathbf{H} \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  et pour les courants  $\mathbf{J}_e \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  et  $\mathbf{J}_i \exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . Ainsi, l'ensemble des équations régissant les comportements du champ et des populations ionique et électronique se réduit à un système algébrique linéaire homogène.

$$\begin{aligned} \text{Faraday} & : \omega \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ \text{Ampère} & : \omega \epsilon_0 \mathbf{E} = -\mathbf{k} \times \mathbf{H} + j\mathbf{J}_e + j\mathbf{J}_i \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\text{Newton} : \mathbf{J}_e = \frac{\omega_{pe}^2}{j\omega} \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\omega_{ce}}{j\omega} \mathbf{J}_e \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{J}_i = \frac{\omega_{pi}^2}{j\omega} \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\omega_{ci}}{j\omega} \mathbf{J}_i \times \mathbf{b} \quad (8.2)$$

où  $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$ . Les équations (8.1) d'inconnues  $\mathbf{J}_e$  et  $\mathbf{J}_i$  peuvent être résolues en considérant la solution de l'équation algébrique linéaire d'inconnue  $\mathbf{x}$  suivante :

$$\mathbf{x} + \alpha \mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{c}}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

c'est-à-dire  $\mathbf{x} + \alpha \mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{x} = 1 [\mathbf{I} + \alpha \mathbf{b} \times + \alpha^2 \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot] \mathbf{c} / (1 + \alpha^2)$  puis en appliquant ce résultat général au cas des courants électronique et ionique (8.1).

$$\mathbf{J} = -j\omega \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \left[ \mathbf{I} + j \frac{\omega_c}{\omega} \mathbf{b} \times - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \right] \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (8.3)$$

La permittivité diélectrique  $\epsilon$  en régime adiabatique est donc indépendante de  $\mathbf{k}$  mais présente une dispersion temporelle.

$$\epsilon(\omega) \equiv \mathbf{I} - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2} \left( \mathbf{I} + j \frac{\omega_{cs}}{\omega} \mathbf{b} \times - \frac{\omega_{cs}^2}{\omega^2} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \right) = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & -j\epsilon_{\times} & 0 \\ j\epsilon_{\times} & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

où nous avons utilisé la relation de définition de la permittivité :  $\mathbf{J} \equiv -j\omega [\mathbf{I} - \epsilon] \epsilon_0 \mathbf{E}$ .

Dans un premier temps restreignons l'analyse aux modes hautes fréquences et aux propagations strictement perpendiculaire et strictement parallèle au champ confinant  $\mathbf{B}_0$  où seule la population électronique est mise en mouvement par le champ électrique  $\mathbf{E}$ , les ions de par leur inertie seront supposés rester au repos. L'axe des  $z$  étant aligné suivant la direction du champ magnétique  $\mathbf{b}$  les éléments du tenseur diélectrique  $\epsilon(\omega)$  sont donnés par :

$$\epsilon_{\parallel e} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_{\perp e} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}, \quad \epsilon_{\times e} = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \quad (8.4)$$

Dans un tokamak l'usage est de définir et d'utiliser l'indice de l'onde  $\mathbf{N}$ .

$$\text{Indice} : \boxed{\mathbf{N} \equiv \frac{c}{\omega} \mathbf{k}} \rightarrow N_{\parallel} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}, \quad N_{\perp} = |\mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}| \quad (8.5)$$

Lorsque l'indice  $N$  s'annule pour une fréquence non nulle,  $N(\omega) = 0$ , on introduit la dénomination de fréquence (pulsation) de coupure  $\omega = \omega_{\text{coupure}}$ . Lorsque l'indice  $N$  devient infini pour une fréquence finie,  $N(\omega) \rightarrow \infty$ , on introduit la dénomination de fréquence (pulsation) de résonance  $\omega = \omega_{\text{résonance}}$ . Les processus physiques associés à ces deux singularités seront discutés dans le prochain paragraphe.

L'élimination du champ magnétique  $\mathbf{H}$  et du courant  $\mathbf{J}$  entre les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère permet d'exprimer le champ électrique comme solution de l'équation linéaire homogène :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\omega^2}{c^2} [\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \cdot \mathbf{E}] = \mathbf{0} \rightarrow D \equiv \det \left( \frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{D} \right) = 0$$

où nous avons défini le tenseur de dispersion  $\mathbf{D}(\mathbf{N}, \omega)$  et l'équation de dispersion  $D(\mathbf{N}, \omega) = 0$ . Distinguons la propagation perpendiculaire au champ statique et la propagation parallèle à ce champ et commençons par l'étude du premier cas.

Considérons le tenseur de dispersion  $\mathbf{D}$  sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$  telle que  $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0 = [0, 0, 1]$  et  $\mathbf{N} = [N_\perp, 0, 0]$ , les conditions de propagation dans la direction perpendiculaire au champ s'établissent alors simplement comme l'annulation du déterminant  $D$ .

$$D = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp e} & -j\varepsilon_{\times e} & 0 \\ j\varepsilon_{\times e} & \varepsilon_{\perp e} - N_\perp^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel e} - N_\perp^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{\perp e} N_\perp^2 &= \varepsilon_{\perp e}^2 - \varepsilon_{\times e}^2 \\ N_\perp^2 &= \varepsilon_{\parallel e} \end{aligned}$$

L'étude des racines de cette équation conduit à l'identification de deux modes : le mode ordinaire ( $O$ ) et le mode extraordinaire ( $X$ ).

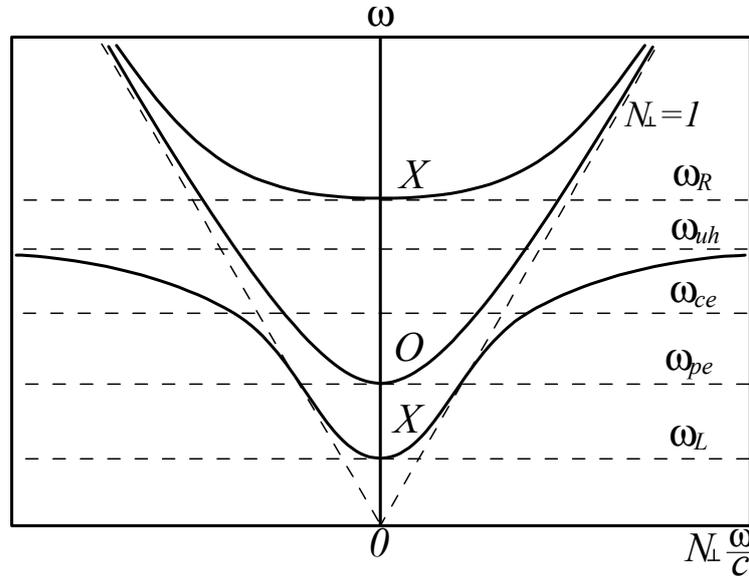


Fig. 8.2 : Modes fluides haute fréquence ordinaire et extraordinaire.

La solution de l'équation réduite :  $\varepsilon_{\parallel e} - N_\perp^2 = 0$  constitue le mode  $O$  qui possède une polarisation droite parallèle au champ magnétique statique  $\mathbf{B}_0$  :  $\mathbf{E} = [0, 0, E_z \neq 0]$ . La dispersion du mode  $O$  est similaire à la dispersion des ondes transverses au sein d'un plasma isotrope, elle présente une coupure pour  $\omega = \omega_p$ , figure (8.2).

$$O : \boxed{N_\perp = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}} \quad (8.6)$$

Le mode  $X$ , solution de  $\varepsilon_{\perp e} N_\perp^2 = \varepsilon_{\perp e}^2 - \varepsilon_{\times e}^2$ , présente une polarisation elliptique :  $\mathbf{E} = [E_x \neq 0, E_y \neq 0, 0]$ . La dispersion du mode  $X$  possède deux coupures en dessous desquelles il est évanescent, la coupure droite  $\omega_R$  et la coupure gauche  $\omega_L$ .

Coupure plasma : $\varepsilon_{\parallel e} = 0$	$\omega_P = \omega_{pe}$
Coupure droite : $\varepsilon_{\perp e} = -\varepsilon_{\times e}$	$\omega_R \equiv \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{\perp e}^2}{4} + \frac{\omega_{ce}}{2}}$
Coupure gauche : $\varepsilon_{\perp e} = \varepsilon_{\times e}$	$\omega_L \equiv \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\omega_{\perp e}^2}{4} - \frac{\omega_{ce}}{2}}$

On notera la relation :  $\omega_L \omega_R = \omega_{pe}^2$ . La relation de dispersion du mode  $X$  est représentée sur la figure (8.2), elle s'exprime en fonction des fréquences de coupure et résonance comme :

$$X : \boxed{N_\perp = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{uh}^2)}}} \quad (8.7)$$

Considérons la propagation parallèlement au champ magnétique statique et projetons le tenseur de dispersion sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$  telle que :  $\mathbf{b} = [0, 0, 1]$  et  $\mathbf{N} = [0, 0, N_{\parallel}]$ .

$$D = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp e} - N_{\parallel}^2 & -j\varepsilon_{\times e} & 0 \\ j\varepsilon_{\times e} & \varepsilon_{\perp e} - N_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel e} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp e} \pm \varepsilon_{\times e} \\ \varepsilon_{\parallel e} = 0 \end{cases}$$

Trois branches de propagations sont racines de cette équation. La première branche  $\varepsilon_{\parallel e}(\omega) = 0 \rightarrow \omega = \omega_p$  et  $\mathbf{E} = [0, 0, E_z \neq 0]$  n'est autre que les oscillations plasma de Langmuir déjà étudiées et dont la relation (??) prend en compte les corrections de compressibilité.

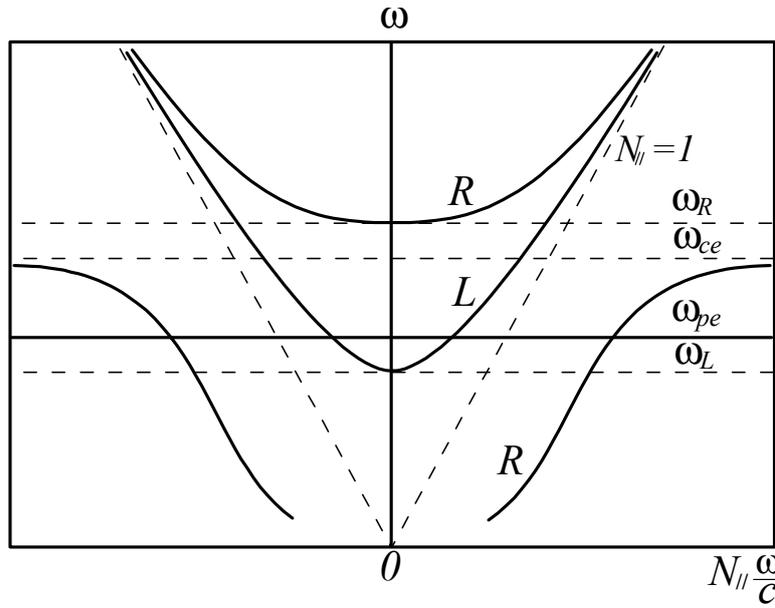


Fig. 8.3 : Modes fluides haute fréquence droit et gauche.

Les deux modes transverses solutions de  $N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp e} \pm \varepsilon_{\times e}$  sont le mode gauche ou  $L$  (pour left) et le mode droit ou  $R$  (pour right); ils présentent tous deux une polarisation circulaire. Les modes  $R$  et  $L$  présentent deux coupures en dessous desquelles ils sont évanescents, la coupure droite  $\omega_R$  et la coupure gauche  $\omega_L$ . Les dispersions des modes  $L$  et  $R$  sont représentées sur la figure (8.3) et sont données par les relations :

$$L : N_{\parallel} = \sqrt{\frac{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)}{\omega(\omega + \omega_{ce})}}, \quad R : N_{\parallel} = \sqrt{\frac{(\omega + \omega_L)(\omega - \omega_R)}{\omega(\omega - \omega_{ce})}}$$

Le mode  $R$  présente une résonance car il tourne dans le sens des orbites cyclotroniques électroniques illustrées sur la figure (8.4),  $E_x/E_y = j$ , et le mode  $L$  tourne dans le sens indirect,  $E_x/E_y = -j$ , associé aux orbites ioniques; la résonance ionique n'apparaît pas ici car nous n'avons pas pris en compte la réponse ionique dans l'écriture du tenseur diélectrique  $\varepsilon$ . Les conclusions qui viennent d'être établies ne sont pas valables à basse fréquence car le mouvement des ions doit être pris en compte, cette prise en compte peut sembler surprenante car l'ordering de masse n'est pas fonction de la fréquence, mais dans un champ magnétique la dynamique est plus subtile qu'un simple ordering de masses, en particulier nous avons vu que la dérive de polarisation des ions (??) est plus importante que celle des électrons, aussi est-il nécessaire d'inclure la dynamique ionique pour valider les conclusions précédentes ou les corriger. Les éléments du tenseur diélectrique modifiés pour prendre en compte la polarisation ionique sont :

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}, \quad \varepsilon_{\times} = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \quad (8.8)$$

En propagation parallèle aux lignes de champ ( $\mathbf{b} = [0, 0, 1]$  et  $\mathbf{N} = [0, 0, N_{\parallel}]$ ) les relations de dispersion des modes  $L$  et  $R$  sont obtenues en annulant le déterminant du système linéaire  $D = 0$ :  $N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp} \pm \varepsilon_{\times}$ . Ainsi, les fréquences de coupures droite et gauche sont faiblement modifiées:  $\omega_{R/L} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2/4 + \omega_{ce}\omega_{ci} \pm \omega_{ce}/2}$ . Les relations de dispersions présentent une nouvelle résonance ionique pour le mode  $L$  comme le sens de rotation cyclotronique des ions est indirect (sens des aiguilles d'une montre). La forme finale des dispersions parallèles prenant en compte les deux populations,  $D = 0 \rightarrow N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp} \pm \varepsilon_{\times}$ , est représentée sur la figure (8.5) et est

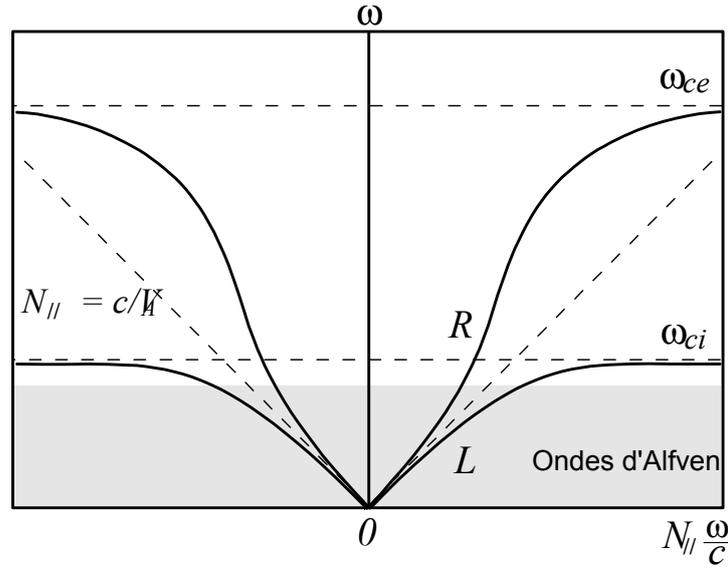


Figure 8.1: Fig. 8.5 : Modes fluides basses fréquences droit et gauche.

donnée par les relations explicites :

$$L : N_{\parallel} = \sqrt{\frac{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)}{(\omega + \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})}} \quad (8.9)$$

$$R : N_{\parallel} = \sqrt{\frac{(\omega + \omega_L)(\omega - \omega_R)}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})}} \quad (8.10)$$

Une nouvelle branche  $L$  apparaît donc à basse fréquence et se confond avec la branche  $R$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , les deux branches convergent vers le mode dit d'Alfvén torsionnel. L'inertie ionique,  $O[\omega_{ci}^{-1}] \sim O[m_i]$ , lève la dégénérescence entre les polarisations  $L$  et  $R$  de ce mode d'Alfvén :  $\omega \rightarrow 0 \rightarrow N_{\parallel L}/N_{\parallel R} = \sqrt{1 + \omega/\omega_{ci}}/\sqrt{1 - \omega/\omega_{ci}}$ . Le régime basse fréquence des modes se propageant perpendiculairement au champ magnétique ( $\mathbf{b} = [0, 0, 1]$ ),  $\mathbf{N} = [N_{\perp}, 0, 0]$  présente la même relation de dispersion, le mode  $O$  n'est pas modifié et pour le mode  $X$  :  $D = 0 \rightarrow \varepsilon_{\perp} N_{\perp}^2 = \varepsilon_{\perp}^2 - \varepsilon_X^2$  ; une nouvelle résonance apparaît et est représentée sur la figure (8.5), la résonance hybride basse  $\omega_{lh}$ .

$$X : N_{\perp} = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{lh}^2)(\omega^2 - \omega_{uh}^2)}} \quad (8.11)$$

Dans le paragraphe consacré à l'identification des résonances hybrides nous avons noté la relation  $\omega_{uh}^2 \omega_{lh}^2 = \omega_{ce}^2 \omega_{ci}^2 + \omega_{pe}^2 \omega_{ci}^2 + \omega_{ce}^2 \omega_{pi}^2 \approx \omega_{ce}^2 \omega_{pi}^2$  et nous venons de voir que  $\omega_L \omega_R = \omega_{pe}^2$  ; ainsi, si nous considérons la limite asymptotique  $\omega \rightarrow 0$  les trois relations de dispersions des modes  $L$ ,  $R$  et  $X$  (8.9), (8.10) et (8.11) se confondent avec la branche MHD associée au mode d'Alfvén  $N = c/V_A$ .

Torsionnel $L$	$N_{\parallel}^2 = \frac{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)}{(\omega + \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega_L \omega_R}{\omega_{ce} \omega_{ci}} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce} \omega_{ci}} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} = \frac{c^2}{V_A^2}$
Torsionnel $R$	$N_{\parallel}^2 = \frac{(\omega + \omega_L)(\omega - \omega_R)}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega_L \omega_R}{\omega_{ce} \omega_{ci}} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce} \omega_{ci}} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} = \frac{c^2}{V_A^2}$
Compressionnel	$N_{\perp}^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{lh}^2)(\omega^2 - \omega_{uh}^2)} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega_L^2 \omega_R^2}{\omega_{uh}^2 \omega_{lh}^2} \approx \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_{ce}^2 \omega_{pi}^2} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} = \frac{c^2}{V_A^2}$

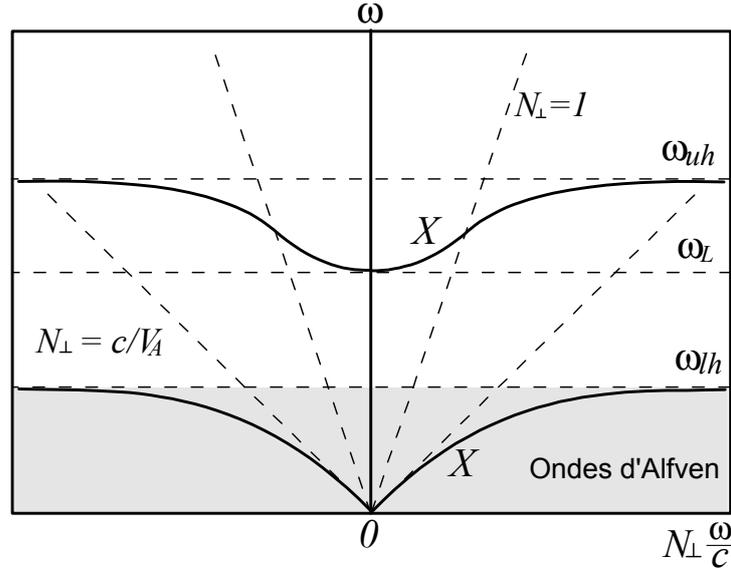


Fig. 8.5 : Modes fluides basses fréquences extraordinaire.

Jusqu'à présent, nous avons étudié et analysé les modes électroniques et ioniques se propageant le long et perpendiculairement au champ magnétique statique  $\mathbf{B}_0$ . L'étude des ondes dans les plasmas magnétisés sous incidence quelconque par rapport à la direction de référence du champ magnétique se conduit de façon similaire à travers l'identification des différentes branches solutions de l'équation de dispersion  $D(N_\perp, N_\parallel, \omega) = 0$ .

## 8.2 Cut-off and resonances

Pour une onde d'indice  $\mathbf{N} = [N_\perp, 0, N_\parallel] = [N \sin \theta, 0, N \cos \theta]$  la recherche des solutions du système linéarisé décrivant la dynamique des champs et des particules se réduit à la recherche des racines de l'équation algébrique  $D = 0$ .

$$D = \begin{vmatrix} \varepsilon_\perp - N_\parallel^2 & -j\varepsilon_\times & N_\perp N_\parallel \\ j\varepsilon_\times & \varepsilon_\perp - N_\parallel^2 - N_\perp^2 & 0 \\ N_\perp N_\parallel & 0 & \varepsilon_\parallel - N_\perp^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.12)$$

Ce problème de dispersion présente trois inconnues  $N_\perp$ ,  $N_\parallel$  et  $\omega$  et l'équation de dispersion  $D(N_\perp, N_\parallel, \omega) = 0$  est de nature scalaire, aussi il est seulement possible d'exprimer l'une des trois inconnues en fonction des deux autres et des paramètres du plasma. Dans le contexte de l'étude des ondes dans les plasmas thermonucléaires la pulsation  $\omega$  constitue une donnée fixée par le générateur radiofréquence (ou micro-onde) et l'équation de dispersion est de nature quadratique quelque soit le choix de l'inconnue associée à l'indice  $N_\perp$ ,  $N_\parallel$  où  $N = \sqrt{N_\perp^2 + N_\parallel^2}$ . Introduisons trois jeux de trois coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ ; alors la relation de dispersion  $D = 0$  conduit à l'étude de trois équations bicarrées :

$$\begin{aligned} D(N_\perp, N_\parallel, \omega) = 0 &\rightarrow aN^4 - bN^2 + c = 0 \rightarrow N(\theta, \omega) \\ D(N_\perp, N_\parallel, \omega) = 0 &\rightarrow aN_\parallel^4 - bN_\parallel^2 + c = 0 \rightarrow N_\parallel(N_\perp, \omega) \\ D(N_\perp, N_\parallel, \omega) = 0 &\rightarrow aN_\perp^4 - bN_\perp^2 + c = 0 \rightarrow N_\perp(N_\parallel, \omega) \end{aligned}$$

Pour les deux premiers cas les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont donnés dans le tableau ci-dessous.

$D$	$aN^4 - bN^2 + c = 0$	$aN_\parallel^4 - bN_\parallel^2 + c = 0$
$a$	$\varepsilon_\perp \sin^2 \theta + \varepsilon_\parallel \cos^2 \theta$	$\varepsilon_\parallel$
$b$	$\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel (1 + \cos^2 \theta) + (\varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_\times^2) \sin^2 \theta$	$2\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp - N_\perp^2 (\varepsilon_\perp + \varepsilon_\parallel)$
$c$	$\varepsilon_\parallel (\varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_\times^2)$	$(\varepsilon_\perp N_\perp^2 - \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\times^2) (N_\perp^2 - \varepsilon_\parallel)$

Dans un tokamak les ondes destinées au chauffage sont lancées depuis la périphérie du plasma (i) à une fréquence  $\omega/2\pi$  fixée par le générateur et (ii) suivant un vecteur d'onde partiellement fixé par la géométrie de la structure de couplage. La direction toroïdale étant sensiblement identique à la direction parallèle au champ la composante  $N_\parallel$  évolue peu au cours de la propagation vers le centre du plasma car les variations des densités et du champ magnétique statique, qui déterminent les variations d'indice, sont principalement radiale et poloïdale ( $\varepsilon_\parallel$ ,  $\varepsilon_\perp$  et  $\varepsilon_\times$  sont fonctions de  $r$  et  $\theta$  mais ne dépendent pas de  $\varphi$ ). La loi de Descartes implique

la constance de  $N_{\parallel}$ . L'analyse de la propagation des ondes électromagnétiques dans un tokamak nécessite donc l'étude de la relation de dispersion  $D(N_{\perp}, N_{\parallel}, \omega) = 0$  considérée comme une équation d'inconnue  $N_{\perp}$ .

$$\begin{array}{c}
 \overline{\overline{D}} \quad \overline{\overline{aN_{\perp}^4 - bN_{\perp}^2 + c = 0}} \\
 \overline{a} \quad \varepsilon_{\perp} \\
 \overline{b} \quad (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) (\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2) - \varepsilon_{\times}^2 \\
 \overline{c} \quad \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2)^2 - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\times}^2
 \end{array} \quad (8.13)$$

Suivons la trajectoire d'un paquet d'ondes dans le plan de section poloidale, le vecteur d'onde perpendiculaire, c'est-à-dire l'indice perpendiculaire  $N_{\perp}$ , évolue car la densité et le champ magnétique ne sont pas uniformes. Soit  $(r, \theta)$  un paramétrage de la trajectoire de ce paquet d'ondes dans le plan poloidal, pour un couple  $(\omega, N_{\parallel})$  fixé par le générateur et l'antenne, l'indice perpendiculaire est donc fonction de la position  $N_{\perp}(\omega, N_{\parallel}, r, \theta)$ . Les points où l'indice  $N_{\perp}(r, \theta)$  s'annule définissent les *coupures* et des points où il devient infini les *résonances*. Au voisinage d'une coupure l'onde devient évanescence et est réfléchi, au voisinage d'une résonance l'onde est quasi-électrostatique et est absorbée ou convertie.

	Résonances $a = 0 \rightarrow N_{\perp} = \infty$	Coupures $c = 0 \rightarrow N_{\perp} = 0$
<b>k</b>	$k = +\infty$	$k = 0$
<b>H, E</b>	$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\mathbf{H} = \mathbf{0}$
Phénomènes	Onde amortie, absorption, conversion	Onde évanescence, réflexion
Direction	$\tan^2 \theta = -\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}, \omega_{c,UH,LH}$	Toutes directions, $\omega_{pe,R,L}$
Puissance	<i>Localisation de puissance réactive</i>	<i>Conversion de puissance active</i>

Ainsi, pour une fréquence fixée par le générateur et un indice parallèle imposée par la structure de couplage, tout l'art du chauffage des plasmas thermonucléaires consiste à identifier les résonances  $N_{\perp} = \infty$  et les coupures  $N_{\perp} = 0$  pour évaluer la possibilité d'atteindre une zone centrale où une forte absorption est attendue, on qualifie cette analyse d'étude de *l'accessibilité* de l'onde.

Le modèle le plus simple permettant d'évaluer l'accessibilité d'une onde consiste à négliger les variations poloidales de l'amplitude du champ magnétique statique et à considérer des profils paraboliques de densités électronique et ionique:  $\omega_p^2(r) \approx \omega_{p0}^2 (1 - r^2/a^2)$ ,  $\omega_c(R) \approx \omega_{c0} R_0/R$ .

$$\text{Coupure gauche} \quad : \quad \omega = \omega_L = \sqrt{\omega_{pe}^2(r) + \frac{\omega_{ce}^2(R)}{4}} - \frac{\omega_{ce}(R)}{2} \quad (8.15)$$

$$\text{Coupure droite} \quad : \quad \omega = \omega_R = \sqrt{\omega_{pe}^2(r) + \frac{\omega_{ce}^2(R)}{4}} + \frac{\omega_{ce}(R)}{2} \quad (8.16)$$

A basse fréquence, lorsque la propagation n'est pas strictement perpendiculaire au champ statique,  $N_{\parallel} \neq 0$ , les coupures droite et gauche deviennent les coupures haute et basse densité.

$$\text{Coupure basse densité} \quad : \quad N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp}(\omega) + \varepsilon_{\times}(\omega) \quad (8.17)$$

$$\text{Coupure haute densité} \quad : \quad N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp}(\omega) - \varepsilon_{\times}(\omega) \quad (8.18)$$

Si une quantité physique, dans le cadre d'un modèle donné, tend vers l'infini pour des valeurs finies des différents paramètres du modèle, il est nécessaire de considérer des corrections, c'est-à-dire la prise en compte de phénomènes physiques jusqu'alors négligés, pour régulariser ce comportement singulier et comprendre la nature réelle du phénomène ainsi identifié dans le cadre d'un modèle trop contraint. Les résonances étudiées dans le cadre du modèle de la dispersion fluide relèvent de ce principe et la prise en compte des effets thermique ou cinétique.

Une telle analyse des effets cinétiques présente différents niveaux d'approximations et de régularisations.

- Une première approche consiste à ne considérer que la partie réactive  $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})$  du tenseur diélectrique, c'est-à-dire à négliger la dissipation décrite par  $\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})$ , et à restreindre l'analyse aux terme  $n = 0$  sur la base d'un développement à l'ordre le plus bas par rapport au petit paramètre  $k_{\perp} v_c / \omega_c$ , appelé *développement aux petits rayons de Larmor*. Cette approche conduit à des corrections, qualifiées de *thermiques*, qui augmentent le degré algébrique de la relation de dispersion et introduisent donc un mode (au moins) supplémentaire qui en général coalesce avec le mode froid au niveau de la résonance.

- Une modélisation plus élaborée consiste à prendre en compte un certain nombre de termes résonnants du tenseur diélectrique gyro-cinétique,  $n = \pm 1, n = \pm 2, \dots$ , tout en négligeant la dissipation, c'est-à-dire la partie active du tenseur diélectrique  $\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})$ . Cette approche augmente le degré de la relation de dispersion qui en général n'est plus une relation algébrique mais une équation transcendante, et introduit une infinité de

nouveaux modes, dits *cinétiques*. Le phénomène de conversion de mode dans un plasma inhomogène permet de comprendre le mécanisme de couplage de ces modes cinétiques avec le mode fluide, et en assurant un transfert de puissance réactive du mode froid vers les modes cinétiques régularise le comportement singulier issu de la relation de dispersion froide.

- Si un certain nombre d'ordres en les petits rayons de Larmor sont pris en compte dans la partie réactive du tenseur diélectrique  $\epsilon'(\omega, \mathbf{k})$ , il est nécessaire, au regard de la cohérence du modèle, de prendre en compte ces ordres au sein de la partie dissipative du tenseur diélectrique  $\epsilon''(\omega, \mathbf{k})$ . Ainsi, une troisième étape dans la compréhension du comportement de l'énergie électromagnétique au voisinage d'une résonance fluide se doit d'envisager le phénomène d'absorption, c'est-à-dire du couplage résonnant ondes-particules. La partie dissipative du tenseur diélectrique  $\epsilon''(\omega, \mathbf{k})$  décrit un transfert irréversible d'énergie impulsion entre ondes et plasma et régularise ainsi le comportement fluide du plasma.

Nous allons étudier successivement ces trois niveaux de description prenant en compte la valeur finie non nulle de la température, c'est-à-dire la dispersion des vitesses des particules à l'origine de la dispersion spatiale du tenseur diélectrique. Nous considérerons : (i) la régularisation thermique, puis (ii) l'existence d'une infinité de modes cinétiques perpendiculairement aux lignes de champ, les modes de Bernstein, enfin, (iii) nous construirons des modèles d'absorption résonnante mettant en lumière les mécanismes physiques microscopiques responsables de la dissipation quasi-linéaire d'un plasma non collisionnel.

Soit un plasma analysé en première approche dans le cadre d'un modèle froid présentant deux branches de dispersion pour une fréquence donnée :  $aN_{\perp}^4 - bN_{\perp}^2 + c = 0$  ; une résonance  $\omega = \omega_r$  associée à l'équation  $a = 0$  peut être régularisée en prenant en compte la première correction thermique non nulle obtenue en considérant la partie réactive du tenseur diélectrique  $\epsilon'(\omega, \mathbf{k})$ , puis en restreignant la série des résonances harmoniques au terme adiabatique  $n = 0$  et en limitant le développement de la fonction de Bessel d'ordre zéro au terme quadratique  $(k_{\perp} v_c / \omega_c)^2$ .

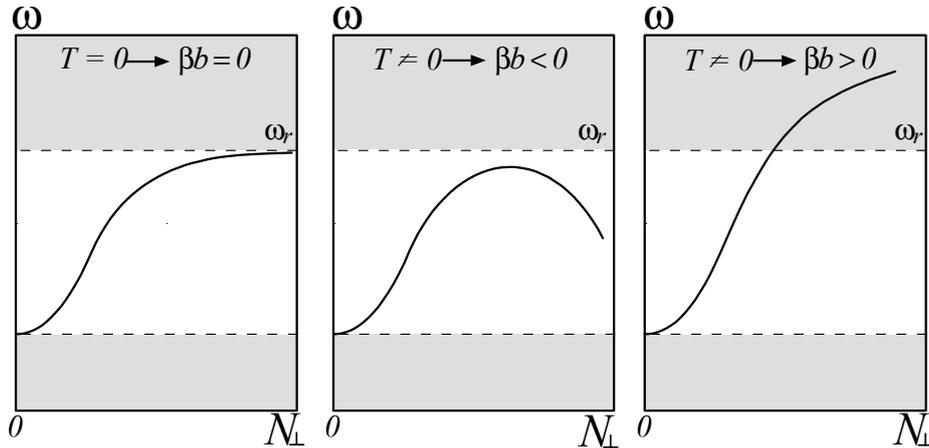


Fig. 8.7 : Régularisations des résonances fluides.

Cet ensemble d'approximations conduit nécessairement à une correction du coefficient  $a = \alpha(\omega - \omega_r)$  du type  $\beta(N_{\perp} v_c / c)^2$  ; ainsi l'équation de dispersion au voisinage de la résonance  $\omega_r$  se présente sous la forme :

$$\alpha(\omega - \omega_r) N_{\perp}^4 - bN_{\perp}^2 + c = 0 \rightarrow \left[ \alpha(\omega - \omega_r) + \beta \left( N_{\perp} \frac{v_c}{c} \right)^2 \right] N_{\perp}^4 - bN_{\perp}^2 + c = 0$$

La branche froide singulière au voisinage de la résonance ne présente plus de singularité si la correction thermique est prise en compte.

$$N_{\perp}^2 = \frac{b}{\alpha(\omega - \omega_r)} \rightarrow \omega - \omega_r = \frac{b}{\alpha N_{\perp}^2} - \frac{\beta}{\alpha} N_{\perp}^2 \left( \frac{v_c}{c} \right)^2 \quad (8.19)$$

Deux situations sont alors envisageables : (i) si  $\beta b > 0$  alors la nouvelle courbe de dispersion ne présente plus de résonance et intercepte l'ancienne fréquence de résonance pour l'indice :  $N_{\perp} = (b/\beta)^{\frac{1}{4}} (c/v_c)^{\frac{1}{2}}$ , (ii) si  $\beta b < 0$  alors la courbe de dispersion s'éloigne de la résonance qui ne constitue donc plus une singularité. Ces deux topologies associées à la régularisation thermique de la résonance  $\omega_r$  sont représentées sur la figure (8.7).

### 8.3 Plasmons Wake

Considérons un champ de force perturbateur  $m_e \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ , d'origine quelconque, la force pondéromotrice d'un pulse laser permet par exemple d'engendrer un tel type de force, appliqué à la population électronique d'un plasma de densité électronique d'équilibre  $n_0$ . La dynamique électronique est décrite par un système de trois

équations : l'équation de Poisson pour le potentiel électrique  $\phi$ , l'équation d'Euler pour la dynamique du fluide électronique et l'équation de conservation de la charge.

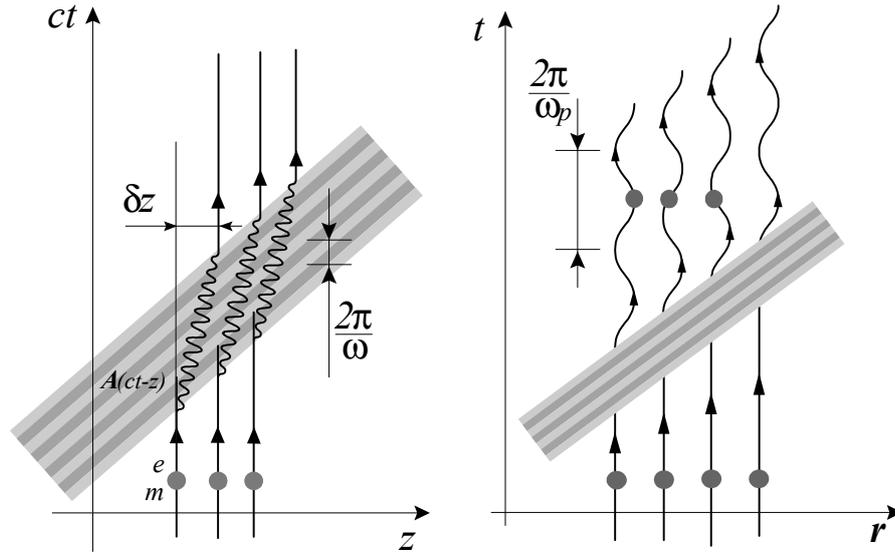
$$\begin{aligned} \text{Equation de Poisson} & : \Delta\phi = \frac{(n_e - n_0)e}{\varepsilon_0} \\ \text{Equation d'Euler} & : \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e = \frac{e}{m_e} \nabla\phi + \mathbf{a} \\ \text{Equation de continuité} & : \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = -\frac{\partial n_e}{\partial t} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t)$  est le champ de vitesse du fluide électronique et  $n(\mathbf{r}, t)$  sa densité perturbée.

Ce système de Poisson-Euler peut être résolu en linéarisant la réponse au voisinage de l'équilibre, c'est-à-dire en supposant que la force  $m_e \delta \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  induit de faibles perturbations en valeur relative des différentes quantités.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) & = 0 + \delta\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \Delta\delta\phi = \frac{e\delta n_e}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t) & = \mathbf{0} + \delta\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{\partial \delta\mathbf{v}_e}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \nabla\delta\phi + \mathbf{a} \\ n_e(\mathbf{r}, t) & = n_0 + \delta n_e(\mathbf{r}, t) \rightarrow n_0 \nabla \cdot (\delta\mathbf{v}_e) = -\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} \end{aligned}$$

La notation  $\delta$  désignant des quantités du premier ordre en  $\mathbf{a}$ . La linéarisation du système de Poisson-Euler est obtenue en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux.



L'élimination du champ de vitesse et du potentiel entre les trois équations permet d'exprimer la réponse en densité et cette équation d'oscillateur harmonique forcé peut être aisément intégrée.

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} + \omega_p^2 \delta n_e = n_0 \nabla \cdot \mathbf{a} \rightarrow \frac{\delta n_e(\mathbf{r}, t)}{n_0} = - \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_p(t-u)}{\omega_p} \nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}, u) du$$

L'intégrale temporelle du second membre de la deuxième identité porte sur un intégrand oscillant à la fréquence plasma. Pour une perturbation  $\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  de durée finie deux cas doivent être considérés.

- Si la durée de la fonction  $\delta \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  est plus longue que l'inverse de la fréquence plasma, alors l'intégrand est oscillant et sa somme quasi nulle. L'effet final de la perturbation après son passage est très faible  $\delta n_e(\mathbf{r}, t \rightarrow +\infty)/n_0 \approx 0$ , c'est le régime adiabatique de l'interaction.

- Si la durée de la fonction  $\delta \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  est plus courte que l'inverse de la fréquence plasma, alors l'intégrand possède un signe constant entre les bornes d'intégration et sa somme est significative. L'effet final de la perturbation après son passage est un déplacement cohérent des électrons résultant en une charge d'espace et le plasma va osciller après le passage de la perturbation : c'est le phénomène de sillage.

Les perturbations lentes laissent le plasma quasi-neutre, celui-ci a le temps de réajuster la distribution de charge pour préserver la neutralité. Les perturbations rapides brisent la quasi-neutralité et créent un sillage d'ondes plasmas non-neutres.

### 8.4 Free energy and stability

L'énergie et l'entropie offrent le cadre conceptuel adéquat pour formuler les deux principes de la thermodynamique ; le premier principe est associé à la conservation de l'énergie et sa formulation est directe ; par contre la formulation du second principe nécessite quelques remarques. En effet, lorsque nous énonçons que l'entropie d'un système à l'équilibre est *maximum*, il est nécessaire de spécifier au sein de quel ensemble d'états, l'état d'équilibre se distingue par cette propriété d'optimum.

▽

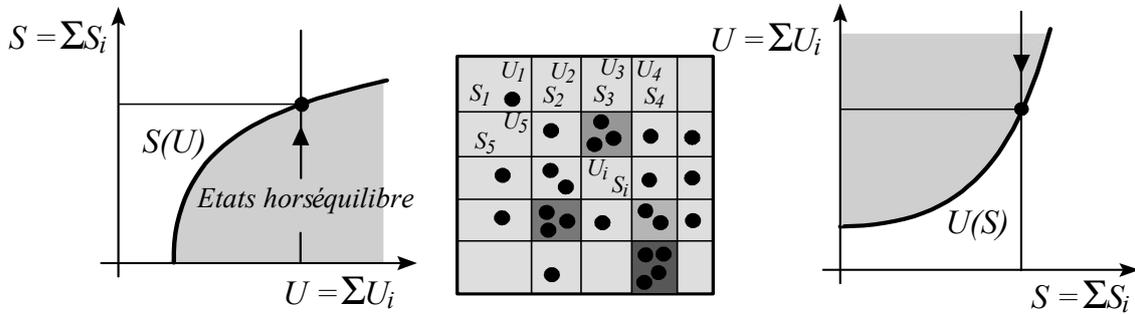


Fig. 9.1 : Formulations des principes d'équilibre de maximum de l'entropie à énergie donnée et de minimum de l'énergie à entropie donnée.

Cette spécification du maximum est délicate car nous ne connaissons la représentation entropique  $S(U, V, N, X_i \dots)$  que pour la classe des états d'équilibres et le maximum d'entropie se réfère à une comparaison avec les états de non-équilibre, voisins de l'état d'équilibre considéré, dont nous ne connaissons pas l'équation entropique. Pour le gaz parfait classique, auquel s'apparente un plasma, la représentation entropique  $S(U, V, N)$  est donnée par la relation :

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{5}{2} + \log \left( \frac{U^{\frac{3}{2}} V}{N^{\frac{5}{2}}} \right) + \log \left( \frac{4\pi m}{3h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \tag{8.20}$$

Pour lever la difficulté de formulation du principe d'*extremum* il est pertinent de construire un ensemble d'états de non-équilibre, voisin d'un état d'équilibre donné, en partitionnant spatialement le système puis en le considérant comme la réunion de ses parties conformément à la figure (9.1). Ainsi, l'entropie est égale à la somme des entropies des parties, chacune étant à l'équilibre :  $S = \sum S_i$ , et l'énergie à la somme des énergies des parties :  $U = \sum U_i$ . Si certaines variables intensives d'une partie sont supposées différentes des variables intensives d'autres parties il est aisé de démontrer que l'entropie n'est pas optimum et que l'entropie de l'ensemble des états de non-équilibre ainsi obtenus par partition occupe la partie basse entropie dans le diagramme de représentation de la fonction  $S(U)$  sur la figure (9.1) ; c'est dans le cadre de ce modèle et de cette représentation que le principe du maximum d'entropie à l'équilibre, à énergie constante, doit être formulé.

Notons sur la figure (9.1) qu'il est alors équivalent de formuler un principe de *minimum* d'énergie interne à entropie donnée, cette formulation ne constitue pas l'usage car il est difficile de construire un système de contraintes assurant la constance de l'entropie lorsque l'on varie l'énergie d'un système alors qu'il est aisé d'assurer la constance de l'énergie, d'autant plus aisé que cette contrainte n'est autre que le premier principe. Cette dualité  $U/S$  est similaire à la dualité cercle/disque : le cercle est la courbe fermée présentant le plus petit périmètre à aire donnée et le disque circulaire est la surface présentant la plus grande aire à périmètre donné.

Un plasma est un système s'écartant significativement de l'équilibre thermodynamique de part l'existence de gradients de températures, de courants, et de densités, mais aussi, de part l'existence de queues de fonctions de distributions d'ions et d'électrons rapidement non Maxwelliens.

En présence de collisions ces écarts à l'équilibre thermodynamique tendent à relaxer à travers les processus de transport, friction et thermalisation. Un deuxième type de processus tend à relaxer l'énergie libre ainsi disponible au niveau fluide ou au niveau cinétique : les *instabilités*. Les instabilités dans les plasmas, au même titre que les ondes, constituent un sujet vaste et d'une diversité phénoménologique dont l'exploration nécessiterait une monographie dédiée. Plusieurs schémas de classification peuvent être construits pour offrir une présentation synthétique. La source d'énergie libre, c'est-à-dire l'identification de l'écart à l'équilibre thermodynamique et sa nature, fluide ou cinétique, est un paramètre important pour classer les instabilités. La nature du mécanisme de déstabilisation, réactif ou dissipatif, constitue un deuxième paramètre de classification.

Dans ce paragraphe nous allons étudier les principales instabilités associées à un plasma confiné, nous ne proposerons pas de classification exhaustive et définitive, il n'en existe d'ailleurs à ce jour aucune ; mais le choix de présentation suivra la différenciation entre les termes sources d'énergie libre :

- gradients de densités et températures → modes de dérives et de gradients de températures,
  - gradients de champ magnétique et de pression → modes d'interchange ou d'échange,
  - gradient de courant → modes de torsion,
- et s'attachera à identifier les couplages et mécanismes déclenchant l'instabilité.

Plusieurs outils théoriques permettent d'analyser les instabilités et de proposer des critères de stabilité: (i) le principe variationnel de la MHD idéale constitue un formalisme remarquablement efficace pour identifier des conditions suffisantes d'instabilité à l'échelle macroscopique, mais il ne permet pas de comprendre les mécanismes de déstabilisation à l'échelle microscopique, (ii) la résolution des équations des dynamiques électronique et ionique, fluides ou cinétiques, et l'analyse de la relation de dispersion  $D(\omega, k_{\parallel}, k_{\perp}) = 0$  des modes propres électromagnétiques associés à la réponse linéarisée sera utilisée ici pour comprendre l'origine des principales instabilités présentes dans un plasma.

La linéarisation et la recherche de perturbations harmoniques du type  $\exp j(\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y)$  conduira au calcul de la relation de dispersion  $\omega(k_{\parallel}, k_{\perp})$  et s'attachera plus à l'évaluation des perturbations de densités de charges  $n(\omega, k_{\parallel}, k_{\perp})$  et densités de courants  $\mathbf{J}(\omega, k_{\parallel}, k_{\perp})$  qu'à la résolution des équations de Maxwell, car nous ferons souvent usage des hypothèses de quasi-neutralité de la distribution de charges  $n$  et de stationnarité des courants  $\mathbf{J}$ .

$$\begin{aligned} \text{Quasi-neutralité} & : n_e(\omega, k_{\parallel}, k_{\perp}) - n_i(\omega, k_{\parallel}, k_{\perp}) = 0 \\ \text{Stationnarité} & : \nabla \cdot [\mathbf{J}_e(\omega, k_{\parallel}, k_{\perp}) + \mathbf{J}_i(\omega, k_{\parallel}, k_{\perp})] = 0 \end{aligned}$$

Ces deux approximations étant justifiées par l'ordering des temps caractéristiques: les fréquences des principales instabilités sont dans le domaine basse fréquence et l'évolution du plasma peut être considérée comme une suite de quasi-équilibres, les échelles de temps associées à l'écrantage et à la neutralisation étant rapides au regard des perturbations basses fréquences.

Considérons un écart à l'équilibre sous la forme d'un simple gradient de pression, retenu par un champs magnétique assurant un équilibre, illustré sur la figure (9.2).

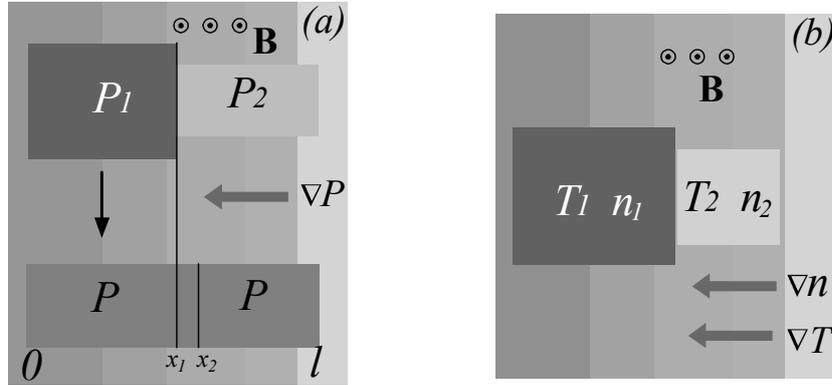


Fig. 9.2 : Relaxations spontanées : (a) d'un gradient de pression, (b) de deux gradients : densité et température.

Démontrons que la relaxation de deux zones, haute pression  $P_1$ , et basse pression  $P_2$ , vers une pression commune  $P$  n'est pas spontanée. En effet, le travail mécanique  $W$  nécessaire pour une telle transformation est égal à:  $W [\text{J/m}^3] = \int_{x_1}^{x_2} (P_1 - P_2) dx/l$ , où les différents paramètres se réfèrent à la figure (9.2). Dans la limite des variations infinitésimales  $P_1 \sim P_2$  et  $x_1 \sim x_2$ :

$$P = P_1 \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^\gamma = P_2 \left( \frac{l - x_1}{l - x_2} \right)^\gamma \rightarrow \frac{\delta x}{l} \sim \frac{\delta P}{\gamma P} \rightarrow \delta W \sim \frac{\delta P^2}{\gamma P}$$

Le travail est donc un infiniment petit du deuxième ordre en la différence de pression, un simple gradient de pression maintenu par un champ magnétique ne peut donc relaxer spontanément, il faut un deuxième degré de liberté fluide pour envisager une instabilité, par exemple lorsqu'un gradient de pression est retenu par la pesanteur c'est le gradient de température qui permet le seuil de convection de Schwarzschild. Considérons alors les deux cas suivants:

■ la conjonction d'un gradient de densité et d'un gradient de température qui est instable au-delà d'un seuil que nous allons identifier,

■ la conjonction d'un gradient de pression et d'un gradient de champ magnétique qui peut relaxer spontanément par échange de tubes de flux.

Le premier cas est illustré sur la figure (9.2); la relation (8.20) exprime l'entropie  $S(U, V, N)$  pour un gaz parfait et l'énergie interne  $U$  est fonction de la température suivant la relation  $U = 3Nk_B T/2$ , ainsi des variations de densité  $\delta n$  et de température  $\delta T$  engendrent une variation d'entropie

$$\delta S|_N [\text{J/K} \cdot \text{m}^3] = nk_B \left( \frac{3}{2} \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta n}{n} \right)$$

Considérons une transformation du système illustrée sur la figure (9.2) égalisant les températures et les pressions sans apport de travail et de chaleur de l'extérieur. Le premier et le second principe conduisent à la

relation :

$$\text{Energie interne} : W + \int_{T_1}^{T_2} T dS = 0 \rightarrow \delta W \sim nk_B T \left( \frac{3}{2} \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta n}{n} \right)$$

et le travail de détente est donc disponible pour déclencher une instabilité au-delà d'un seuil associé au rapport des gradients de densité et température.

$$\text{Gradients stables} : 3 |\nabla \log T| < 2 |\nabla \log n| \quad (8.21)$$

Nous établissons la pertinence de ce critère de stabilité dans le cadre de l'analyse des modes de gradients de températures. Pour compléter cette présentation des mécanismes de relaxation des gradients considérons à nouveau le cas d'un gradient de pression et autorisons le champ à évoluer dans le cadre de la MHD idéale, c'est-à-dire conformément au théorème d'Alfvén.

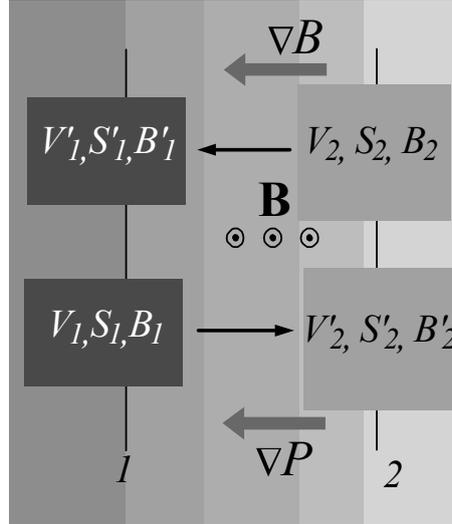


Fig. 9.3 : Instabilité d'interchange ou échange.

La figure (9.3) illustre l'échange de deux tubes de flux magnétique 1 et 2 sans modification de l'environnement :  $V_1, S_1 \rightarrow V_2, S_2$ ,  $V_2, S_2 \rightarrow V_1, S_1$ . Les deux volumes des deux tubes de flux étant différents l'un des tubes subit une compression et l'autre une détente, l'échange étant adiabatique. Ainsi :  $P_1 \rightarrow P'_2 = P_1 (V_1/V_2)^\gamma$  et  $P_2 \rightarrow P'_1 = P_1 (V_2/V_1)^\gamma$ . Le théorème d'Alfvén, sous l'hypothèse de la MHD idéale, impose la contrainte du transport de flux magnétique par la matière, le champ magnétique varie donc au cours de l'échange :  $B_1 \rightarrow B'_2 = B_1 S_1/S_2 = \Phi_1/S_2$  et  $B_2 \rightarrow B'_1 = B_2 S_2/S_1 = \Phi_2/S_1$ . Ce protocole d'échange adiabatique et idéal étant explicité, il est alors possible d'évaluer les variations d'énergie interne et d'énergie magnétique du milieu ainsi modifié.

$$\begin{aligned} \text{Energie interne} & : \frac{3}{2} [(P'_1 V_1 + P'_2 V_2) - (P_1 V_1 + P_2 V_2)] \\ \text{Energie magnétique} & : \oint_1 \frac{B_1^2}{2\mu_0} S_1 dl + \oint_2 \frac{B_2^2}{2\mu_0} S_2 dl - \oint_1 \frac{B_1^2}{2\mu_0} S_1 dl - \oint_2 \frac{B_2^2}{2\mu_0} S_2 dl \end{aligned}$$

Restreignant l'analyse à un échange de quantités infinitésimales,  $\delta P \equiv P_2 - P_1$  et  $\delta V \equiv V_2 - V_1$ , nous obtenons les bilans d'énergie interne :  $\delta P \delta V + 5P \delta V^2 / 3V$  et d'énergie magnétique :  $\Phi \delta \Phi \delta (\oint B dl / \Phi)$ . Une condition suffisante de stabilité est obtenue en considérant l'échange de deux tubes de même flux tels que  $\delta \Phi = 0$ , pour les plasmas de tokamak  $\beta \ll 1$  et le champ magnétique s'exprime en fonction du courant à travers le théorème d'Ampère :  $B = \mu_0 I / 2\pi R$ , la variation de volume associée à l'échange est définie par  $\delta V = \delta \oint S dl$  et peut s'exprimer en fonction du flux  $\delta \oint \Phi dl / B$  ainsi  $\delta V = 2\pi \Phi \delta (\oint R dl) / \mu_0 I$  ; l'échange est donc stable si  $\delta P \delta \oint R dl > 0$  c'est-à-dire :

$$\text{Gradients stables} : \nabla B \cdot \nabla P < 0 \quad (8.22)$$

Nous établissons la pertinence de ce critère de stabilité dans le cadre de l'analyse des modes d'interchange.

Au-delà de l'identification de sources d'énergies libres disponibles pour une instabilité il est nécessaire de préciser la nature dissipative ou réactive de l'instabilité. Pour établir cette dernière distinction nous allons l'illustrer sur le cas le plus simple, celui de l'instabilité au sein d'un plasma portant un courant.

## 8.5 Couplages réactif et dissipatif

Considérons la dynamique d'un plasma magnétisé le long des lignes de champ magnétique où la distance est paramétrée par l'abscisse curviligne  $z$  ; un faisceau beaucoup moins dense que le plasma et de vitesse  $V$  s'écoule

le long de la direction  $z$ . Le plasma présente une pulsation plasma  $\omega_p$  et le faisceau une pulsation plasma  $\omega_b$ . Les perturbations électrostatiques de densité, champ et vitesse peuvent être analysées en linéarisant l'équation de conservation de la charge et l'équation d'Euler pour des dépendances fonctionnelles périodiques dans le temps et l'espace de la forme  $\exp j(k_{\parallel}z - \omega t)$ .

La densité volumique de courant linéarisé est notée  $J = qn_0v + qnV$  où  $n_0$  est la densité non perturbée et  $n$  la densité perturbée. Commençons par identifier séparément les modes propres électrostatiques d'un plasma et d'un faisceau en annulant la somme du courant électronique  $J_p$  (ou  $J_b$ ) et du courant de déplacement  $J_d$ :  $J_p + J_d = 0$  et  $J_b + J_d = 0$ . En effet, compte tenu de l'absence de champ magnétique perturbateur:  $\nabla \times H|_z = 0 = J_p + J_d$  pour le plasma et  $\nabla \times H|_z = 0 = J_b + J_d$  pour le faisceau.

$$\begin{aligned} \text{Déplacement} & : J_d = -j\omega\varepsilon_0 E \\ \text{Plasma réactif} & : J_p = j\frac{\omega_p^2}{\omega}\varepsilon_0 E \rightarrow \omega_p^2 = \omega^2 \\ \text{Faisceau} & : J_b = j\frac{\omega_b^2\omega}{(\omega - k_{\parallel}V)^2}\varepsilon_0 E \rightarrow \omega_b^2 = (\omega - k_{\parallel}V)^2 \end{aligned}$$

Nous venons ainsi d'établir les relations de dispersion des ondes de Langmuir au sein d'un plasma et des modes rapide ( $F$ ) et lent ( $S$ ) au sein d'un faisceau, ces deux relations de dispersion se ramènent l'une à l'autre par un simple changement de référentiel de vitesse  $V$ .

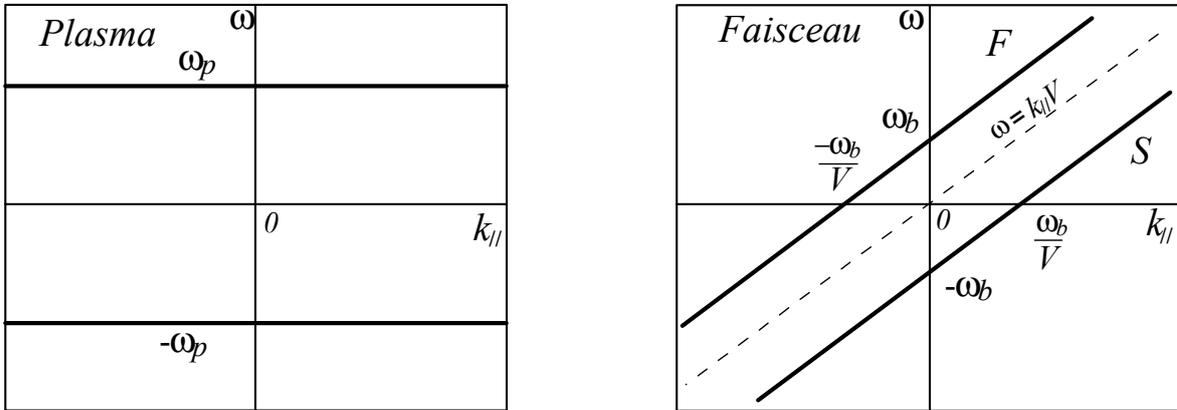


Fig. 9.4 : Relations de dispersion des plasmons pour un plasma froid et un faisceau froid.

Les deux relations de dispersion ainsi obtenues sont représentées sur la figure (9.4). Considérons à présent un système faisceau-plasma, les modes précédents sont alors couplés.

$$J_b + J_p + J_d = 0 \rightarrow \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_{\parallel}V)^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 \quad (8.23)$$

La relation de dispersion du milieu faisceau-plasma est donnée par l'équation du quatrième degré :

$$\text{Couplage réactif} : (\omega^2 - \omega_p^2)(\omega - k_{\parallel}V)^2 = \omega^2\omega_b^2$$

Sous cette forme il est aisé de distinguer la nature des asymptotiques :

- à haute fréquence  $\omega^2 \gg \omega_p^2$  nous retrouvons la dispersion des modes  $S$  et  $F$  du faisceau :  $(\omega - k_{\parallel}V)^2 - \omega_b^2 \approx 0$ ,
- à basse fréquence  $\omega^2 < \omega_p^2$  la dispersion  $\omega_p^2(\omega - k_{\parallel}V)^2 + \omega^2\omega_b^2 = 0$  révèle l'existence d'une partie imaginaire  $\gamma(k_{\parallel})$  de la pulsation  $\omega = \omega(k_{\parallel}) - j\gamma(k_{\parallel})$  lorsque le vecteur d'onde  $k_{\parallel}$  est réel.

Ainsi ces modes basses fréquences présentent une croissance exponentielle  $\exp \gamma(k_{\parallel})t$  pour certaines valeurs des paramètres.

Ce type de déstabilisation est qualifié de *réactive* car le déphasage qui permet aux fluctuations du champ et de la densité d'être amplifiées, par conversion de l'énergie cinétique du faisceau obtenue en mettant en phase vitesse et force, est de nature réactive, par opposition aux mécanismes de déphasage trouvant leurs origines dans un processus dissipatif de nature collisionnelle ou collective.

Les parties réelles et imaginaires  $\omega + j\gamma$  sont représentées sur le diagramme (9.5) sous l'hypothèse  $\omega_b \ll \omega_p$ . Une déstabilisation réactive modifie en général significativement la structure du mode.

Le deuxième mécanisme de déstabilisation des modes propres longitudinaux le long des lignes de champ dans un plasma thermonucléaire est caractérisé par la présence d'un couplage dissipatif.

Considérons les modes  $F$  et  $S$  d'un faisceau et plongeons ce faisceau dans un plasma résistif de conductivité  $\omega^*\varepsilon_0$ . Deux courants sont alors présents : (i) les courants dûs à l'inertie et à la séparation de charge  $J_b$  et (ii)

le courant résistif  $J_r$ .

$$\text{Plasma dissipatif} : J_r = \omega^* \varepsilon_0 E \quad (8.24)$$

$$\text{Faisceau} : J_b = j \frac{\omega_b^2 \omega}{(\omega - k_{\parallel} V)^2} \varepsilon_0 E \quad (8.25)$$

La relation de dispersion est une équation algébrique du troisième degré en la pulsation si nous fixons le vecteur d'onde  $k_{\parallel}$ .

$$\text{Couplage dissipatif: } (\omega + j\omega^*) (\omega - k_{\parallel} V)^2 - \omega \omega_b^2 = 0$$

Sous l'hypothèse d'un faible couplage ( $\omega^* \ll \omega_b$ ) la partie imaginaire peut être évaluée et est représentée sur la figure (9.5). La discussion sur les différences et analogies entre déstabilisation réactive et dissipative mériterait d'être développée en détail, mais nous nous contenterons d'explorer la nature dynamique de la déstabilisation du mode lent  $S$ .

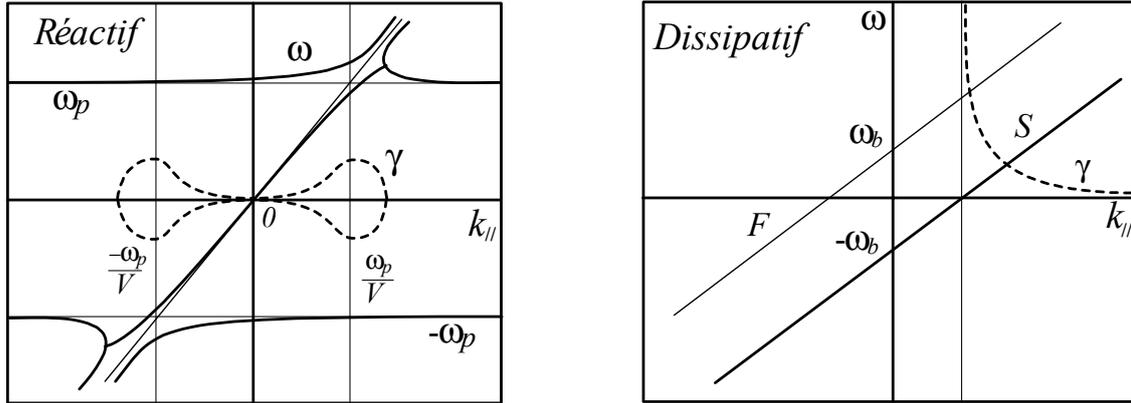


Fig. 9.5 : Couplages réactif et dissipatif faisceau-plasma.

L'onde  $F$  passive est une onde d'énergie positive tandis que l'onde  $S$  active est une onde d'énergie négative ; cette différence fondamentale peut être illustrée si nous considérons les phases relatives des perturbations de densité et de vitesse sur un diagramme d'espace-temps représenté sur la figure (9.6). Le champ électrique  $E$  est relié au potentiel  $\phi$  par la relation classique :  $E = -jk_{\parallel}\phi$ , la perturbation de densité  $n$  à la perturbation de potentiel  $\phi$  par la relation de Poisson :  $qn = \varepsilon_0 k_{\parallel}^2 \phi$  et le courant  $n_0 qv$  au champ  $E$  par :  $n_0 qv = j\omega \varepsilon_0 E$ .

L'élimination du champ  $E$  et du potentiel  $\phi$  entre ces trois relations permet d'exprimer la perturbation relative de densité  $n/n_0$  en fonction de la perturbation de vitesse  $v$ .

$$F : n = n_0 \frac{k_{\parallel}}{\omega_p} v, \quad S : n = -n_0 \frac{k_{\parallel}}{\omega_p} v \quad (8.26)$$

- Pour le mode rapide la densité et la vitesse sont en phase, ainsi une accumulation de charges est accompagnée d'une augmentation de vitesse, une déplétion de densité d'un ralentissement ; l'état perturbé présente une énergie supérieure à l'état d'équilibre, il faut donc fournir de l'énergie pour exciter le mode rapide  $F$ .

- Au contraire, pour le mode lent  $S$ , une déplétion de densité est accompagnée par une augmentation de vitesse car densité et vitesse sont en opposition de phase, l'état perturbé représenté par le mode lent présente donc une énergie inférieure à l'état d'équilibre et l'on parle d'onde d'énergie négative ; ce mode se développe en fournissant de l'énergie au milieu qui le supporte, il n'est donc pas étonnant qu'il soit déstabilisé par un déphasage, soit de nature dissipative car les frictions induisent des déphasages, soit de nature réactive qui correspond au cas d'un couplage avec un autre oscillateur et nous savons que les couplages entre oscillateurs induisent des déphasages.

Cette analyse de l'origine dynamique de l'instabilité du mode lent est illustrée sur le diagramme d'espace-temps (9.6), l'exemple classique des instabilités faisceau-plasma qui vient d'être brièvement étudié offre le schéma de la structure d'analyse des instabilités dans les tokamaks. Dans un premier temps nous devons identifier une source d'énergie libre ; en l'occurrence, dans ce contexte ce seront les gradients de champ magnétique  $\nabla \mathbf{B}$ , de densité  $\nabla n$ , de température  $\nabla T$  et de courant  $\nabla \mathbf{J}$ .

Puis nous devons établir les équations d'évolution et de couplage des variables dynamiques et linéariser ces équations pour ramener l'étude à la recherche des solutions d'une équation algébrique dont la partie imaginaire des racines fournira le taux de croissance  $\gamma$  de l'instabilité.

Cette analyse doit être complétée par une compréhension des mécanismes de couplage des variables dynamiques conduisant à une évolution exponentielle en fonction du temps, les diagrammes d'espace-temps, tels que celui proposé figure (9.6) et les diagrammes de dispersion tels que la figure (9.5), offrent à cet égard le cadre de représentation adéquat pour l'étude des mécanismes d'instabilités.

Au sein d'un gaz, un gradient de pression engendre une accélération  $\nabla P \rightarrow d\mathbf{V}/dt$  et le compromis entre l'inertie et l'élasticité associée à la compressibilité est la source des ondes sonores ; dans un plasma de tokamak, un gradient de pression est directement associé à une vitesse, la vitesse diamagnétique  $\nabla P \rightarrow \mathbf{V}^*$ .

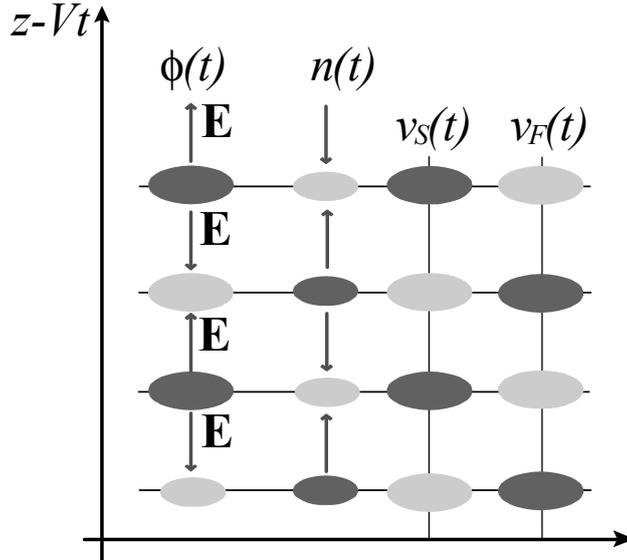


Fig. 9.6 : Phases relatives de la densité et de la vitesse pour les modes lent et rapide.

Un deuxième type d'excitations élémentaires peut se propager si la pression magnétique est mise a contribution  $\nabla B^2/2\mu_0 \rightarrow dV/dt$ ; cette diversité d'excitations élémentaires nous a conduit à identifier trois vitesses caractéristiques au sein d'un plasma thermonucléaire magnétisé: les vitesses diamagnétique, de Böhm et d'Alfvén..

$$\text{Vitesse Diamagnétique} : V^* \equiv \frac{\nabla P}{neB} \quad (8.27)$$

$$\text{Vitesse de Böhm} : C_B \equiv \sqrt{\frac{P_e}{nm_i}} \quad (8.28)$$

$$\text{Vitesse d'Alfvén} : V_A \equiv \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0 nm_i}} \quad (8.29)$$

Leur ordering typique dans un tokamak est:  $V_A/C_B/V^* \sim 10^7 \text{ [m/s]} / 10^6 \text{ [m/s]} / 10^3 \text{ [m/s]}$ . On notera, dans les relations de dispersion impliquant le couplage des branches acoustique et alfvénique, le rôle du paramètre bêta  $\beta = 4C_B^2/V_A^2$  où  $\beta = 2C_B^2/V_A^2$  si nous incluons la pression ionique dans la vitesse de Böhm. Ces trois vitesses entreront dans les relations de dispersion des principaux modes instables dans les configurations de type tokamak. La figure (9.7) illustre le positionnement relatif des instabilités dans les tokamaks, l'abscisse indique la pulsation caractéristique du mode et son ordonnée l'échelle spatiale caractéristique.

Les modes les plus communs sont: (i) les modes de dérives résultant de la présence simultanée d'un gradient de densité  $n(r)$  et d'un champ magnétique homogène, (ii) les modes dits de gradient de température où le gradient relatif de la densité  $n(r)$  et de la température  $T(r)$  doit être considéré, (iii) les modes dits d'interchange ou d'échange où gradients de pression  $P(r)$  et de champ magnétique  $B(r)$  constituent la source d'énergie libre, les effets toroïdaux couplant dérives et interchange, enfin, (iv) les modes de torsion (*kink*) où le gradient de courant  $J(r)$  doit être pris en considération; le déchirement (*tearing*), les modes d'Alfvén toroïdaux et les *fishbones*... ne seront pas étudiés dans cet ouvrage.

Nous étudierons les modes de dérives, d'interchange et de torsion dans le cadre de modèles permettant de les discriminer, c'est-à-dire dans le contexte de géométries simplifiées assurant un découplage des différentes branches. Compte tenu de la géométrie toroïdale, les champs électromagnétiques au sein d'un tokamak peuvent être analysés en termes d'harmoniques poloïdales et toroïdales  $\sum_{m,n} \phi_{mn}(r) \exp j(\omega t - m\theta + n\varphi)$  repérées par les nombres d'ondes poloïdaux  $m$  et toroïdaux  $n$  et décrits par la structure radiale du mode  $\phi_{mn}(r)$ , notons que pour une décharge tokamak les harmoniques  $m$  et  $m \pm 1$  sont nécessairement couplées par les inhomogénéités poloïdales. Nous simplifierons l'analyse des effets de la géométrie toroïdale en considérant que cette structure présente une longueur caractéristique plus petite que le petit rayon du tokamak qui mesure l'échelle caractéristique des gradients, ainsi nous pouvons établir une étude suivant une structure harmonique du type  $\phi \exp j(\omega t - m\theta + n\varphi - k_r r)$ , ce déploiement de la topologie toroïdale conduit à l'étude d'un mode  $\phi \exp j(\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y)$  en géométrie cartésienne; la correspondance entre les vecteurs d'onde le long des lignes de champ  $k_{\parallel}$  et perpendiculairement aux lignes de champ  $k_{\perp}$  et les nombres poloïdaux et toroïdaux  $m$  et  $n$  s'établit alors comme suit:  $n\varphi - m\theta = (n - m/q)\varphi$  et  $dz \sim R d\varphi \rightarrow k_{\parallel} = (nq - m)/qR$  et  $k_r = k_{\perp}$ . Le cisaillement des lignes de champ, conséquence de la superposition d'un champ poloïdal radialement inhomogène sur un champ toroïdal, conduit donc à l'existence de surfaces résonnantes où le vecteur d'onde parallèle  $k_{\parallel}$  du mode  $(m, n)$  s'annule.

$$\text{Surface résonnante: } q(r) = \frac{m}{n} \rightarrow k_{\parallel}(r) = 0 \quad (8.30)$$

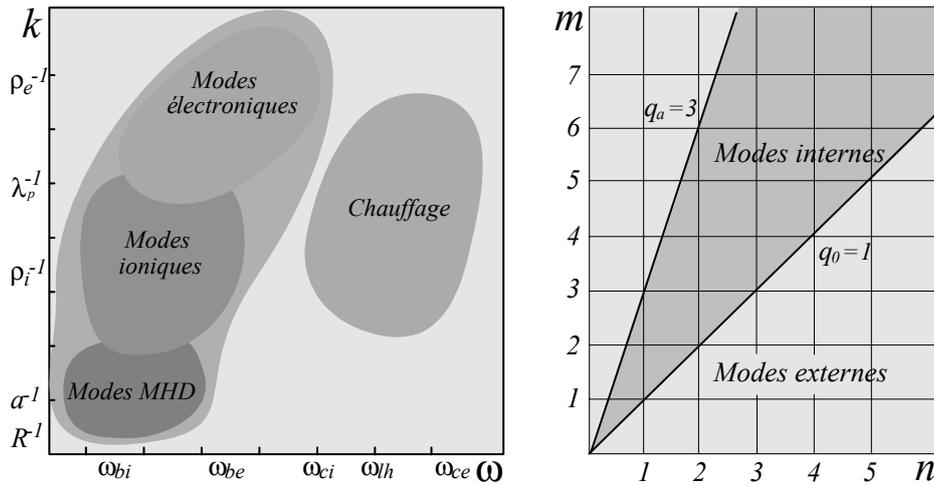


Fig. 9.7 : Modes instables et surfaces résonnantes dans un tokamak.

La finitude de  $k_{\parallel}$  autorisant souvent l'existence d'un couplage dissipatif à travers l'absorption Landau  $\omega = k_{\parallel} v_T$ , les modes présenteront donc une tendance à s'organiser autour de ces surfaces où  $q$  est rationnel car l'énergie libre des gradients est accessible au voisinage de ces surfaces rationnelles à travers l'étalement spectral du vecteur d'onde  $k_{\parallel}$ , la figure (9.7) illustre les possibilités de surfaces rationnelles compte tenu des valeurs caractéristiques du facteur de sécurité,  $q \sim 1 - 3$ , les modes MHD instables présentant des nombres poloïdaux et toroïdaux de faibles valeurs et peuvent être internes (déchirement, tearing) ou externes (torsion, kink).

## 8.6 Instabilités de Dérives

Les modes de dérives sont des perturbations de densité  $n$  et de potentiel  $\phi$  se propageant perpendiculairement aux lignes de champ magnétique, mais pouvant aussi présenter une périodicité le long de ces lignes de champ. Dans leur version la plus simple ces modes seront supposés électrostatiques et de nature fluide; puis nous évaluerons les corrections à la relation de dispersion fluide  $\omega(k_{\parallel}, k_{\perp})$  introduites par les couplages magnétiques alfvéniques et les effets cinétiques.

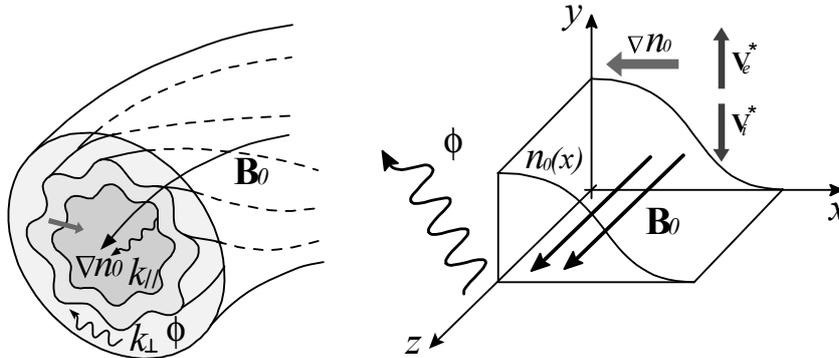


Fig. 9.8 : Configurations toroïdale et cartésienne des modes de dérives.

Pour ces modes, densité et potentiel sont en phase et tout déphasage entre ces variables entraîne une déstabilisation ou un amortissement; nous étudierons donc la déstabilisation et l'amortissement résultant d'un déphasage collectif associé aux résonances Landau électronique et ionique. Dans un tokamak les modes de dérives présentent une structure globale  $\phi(r) \exp j(\omega t - m\theta + n\varphi)$  et conformément aux principes de décomposition et d'analyse précédent nous développerons une analyse locale dans le cadre d'une géométrie cartésienne  $\phi \exp j(\omega t - k_{\parallel}z - k_{\perp}y)$ , puis nous adapterons le résultat cartésien à la structure toroïdale. Nous utiliserons un repérage cartésien  $[x, y, z]$  sur une base orthonormée directe cartésienne  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ .

Soit un champ magnétique homogène  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$  confinant un plasma de densité d'équilibre  $n_0(x)$  et de températures électronique et ionique  $T_e$  et  $T_i$  telles que  $T_e = T_i$ , cette configuration est représentée sur la figure (9.8). La présence simultanée (i) d'un champ magnétique et (ii) d'un gradient de densité permet de définir les vitesses diamagnétiques électronique  $\mathbf{V}_e^*$  et ionique  $\mathbf{V}_i^*$ :

$$\text{Vitesses diamagnétiques : } \mathbf{V}_e^* \equiv \frac{k_B T_e}{|e| B_0} \left| \frac{d \ln n_0}{dx} \right| \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{V}_i^* \equiv -\frac{k_B T_i}{|e| B_0} \left| \frac{d \ln n_0}{dx} \right| \mathbf{e}_y$$

Recherchons les perturbations harmoniques de potentiel susceptibles de se propager dans un tel milieu. Ces perturbations de potentiel seront nécessairement accompagnées par des perturbations de vitesse et de densité.

$$\begin{aligned}
 \text{Potentiel} & : \quad \phi \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \\
 \text{Vitesse} & : \quad (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \\
 \text{Densité} & : \quad n_0(x) + n \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] ,
 \end{aligned}$$

La vitesse est ici la vitesse ionique, car à basse fréquence la réponse électronique est de nature adiabatique, les électrons se distribuent au sein de la perturbation de potentiel  $\phi$  suivant une distribution de Boltzmann. Considérons les équations de la dynamique basse fréquence d'un plasma et construisons une analyse suivant le schéma :

$$\phi \xrightarrow{\text{dérives}} \mathbf{v}_i \xrightarrow{\text{continuité}} n_i \xrightarrow{\text{quasi-neutralité}} n_i = n_e \xleftarrow{\text{quasi-neutralité}} n_e \xleftarrow{\text{adiabaticité}} \phi$$

La première étape consiste à exprimer les composantes de la vitesse ionique en fonction du potentiel  $\phi$ . Le long des lignes de champ la réponse ionique est de nature inertielle et s'établit en considérant l'équation de Newton et la force de Coulomb. Perpendiculairement aux lignes de champ l'analyse de la réponse ionique relève de la théorie des dérives à basse fréquence ( $\omega \ll \omega_{ci}$ ). Ainsi, suivant  $x$  la dérive de champs croisés doit être prise en compte, et suivant  $y$  la dérive de polarisation détermine la dynamique car le champ électrique est dirigé suivant l'axe des  $y$ .

$$\text{Dérive de champs croisés} : \quad v_{ix} = j \frac{k_{\perp}}{\omega_{ci}} \frac{e\phi}{m_i} \quad (8.31)$$

$$\text{Dérive de polarisation} : \quad v_{iy} = - \frac{k_{\perp} \omega}{\omega_{ci}^2} \frac{e\phi}{m_i} \quad (8.32)$$

$$\text{Forces de Coulomb} : \quad v_{iz} = \frac{k_{\parallel}}{\omega} \frac{e\phi}{m_i} \quad (8.33)$$

Linéarisons à présent l'équation de conservation de la charge/masse ionique,  $\partial n_i / \partial t + \nabla \cdot n_0 \mathbf{v}_i = 0$ , afin d'exprimer la perturbation de densité ionique  $n_i$  en fonction de la vitesse  $\mathbf{v}_i$ .

$$\text{Conservation de la masse} : \quad j\omega \frac{n_i}{n_0} = - \frac{d \ln n_0}{dx} v_{ix} + jk_{\perp} v_{iy} + jk_{\parallel} v_{iz}$$

Par élimination de la vitesse nous obtenons une relation entre densité ionique perturbée  $n_i$  et potentiel électrostatique  $\phi$ ; la densité électronique perturbée  $n_e$  étant quant à elle obtenue en linéarisant la relation d'adiabaticité de Boltzmann:  $n_e = n_0 \exp(e\phi/k_B T_e) - n_0$ . Définissons les fréquences diamagnétiques électronique et ionique :

$$\text{Fréquences diamagnétiques} : \quad \omega_e^* \equiv k_{\perp} V_e^* , \quad \omega_i^* \equiv k_{\perp} V_i^* \quad (8.34)$$

Le modèle que nous venons de développer permet donc d'établir les expressions suivantes des perturbations de densités électronique  $n_e$  et ionique  $n_i$  associées à une perturbation de potentiel  $\phi$  au sein d'un plasma magnétisé présentant un gradient de densité.

$$\begin{aligned}
 \text{Réponse ionique} : \quad \frac{n_i}{n_0} & = \underbrace{\frac{\omega_e^*}{\omega} \frac{e\phi}{k_B T_e}}_{\text{champs croisés}} - \underbrace{k_{\perp}^2 \rho_i^2 \frac{e\phi}{k_B T_e}}_{\text{polarisation}} + \underbrace{\frac{k_{\parallel}^2 C_B^2}{\omega^2} \frac{e\phi}{k_B T_e}}_{\text{inertie}} \\
 \text{Réponse électronique} : \quad \frac{n_e}{n_0} & = \underbrace{\frac{e\phi}{k_B T_e}}_{\text{adiabaticité}}
 \end{aligned}$$

Le problème, à ce stade, nous offre deux équations pour trois inconnues  $n_e$ ,  $n_i$  et  $\phi$ , aussi l'équation de Poisson doit être considérée, mais à basse fréquence le plasma reste quasi-neutre et nous pouvons donc établir l'expression de la relation de dispersion en égalant les deux perturbations de densité:  $n_i(\phi) = n_e(\phi)$  puis en éliminant ainsi le potentiel  $\phi$ .

$$\text{Ondes de dérive} : \quad \omega^2 (1 + k_{\perp}^2 \rho_i^2) - \omega \omega_e^* - k_{\parallel}^2 C_B^2 = 0$$

Les modes de dérives présentent donc deux branches représentées figure (9.9), la branche électronique et la branche ionique.

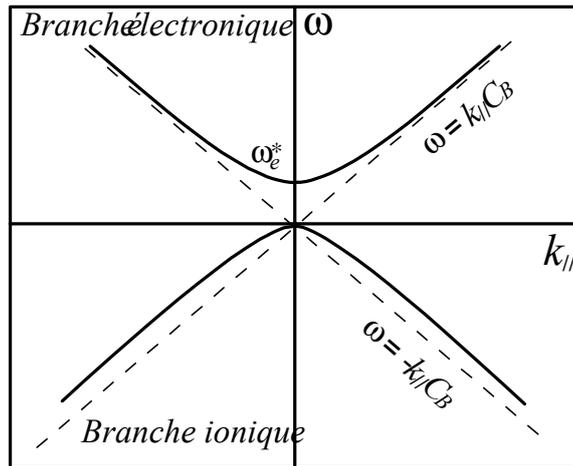


Fig. 9.9 : Branches ionique et électronique de la dispersion des modes de dérives.

La branche électronique  $\omega > 0$  se propage dans la direction  $\mathbf{V}_e^*$  et la branche ionique  $\omega < 0$  se propage dans la direction  $\mathbf{V}_i^*$ . L'usage est de considérer deux asymptotiques : (i) le *mode de dérives* :  $k_{\parallel}^2 C_B^2 \ll \omega^2 \rightarrow \omega = \omega_e^*$  et (ii) le *son ionique* :  $k_{\parallel}^2 C_B^2 \gg \omega^2 \rightarrow \omega = k_{\parallel} C_B$ ; le terme  $k_{\perp}^2 \rho_i^2$ , en général petit, représente une correction en rayon de Larmor fini. L'effet d'un gradient de densité sur les branches acoustiques ioniques  $\omega = \pm k_{\parallel} C_B$  est de lever la dégénérescence en accélérant la branche électronique et en décélérant la branche ionique.

Pour conclure cette analyse des modes de dérives fluides, identifions à présent l'origine dynamique de ce mode. Supposons l'existence à un instant  $t$ , au sein d'un plasma magnétisé, d'une perturbation de potentiel  $\phi(y, t)$  périodique suivant  $y$ . La relation  $n_e/n_0 = e\phi/k_B T_e$  indique que les maximums du potentiel et les maximums de la perturbation de densité électronique sont identiques, ainsi que les minimums.

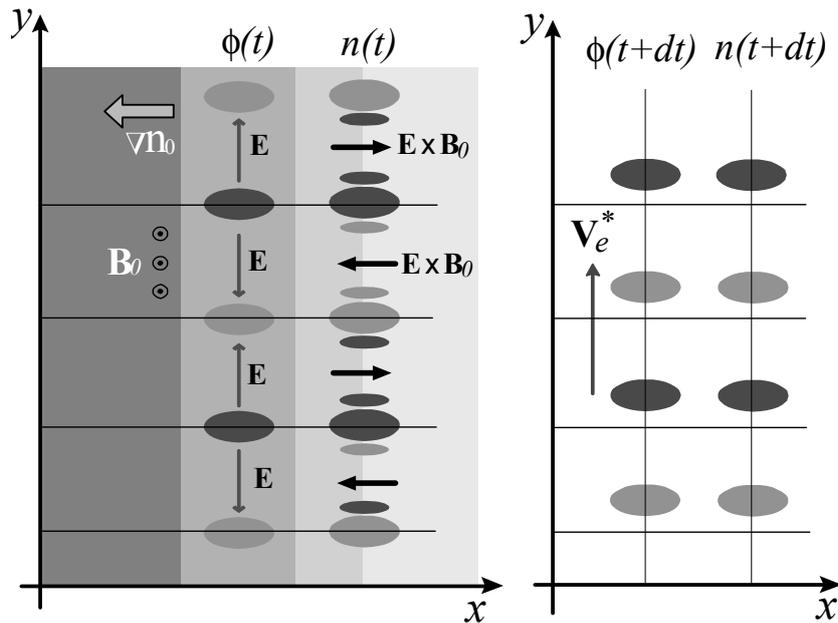


Fig. 9.10 : Mécanisme de propagation des modes de dérives.

Si la densité d'équilibre  $n_0$  présente un gradient suivant  $x$ , perpendiculaire (i) au champ magnétique et (ii) à la direction de périodicité du potentiel  $y$ , la dérive de champs croisés  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \nabla\phi$  suivant  $x$  propage la perturbation de densité en établissant (i) un flux de charges des zones denses vers les zones diluées à l'avant des maximums de densité et (ii) un flux de charges des zones diluées vers les zones denses à l'arrière des maximums de densité, une telle dynamique entraîne donc la propagation de la perturbation de densité suivant  $y$  et par couplage adiabatique la propagation de la perturbation de potentiel  $\phi$ . Le schéma de la figure (9.10) illustre ce mécanisme de propagation. Aux basses fréquences les perturbations électromagnétiques sont de natures : (i) diamagnétique (8.27), (ii) acoustique ionique (8.28) ou (iii) alfvénique (8.29), ces trois types d'excitations sont fortement couplées en présence d'inhomogénéités, nous venons de voir que les modes de dérives et les modes acoustiques sont couplés à travers la propagation parallèle, les modes de dérives et les modes d'Alfvén sont aussi couplés en règle générale dans un tokamak.

Considérons le couplage alfvénique des modes de dérives ; pour ce faire ouvrons la possibilité d'une composante magnétique en introduisant un champ électrique de nature potentielle et inductive :  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ . Un champ magnétique  $B_{\perp}$  accompagne alors nécessairement le mode de dérives.

$$\begin{aligned}
 \text{Champ électrique} & : \mathbf{E} = (E_{\perp} \mathbf{e}_y + E_{\parallel} \mathbf{e}_z) \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \\
 \text{Champ magnétique} & : \mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + B_{\perp} \mathbf{e}_x \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y]
 \end{aligned}$$

Les composantes de la vitesse ionique résultent principalement des dérives de champs croisés et de polarisation où nous prendrons en compte les corrections de rayon de Larmor finis (??). La force le long des lignes de champ doit être complétée par la force de Laplace  $en_i \mathbf{V}_i^* \times B_{\perp} \mathbf{e}_x$  associée au courant diamagnétique.

$$\text{Dérive de champs croisés} : v_{ix} = \frac{e}{m_i \omega_{ci}} J_0(k_{\perp} \rho_i) E_{\perp} \quad (8.35)$$

$$\text{Dérive de polarisation} : v_{iy} = j \frac{\omega e}{m_i \omega_{ci}^2} J_0(k_{\perp} \rho_i) E_{\perp} \quad (8.36)$$

$$\text{Forces de Coulomb et Laplace} : v_{iz} = -j \frac{e}{m_i \omega} E_{\parallel} + j \frac{e V_i^*}{m_i \omega} B_{\perp} \quad (8.37)$$

Pour les électrons l'hypothèse d'adiabaticité,  $\nabla P = en_e \nabla \phi$  reste recevable mais sa formulation implique la prise en compte de la force de Laplace  $-en_e \mathbf{V}_e^* \times B_{\perp} \mathbf{e}_x$  associée au courant diamagnétique:  $\nabla P = -en_e \mathbf{E} - en_e \mathbf{V}_e^* \times B_{\perp} \mathbf{e}_x$ . Linéarisons l'équation de conservation de la charge/masse ionique,  $\partial n_i / \partial t + \nabla \cdot n_0 \mathbf{v}_i = 0$ , afin d'exprimer la perturbation de densité ionique  $n_i$  en fonction des composantes de la vitesse  $\mathbf{v}_i$ :

$$\begin{aligned}
 j\omega \frac{n_i}{n_0} &= \underbrace{\frac{e\omega_e^* J_0}{k_{\perp} k_B T_e} E_{\perp}}_{\text{champs croisés}} - \underbrace{\frac{e\omega k_{\perp} \rho_i^2 J_0}{k_B T_e} E_{\perp}}_{\text{polarisation}} + \underbrace{\frac{ek_{\parallel} C_B^2}{\omega k_B T_e} E_{\parallel}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{\frac{e|\omega_i^*| k_{\parallel} B_{\perp}}{m_i \omega k_{\perp}}}_{\text{Laplace}} \\
 jk_{\parallel} \frac{n_e}{n_0} &= \underbrace{\frac{e}{k_B T_e} E_{\parallel}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\frac{eV_e^*}{k_B T_e} B_{\perp}}_{\text{Laplace}}
 \end{aligned}$$

L'application de l'hypothèse de quasi-neutralité nécessite d'exprimer les perturbations électromagnétiques en fonction d'une composante unique pour permettre l'élimination qui conduit à la dispersion  $\omega(k_{\parallel}, k_{\perp})$ , choisissons la composante  $E_{\perp}$  et exprimons les composantes  $B_{\perp}$  et  $E_{\parallel}$  ainsi que le courant le long des lignes de champ  $J_{\parallel}$  en fonction de  $E_{\perp}$ . Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, complétées par l'hypothèse de stationnarité du courant  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  qui assure la quasi-neutralité, fournissent trois relations entre ces quatre inconnues.

$$\begin{aligned}
 \text{Faraday} & : \omega B_{\perp} = k_{\perp} E_{\parallel} - k_{\parallel} E_{\perp}, \quad \text{Ampère} : B_{\perp} = \frac{\mu_0}{jk_{\perp}} J_{\parallel} \\
 \text{Stationnarité} & : v_{ix} \frac{J_0(k_{\perp} \rho_i) - 1}{J_0(k_{\perp} \rho_i)} \frac{\partial n_0}{\partial x} - jk_{\perp} v_{iy} n_0 - jk_{\parallel} \frac{J_{\parallel}}{e} = 0
 \end{aligned}$$

À l'ordre le plus bas le courant de dérive de champs croisés ionique est compensé par le courant de champs croisés électronique, ainsi seule la fraction  $[J_0(k_{\perp} \rho_i) - 1] / J_0(k_{\perp} \rho_i)$  doit être prise en compte dans le bilan de courant  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ; la substitution des expressions des perturbations de vitesse ionique dans la relation explicitant la stationnarité des courants conduit à la valeur du courant parallèle:  $jk_{\parallel} \mu_0 J_{\parallel} V_A^2 = (|\omega_i^*| + \omega) k_{\perp} E_{\perp}$ , où nous avons considéré  $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$  et  $C_B^2 \ll V_A^2$ . La composante magnétique  $B_{\perp}$  et la composante électrique  $E_{\parallel}$  peuvent être exprimées en fonction de  $E_{\perp}$ . Si le champ électrique était de nature purement potentielle, ses composantes vérifieraient  $E_{\parallel} / E_{\perp} = k_{\parallel} / k_{\perp}$  nous devons donc identifier un terme supplémentaire dans le cadre d'un couplage magnétique. Si le plasma était homogène, l'équation de Maxwell-Ampère  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  relative au courant associé à la vitesse de dérive de polarisation ionique s'exprimerait  $k_{\parallel} B_{\perp} = -\omega E_{\perp} / V_A^2$  c'est effectivement ce terme qui est dominant pour un mode tel que  $\omega > |\omega_i^*|$  et les couplage alfvénique entre composantes potentielle et inductive s'expriment suivant les deux relations:

$$\frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} - \frac{\omega}{k_{\perp}} \frac{|\omega_i^*| + \omega}{k_{\parallel} V_A^2}, \quad \frac{B_{\perp}}{E_{\perp}} = -\frac{|\omega_i^*| + \omega}{k_{\parallel} V_A^2} \quad (8.38)$$

L'analyse des perturbations des densités ionique et électronique peut être restreinte au premier terme assurant un couplage entre la dynamique de dérives électriques et la dynamique alfvénique.

$$\begin{aligned}
 jk_{\perp} \frac{n_i}{n_0} &= \underbrace{\frac{\omega_e^* e E_{\perp}}{\omega k_B T_e}}_{\text{champs croisés}} + \underbrace{\frac{k_{\parallel}^2 C_B^2 e E_{\perp}}{\omega^2 k_B T_e}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{O\left(\frac{C_B^2}{V_A^2}, k_{\perp}^2 \rho_i^2\right)}_{\text{EM et FLR}} \\
 jk_{\perp} \frac{n_e}{n_0} &= \underbrace{\frac{e E_{\perp}}{k_B T_e}}_{\text{adiabaticité}} + \underbrace{\frac{(\omega_e^* - \omega)(|\omega_i^*| + \omega) e E_{\perp}}{k_{\parallel}^2 V_A^2 k_B T_e}}_{\text{EM}}
 \end{aligned}$$

L'hypothèse de quasi-neutralité  $n_i = n_e$  reste valable car elle procède d'un ordering de temps caractéristiques et de longueurs caractéristiques qui est indépendant de la nature potentielle ou inductive du champ électrique considéré.

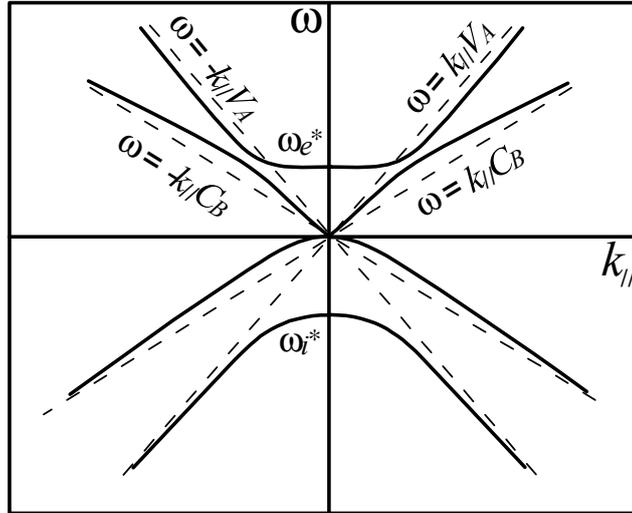


Fig. 9.11 : Couplages alfvéniques des modes de dérives.

Ainsi la relation de dispersion approchée prenant en compte le premier ordre non nul décrivant le couplage magnétique est donnée par :

$$\text{Ondes de dérives-alfvéniques : } \omega^2 - \omega\omega_e^* - k_{\parallel}^2 C_B^2 = \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 V_A^2} (\omega - \omega_e^*) (\omega + |\omega_i^*|)$$

Plusieurs asymptotiques confirment la validité de ce résultat, en particulier les trois branches basses fréquences peuvent être retrouvées.

$$\begin{aligned} \text{Ondes de dérives} & : k_{\parallel} \sim 0, V_A \sim +\infty \rightarrow \omega = \omega_e^* \\ \text{Ondes acoustiques} & : \omega_e^{*2} \ll \omega^2 \ll k_{\parallel}^2 V_A^2 \rightarrow \omega = \pm k_{\parallel} C_B \\ \text{Ondes d'Alfvén} & : \omega^2 \gg k_{\parallel}^2 C_B^2, \omega^2 \gg \omega_e^{*2} \rightarrow \omega = \pm k_{\parallel} V_A \end{aligned}$$

La relation de dispersion complète  $\omega(k_{\parallel}, k_{\perp})$  des branches basses fréquences dans un plasma inhomogène est représentée sur la figure (9.11), la dépendance en  $k_{\perp}$  de cette relation  $\omega(k_{\parallel}, k_{\perp})$  est contenue dans les définitions  $\omega_e^* = k_{\perp} V_e^*$  et  $\omega_i^* = k_{\perp} V_i^*$ . Nous étudierons dans la suite le mode d'interchange résultant de la présence simultanée (i) d'un gradient de champs magnétique de longueur caractéristique  $L_B$  et (ii) d'un gradient de densité de longueur caractéristique  $L_n$ ; ce mode présente la relation de dispersion  $\omega^2 = -(C_B^2/L_B L_n) + k_{\parallel}^2 V_A^2$ , un couplage alfvénique entre dérives et interchanges est donc à l'œuvre dans une géométrie de type tokamak et nécessite une étude approfondie que nous ne développerons pas ici. Notons pour conclure que pour les modes de dérives, de part leur mécanisme de propagation qui s'appuie sur l'échange de vortécité entre les zones dense et diluée, le seuil du régime non linéaire est très bas.

## 8.7 Couplages cinétiques

Le schéma présenté sur la figure (9.12) permet de comprendre la déstabilisation du mode de dérives, c'est-à-dire l'origine des instabilités de dérives. Supposons que le potentiel  $\phi$  et la densité électronique  $n_e$  ne soient plus en phase et que la phase relative entre ces deux variables dynamiques soit  $\theta$ , la densité ionique et le potentiel évoluant en phase.

$$\text{Réponse ionique} : \frac{n_i(\phi)}{n_0} = \frac{\omega_e^*}{\omega} \frac{e\phi}{k_B T_e} \quad (8.39)$$

$$\text{Réponse électronique} : \frac{n_e(\phi)}{n_0} = \frac{e\phi}{k_B T_e} (1 + j\theta) \quad (8.40)$$

Un tel déphasage étant la conséquence d'une friction collisionnelle des électrons ou d'une résonance Landau.

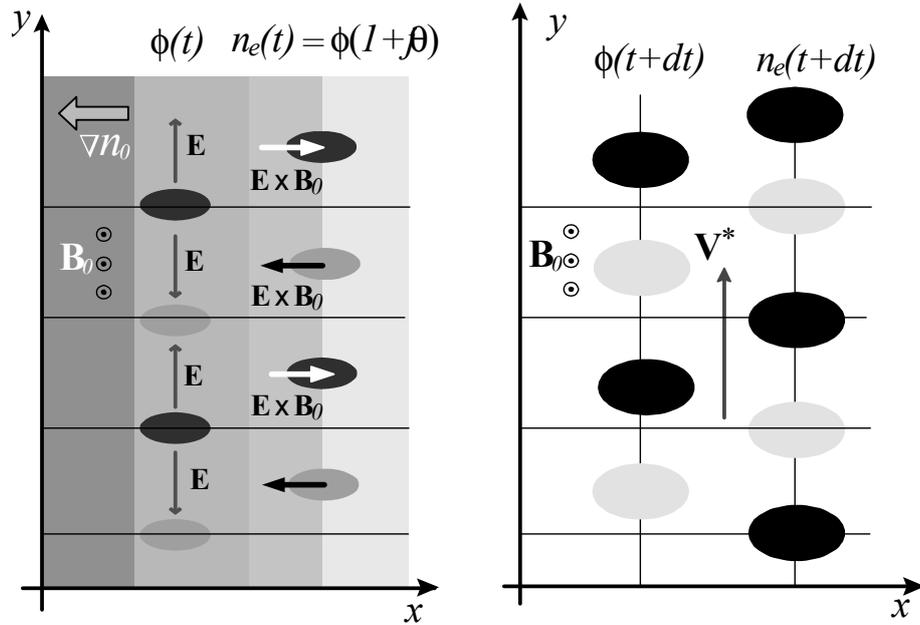


Fig. 9.12 : Mécanisme de déstabilisation des modes de dérives.

Sur le schéma de la figure (9.12) nous voyons que la modulation de densité sera alors en avance (ou en retard) sur la modulation de potentiel, ce positionnement déphasé permet à la dérive de champs croisés  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2 = \mathbf{B} \times \nabla\phi/B^2$  d'alimenter les zones haute densité et de dépeupler les zones basse densité de la perturbation, amplifiant ainsi la modulation initiale de densité. Cette amplification se traduit par l'apparition d'une partie imaginaire dans la relation de dispersion du mode comme le confirme l'évaluation analytique.

$$\text{Quasi-neutralité : } n_i = n_e \rightarrow \omega(1 + j\theta) = \omega_e^* \rightarrow \omega \approx \omega_e^*(1 - j\theta)$$

Le taux de croissance de l'instabilité de dérives est égal à  $\gamma = \theta\omega_e^*$ , le mode se propage en s'amplifiant :  $\exp(\gamma t) \exp[j[\omega_e^*t - k_{\parallel}z - k_{\perp}y]]$ , le mécanisme de déstabilisation est de nature dissipative car la structure réactive du mode est peu modifiée. Notons que le mécanisme d'amplification qui vient d'être décrit peut aussi se présenter comme un mécanisme d'amortissement si le signe du déphasage est inversé. Dans le contexte des équilibres de type tokamak nous verrons que les modes de dérives, localisés par le cisaillement du champ, sont en général excités (déstabilisés) par les résonances Landau électroniques et amortis (stabilisés) par les résonances Landau ioniques.

Pour comprendre l'origine de ce couplage cinétique considérons la réponse cinétique d'une population de particules chargées de charge  $e$  à une perturbation de potentiel  $\phi \exp[j[k_{\parallel}z + k_{\perp}y - \omega t]]$ ; nous avons déjà résolu l'équation de Vlasov dans le cadre du chapitre consacré au formalisme hamiltonien et calculé la réponse cinétique en densité à un potentiel  $\phi \exp[j[k_{\parallel}z + k_{\perp}y - \omega t]]$ , la formule rappelée ci-dessous,

$$\frac{n}{n_0} = -\frac{e\phi}{k_B T} \left[ 1 + (\omega - \omega^*) \sum_N \int d\mathbf{v} \frac{J_N^2(k_{\perp}v_c/\omega_c)}{N\omega_c + k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega} \frac{F_0}{n_0} \right]$$

où  $F_0(v_{\parallel}, v_c)$  est la fonction de distribution des vitesses de la population considérée et  $n_0(x)$  sa densité d'équilibre. Pour les modes de dérives considérés ici la fréquence de dérive  $\omega^*$  est beaucoup plus petite que les fréquences cyclotroniques et la somme sur les harmoniques cyclotroniques peut être restreinte au terme Landau  $N = 0$ , la distribution des vitesses  $F_0(v_{\parallel}, v_c)$  est Maxwellienne et la réponse en densité est donc donnée par la relation :

$$\frac{n}{n_0} = -\frac{e\phi}{k_B T} \left[ 1 + (\omega - \omega^*) \int \frac{2v_c dv_c dv_{\parallel}}{\pi^{\frac{1}{2}} v_T^3} \frac{J_0^2\left(\frac{k_{\perp}v_c}{\omega_c}\right) \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right)}{k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega} \right] \quad (8.41)$$

où  $v^2 = v_c^2 + v_{\parallel}^2$ . Les limites (i) électronique fluide,  $k_{\perp}v_{ce} \ll \omega_{ce} \rightarrow J_0^2 \sim 1$  et  $k_{\parallel}v_{\parallel e} \gg \omega$ , et (ii) ionique fluide,  $k_{\perp}v_{ci} \ll \omega_c \rightarrow J_0^2 \sim 1$  et  $k_{\parallel}v_{\parallel i} \ll \omega$ , conduisent aux relations précédentes et offrent le cadre de développements adéquats pour évaluer les effets de rayons de Larmor finis.

$$\text{Adiabaticité électronique : } k_{\perp}v_c \ll \omega_c, k_{\parallel}v_{\parallel} \gg \omega \rightarrow \frac{n_e}{n_0} \sim \frac{e\phi}{k_B T_e} + \dots$$

$$\text{Dérives ioniques : } k_{\perp}v_c \ll \omega_c, k_{\parallel}v_{\parallel} \ll \omega \rightarrow \frac{n_i}{n_0} \sim -\frac{\omega_i^*}{\omega} \frac{e\phi}{k_B T_i} + \dots$$

Dans le cadre des paragraphes précédents nous avons étudié les modes cinétiques de Bernstein et introduit dans ce contexte les fonctions : (i)  $\sqrt{\pi}Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2/[u - (x + j\eta)])$  et (ii)  $I_0(y^2/x^2) x^{-2} \exp(y^2/x^2) = \int_0^{+\infty} u \exp(-x^2 u^2/2) J_0^2(yu) du$ . Sur la base de ces définitions la perturbation de densité (8.41) peut s'exprimer comme :  $e\phi[1 + (1 - \omega^*/\omega) a \exp(-b) Z(a) I_0(b)] / k_B T$  où nous avons introduit les paramètres sans dimension :  $a \equiv \omega/k_{\parallel} v_T \sim v_{\varphi_{\parallel}}/v_T$  et  $b \equiv k_{\perp}^2 v_T^2 / 2\omega_c^2 \sim \rho_L^2 / \lambda_{\perp}^2$ . La contrainte de quasi-neutralité  $n_e = n_i$ , propre aux modes basses fréquences, permet d'exprimer la relation de dispersion cinétique des modes de dérives électrostatiques sous forme d'une équation transcendante que nous allons analyser.

$$\text{Dispersion : } \sum_{s=i,e} 1 + \left(1 - \frac{\omega_s^*}{\omega}\right) a_s Z(a_s) \exp(-b_s) I_0(b_s) = 0 \quad (8.42)$$

Considérons, dans un premier temps, l'impact de la résonance Landau électronique sur la relation de dispersion des modes de dérives et négligeons le couplage avec les ions que nous supposons en régime fluide. La vitesse de phase le long des lignes de champ de l'onde de dérives est de l'ordre de grandeur ou inférieur à la vitesse thermique électronique et beaucoup plus grande que la vitesse thermique ionique, ce régime correspond à l'ordering  $a_e \ll 1$  et  $a_i \gg 1$ .

Pour des pulsations typiques de quelques centaines de kilohertz, des longueurs d'onde perpendiculaires de quelques centimètres et une température de l'ordre de 1 KeV, cet ordering est valide pour des longueurs d'ondes parallèles de quelques dizaines de mètres. Ce régime de couplages résonnant avec les électrons et adiabatique avec les ions est donc réaliste et les fonctions  $Z$  et  $I_0$  peuvent être approchées par les développements suivants :  $a_e Z(a_e) \approx j a_e \sqrt{\pi}$ ,  $a_i Z(a_i) \approx -1$ ,  $\exp(-b_e) I_0(b_e) \approx 1$  et  $\exp(-b_i) I_0(b_i) \approx 1 - b_i$ . La relation générale (8.42) se simplifie alors considérablement et se réduit à une équation algébrique du deuxième degré.

$$\underbrace{\omega + j\sqrt{\pi}(\omega - \omega_e^*) \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Te}}}_{\text{électrons résonnants}} + \underbrace{\omega_i^* + (\omega - \omega_i^*) \frac{k_{\perp}^2 v_{Ti}^2}{2\omega_{ci}^2}}_{\text{ions adiabatiques}} = 0 \quad (8.43)$$

La racine associée au modes de dérives présente une partie imaginaire décrivant le taux de croissance du mode instable ainsi identifié :  $\omega \approx \omega_e^* (1 - k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 / \omega_{ci}^2) + j\sqrt{\pi} k_{\perp}^2 v_{Ti}^2 \omega_e^* / k_{\parallel} v_{Te} \omega_{ci}^2$ . Considérons, dans un deuxième temps, le régime où une fraction significative d'ions entrent en résonance avec le mode, c'est-à-dire lorsque la vitesse de phase de l'onde est de l'ordre de grandeur de la vitesse thermique ionique,  $a_i \approx 1$ ; les fonctions  $Z$  et  $I_0$  peuvent être approchées par les développements suivants :  $a_e Z(a_e) \approx j a_e \sqrt{\pi}$ ,  $a_i Z(a_i) \approx -1 + j a_i \sqrt{\pi} \exp(-a_i^2)$ ,  $\exp(-b_e) I_0(b_e) \approx 1$ ,  $\exp(-b_i) I_0(b_i) \approx 1 - b_i$ . La partie imaginaire de la relation de dispersion ainsi obtenue,  $\text{Im } \omega = \gamma_e + \gamma_i$ , apparaît comme la somme d'une contribution électronique  $\gamma_e$  positive plus une contribution ionique  $\gamma_i$  négative.

$$\begin{aligned} \text{Emission électronique} & : \frac{\gamma_e}{\omega_e^*} \approx \sqrt{\pi} \frac{\omega_e^* - \omega}{k_{\parallel} v_{Te}} \\ \text{Absorption ionique} & : \frac{\gamma_i}{\omega_i^*} \approx \sqrt{\pi} \frac{\omega - \omega_i^*}{k_{\parallel} v_{Ti}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}\right) \end{aligned}$$

La résonance Landau électronique convertit donc l'énergie libre du gradient de densité en énergie électromagnétique et la résonance Landau ionique absorbe cette énergie électromagnétique, la déstabilisation cinétique des modes de dérives suivant ce schéma a reçu le nom d'*instabilité universelle*.

## 8.8 Modes de gradient de température

Les modes de dérives peuvent être déstabilisés par des résonances Landau ou par la dissipation collisionnelle; ils appartiennent donc à la classe des instabilités dissipatives. Il existe aussi des modes se rattachant aux modes de dérives qui peuvent présenter les caractéristiques des instabilités réactives, les modes de gradient de température. Nous allons brièvement les étudier dans ce paragraphe.

Considérons la configuration illustrée sur la figure (9.15) représentant un plasma de densité et température ionique inhomogènes  $n_0(x)$ ,  $T_i(x)$  plongé dans un champ magnétique homogène  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ . Cette configuration est caractérisée par le rapport des longueurs de gradient des profils de température et densité ioniques.

$$\text{Paramètre } \eta : \quad \eta_i \equiv \frac{|d \ln T_i / dx|}{|d \ln n_0 / dx|} \quad (8.44)$$

Soit une perturbation fluide harmonique de densité  $n$ , potentiel  $\phi$  et pression  $p$  :

$$\text{Densité} : \quad n_0(x) + n \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \quad (8.45)$$

$$\text{Pression} : \quad P_0(x) + p \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \quad (8.46)$$

$$\text{Potential} : \quad \phi \exp j [\omega t - k_{\parallel} z - k_{\perp} y] \quad (8.47)$$

dont la pulsation  $\omega$  est supposée suffisamment grande devant le taux de thermalisation par conduction pour garantir l'évolution adiabatique du fluide ionique :  $\partial \ln(p_i n_i^{-5/3}) / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \ln(p_i n_i^{-5/3}) = 0$ , cette pulsation  $\omega$  est aussi supposée suffisamment petite devant la fréquence cyclotronique ionique pour assurer la validité de la théorie des dérives.

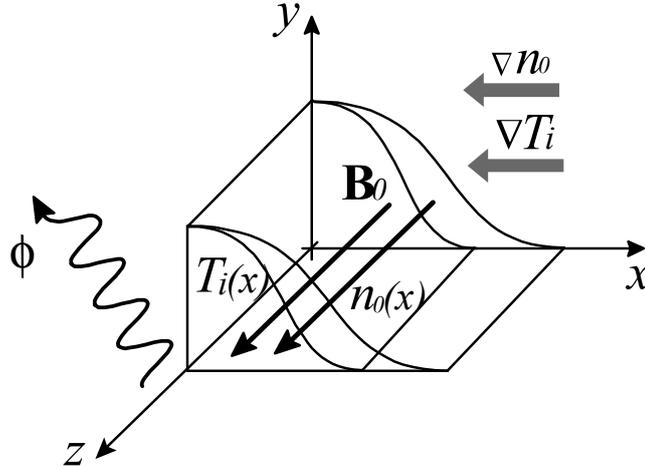


Fig. 9.15 : Géométrie des modes de gradient de température.

La réponse ionique associée à cette perturbation de potentiel et pression est donc donnée par les relations :

$$\begin{aligned}
 \text{Dérive ionique} & : v_{ix} = j \frac{k_{\perp}}{B_0} \phi \\
 \text{Inertie ionique} & : m_i \omega v_{iz} = k_{\parallel} e \phi + k_{\parallel} \frac{p_i}{n_0} \\
 \text{Adiabaticité ionique} & : \omega \left( \frac{p_i}{P_0} - \frac{5 n_i}{3 n_0} \right) = -\frac{k_{\perp}}{B_0} \left( \frac{dT_i/dx}{T_i} - \frac{2 dn_0/dx}{n_0} \right) \phi
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'équation d'état  $p_i = n_i k_B T_i$ . Les deux densités ionique  $n_i$  et électronique  $n_e$ , la pression ionique  $p_i$  et le potentiel électrostatique  $\phi$  vérifient donc quatre équations linéaires homogènes dont la condition de compatibilité détermine la relation de dispersion du mode de gradient de température ionique.

$$\begin{aligned}
 \text{Adiabaticité électronique} & : \frac{n_e}{n_0} = \frac{e \phi}{k_B T_e} \\
 \text{Adiabaticité ionique} & : \frac{p_i}{P_0} = \frac{5 n_i}{3 n_0} + \frac{\omega_e^*}{\omega} \left( \eta_i - \frac{2}{3} \right) \frac{e \phi}{k_B T_e} \\
 \text{Dynamique ionique} & : \frac{n_i}{n_0} = \underbrace{\frac{\omega_e^*}{\omega} \frac{e \phi}{k_B T_e}}_{\text{champs croisés}} + \underbrace{\frac{k_{\parallel}^2 C_B^2}{\omega^2} \frac{e \phi}{k_B T_e}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{\frac{k_{\perp}^2}{\omega^2} \frac{p_i}{m_i n_0}}_{\text{pression}}
 \end{aligned}$$

La quatrième relation, la quasi-neutralité  $n_e = n_i$ , conduit directement à la dispersion des modes dits  $\eta_i$ .

$$\text{Modes } \eta_i : \omega^2 - \omega \omega_e^* - k_{\parallel}^2 C_B^2 \approx k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 \left[ \frac{5}{3} + \frac{\omega_e^*}{\omega} \left( \eta_i - \frac{2}{3} \right) \right]$$

Les modes basses fréquences tels que  $\omega \ll \omega_e^*$  présentent alors une pulsation dont le carré est négatif  $\omega^2 = -k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 (\eta_i - 2/3)$  indiquant l'apparition d'une instabilité réactive si  $\eta_i - 2/3 > 0$ , notons que nous avons déjà identifié ce critère (8.21) dans le contexte d'une analyse thermodynamique de la stabilité de deux gradients.

Les modes de gradient de température nécessiteraient les mêmes développements que les modes de dérives, en particulier l'étude de la dispersion cinétique et de l'impact du cisaillement de champ magnétique révélerait une parenté avec ces derniers. Nous n'explorerons pas les effets de la géométrie sur les modes de gradient de température, aussi appelés ITG (Ions Température Gradient) mais noterons que deux branches doivent être considérées : (i) une branche cylindrique dont la source d'énergie libre et la dynamique sont semblables au modèle cartésien précédent et rattacherait les ITG aux modes de dérives, (ii) une branche toroïdale, où les effets de courbure du champ sont à l'œuvre ce qui indique une parenté plus affirmée avec les modes de ballonnement d'interchange que nous allons étudier dans le prochain paragraphe. Notons enfin que les modes ETG (Electrons Température Gradients) sont similaires aux modes ITG au rapport de masse  $\sqrt{m_i/m_e} \sim 60$  près qui intervient pour diminuer la longueur d'onde et augmenter le taux de croissance au regard des valeurs

correspondantes pour les ITG. La théorie des ETG est moins développée que celle des autres modes, mais dans un réacteur le chauffage résultant du ralentissement des alphas sera préférentiellement électronique et les effets du gradient de température électronique domineront probablement le spectre basses fréquences des microinstabilités; et les effets de particules rapides le spectre basses fréquences des macroinstabilités. Nous allons maintenant considérer et analyser les modes d'interchange, ou d'échange, qui dans leur version la plus simple appartiennent à la classe des instabilités réactives.

## 8.9 Instabilités d'Interchange

Dans le paragraphe précédent nous avons identifié les modes de dérives associés au gradient de densité et analysé leurs déstabilisations à travers les résonances Landau électroniques; puis nous avons étudié succinctement l'instabilité réactive résultant de la présence simultanée d'un gradient de densité et d'un gradient de température. Une autre instabilité réactive majeure est à l'œuvre dans les tokamaks, l'instabilité d'interchange, ou d'échange, qui est de nature magnétohydrodynamique et est (i) stabilisée par le cisaillement des lignes de champ et (ii) localisée par la courbure côté bas champ.

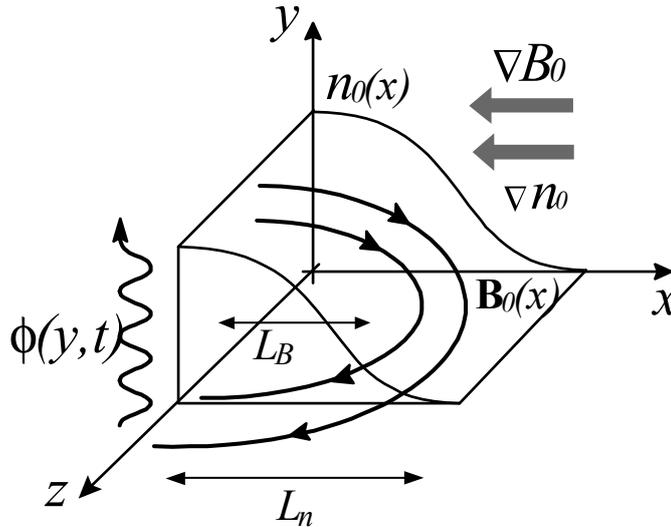


Fig. 9.16 : Géométrie de l'interchange.

Considérons la configuration d'équilibre représentée sur la figure (9.16), les deux sources d'énergie libre associées à cette configuration sont: (i) le gradient de champ magnétique et (ii) le gradient de densité, afin de quantifier ces sources introduisons les longueurs de gradient  $L_n$  et  $L_B$ .

$$\mathbf{B}_0(x) = B_0(x) \mathbf{e}_z \rightarrow L_B^{-1} = \left| \frac{d \ln B_0}{dx} \right|, \quad n_0(x) \rightarrow L_n^{-1} = \left| \frac{d \ln n_0}{dx} \right|$$

Pour les plasmas présentant un faible  $\beta$  le gradient de champ  $\nabla B$  et le rayon de courbure des lignes de champ  $R$  sont liés par la relation  $\mathbf{b} \times \nabla B = \mathbf{B} \times \mathbf{n}/R$ ; ainsi pour un tokamak de grand rayon  $R$  et de petit rayon  $a$ :  $L_B \sim R$  et  $L_n \sim a$ .

Cette configuration d'équilibre est perturbée par des fluctuations de densité  $n$  et potentiel  $\phi$  harmoniques.

$$\text{Potentiel} : \phi \exp j(\omega t - k_{\perp} y), \quad \text{Densité} : n_i \exp j(\omega t - k_{\perp} y) \quad (8.48)$$

Les ions répondent au potentiel  $\phi$  à travers une dérive de champs croisés suivant  $x$  et une dérive de polarisation suivant  $y$ , puis l'équation de conservation des ions permet d'exprimer la variation de densité ionique  $n_i$  en fonction de la fluctuation de potentiel  $\phi$ .

$$\text{Dérive de champs croisés} : v_{ix} = j \frac{k_{\perp}}{B_0} \phi \quad (8.49)$$

$$\text{Conservation du nombre d'ions} : n_i = - \frac{k_{\perp}}{\omega B_0} \frac{dn_0}{dx} \phi \quad (8.50)$$

L'expression de la quasi-neutralité prend la forme de la relation de stationnarité des courants,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , et nécessite donc l'évaluation du courant de polarisation ionique  $J_{py}$  et du courant diamagnétique  $\mathbf{J}^* = \mathbf{b} \times k_B T \nabla n_i / B = j k_B (T_e + T_i) k_{\perp} n_i / B_0 \mathbf{e}_x$ . Pour un plasma de tokamak  $T_e = T_i$  et le courant harmonique diamagnétique  $J_x^*$  est donc d'origines électronique et ionique, par contre le courant de polarisation est uniquement ionique.

$$\text{Courant diamagnétique} : J_x^* = j \frac{k_B (T_e + T_i)}{B_0} k_{\perp} n_i$$

$$\text{Courant de polarisation} : J_{py} = \varepsilon_0 \frac{\omega^2 c^2}{V_A^2 \frac{dn_0}{dx}} B_0 n_i$$

L'élimination de la densité  $n_i$  entre ces deux relations par l'expression de la quasi-neutralité conduit à la dispersion des modes d'interchange :

$$\frac{\partial J_{py}}{\partial y} + \frac{\partial J_x^*}{\partial x} = 0 \rightarrow \omega^2 \phi + \frac{k_B (T_e + T_i) \mu_0 V_A^2}{B_0^3} \frac{dB_0}{dx} \frac{dn_0}{dx} \phi = 0$$

Définissons le taux de croissance de l'interchange  $\gamma_0$  suivant la relation :

$$\gamma_0^2 \equiv \frac{C_B^2}{L_B L_n} \frac{\nabla B_0 \cdot \nabla n_0}{|\nabla B_0 \cdot \nabla n_0|} \approx \beta \frac{V_A^2}{L_B L_n} \frac{\nabla B_0 \cdot \nabla n_0}{|\nabla B_0 \cdot \nabla n_0|} \rightarrow \omega^2 \phi + \gamma_0^2 \phi = 0$$

où nous avons utilisé la définition  $C_B^2 = k_B (T_e + T_i) / m_i$ .

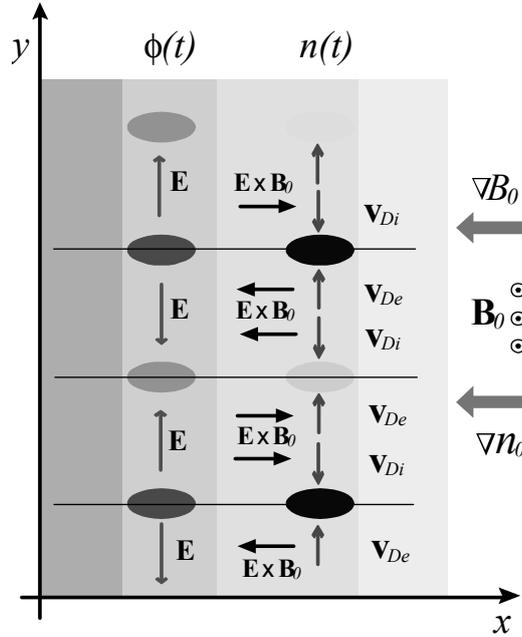


Fig. 9.17 : Mécanisme de déstabilisation de l'interchange.

L'équation d'évolution de la fluctuation de potentiel  $\phi$  prend alors une forme simple traduisant la présence d'une instabilité réactive. Sous la condition  $\nabla \ln B_0 \cdot \nabla \ln n_0 > 0$  les fluctuations croissent exponentiellement. L'instabilité d'échange, ou interchange, provient de la relaxation de l'énergie libre des gradients à travers l'échange de tubes de flux et est parfois dénommée *instabilité de flûtes* pour les géométries de confinement de type miroir où elle est stabilisée par la modification de la courbure induite par les *barres de Ioffe*. Pour la géométrie de confinement de type tokamak les gradients de pression et champ sont dirigés dans le même sens côté bas champ et en sens opposé côté fort champ, l'échange est donc localisé du côté bas champ et induit un *ballonnement* des surface magnétiques, figure (9.18).

L'origine de cette instabilité peut être identifiée en analysant les mouvements du plasma représentés sur la figure (9.17). Soit, à l'instant  $t$ , une fluctuation de potentiel  $\phi$  périodique suivant la direction  $y$ . L'adiabaticité électronique et la quasi-neutralité implique l'identité des maxima de potentiel et des maxima de densité. La dérive électrique  $\mathbf{V}_E$  associée au champ  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  alimente en particules le front des maxima de densité et appauvrit l'arrière de ces maxima. Une telle dynamique donnait lieu à la propagation des modes de dérives, mais ici il nous faut considérer l'impact du gradient et de la courbure du champ magnétique à travers les flux engendrés par les dérives magnétiques  $\mathbf{V}_D$ .

$$\text{Vitesse de dérive électrique} : \quad \mathbf{V}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0}{B^2} = \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla\phi}{B^2} \quad (8.51)$$

$$\text{Vitesse de dérive magnétique} : \quad \mathbf{V}_D = \left( mv_{\parallel}^2 + \frac{mv_c^2}{2} \right) \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla B_0}{eB_0^3} \quad (8.52)$$

$$\text{Vitesse diamagnétique} : \quad \mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla P}{neB_0^2} \quad (8.53)$$

Le flux associé à  $\mathbf{V}_E$  est ambipolaire, mais comme le montre la figure (9.17) les dérives magnétiques  $\mathbf{V}_D$  sont polarisantes et séparent un flux ionique vers les maxima et un flux électronique vers les minima. Ainsi (i) les maxima et minima de potentiel se trouvent renforcés et (ii) la propagation des perturbations à la vitesse diamagnétique  $\mathbf{V}^*$  est inhibée.

Nous retrouvons donc l'image d'une instabilité réactive  $\omega = j\gamma_0$ . Cette image de l'amplification d'une perturbation initiale par les dérivés magnétiques permet de formuler un critère d'instabilité confirmant les résultats déjà établis.

$$\text{Instabilité d'interchange} : \mathbf{V}_{De} \cdot \mathbf{V}_e^* > 0 \longleftrightarrow \mathbf{V}_{Di} \cdot \mathbf{V}_i^* > 0 \longleftrightarrow \nabla B_0 \cdot \nabla P > 0$$

Notons que nous avons déjà établi ce critère dans le contexte d'une analyse thermodynamique de la stabilité de deux gradients.

## 8.10 Instabilités de Torsion

L'instabilité de torsion (*kink*) est une instabilité MHD dont l'origine physique n'est pas à rechercher dans les mouvements de dérivés (électriques et magnétiques) comme pour les modes précédents, mais dans la tendance que présente un courant donné à offrir une surface de captation du flux magnétique maximum lorsque il est plongé dans un champ fixe.

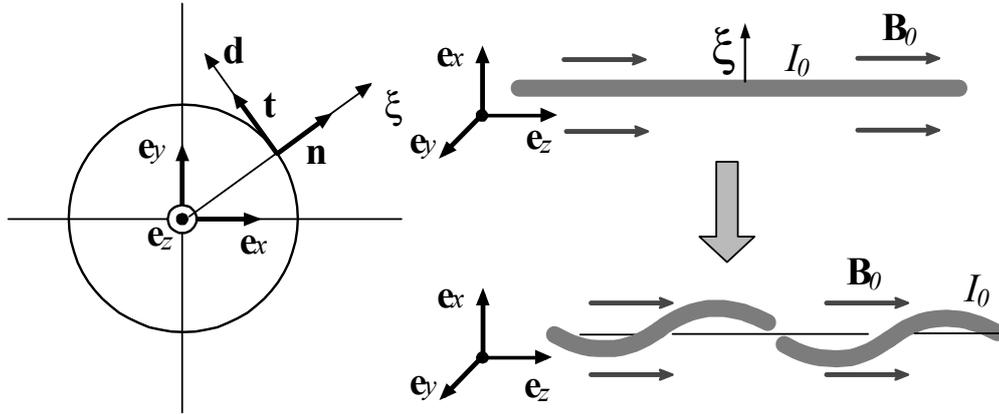


Fig. 9.19 : Instabilité de torsion d'un fil.

La règle du flux maximum énonce que la position d'équilibre d'une boucle de courant plongée dans un champ magnétique est atteinte lorsque le flux à travers cette boucle est maximum par rapport aux positions voisines. Cette règle n'est pas restreinte aux topologies en boucles mais est générale : un fil souple parcouru par un courant  $I_0$ , plongé dans un champ magnétique  $B_0$ , présentera une tendance naturelle à rechercher des formes et positions telles que le flux magnétique à travers son circuit soit maximum.

Appliquée aux cas d'un fil rectiligne initialement parallèle aux lignes de champ d'un champ homogène, cette règle conduit à l'instabilité de torsion. Considérons la figure (9.19) où nous avons représenté un fil souple parcouru par un courant  $I_0$  parallèle à un champ homogène  $B_0 \mathbf{e}_z$ , les mouvements du fil sont repérés sur une base cartésienne  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ . Si ce fil est initialement déplacé perpendiculairement au champ  $B_0 \mathbf{e}_z$  suivant la loi :  $\boldsymbol{\xi}(z, t) = \xi(t)[\cos k_{\parallel} z \mathbf{e}_x + \sin k_{\parallel} z \mathbf{e}_y] = \xi(t) \mathbf{n}(z)$ , alors la projection  $\mathbf{d} = d\boldsymbol{\xi}/dz$  de ce déplacement dans le plan  $[x, y]$  est donnée par la relation  $\mathbf{d} = k_{\parallel} \xi(t)[- \sin k_{\parallel} z \mathbf{e}_x + \cos k_{\parallel} z \mathbf{e}_y]$ . Ainsi apparaît un courant  $I_0 \mathbf{d}$  dans le plan  $[x, y]$  et la force de Laplace sur le fil, initialement nulle, présente une densité linéique  $d\mathbf{F}/dz$  non nulle.

$$\frac{d\mathbf{F}}{dz} = I_0 (\mathbf{d} + \mathbf{e}_z) \times B_0 \mathbf{e}_z = I_0 B_0 k_{\parallel} \xi [- \sin k_{\parallel} z \mathbf{e}_x + \cos k_{\parallel} z \mathbf{e}_y] \times \mathbf{e}_z$$

Le fil présente une tendance à l'enroulement autour du champ  $B_0 \mathbf{e}_z$  pour la recherche du flux maximum ; l'évolution temporelle de cette tendance est quantifiée par la loi de Newton appliquée à un élément de longueur  $dz$ .

$$\frac{d\mathbf{F}}{dz} \cdot \mathbf{n} = \frac{dm}{dz} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = I_0 B_0 k_{\parallel} \xi \rightarrow \gamma^2 = \frac{I_0 B_0 k_{\parallel}}{dm/dz} \quad (8.54)$$

Nous sommes donc en présence d'une croissance exponentielle  $\exp \gamma t$  du déplacement  $\boldsymbol{\xi}$ , c'est-à-dire d'une instabilité d'enroulement ou instabilité de torsion. La densité linéique de masse  $dm/dz$  peut être ramenée à la densité de masse  $n_0 m_i$  à travers les relations :  $I_0 dz/dm = dI/dy dx (n_0 m_i) \rightarrow \gamma^2 = B_0 k_{\parallel} J/n_0 m_i$ , c'est cette dernière forme que nous retrouverons comme taux de croissance de l'instabilité de torsion dans un plasma plongé dans un champ magnétique et présentant un gradient de densité volumique de courant.

Considérons la configuration représentée sur la figure (9.20) : un plasma confiné par un champ magnétique inhomogène  $\mathbf{B}_0(x) = B_0(x) \mathbf{e}_z$  et supportant un courant  $\mathbf{J}_0(x) = J_0(x) \mathbf{e}_z$ . Caractérisons cette configuration par les trois longueurs de gradients  $L_B$ ,  $L_n$  et  $L_J$  :

$$\text{Champ} : \mathbf{B}_0(x) = B_0(x) \mathbf{e}_z \rightarrow L_B^{-1} = \left| \frac{d \ln B_0}{dx} \right| \quad (8.55)$$



Ce terme, lorsque il est déstabilisant, puise sont énergie libre dans le gradient de courant  $dJ_0/dx$ .

$$-\varepsilon_0 \frac{\omega^2 c^2}{V_A^2} \phi - \frac{k_B (T_e + T_i)}{B_0^3} \frac{dB_0}{dx} \frac{dn_0}{dx} \phi + \frac{k_{\parallel}^2}{\mu_0} \phi + \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \frac{dJ_0}{dx} \frac{\phi}{B_0} = 0$$

Cette dispersion des modes de torsion fait apparaître un terme similaire au facteur identifié lors de l'étude de l'enroulement d'un fil autour d'un champ,  $B_0 k_{\parallel} J/n_0 m_i$ , confirmant ainsi l'origine physique de la déstabilisation associée à la règle du flux maximum.

$$\omega^2 = -\frac{C_B^2}{L_n L_B} + \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \frac{B_0 J_0}{n_0 m_i L_J} + k_{\parallel}^2 V_A^2 \quad (8.58)$$

Comme dans le cas des modes de dérives et d'interchange nous allons adapter cette formule cartésienne au cas de la géométrie tokamak puis développer une étude prenant en compte les effets de géométrie de façon plus satisfaisante qu'une simple transcription par analogie. Dans une géométrie tokamak le vecteur d'onde  $k_{\parallel}$  est fonction du petit rayon  $r$  car nous devons considérer des modes périodiques poloïdalement et toroïdalement.

$$\exp j(\omega t - m\theta - n\varphi) \rightarrow k_{\parallel}(r) \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 / B_0 = \frac{1}{R} \left( \frac{m}{q(r)} - n \right)$$

Supposons que le terme de torsion soit dominant devant les termes d'interchange et alfvénique et considérons les ordres de grandeur approchés:  $B_0/q_a R \sim \mu_0 J_0$  et  $k_{\parallel}/k_{\perp} \sim -a/q_a R$ , où  $q_a$  est le facteur de sécurité en périphérie du tore de plasma.

$$\mu_0 \frac{V_A^2}{B_0} \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \frac{dJ_0}{dx} \xrightarrow{B_0/q_a R \sim \mu_0 J_0} \frac{V_A^2}{q_a R a} \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \xrightarrow{k_{\parallel}/k_{\perp} \sim a/R} \frac{V_A^2}{q_a^2 R^2} \quad (8.59)$$

Sous ces hypothèses nous obtenons l'ordre de grandeur suivant du taux de croissance  $\gamma$  d'un mode de torsion dans un tokamak:  $\gamma \approx V_A/q_a R$ . Malgré la rudesse des approximations, cet ordre de grandeur est recevable et nous allons voir que la relation de dispersion des modes de torsion le long d'une colonne cylindrique est en fait donnée par:  $\omega^2 = V_A^2 (m - nq_a) (m - nq_a - 1) / q_a^2 R^2$ .

# Chapitre 9

## Confinement and relaxation

### 9.1 Principles of adiabatic confinement

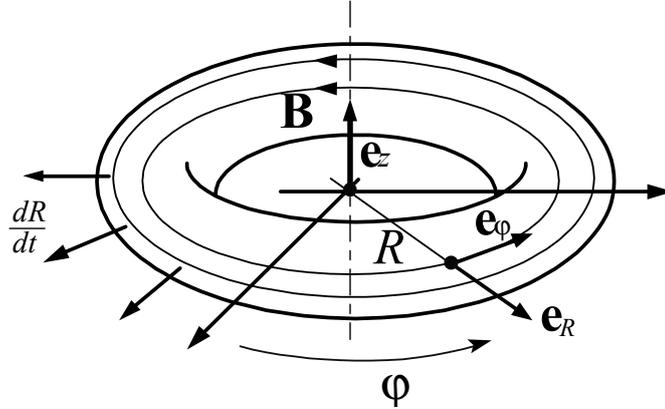
Décrivons un champ magnétique toroïdal sur une base cylindrique  $[\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z]$ , la position d'un point étant repérée par  $[R, \varphi, z]$  les coordonnées radiales, angulaire et axiale.

$$\text{Champ toroïdal: } \mathbf{B} = B_\varphi(R) \mathbf{e}_\varphi = B_0 \frac{R_0}{R} \mathbf{e}_\varphi$$

Le mouvement d'une particule chargée est la combinaison d'une translation le long des lignes de champ et d'une rotation autour des lignes de champ, et d'un mouvement de dérives perpendiculairement au champ:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_c(t) + \mathbf{v}_D$ , où la vitesse de dérive  $\mathbf{v}_D$  a pour expression:

$$\mathbf{v}_D = \frac{v_\parallel^2 + \frac{v_c^2}{2}}{R_0 \omega_{c0}} \mathbf{e}_z \rightarrow \frac{\langle \mathbf{v}_D \rangle}{v_T} \approx \frac{\rho_L}{R_0} \mathbf{e}_z$$

Notons que le théorème d'Ampère implique l'invariance du produit:  $R_0 \omega_{c0} = R \omega_c$ .



Compte tenu du signe de leurs charges respectives les électrons dérivent vers le bas et les ions vers le haut ( $B_\varphi > 0$ ); ce mouvement lent de séparation des charges engendre un champ électrique  $\mathbf{E}$  solution de l'équation de Maxwell-Ampère en régime quasi-électrostatique:  $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ .

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -n (q_i \langle \mathbf{v}_{Di} \rangle + q_e \langle \mathbf{v}_{De} \rangle)$$

Les populations électronique et ionique étant à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$  la valeur moyenne des vitesses parallèle et cyclotronique sont données par  $\langle m v_\parallel^2 \rangle = \langle m v_c^2 / 2 \rangle = k_B T$ .

Le champ électrique axial résultant de la polarisation du plasma croît donc linéairement avec le temps et engendre une dérive de champs croisés radiale  $\mathbf{v}_{out}$ .

$$q \mathbf{E} = -\frac{4k_B T}{R_0} \frac{\omega_{p0}^2}{\omega_{c0}} t \mathbf{e}_z \rightarrow \mathbf{v}_{out} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{4k_B T}{q R_0 B} \frac{\omega_{p0}^2 t}{\omega_{c0}} \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z$$

La vitesse d'éjection radiale du plasma est donc une fonction linéaire du temps.

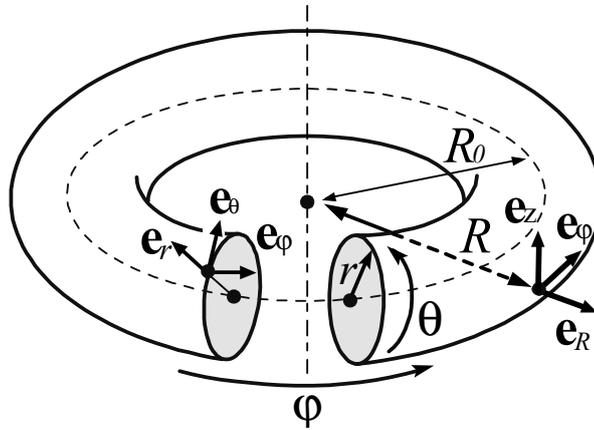
$$\text{Ejection radiale: } \frac{dR}{dt} = \frac{4k_B T}{q B R_0} \frac{\omega_{p0}^2}{\omega_{c0}} t \rightarrow \frac{R^2 - R_0^2}{2} \sim \frac{\omega_{p0}^2}{\omega_{c0}^2} v_T^2 t^2 \sim v_T^2 t^2$$

Dans un plasma de tokamak la fréquence cyclotronique électronique est de l'ordre de grandeur de la fréquence de Langmuir,  $\omega_{c0} \sim \omega_{p0}$ , le temps caractéristique d'éjection radiale est donc bien en deçà du temps de confinement nécessaire pour satisfaire le critère d'allumage thermonucléaire.

Bien que les lignes de champ soient fermées et que les particules présentent une tendance à suivre les lignes de champ, un champ purement toroïdal ne permet pas de confiner un plasma car la vitesse de dérive axiale engendre un champ électrique axial qui génère une dérive radiale éjectant le plasma en un temps de l'ordre du temps de transit toroïdal à la vitesse thermique. Il est donc nécessaire de compléter ce champ par une composante supplémentaire inhibant la séparation de charges. Un tel mécanisme de court-circuit, permettant d'annuler le courant de polarisation  $nq \langle \mathbf{v}_D \rangle$ , peut être mis en œuvre en complétant le champ toroïdal  $B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$  par un champ poloïdal  $B_\theta \mathbf{e}_\theta$ . Les lignes de champ seront des hélices s'enroulant sur des tores emboîtés et le courant de polarisation sera court-circuité à travers la connexion haut-bas ainsi réalisée. Ce principe de confinement des orbites des particules chargées dans un tokamak doit être validé par une analyse détaillée de la nature des trajectoires dans une configuration du type :

$$\text{Champ toroïdal et poloïdal : } \mathbf{B} = B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi = B_\theta (R, r) \mathbf{e}_\theta + B_0 \frac{R_0}{R} \mathbf{e}_\varphi$$

Pour mener à bien cette analyse les coordonnées cylindriques précédentes  $[R, \varphi, z]$  associées à la base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z]$  ne sont pas adaptées ; nous utiliserons les coordonnées toroïdales cartésiennes  $[r = \sqrt{(R - R_0)^2 + z^2}, \theta = \arctan z / (R - R_0), \varphi]$  où  $R_0$  est le grand rayon du tore conformément à la figure.



Afin de simplifier l'analyse nous supposons que les surfaces magnétiques sur lesquelles s'appuient les lignes de champ sont des tores concentriques de sections circulaires. Considérons un modèle simple où la composante poloïdale et la composante toroïdale sont données par :

$$\begin{aligned} B_\varphi(R) &\equiv B_0 \frac{R_0}{R} \approx B_0 \left( 1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \\ B_\theta(R, r) &\equiv \frac{r}{q(r) R} B_\varphi(R) \approx \frac{r}{q R} B_0 \end{aligned}$$

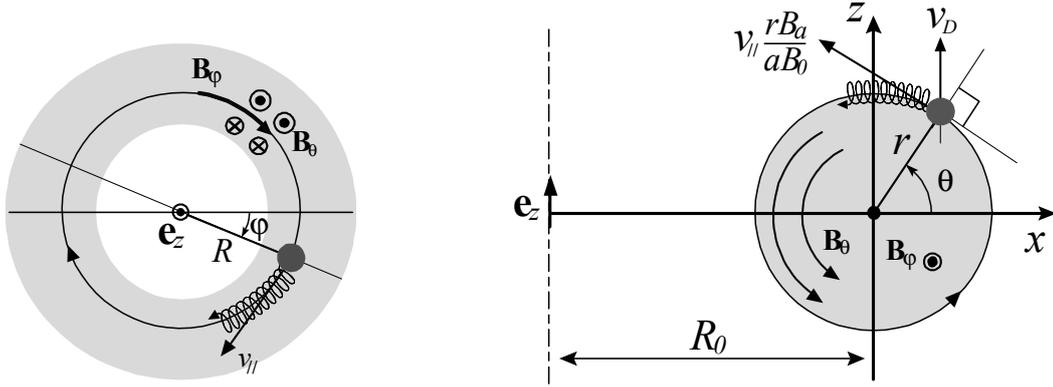
où nous avons introduit le facteur de sécurité  $q$  qui mesure le rapport du nombre de tours autour de l'axe magnétique au nombre de tours autour de l'axe toroïdal pour une ligne de champ donnée.

$$\text{Facteur de sécurité : } q \equiv \frac{r}{R} \frac{B_\varphi}{B_\theta}$$

L'équation des lignes de champ  $B_\theta / r d\theta = B_\varphi / R d\varphi \rightarrow \varphi = q\theta$  décrit un ensemble d'hélices dessinées sur ces tores emboîtés. Le mouvement le long d'une ligne de champ s'effectue à la vitesse  $v_{||} = ds/dt$  où  $s$  représente l'abscisse curviligne le long de la ligne considérée. Pour les configurations tokamak le petit rayon d'une surface magnétique et le grand rayon de l'axe magnétique suivent l'ordering dit du *petit rapport d'aspect*  $R_0 > r$ . Ainsi, comme le facteur  $q$  est de l'ordre de un à quelques unités, l'élément de longueur peut être approché suivant  $ds = \sqrt{R^2 d\varphi^2 + r^2 d\theta^2} \approx R d\varphi \approx R q d\theta \approx R_0 q d\theta (1 + r \cos \theta / R_0)$ . Sur une surface magnétique  $r = \text{constante}$  l'amplitude du champ magnétique varie en fonction de l'angle  $\theta$  et il est d'usage de distinguer le côté dit *fort champ* du côté de l'axe toroïdal et le côté dit *faible champ* vers l'extérieur. Cette variation de l'amplitude du champ engendre une force diamagnétique qui peut arrêter certaines particules à travers l'existence de points miroirs. Sur une surface magnétique donnée la variation du champ le long des lignes de champ est égale à :

$$\left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_r \approx \left. \frac{\partial B_\varphi}{\partial \theta} \right|_r \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{B_0}{R_0} \frac{r}{q R_0} \sin \theta$$

où nous avons négligé les termes d'ordre supérieur en le *petit rapport d'aspect*  $r/R_0$ . Nous utiliserons systématiquement ce type de développement perturbatif dans la suite de l'analyse des orbites.



La vitesse le long des lignes de champ peut être projetée sur les directions toroïdale et poloïdale ; compte tenu de la relation  $v_{\parallel} \approx R d\varphi/dt \approx R q d\theta/dt$  nous obtenons l'expression :

$$\begin{aligned} \text{Vitesse du centre guide} & : v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + v_D \mathbf{e}_z \approx v_{\parallel} \mathbf{e}_{\varphi} + \frac{r v_{\parallel}}{qR} \mathbf{e}_{\theta} + \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{v_c^2}{2}}{R_0 \omega_{c_0}} \mathbf{e}_z \\ \text{Accélération du centre guide} & : m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla B = -\mu \left. \frac{\partial B}{\partial s} \right|_r \end{aligned}$$

La trajectoire du centre guide d'une particule chargée est décrite par trois variables, l'angle toroïdal  $\varphi$ , l'angle poloïdal  $\theta$  et le petit rayon  $r$ . La vitesse cyclotronique  $v_c$  est déterminée par l'invariance du moment magnétique  $\mu = m v_c^2 / 2B(r, \theta) \rightarrow v_c(\mu, r, \theta)$  et la vitesse parallèle  $v_{\parallel}$  par l'invariance de l'énergie cinétique ; enfin, l'angle cyclotronique effectue une rotation à la pulsation cyclotronique correspondant à la position du centre guide. La vitesse parallèle  $v_{\parallel}$  est soumise à la force diamagnétique, la particule est donc accélérée du côté bas champ et décélérée du côté fort champ. La projection de la vitesse de dérive  $v_D \mathbf{e}_z$  suivant les directions poloïdale et toroïdale permet d'établir les équations du centre guide pour une configuration tokamak.

$$\begin{aligned} \text{Petit rayon} & : \frac{dr}{dt} = v_D \sin \theta \\ \text{Angle poloïdal} & : \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{qR_0} + v_D \frac{\cos \theta}{r} \\ \text{Vitesse parallèle} & : \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{\mu B_0}{mqR_0^2} r \sin \theta \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la relation  $\mathbf{e}_z = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_{\theta}$ . La solution générale de ce système d'équations conduit à distinguer deux classes de trajectoires : (i) les trajectoires circulantes où l'énergie cinétique le long des lignes de champs domine l'énergie cinétique cyclotronique  $v_{\parallel}^2 \gg v_c^2$  et (ii) les trajectoires piégées correspondant à l'ordering inverse  $v_c^2 \gg v_{\parallel}^2$ . Dans le premier cas la force diamagnétique est faible et l'on peut considérer que  $v_{\parallel}$  reste à peu près constante, l'énergie cinétique totale étant conservée  $v_c$  reste donc aussi approximativement constante ainsi que  $v_D$ .

Considérons le repérage cartésien du plan poloïdal figure :  $x = R - R_0 = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ . Les deux premières équations décrivant le mouvement du centre guide dans ce plan sont données par :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v_{\parallel}}{qR_0} z, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{qR_0} x + v_D$$

Introduisons la variable complexe  $\mathcal{Z}(t) \equiv x(t) + qv_D R_0 / v_{\parallel} + jz(t)$ , cette variable complexe vérifie l'équation :

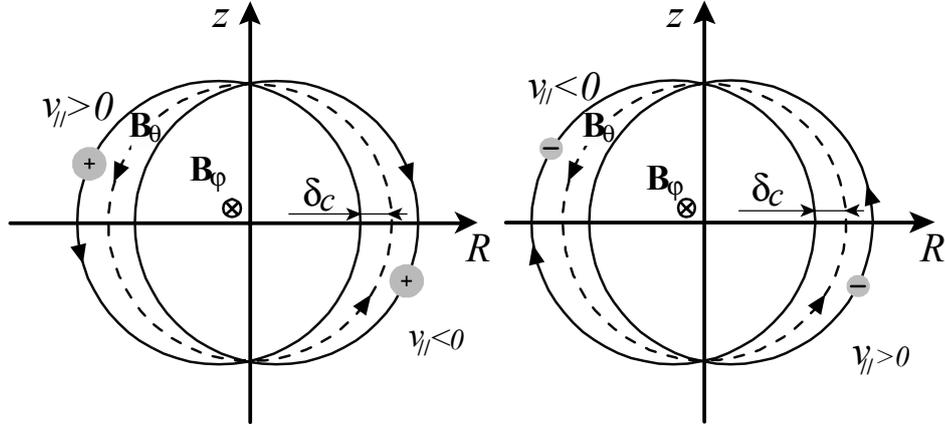
$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} = j \frac{v_{\parallel}}{qR_0} \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \exp \left( j \frac{v_{\parallel}}{qR_0} t \right)$$

Les orbites des particules passantes sont donc des hélices dont les projections poloïdales sont des cercles excentrés. Le décentrement de ces cercles a pour valeur  $\delta_c$ .

$$\delta_c = -\frac{qv_D R_0}{v_{\parallel}} \approx -\frac{qv_{\parallel}}{\omega_c} \approx -q\rho_L \times \text{signe} [\omega_c v_{\parallel}]$$

Les surfaces de dérive sont donc décalées par rapport aux surfaces magnétiques d'une longueur de l'ordre de grandeur de quelques rayons de Larmor. Ce décentrement peut être vers le côté fort champ pour les ions co-passants ( $v_{\parallel} > 0$ ) et les électrons contre-passants ( $v_{\parallel} < 0$ ) ou vers le côté faible champ pour les ions contre-passants ( $v_{\parallel} < 0$ ) et les électrons co-passants ( $v_{\parallel} > 0$ ). Sous l'hypothèse  $v_{\parallel} \gg v_c$  les trajectoires sont donc

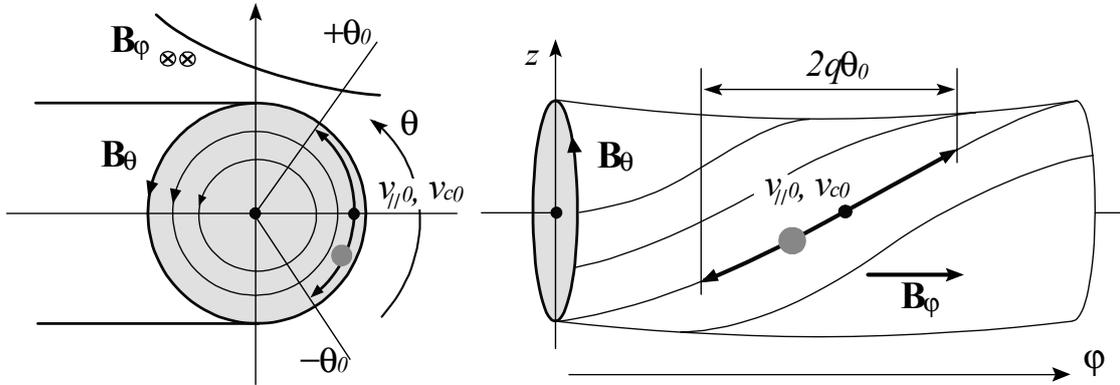
confinées et le champ poloïdal joue bien le rôle qui lui a été imparti, à savoir, induire une rotation poloïdale pour inhiber la séparation de charge verticale générée par la vitesse de dérive  $v_D$ . Les orbites circulantes sont donc des hélices s'appuyant sur des tores emboîtés et décalés par rapport à l'axe magnétique :  $\varphi \approx \varphi_0 + v_{\parallel}t/R_0$ ,  $\theta \approx \theta_0 + v_{\parallel}t/qR_0$ ,  $r \approx r_0 - qv_{\parallel} \cos(v_{\parallel}t/qR_0)/\omega_{c0}$ .



Les trois pulsations caractéristiques de ces hélices décentrées sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Pulsation cyclotron	$\omega_c = \frac{eB}{m}$
Pulsation toroïdale	$\omega_\varphi = \frac{v_{\parallel}}{R_0} \sim \omega_c \frac{\rho_L}{R_0}$
Pulsation poloïdale	$\omega_\theta = \frac{v_{\parallel}}{qR_0} \sim \omega_c \frac{\rho_L}{qR_0}$

Le cas des orbites piégées nécessite la compréhension de l'impact de la force diamagnétique ; soit une particule suivant en première approximation une ligne de champ localisée sur une surface magnétique de petit rayon  $r$  et de facteur de sécurité  $q$ , définissons  $v_{\parallel 0}$  la vitesse parallèle en  $\theta = 0$  et  $v_{c0}$  la vitesse cyclotronique en  $\theta = 0$ .



La conservation de l'énergie cinétique  $m(v_{\parallel}^2 + v_c^2)/2$  et l'invariance adiabatique du moment magnétique  $\mu$  permettent d'exprimer l'angle poloïdal  $\theta_0$  où la vitesse parallèle s'annule sous l'effet de la décélération induite par la force diamagnétique :  $vm_{\parallel 0}^2/2 + \mu B_0(1 - r/R_0) = \mu B_0(1 - r \cos \theta_0/R_0) \rightarrow v_{\parallel 0}^2 \approx v_{c0}^2 r(1 - \cos \theta_0)/R_0$ .

$$\frac{R_0}{r} \frac{v_{\parallel 0}^2}{v_{c0}^2} = 1 - \cos \theta_0 \rightarrow \sin \frac{\theta_0}{2} = \frac{v_{\parallel 0}}{v_{c0}} \sqrt{\frac{R_0}{2r}}$$

Ainsi, si  $v_{c0} \gg v_{\parallel 0}$ , les orbites restent piégées du côté bas champ et leurs excursions sont réduites à un arc poloïdal et un arc toroïdal inférieurs à un tour. Considérons le système d'équations sous l'hypothèse  $v_c \gg v_{\parallel}$ , négligeons dans un premier temps la vitesse de dérive  $v_D$ , en effet  $v_D/v_c \sim \rho_L/R_0 \ll 1$ . Nous compléterons cette première analyse en considérant l'effet du mouvement de dérive à la fin de cette étude. Sous ces hypothèses les équations de la trajectoire du centre guide s'établissent ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{v_{\parallel}}{qR_0} \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= -\frac{\mu B_0 r}{mqR_0^2} \sin \theta \end{aligned}$$

Éliminons la vitesse parallèle  $v_{\parallel}$  entre ces deux équations pour obtenir l'équation vérifiée par l'angle  $\theta$  qui est similaire à celle du pendule non-linéaire.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mu B_0 r}{mq^2 R_0^3} \sin \theta = 0$$

Introduisons la fréquence de bounce  $\omega_b$  qui caractérise cette oscillation non linéaire.

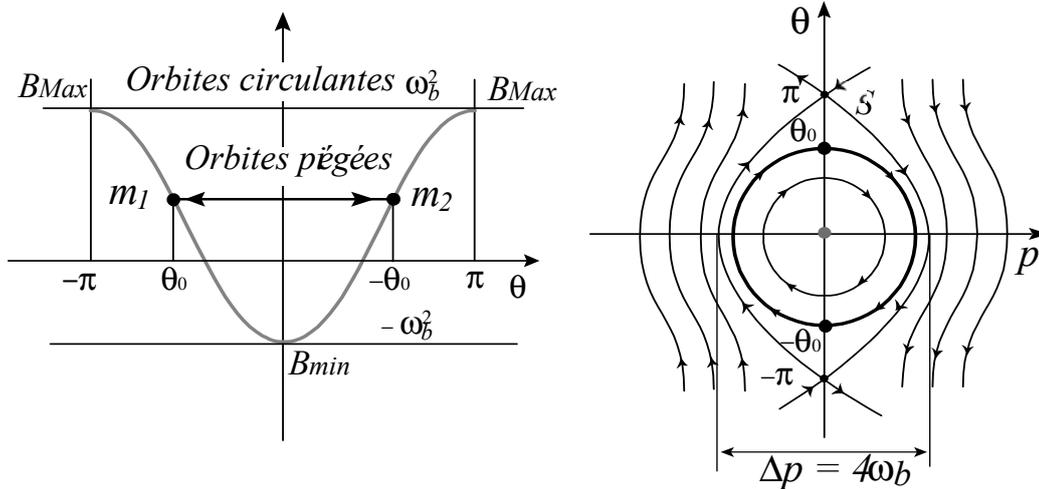
$$\text{Fréquence de bounce : } \omega_b \equiv \sqrt{\frac{\mu B_0 r}{mq^2 R_0^3}} \approx \omega_c \frac{\rho_L}{qR_0} \sqrt{\frac{r}{2R_0}}$$

Cette oscillation entre deux valeurs extrêmes ( $\pm\theta_0$ ) résulte de l'existence de deux points miroirs dans la zone de champ fort où la particule rebrousse chemin le long d'une ligne de champ. Partant de l'angle  $\theta = 0$ , côté champ faible, le gradient de champ convertit la vitesse parallèle en vitesse cyclotronique à travers la force diamagnétique, cette conversion est achevée aux points miroirs en  $\pm\theta_0$  et la particule repart vers la zone de champ faible.

Sur le trajet de retour la conversion inverse, du mouvement cyclotronique vers le mouvement parallèle, prend place etc... ainsi nous obtenons le schéma de la figure. L'équation du pendule non-linéaire peut être résolue et la solution s'exprime en termes de fonctions elliptiques. Il est plus instructif de présenter une analyse qualitative du mouvement en considérant la forme hamiltonienne de cette équation et en introduisant le hamiltonien  $H$  du pendule non-linéaire :  $p = v_{\parallel}/qR_0$  :

$$H(p, \theta) = \frac{1}{2}p^2 - \omega_b^2 \cos \theta$$

, où  $p$  est le moment canoniquement conjugué à l'angle  $\theta$ . Nous allons analyser les caractéristiques du mouvement du pendule non-linéaire en identifiant d'abord les deux classes topologiques de trajectoires, puis en étudiant séparément les caractéristiques de chacune de ces deux classes. Le carré  $p^2$  étant toujours positif la quantité  $H + \omega_b^2 \cos \theta$  est aussi toujours positive, mais deux cas doivent être distingués : (i) si l'énergie  $H$  est plus grande que le carré de la pulsation  $\omega_b^2$ , alors, l'angle  $\theta$  peut prendre toutes les valeurs sans que le signe de  $H + \omega_b^2 \cos \theta$  varie :  $H > \omega_b^2 \rightarrow -\infty \leq \theta \leq +\infty$ , ces orbites correspondent aux particules circulantes étudiées précédemment ; (ii) si l'énergie  $H$  est plus petite que le carré de la pulsation  $\omega_b^2$  :  $-\omega_b^2 < H < +\omega_b^2$ , les valeurs admissibles pour l'angle  $\theta$  sont restreintes afin de préserver la valeur positive de  $H + \omega_b^2 \cos \theta$  :  $-\omega_b^2 < H < +\omega_b^2 \rightarrow (2n-1)\pi < \theta < (2n+1)\pi$ , ces orbites sont piégées côté bas champ, la particule effectue un mouvement d'oscillation entre deux points miroirs  $m_1$  et  $m_2$  sur la figure. Dans l'espace des phases  $(p, \theta)$ , représenté sur la figure (6.10), ces deux classes d'orbites sont séparées par deux orbites critiques d'énergie  $H = +\omega_b^2$ , les séparatrices  $S$ .



La définition de ces séparatrices,  $p^2/2 - \omega_b^2 \cos \theta = \omega_b^2$ , permet d'exprimer leurs équations cartésiennes  $p_S(\theta)$  et de calculer l'extension en moment  $\Delta p_S$  de la zone piégée :  $p_S(\theta) = \pm 2\omega_b \cos(\theta/2) \rightarrow \Delta p_S = 4\omega_b$ . La lenteur du mouvement au voisinage de la séparatrice rend cet ensemble d'orbites extrêmement sensible aux perturbations et donc structurellement fragile. Dans un scénario de transition vers le chaos par croissance d'une perturbation appropriée cet ensemble d'orbites est le premier à présenter un comportement chaotique.

Le point  $O$  correspond à la position de plus basse énergie du système :  $H = -\omega_b^2$ , c'est une orbite dite stagnante ; au voisinage de ce point  $O$  le hamiltonien peut être développé suivant  $H = p^2/2 - \omega_b^2 \theta^2/2 + \dots$  ; lorsque ce développement est restreint à sa partie quadratique le potentiel est celui d'un oscillateur linéaire

et les orbites au voisinage du point  $O$  sont donc des oscillations harmoniques, cette classe d'orbites est dite *profondément piégée* :  $v_{\parallel} \approx v_{\parallel 0} \cos[\omega_b(t - t_0)]$  et  $\theta \approx \theta_0 \sin[\omega_b(t - t_0)]$ . La condition  $|p| \leq 2\omega_b$  où  $p = v_{\parallel}/qR_0$  permet de confirmer le critère de piégeage.

$$\text{Condition de piégeage : } \frac{v_{\parallel 0}}{v_{c0}} < \sqrt{\frac{2r}{R_0}}$$

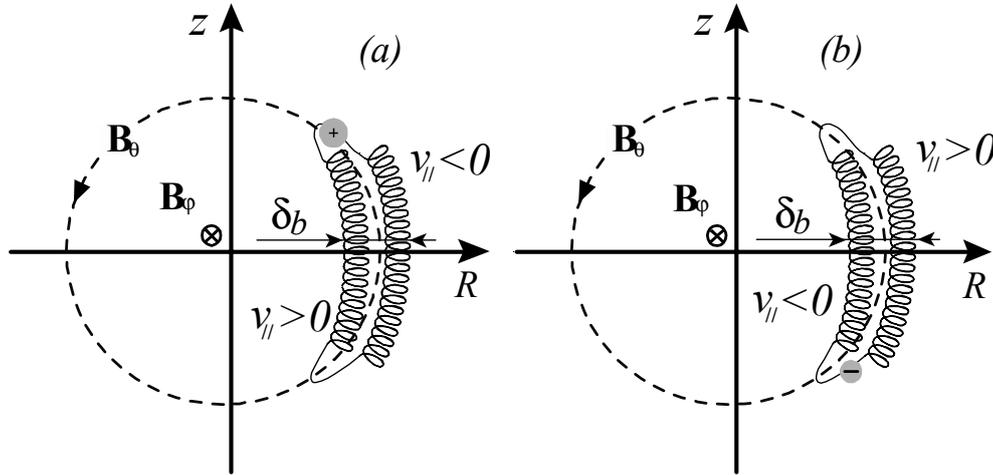
Sur une surface magnétique donnée la fraction de particules piégées est obtenue en sommant la fonction de distribution des vitesses à l'intérieur du domaine piégé.

$$f_p \equiv (2\pi mk_B T)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} 2\pi v_c dv_c \int_{-v_c \sqrt{2r/R_0}}^{v_c \sqrt{2r/R_0}} \exp\left[-\frac{mv_{\parallel}^2 + mv_c^2}{2k_B T}\right] dv_{\parallel}$$

Ainsi la fraction de particules piégées sur une surface magnétique de rayon  $r$  vaut :

$$\text{Fraction de particules piégées : } f_p \xrightarrow{r/R_0 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2r}{R_0}}$$

Les effets de la population piégée seront donc significatifs vers l'extérieur du tore de plasma, côté bas champ.



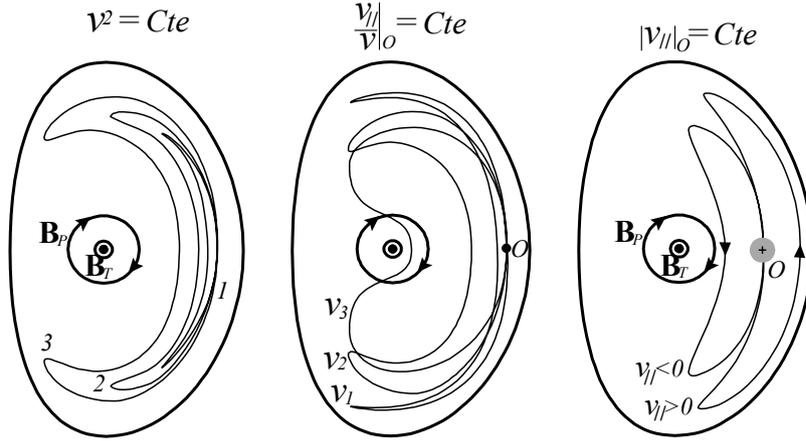
Pour évaluer l'effet de la vitesse de dérive sur les résultats qui viennent d'être établis considérons les équations du centre guide relatives au rayon  $r$  et à la vitesse parallèle  $v_{\parallel}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{v_c^2}{2R_0\omega_{c0}} \sin\theta \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= -\frac{v_c^2 r}{2qR_0^2} \sin\theta \end{aligned}$$

Nous avons pris en compte l'ordering  $v_{c0} > v_{\parallel 0} \sqrt{R_0/2r}$ . Les orbites piégées, aussi appelées trajectoires *bananes*, ne se réduisent pas à de simples arcs de cercles, mais présentent une largeur  $\delta_b$  induite par les effets de dérives. L'élimination du temps entre les deux équations du centre guide permet d'exprimer la variation du rayon en fonction de la variation de la vitesse parallèle, cette dernière évoluant entre zéro aux points miroirs  $\pm\theta_0$  ( $m1$  et  $m2$ ) et  $v_{\parallel 0}$  en  $\theta = 0$ , l'estimation de la largeur dite *banane* conduit à une valeur de l'ordre de  $q\rho_L \sqrt{R_0/r}$ .

$$\text{Largeur de banane : } \frac{dr^2}{dv_{\parallel}} = -2\frac{qR_0}{\omega_{c0}} \rightarrow \delta_b = 2q\frac{R_0}{r} \frac{v_{\parallel 0}}{\omega_{c0}} \approx 2q\rho_L \sqrt{\frac{2R_0}{r}}$$

Pour établir l'expression de l'ordre de grandeur de cette largeur nous avons pris en compte l'ordering de définition de la population piégée  $v_{\parallel 0} \leq v_{c0} \sqrt{2r/R_0} \rightarrow v_{\parallel 0}/\omega_{c0} \sim \rho_L \sqrt{2r/R_0}$ . A énergie cinétique donnée  $E = mv^2/2$ , sur une surface magnétique de référence, les particules exploreront plus profondément la zone de champ fort si l'énergie cinétique  $mv^2/2$  est contenue principalement dans le mouvement le long des lignes de champ. La figure présente trois orbites de même énergie, de même point de départ, pour trois paramètres  $v_{\parallel 1}/v < v_{\parallel 2}/v < v_{\parallel 3}/v$  différents. Si plusieurs particules, initialisées au même point, possèdent le même paramètre  $v_{\parallel}/v$  leurs orbites présentent le même point miroir, par contre leur largeur est une fonction croissante de l'énergie cinétique :  $mv^2/2 = mv_c^2/2 + mv_{\parallel}^2/2$ ; la figure :



représente ce comportement pour trois orbites telles que  $v_1 < v_2 < v_3$ .

La partition entre particules circulantes et piégées n'est pas de nature statique mais dynamique, un flux constant de particules circulantes est piégé à chaque instant et un flux égal est dépiégé à chaque instant, les collisions sont le principal mécanisme alimentant ces deux flux dans l'espace des vitesses associé à une surface magnétique.

## 9.2 Landau and Boltzmann relaxations

Nous allons construire l'équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution de la fonction de distribution des impulsions dans le cas d'interactions coulombiennes, cette équation est appelée équation de Landau.

Soit une population de particules chargées de masse  $m_1$  et de charge  $q_1$  dont l'impulsion est distribuée suivant la fonction de distribution  $f(\mathbf{p}_1, t)$ . Cette population 1 interagit avec une population de particules chargées de masse  $m_2$  et de charge  $q_2$  dont l'impulsion est distribuée suivant la fonction de distribution  $f_2(\mathbf{p}_2)$  telle que  $\int f_2(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 = n_2$  la densité. Chaque particule de type 1 subit des collisions avec les particules de type 2, le problème est de transcrire la dynamique microscopique à deux particules, telle que nous l'avons étudiée précédemment, en termes d'évolution de la fonction de distribution  $f_1(\mathbf{p}_1, t)$ ,  $f_2(\mathbf{p}_2)$  étant donnée. L'équation de Landau est de la forme :

$$\text{Landau : } \frac{\partial f_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p}_1 \rangle}{\delta t} f_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p}_1 \otimes \delta \mathbf{p}_1 \rangle}{2\delta t} f_1$$

et nous devons évaluer les coefficients de friction  $\langle \delta \mathbf{p}_1 \rangle / \delta t$  et de diffusion  $\langle \delta \mathbf{p}_1 \otimes \delta \mathbf{p}_1 \rangle / 2\delta t$ . Calculons pour ce faire la variation de la vitesse relative  $\mathbf{v}$ , entre deux particules 1 et 2, à l'issue d'un choc coulombien. Pour un paramètre d'impact  $b$  et une vitesse relative initiale  $v$  les relations permettent d'établir :

$$\delta v_{\perp}(v, b) = \frac{q_1 q_2}{2\pi \epsilon_0 \mu} \frac{1}{vb}, \quad \delta v_{\parallel}(v, b) = -\left( \frac{q_1 q_2}{2\pi \epsilon_0 \mu} \right)^2 \frac{1}{2v^3 b^2}$$

où  $\mu$  la masse réduite des particules de type 1 et 2 (la variation de vitesse parallèle  $\delta v_{\parallel}$ , nulle à l'ordre le plus bas, est donc du deuxième ordre par rapport à la variation de vitesse perpendiculaire  $\delta v_{\perp}$  :  $(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_{\parallel})^2 + \delta \mathbf{v}_{\perp}^2 = \mathbf{v}^2$ ). Dans le paragraphe sur les invariants collisionnels nous avons établi la relation  $\delta \mathbf{p}_1 = \mu \delta \mathbf{v}$  entre la rotation de la vitesse relative et la variation d'impulsion d'une particule. La variation de quantité de mouvement d'une particule de type 1 résultant d'une collision coulombienne avec une particule de type 2 est donc donnée par :

$$\delta \mathbf{p}_1(\mathbf{v}, \mathbf{b}) = \mu \delta v_{\perp} \frac{\mathbf{b}}{b} + \mu \delta v_{\parallel} \frac{\mathbf{v}}{v}$$

Les figures 4.4, 4.6 et 4.8 illustrent la configuration vectorielle de ce transfert dans les cas ion/électron et électron/ion. Pendant une durée infinitésimale  $\delta t$  il faut sommer les effets de l'ensemble des collisions se déroulant sur le trajet  $\mathbf{v} \delta t$ . Il faut donc intégrer sur toutes les particules de type 2 possédant la vitesse relative  $\mathbf{v}$  et se trouvant dans un cylindre d'épaisseur  $\mathbf{v} \delta t$ , de rayon maximum égal à la longueur de Debye  $\lambda_D$  et de rayon minimum égal à la longueur de Landau ou à la longueur de de Broglie  $\lambda_C$ . Une telle intégrale sur le vecteur  $\delta v_{\perp}(v, b) \mathbf{b}/b$  donne un résultat nul car les probabilités de déflexion vers le haut ou vers le bas (ou vers la gauche ou vers la droite) sont égales. Il faut donc intégrer  $\delta v_{\perp}^2(v, b)$  pour obtenir un résultat non nul.

$$\langle \delta v_{\parallel} \rangle = f_2(\mathbf{p}_2) v \delta t \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} 2\pi b \delta v_{\parallel} db, \quad \langle \delta v_{\perp}^2 \rangle = f_2(\mathbf{p}_2) v \delta t \int_{\lambda_C}^{\lambda_D} 2\pi b \delta v_{\perp}^2 db$$

où  $v = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ . L'intégrale sur le paramètre d'impact  $b$  diverge logarithmiquement et s'exprime en fonction du logarithme coulombien  $\Lambda$ . Chaque contribution des particules de type 2 ayant une vitesse relative  $\mathbf{v}$  doit ensuite

être sommée sur la distribution  $f_2(\mathbf{p}_2)$ . Considérons la représentation  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  du vecteur unitaire  $\mathbf{b}/b$  dans le plan perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . La moyenne sur l'angle  $\alpha$  donne  $\langle \mathbf{b}/b \rangle = \mathbf{0}$ , ainsi le terme de friction de l'équation de Landau se réduit à une composante suivant  $\mathbf{v}$ . Pour le calcul du tenseur  $\langle \delta \mathbf{p}_1 \delta \mathbf{p}_1 \rangle$ , à l'ordre le plus bas, nous considérons uniquement les termes suivant  $\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}/b^2$ , les termes en  $\mathbf{b} \otimes \mathbf{v}$  et  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  étant d'ordres supérieurs. La représentation  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  du vecteur unitaire  $\mathbf{b}/b$ , dans le plan perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v}$ , permet d'établir :  $\langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}/b^2 \rangle = (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}/v^2)/2$ , où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité. Les coefficients de friction et de diffusion se réduisent donc à :

$$\langle \delta \mathbf{p}_1 \rangle = \mu \int \langle \delta v_{\parallel} \rangle \frac{\mathbf{v}}{v} d\mathbf{p}_2, \quad \langle \delta \mathbf{p}_1 \otimes \delta \mathbf{p}_1 \rangle = \mu^2 \int \langle \delta v_{\perp}^2 \rangle \left[ \frac{\mathbf{I}v^2 - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{2v^2} \right] d\mathbf{p}_2$$

Rassemblant les résultats qui viennent d'être établis dans ce paragraphe, l'expression finale du coefficient de friction dynamique est donc :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p}_1(\mathbf{v}_1) \rangle}{\delta t} = -\frac{q_1^2 q_2^2 \Lambda (m_1 + m_2)}{4\pi \varepsilon_0^2 m_1 m_2} \int f_2(\mathbf{p}_2) \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{p}_2$$

et celle du coefficient de diffusion :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p}_1 \delta \mathbf{p}_1(\mathbf{v}_1) \rangle}{\delta t} = \frac{q_1^2 q_2^2 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2} \int f_2(\mathbf{p}_2) \frac{\mathbf{I}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \otimes (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{p}_2$$

Dans l'équation de Landau le terme de convection décrit un ralentissement et le terme de diffusion un élargissement de la fonction de distribution, donc une production d'entropie. Ces coefficients sont parfois appelés *coefficients de Spitzer-Chandrasekhar de l'équation de Landau*. Diverse formes de cette équation peuvent être obtenues à partir d'expressions particulières de  $\langle \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$  et  $\langle \delta \mathbf{p} \otimes \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$ . L'opérateur  $C_{1 \rightarrow 2}$  décrivant l'évolution temporelle d'une fonction de distribution associée à une population 1, sous l'effet de l'interaction avec une population 2,

$$\text{Landau} : C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_1 \equiv -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v}_1 \rangle}{\delta t} f_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v}_1 \delta \mathbf{v}_1 \rangle}{2\delta t} f_1$$

peut être exprimé en faisant apparaître le noyau tensoriel  $\mathbf{U}$ .

$$\mathbf{U}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \equiv \frac{q_1^2 q_2^2 \Lambda}{8\pi \varepsilon_0^2} \frac{\mathbf{I}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \otimes (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3} \quad (9.1)$$

En effet, les coefficients de friction et de diffusion se présentent sous les formes explicites :

$$\text{Friction} : \frac{\langle \delta \mathbf{v}_1 \rangle}{\delta t} = \frac{1}{m_1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int f_2(\mathbf{v}_2) \mathbf{U} d\mathbf{v}_2 \quad (9.2)$$

$$\text{Diffusion} : \frac{\langle \delta \mathbf{v}_1 \delta \mathbf{v}_1 \rangle}{2\delta t} = \frac{1}{m_1^2} \int f_2(\mathbf{v}_2) \mathbf{U} d\mathbf{v}_2 \quad (9.3)$$

où nous avons utilisé la relation :  $\partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{v}_1 = -2q_1^2 q_2^2 \Lambda (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) / |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3 8\pi \varepsilon_0^2$ . L'opérateur  $C_{1 \rightarrow 2}$  peut alors être réécrit sous la forme :

$$C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_1 = \frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \left[ \frac{1}{m_1} f_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \mathbf{U} f_1 - \frac{1}{\mu} f_2 f_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \mathbf{U} \right] d\mathbf{v}_2$$

Compte tenu de l'identité :  $\partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{v}_1 = -\partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{v}_2$  nous pouvons intégrer par parties les dérivées par rapport à la vitesse  $\mathbf{v}_1$  et faire apparaître la dérivée de la fonction de distribution de la population cible 2 ; ainsi, la forme finale de Boltzmann de l'opérateur  $C_{1 \rightarrow 2}$  s'exprime comme une somme sur un noyau intégral symétrique par rapport aux deux fonctions de distribution  $f_1$  et  $f_2$ .

$$\text{Boltzmann} : C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_1 \equiv -\frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \mathbf{U} \cdot \left( \frac{f_1}{m_2} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_2} - \frac{f_2}{m_1} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} \right) d\mathbf{v}_2$$

$$\text{Boltzmann} : C_{2 \rightarrow 1} \cdot f_2 \equiv -\frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \cdot \int \mathbf{U} \cdot \left( \frac{f_2}{m_1} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} - \frac{f_1}{m_2} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_2} \right) d\mathbf{v}_1$$

L'équation de Landau possède un certain nombre de propriétés générales. En particulier lorsque la fonction de distribution de la population 2 est une maxwellienne, alors au bout d'un certain temps, la fonction de distribution de la population 1 tend asymptotiquement vers une maxwellienne qui constitue une solution stationnaire. L'échelle de temps d'un tel processus de thermalisation est différente selon les populations. Le processus le plus rapide est constitué par la thermalisation d'une population d'électrons due aux collisions

électrons-électrons. Un processus plus lent est ensuite la thermalisation de la population ionique due aux collisions ions-ions. Enfin, l'étape finale de l'approche vers l'équilibre thermodynamique, la thermalisation électrons-ions, est beaucoup plus lente.

La forme de Boltzmann est aussi particulièrement appropriée pour discuter les conservations des moments d'une fonction de distribution. Définissons le moment hydrodynamique  $\langle \mathbf{M}_1 \rangle$  d'une population 1 où  $\mathbf{M}(\mathbf{v}_1)$  est une fonction de nature scalaire, vectorielle ou tensorielle  $\langle \mathbf{M}_1 \rangle \equiv \int \mathbf{M}(\mathbf{v}_1) f_1(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1$ , le taux de variation temporelle  $d\langle \mathbf{M}_1 \rangle / dt$  est alors donné par :

$$\frac{d\langle \mathbf{M}_1 \rangle}{dt} = - \int \mathbf{M}(\mathbf{v}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \mathbf{U} \cdot \left( f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} \right) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \quad (9.4)$$

Les choix du nombre de particules,  $\mathbf{M}(\mathbf{v}_1) = 1$ , de l'impulsion totale de la population,  $\mathbf{M}(\mathbf{v}_1) = m_1 \mathbf{v}_1$  et de l'énergie portée par la distribution,  $\mathbf{M}(\mathbf{v}_1) = m_1 v_1^2 / 2$ , conduisent à trois relations de conservation :

$$\begin{aligned} \text{Particules} & : \int C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_1(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 = \int C_{2 \rightarrow 1} \cdot f_2(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2 = 0 \\ \text{Impulsion} & : \int \mathbf{p}_1 C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_1(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 + \int \mathbf{p}_2 C_{2 \rightarrow 1} \cdot f_2(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \\ \text{Energie} & : \frac{m_1}{2} \int v_1^2 C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_1(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{2} \int v_2^2 C_{2 \rightarrow 1} \cdot f_2(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2 = 0 \end{aligned}$$

qui traduisent les conservations de la masse (charge), de la quantité de mouvement et de l'énergie lors de l'interaction entre les deux populations.

Une distribution de Maxwell des vitesses  $f_{M1}$  n'évolue pas sous l'effet des collisions entre particules de même espèce :  $C_{1 \rightarrow 1} \cdot f_{M1}(\mathbf{v}_1) = 0$ .

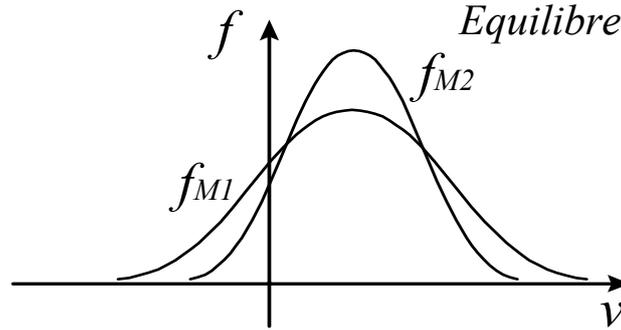


Fig. 10.3 : *Equilibre thermique de deux populations.*

Il en est de même pour deux populations en équilibre local, en tout point de position  $\mathbf{r}$ , présentant une distribution du type :

$$f_{M1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = n_1(\mathbf{r}) \left[ \frac{m_1}{2\pi k_B T_1(\mathbf{r})} \right]^{\frac{3}{2}} \exp - \frac{m_1 [\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_1(\mathbf{r})]^2}{2k_B T_1(\mathbf{r})}$$

où  $\mathbf{V}_1(\mathbf{r})$  est la vitesse du repère dans lequel la population présente les caractéristiques d'une distribution de Maxwell. Cette distribution satisfait aussi la relation  $C_{1 \rightarrow 1} \cdot f_{M1}(\mathbf{v}_1) = 0$ , et si nous considérons deux distributions de ce type tels que  $T_1 = T_2$  et  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \rightarrow C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_{M1}(\mathbf{v}_1) = C_{2 \rightarrow 1} \cdot f_{M2}(\mathbf{v}_2) = 0$ , figure (10.3), par contre si  $T_1 \neq T_2$  ou  $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{V}_2 \rightarrow C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_{M1}(\mathbf{v}_1) \neq C_{2 \rightarrow 1} \cdot f_{M2}(\mathbf{v}_2) \neq 0$ .

Nous allons étudier le transfert d'impulsion et d'énergie pour une telle situation de non-équilibre :  $T_1 \neq T_2$  ou  $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{V}_2$ .

Deux situations de faible écart à l'équilibre thermodynamique sont couramment observées en physique des plasmas thermonucléaires.

- Lorsque deux populations présentent des vitesses distribuées suivant une distribution maxwellienne, ou quasi-maxwellienne, mais le référentiel où l'impulsion totale stockée dans l'une est nulle est différent du référentiel où l'impulsion totale stockée dans l'autre est aussi nulle. Cette écart à l'équilibre engendre un processus dynamique où la population rapide aura tendance à accélérer la population lente et la population lente à décélérer la population rapide. La description du processus de transfert d'impulsion nécessaire au retour à l'équilibre global  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$  est construite autour du concept de friction  $\mathbf{R}$  [ $\text{N/m}^3$ ] entre populations, figure (10.4).

- Lorsque deux populations présentent des vitesses distribuées suivant une distribution maxwellienne, ou quasi-maxwellienne, mais possèdent des températures différentes ; alors la population chaude chauffera la

population froide et la population froide refroidira la population chaude. Nous allons établir que ce transfert de chaleur est décrit une loi de thermalisation dont le taux  $W$  [ $\text{W}/\text{m}^3$ ] est proportionnel à la différence des températures, figure (10.4).

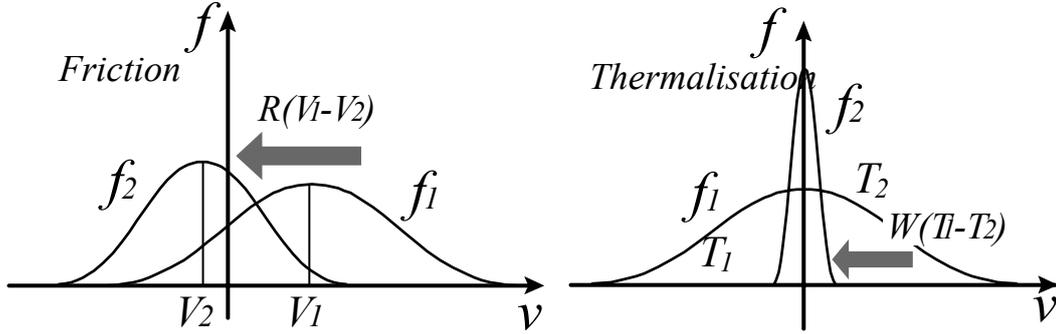


Fig. 10.4 : Retour à l'équilibre par friction et thermalisation.

Le taux de transfert de la densité volumique d'impulsion  $\int m_1 \mathbf{v}_1 f_1 d\mathbf{v}_1$  d'une population de particules de type 1 vers une population de particules de type 2 présente la dimension d'une densité volumique de force. Cette densité volumique de force exercée par la population 1 sur la population 2 est appelée *friction* et notée usuellement  $\mathbf{R}$ .

$$\text{Friction} : \mathbf{R} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \equiv \frac{d}{dt} \left[ \int m_1 \mathbf{v}_1 f_1 d\mathbf{v}_1 \right] = \int m_1 \mathbf{v}_1 C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_1 d\mathbf{v}_1 \quad (9.5)$$

La conservation globale de l'impulsion totale contenue dans les deux populations implique que la friction exercée par la population 1 sur la population 2 soit égale à l'opposée de la friction exercée par la population 2 sur la population 1; c'est effectivement le cas au regard de la forme (anti)symétrique de l'intégrale de l'opérateur de Boltzmann après intégration par partie des facteurs  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ .

$$\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \cdot \mathbf{U} \cdot \left( f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_2} \right) = \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \cdot \mathbf{U} \cdot \left( f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} \right)$$

Deux intégrations par parties supplémentaires permettent de simplifier cette dernière forme pour établir le résultat final et général :

$$\mathbf{R} = - \frac{q_1^2 q_2^2 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2} \frac{m_1 + m_2}{m_2 m_1} \int \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3} f_2(\mathbf{v}_2) f_1(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \quad (9.6)$$

L'interprétation de ce résultat est aisée car nous reconnaissons la valeur moyenne du coefficient de friction dynamique  $\langle \delta \mathbf{p}_1 \rangle / \delta t$  :  $\mathbf{R} = \int d\mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{v}_1) \langle \delta \mathbf{p}_1 \rangle / \delta t$ . Appliquons ce résultat général au cas de l'interaction entre deux distributions maxwelliennes dont l'une est en translation à la vitesse  $\mathbf{V}$  par rapport à l'autre

$$f_1(\mathbf{v}_1) = n_1 \frac{\exp - \frac{m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2}{2k_B T}}{(2\pi k_B T / m_1)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow f_2(\mathbf{v}_2) = n_2 \frac{\exp - \frac{m_2 v_2^2}{2k_B T}}{(2\pi k_B T / m_2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9.7)$$

Le développement de Taylor :  $\exp \left[ -m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2 / 2k_B T \right] \approx \exp(-m_1 \mathbf{v}_1^2 / 2k_B T) [1 + m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} / k_B T + \dots]$  est pertinent car la vitesse d'entraînement des populations est la plupart du temps beaucoup plus petite que la vitesse thermique; la sommation de la formule générale met alors en jeu la fonction erreur et le résultat final est donné par :

$$\text{Friction} : \mathbf{R} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \equiv m_1 n_1 \left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_{1 \rightarrow 2} = -n_1 m_1 \frac{\mathbf{V}}{\tau_f} \quad (9.8)$$

où le temps de transfert de l'impulsion entre les deux populations est égal à :

$$\tau_f \equiv \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{m_1 + m_2}{2} \frac{12\varepsilon_0^2 (\pi k_B T)^{\frac{3}{2}}}{q_1^2 q_2^2 \Lambda n_2}} \quad (9.9)$$

On notera que la conservation de l'impulsion est vérifiée car :

$$n_1 m_1 / \tau_{f12} = n_2 m_2 / \tau_{f21} = \sqrt{2m_2 m_1 / (m_1 + m_2)} q_1^2 q_2^2 \Lambda n_1 n_2 / 12\varepsilon_0^2 (\pi k_B T)^{\frac{3}{2}}$$

Le processus de thermalisation entre deux populations présentant deux températures différentes peut être étudié dans le même cadre cinétique; définissons  $W$  le taux de transfert de chaleur par unité de temps d'une population 1 vers une population 2. Ce taux possède la dimension d'une densité volumique de puissance.

$$\text{Thermalisation} : W \left[ \frac{W}{\text{m}^3} \right] \equiv \frac{d}{dt} \frac{m_1}{2} \int v_1^2 f_1 d\mathbf{v}_1 = \frac{m_1}{2} \int v_1^2 C_{1 \rightarrow 2} \cdot f_1 d\mathbf{v}_1 \quad (9.10)$$

L'utilisation des propriétés du noyau  $\mathbf{U}$  et plusieurs intégrations par parties permettent d'établir la forme générale :

$$W = - \frac{q_1^2 q_2^2 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2} \int \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_2 m_1} \cdot \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^3} f_2(\mathbf{v}_2) f_1(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2$$

Ce résultat peut être interprété au regard de la formule exprimant le transfert d'énergie lors d'une collision,  $\delta E_1 = \mu \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{v}$ , comme la moyenne  $W = \int d\mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{v}_1) \mathbf{V} \cdot \langle \delta \mathbf{p}_1 \rangle / \delta t$ . L'échelle de temps d'un tel processus de thermalisation est différente selon les populations, le processus le plus rapide est la thermalisation d'une population d'électrons due aux collisions électrons-électrons. Un processus plus lent est ensuite la thermalisation de la population ionique due aux collisions ions-ions. Enfin, l'étape finale de l'approche vers l'équilibre thermodynamique, la thermalisation électrons-ions, est beaucoup plus lente. Un certain nombre de méthodes d'approximation ont été mises au point pour résoudre l'équation de Landau et étudier les différentes étapes des processus de relaxation collisionnelle. Nous étudierons les deux processus les plus importants, l'isotropisation électronique et le ralentissement ionique. Mais avant, nous allons construire l'équation cinétique décrivant l'évolution de la fonction de distribution électronique résultant des collisions électrons-neutres.

L'usage actuel, dans la littérature anglo-saxonne, est d'utiliser le terme "*electron energy distribution function*" (EEDF) pour nommer  $f_e(v, t)$ , la fonction de distribution du module de la vitesse électronique dans les décharges, et l'équation de Fokker-Planck associée *équation de l'EEDF*; cette équation est aussi souvent appelée, improprement, équation de Boltzmann électronique, nous adopterons ici les deux terminologies. L'équation de Fokker-Planck pour la fonction de distribution électronique  $f_e(\mathbf{v}, t)$  exprime la variation temporelle locale de la probabilité comme la divergence d'un flux.

$$\frac{\partial f_e(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[ \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} \right] f_e(\mathbf{v}, t)$$

En développant le terme de dérivée seconde,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[ \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} f_e - f_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} - \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \right]$$

puis, en considérant une distribution d'équilibre :

$$f_0(v) = \left( \frac{2\pi kT}{m} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

qui est nécessairement solution de l'équation, nous obtenons une relation de bilan détaillé entre le coefficient de friction et le coefficient de diffusion.

$$\frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} + \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} \cdot \frac{m\mathbf{v}}{kT} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t}$$

Ainsi, compte tenu de cette identité, en réécrivant l'équation en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses et en sommant sur les deux angles sphériques sous une hypothèse d'isotropie, nous obtenons l'équation de l'EEDF sous sa forme usuelle.

$$\frac{\partial f_e(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \frac{\langle \delta v^2 \rangle}{2\delta t} \left( \frac{mv}{kT} f_e(v, t) + \frac{\partial f_e(v, t)}{\partial v} \right)$$

ou  $T$  est la température du gaz neutre en interaction avec les électrons, on notera que dans une décharge c'est le terme quasi-linéaire d'interaction avec les champs qui domine ce terme. Sans préciser la nature exacte de ce gaz, de masse  $M$  par particule, et le détail de sa distribution de vitesse  $\mathbf{v}_2$ , l'ensemble des hypothèses suivantes :  $M \gg m$ ,  $\langle \mathbf{v}_2 \rangle = \mathbf{0}$  et  $\langle \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 \rangle = (kT/M) \mathbf{I}$  est suffisant pour établir l'expression du coefficient de diffusion  $\langle \delta v^2 \rangle / 2\delta t$ . Considérons une collision entre un électron de vitesse  $\mathbf{v}_1$  et un neutre du gaz de vitesse  $\mathbf{v}_2$ , à l'issue de la collision les vitesses deviennent égales à  $\mathbf{v}'_1$  et  $\mathbf{v}'_2$  :  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \rightarrow (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ . Le module de la vitesse relative est conservé dans ce processus ainsi que l'impulsion totale.

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2)^2, \quad m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}'_1 + M\mathbf{v}'_2$$

Introduisons les variations de la vitesse de l'électron  $\delta\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1$  et de son module  $\delta v_1 = v'_1 - v_1$ . Compte tenu de sa masse, la vitesse de la particule neutre est peu modifiée à l'issue de la collision :  $\delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{0}$ , et cette variation est négligeable devant l'incrément de vitesse électronique résultant de la collision :  $m\delta\mathbf{v}_1 = -M\delta\mathbf{v}_2 \rightarrow |\delta\mathbf{v}_1| \gg |\delta\mathbf{v}_2|$ . La variation du module de la vitesse de l'électron peut alors être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 &= (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2)^2 \rightarrow v_1^2 - v_2^2 = 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 \\ v_1 \delta v_1 &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 + O(\delta v_1^2) \end{aligned}$$

Ensuite, l'expression du coefficient du carré de l'incrément de vitesse :

$$v_1^2 \delta v_1 \delta v_1 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 + (\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 - 2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}_2)$$

peut être moyenné sur la distribution de vitesse  $\mathbf{v}_2$  thermiques de température  $T$ .

$$v_1^2 \langle \delta v_1 \delta v_1 \rangle_{\mathbf{v}_2} = \frac{kT}{M} (v_1^2 + v_1'^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1) = 2v_1^2 \frac{kT}{M} (1 - \cos \theta)$$

où  $\theta$  est l'angle de déflexion de la vitesse de l'électron :  $\cos \theta = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1 / v_1^2$ . Cette expression de  $\langle \delta v_1^2 \rangle_{\mathbf{v}_2}$  (nous omettons dans la suite l'indice 1) doit ensuite être moyennée sur l'angle de déflexion  $\theta$  c'est-à-dire sur le paramètre d'impact de la collision. L'outil adapté pour cette dernière étape de sommation statistique est la section efficace de diffusion  $d\sigma/d\Omega$ . La probabilité d'une déflexion angulaire donnée  $\theta$  est proportionnelle à la section efficace de diffusion  $d\sigma/d\Omega$ , la moyenne de l'expression précédente conduit alors naturellement à la section efficace totale de transfert d'impulsion  $\sigma_1$ .

$$\frac{\langle \delta v^2 \rangle}{2\delta t} = n_n \frac{kT}{M} \int \frac{d\sigma}{d\Omega} v (1 - \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{kT}{M} \nu_1(v) \leftarrow \nu_1 \equiv n_n \int v (1 - \cos \theta) d\sigma$$

ou  $n_n$  est la densité de neutre et  $\nu_1(v)$  la fréquence de transfert d'impulsion. La construction de l'équation de l'EEDF de Boltzmann est ainsi achevée.

$$\text{EEDF/Boltzmann : } \boxed{\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \nu_1 \left[ v f_e + \frac{kT}{m} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right]}$$

On notera le facteur  $m/M$ , que nous allons retrouver dans la suite, ainsi que la validation de la relation du bilan détaillé.

### 9.3 Slowing down and pitch angle scattering

Il est courant de rencontrer des situations où les populations électronique et/ou ionique sont initialement monocinétiques,  $f(\mathbf{p}, t=0) \sim \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ , et interagissent avec un plasma ou un gaz à l'équilibre. C'est ce type de problèmes cinétiques que nous allons étudier. Nous allons établir la loi d'évolution de la fonction de distribution et analyser les différents processus qui mènent à sa thermalisation, son isotropisation et sa relaxation.

Soit une population d'électrons de charge  $-e$  et de masse  $m$  décrite par la fonction de distribution  $f_e(v, t)$ . Cette population interagit avec un gaz de particules neutres de masse  $M$  décrite par la fonction de distribution des vitesses  $f_n(\mathbf{v}_2)$ ,

$$f_e|_{t=0} = \frac{\delta(v - v_0)}{4\pi v^2} \xrightarrow{\text{sur la cible fixe froide}} f_n(\mathbf{v}_2) = n_n \delta(\mathbf{v}_2)$$

où  $n_n$  est la densité de neutres. Pour une collision, sous l'hypothèse  $M \gg m$ , la variation d'énergie cinétique d'un électron est donnée par :

$$\mathbf{V} \approx \frac{m}{M} \mathbf{v}, \quad \delta \left[ \frac{mv^2}{2} \right] = \mu \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{v} \approx m \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{v}$$

$\delta \mathbf{v}$  est la base d'un triangle isocèle dont  $\mathbf{v}$  est l'un des côtés, ainsi :  $\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = v^2(1 - \cos \theta)$ , ainsi, l'incrément du module de la vitesse électronique  $\delta v$  associé à une déflexion d'angle  $\theta$  s'exprime finalement comme :

$$\delta \left[ \frac{1}{2} mv^2 \right] = \frac{m^2}{M} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \rightarrow \frac{\delta v}{v} = -\frac{m}{M} (1 - \cos \theta)$$

Le coefficient de friction dynamique  $\langle \delta v(v, \delta t) \rangle / \delta t$  est obtenu en sommant toute les collisions durant l'unité de temps, chaque collision étant pondérée par sa probabilité décrite par la section efficace de diffusion  $d\sigma/d\Omega$ . Durant un instant  $\delta t$  l'électron interagit avec  $n_n v \delta t d\sigma$  particules neutres.

$$\langle \delta v \rangle = -n_n v \delta t \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{m}{M} v (1 - \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta$$

Ce calcul conduit naturellement vers les expressions de la section efficace totale de transfert d'impulsion  $\sigma_1$  et de la fréquence de transfert d'impulsion  $\nu_1$ .

$$\nu_1 \equiv n_n \int v (1 - \cos \theta) d\sigma \rightarrow \frac{\langle \delta v(v) \rangle}{\delta t} = -\frac{m}{M} \nu_1(v) v \rightarrow \frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \left[ \frac{m}{M} \nu_1(v) v f_e \right]$$

L'équation du ralentissement électronique dans un gaz froid ainsi construite est conforme au résultat plus général établi au paragraphe précédent. Nous aurions pu obtenir directement ce résultat à partir de l'équation de l'EEDF/Boltzmann sous l'hypothèse  $T = 0$ . La solution est fortement dépendante de la loi de variation de la fréquence  $\nu_1$  en fonction de la vitesse  $v$ , c'est-à-dire du potentiel d'interaction électron-neutre.

$$\begin{aligned} \text{Dipole induit} & : \nu_1(v) = \nu \rightarrow f_e(v, t) = \frac{\delta \left[ v - v_0 \exp\left(-\frac{m}{M} \nu t\right) \right]}{4\pi v^2} \\ \text{Sphère dure} & : \nu_1(v) = \frac{v}{\lambda} \rightarrow f_e(v, t) = \frac{\delta \left[ v - v_0 \left(1 + \frac{M}{m} \frac{v_0 t}{\lambda}\right)^{-1} \right]}{4\pi v^2} \end{aligned}$$

Les deux cas classiques de l'interaction dipolaire et du modèle de sphère dure présentent en effet des comportements exponentiel et algébriques très différents.

En physique des plasmas thermonucléaires, il est courant de rencontrer des situations où les populations électronique ou ionique sont initialement monocinétiques,  $f(\mathbf{p}) \sim \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ , et interagissent avec un plasma totalement ionisé à l'équilibre. Deux cas sont envisageables :

- un faisceau d'électrons interagissant avec un plasma totalement ionisé quasi-neutre ; alors le transfert d'énergie a lieu principalement entre les populations électroniques du faisceau et du plasma. Par contre, la perte d'impulsion du faisceau est due à la population d'ions du plasma. Ce deuxième processus induit une isotropisation de la distribution des vitesses et sera étudié dans le prochain paragraphe.

- un faisceau d'ions en interaction avec un plasma totalement ionisé quasi-neutre ; alors l'interaction ion-électron conduit à un ralentissement dont la dynamique dépend du rapport de la vitesse du faisceau sur la vitesse thermique électronique.

Étudions ce deuxième cas car il constitue un problème particulièrement important en physique des plasmas thermonucléaires ; en effet, il détermine, pour partie, le bilan énergétique à travers le dépôt d'énergie des ions rapides dans le plasma. Soit une population d'électrons cibles, de charge  $-e$  et de température  $T$ , et un ion de masse  $m_i$  et d'impulsion  $\mathbf{p}_0$  représenté par la fonction de distribution initiale  $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ .

$$f_i|_{t=0} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \xrightarrow{\text{sur la cible fixe chaude}} f_e(\mathbf{p}_2) = n_e \frac{\exp\left(-\frac{p_2^2}{2m_e kT}\right)}{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}$$

Lorsqu'une particule lourde interagit avec une population de particules légères le processus dominant l'interaction est un phénomène de ralentissement ; la diffusion angulaire, ainsi que l'élargissement de la distribution en énergie de la particule lourde, étant négligeables. L'interaction ion-électrons est donc décrite par l'équation :

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} f_i(\mathbf{p}, t)$$

où le coefficient de friction dynamique est donné par la relation :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} = -\frac{Z^2 e^4 \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu} \frac{n_e}{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}} \int \exp\left(-\frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_e kT}\right) \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{p}_2$$

L'intégrale sur les vitesses électroniques peut être interprétée dans un cadre électrostatique. En effet, considérons les vitesses comme des positions, alors l'intégrand décrit une force centrale proportionnelle au carré de l'inverse de la distance, et l'intégrale la somme de telles forces pour une distribution isotrope. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Gauss avec, comme surface de Gauss, une sphère centrée à l'origine. Ainsi, le calcul du coefficient de friction est simplifié pour le cas des ions suprathermiques et subthermiques.

- Ions suprathermiques :  $v > \sqrt{kT/m_e}$

$$\begin{aligned} \int \exp\left(-\frac{m_e v_2^2}{2kT}\right) \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{v}_2 & \approx \frac{\mathbf{v}}{v^3} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{m_e v_2^2}{2kT}\right) 4\pi v_2^2 dv_2 \\ & = \left(\frac{2\pi kT}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{v}}{v^3} \end{aligned}$$

- Ions subthermiques :  $v < \sqrt{kT/m_e}$

$$\int \exp\left(-\frac{m_e \mathbf{v}_2^2}{2kT}\right) \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2|^3} d\mathbf{v}_2 \approx \frac{\mathbf{v}}{v^3} \int_0^v 4\pi v_2^2 dv_2 = \frac{4\pi}{3} \mathbf{v}$$

Ainsi, nous pouvons définir deux temps de ralentissement ionique, pour des ions de vitesse inférieure et pour les ions de vitesse supérieure à la vitesse moyenne électronique. Ces temps de ralentissements sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Suprathermique} & : \tau_{ie}(v) = \frac{4\pi\epsilon_0^2 m_i m_e v^3}{Z^2 e^4 n_e \Lambda} \\ \text{Subthermique} & : \tau_{ie}(T) = \frac{3\epsilon_0^2 m_i (2\pi kT)^{\frac{3}{2}}}{Z^2 e^4 n_e \sqrt{m_e} \Lambda} \end{aligned}$$

Pour ces deux cas limites des vitesses subthermique et suprathermique, l'équation de Landau,

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{p}}{\tau_{ie}} f_i(\mathbf{p}, t)$$

peut être résolue. La solution du problème du ralentissement ionique est donc un simple ralentissement algébrique pour le cas des ions suprathermiques,

$$\begin{aligned} \text{Suprathermique} & : f_i(\mathbf{p}, t) = \delta \left[ \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \left( 1 - \frac{3t}{\tau_{ie}(v_0)} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \\ \text{Subthermique} & : f_i(\mathbf{p}, t) = \delta \left[ \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ie}(T)}\right) \right] \end{aligned}$$

et un ralentissement exponentiel pour le cas des ions subthermiques .

Les modèles cinétiques ne prenant en compte que le terme de ralentissement, c'est-à-dire la dérivée du premier ordre dans l'équation de Landau, sont équivalents à la théorie du ralentissement de Bethe-Bohr. Cette théorie de Bethe-Bohr, ainsi que ses multiples raffinements, ne sont en fait que la version lagrangienne de l'équation de Landau considérée comme une équation eulérienne.

Nous allons maintenant étudier le processus d'isotropisation des vitesses d'une population électronique induit par les collisions avec une population ionique. En effet, il est fréquent dans les plasmas thermonucléaires et spatiaux magnétisés que la population électronique présentent une fonction de distribution anisotrope. En théorie cinétique, l'hypothèse de collisions sur des ions infiniment lourds conduit à des modèles, très répandus, dits de Lorentz. Soit donc une population d'ions, supposés infiniment lourds et de charge  $Ze$ , et distribués suivant la densité de probabilité  $f_i(\mathbf{p}_2)$ . Ces ions au repos interagissent avec un électron de masse  $m_e$  et d'impulsion initiale  $\mathbf{p}_0$  représenté par sa fonction de distribution initiale :  $f_e(\mathbf{p}, t = 0)$ .

$$f_e|_{t=0} = \frac{\delta(p - p_0)}{2\pi p_0^2} \delta(\cos\theta_0 - \cos\theta) \xrightarrow{\text{sur la cible fixe froide}} f_i(\mathbf{p}_2) = n_i \frac{\delta(p_2)}{4\pi p_2^2}$$

où  $p = |\mathbf{p}|$  et  $\theta = \arccos(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}/p)$  constituent un système de coordonnées sphériques d'axe  $\mathbf{u}$  dans l'espace des impulsions  $\mathbf{p}$  ;  $\theta_0 = \arccos(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_0/p_0)$ . Nous ne prenons pas en compte le deuxième angle sphérique  $\varphi$  car, en présence d'un champ magnétique, si l'axe de référence  $\mathbf{u}$  du système sphérique est parallèle au champ magnétique, la rotation cyclotrique rend la distribution suivant cet angle  $\varphi$  homogène. Le cas des plasmas magnétisés étant très répandu, nous supposons donc implicitement que cette étude (et les suivantes) ce réfère à ce cas. Notons que l'inclusion du deuxième angle sphérique  $\varphi$  ne pose aucun problème supplémentaire si nous voulons étendre les résultats aux cas sans champ magnétique. Comme les ions sont infiniment lourds, il ne peut y avoir de transfert d'énergie et la norme de l'impulsion électronique  $|\mathbf{p}|$  reste invariante. Par contre, l'effet cumulatif des collisions induit un élargissement de la distribution angulaire et une isotropisation. La fonction de distribution  $f_e(\mathbf{p}, t > 0)$  est donnée par la solution de l'équation de Landau :

$$\frac{\partial f_e(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{Z^2 e^4 m_e n_i \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{p}}{p^3} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}}{2p^3} \right] f_e(\mathbf{p}, t)$$

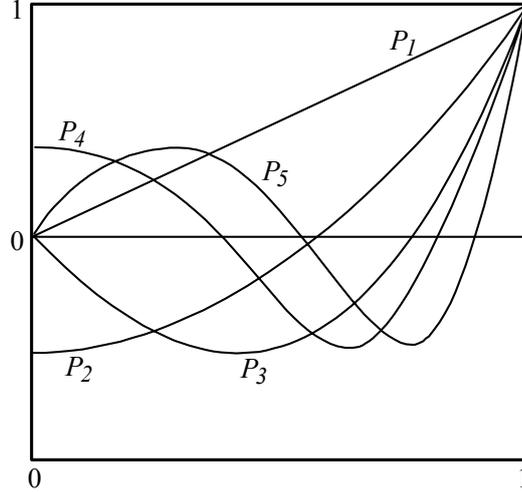
Compte tenu de la définition du temps d'isotropisation électron-ion :  $\tau_{ei}(p) = 8\pi\epsilon_0^2 p^3 / Z^2 e^4 m_e n_i \Lambda$ , cette équation d'évolution de la distribution, initialement monocinétique, devient :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{ei}(p)} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot (\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f_e$$

Ainsi apparaît un opérateur différentiel décrivant l'isotropisation, c'est-à-dire une marche aléatoire sur une sphère, dont l'expression en coordonnées sphérique est :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot [\mathbf{I}p^2 - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Cet opérateur n'est autre que la partie angulaire du Laplacien ou le carré de l'opérateur moment cinétique orbital en mécanique quantique. Le processus d'isotropisation, dans un modèle de Lorentz, conserve donc la norme de l'impulsion  $|\mathbf{p}_0| = |\mathbf{p}|$  ce qui était un résultat attendu.



Dans un système de coordonnées sphériques, l'équation de Landau décrivant l'isotropisation de la population électronique est donc donnée par :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{ei}(p)} \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] f_e$$

Les fonctions propres de l'opérateur moment cinétique en mécanique quantique sont les harmoniques sphériques, qui en l'absence de dépendance en l'angle  $\varphi$  se réduisent aux polynômes de Legendre  $P_l(\cos \theta)$ .

$$\frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] P_l(\cos \theta) = l(l+1) P_l(\cos \theta)$$

La famille des polynômes de Legendre,  $P_l(x)$  tels que  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , constitue une base orthogonale complète de l'ensemble des fonctions sur le cercle :

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_l^m$$

$$\delta(\cos \theta' - \cos \theta) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta')$$

Ils peuvent être défini de multiples façons, soit à partir d'une fonction génératrice, soit à partir d'un développement ou d'une équation différentielle. La définition la plus opérationnelle d'un point de vue numérique est la relation de récurrence :

$$P_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1} x P_l(x) - \frac{l}{l+1} P_{l-1}(x) \rightarrow P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, \dots$$

La solution de l'équation d'évolution est obtenue à partir d'une décomposition :

$$f_e(p, \theta, t) \sim \sum_l a_l(p, t) P_l(\cos \theta_0) P_l(\cos \theta)$$

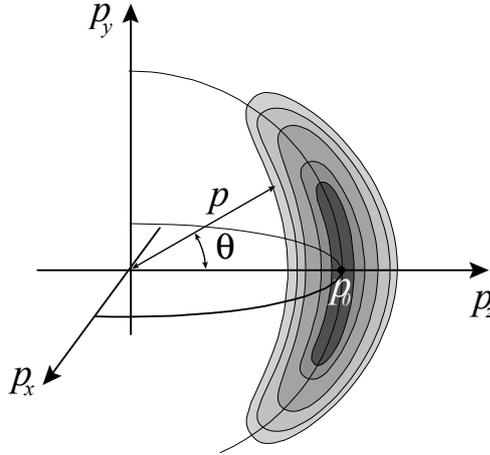
, suivie d'une substitution dans l'équation ; ainsi, chacun des coefficients  $a_l$  du développement vérifie une équation de relaxation linéaire et peut être exprimé en fonction du temps. La solution est une somme pondérée de polynômes de Legendre, les coefficients de pondération décroissant exponentiellement avec le temps et l'ordre du polynôme.

$$f_e(p, \theta, t) = \frac{\delta(p-p_0)}{2\pi p_0^2} \sum_{l=0}^{l=+\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{l(l+1)}{\tau_{ei}(p_0)} t\right) P_l(\cos \theta_0) P_l(\cos \theta)$$

La figure 9.15 représente ce processus d'isotropisation dans l'espace des impulsions, les niveaux de gris étant proportionnels à la densité de probabilité.

Notons que, pour la clarté du schéma, nous avons élargie la distribution au cours du temps suivant la direction radiale, alors que  $|\mathbf{p}_0| = |\mathbf{p}|$ . Le polynôme d'ordre  $l$  décrit des détails angulaires de l'ordre de  $2\pi/l$ , sa contribution décroît exponentiellement; la fonction s'isotropise donc exponentiellement lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Les deux études précédentes sur le ralentissement ion-électrons et l'isotropisation électron-ions sont complémentaires. En effet, le phénomène d'isotropisation des vitesses électroniques est un processus de destruction d'une vitesse dirigée sur un fond neutralisant d'ions massifs au repos et le phénomène de ralentissement ionique est aussi un processus de destruction de vitesse dirigée dû aux collisions des ions avec un fond neutralisant d'électrons thermiques.



Dans les deux dernière études de processus cinétiques que nous allons présenter ces deux processus, le ralentissement et l'isotropisation, seront pris en compte simultanément et non plus séparément.

## 9.4 Suprathermal and relativistic particles

Deux populations sont particulièrement importantes dans les plasmas thermonucléaires :

- les particules alpha, possédant une énergie de l'ordre de 3,5 MeV à 50 keV, qui constituent la source d'énergie de la combustion thermonucléaire,
- les électrons rapides, possédant une énergie de l'ordre de 10 MeV à 100 keV, qui dans les Tokamaks sont utilisés pour générer le courant assurant le confinement (dans les schémas avancés de confinement inertiel ces électrons sont aussi utilisés pour allumer la combustion thermonucléaire à travers un dépôt d'énergie rapide et localisé).

Nous allons donc étudier en détail la cinétique de ces deux populations qui contrôlent la dynamique de la combustion thermonucléaire.

Les particules alpha, issues de la réaction de fusion entre le deutérium et le tritium, naissent avec une énergie  $m_\alpha v_0^2/2 \approx 3.5$  MeV. Puis, elles subissent un processus de ralentissement sur les électrons et d'isotropisation sur les ions. Enfin, elles se thermalisent et doivent être extraites pour ne pas étouffer la combustion dans les Tokamaks.

Considérons une particule alpha décrite par la fonction de distribution  $f_\alpha(\mathbf{v}) = f_\alpha(v, \theta, t)$  ( $\cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/v$ ,  $\mathbf{u}$  est une direction de référence donnée); cette particule alpha est produite par les réactions de fusion à une vitesse  $v_0$  avec un angle  $\theta_0$  par rapport à la direction de référence  $\mathbf{u}$  ( $\cos \theta_0 = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u}/v_0$ ), qui dans un Tokamak est celle du champ magnétique. La fonction de distribution, immédiatement après la fusion, est donnée par :

$$f_\alpha|_{t=0} = \frac{\delta(v-v_0)}{2\pi v_0^2} \delta(\cos \theta_0 - \cos \theta) \xrightarrow{\text{sur les cibles fixes froides et chaudes}} \begin{matrix} f_i = n_i \delta(\mathbf{v}_1) \\ f_e = n_e \frac{\exp\left(-\frac{m_e v_0^2}{2kT}\right)}{(2\pi kT/m_e)^{\frac{3}{2}}} \end{matrix}$$

Cette particule alpha interagit avec les électrons décrit par la distribution  $f_e(\mathbf{v}_2)$  et les ions décrit par la distribution  $f_i(\mathbf{v}_1)$ . L'ordering des masses et des vitesses, des électrons, des ions et des particules alpha, s'établit comme suit :  $m_\alpha \geq m_i \gg m_e$  et :

$$kT_e/m_e \geq v_0^2 > kT_i/m_i$$

Il justifie le fait que nous ayons négligé la température ionique dans le modèle de cible. L'équation de Landau décrivant la dynamique d'une particule alpha est donnée par :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} f_\alpha + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} f_\alpha$$

Le terme de diffusion ionique s'exprime en fonction de la vitesse critique  $v_c$  et du temps de ralentissement des alphas thermonucléaire  $\tau_\alpha$  :

$$v_c^3 \equiv 3Z_i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{kT}{m_e}} \frac{kT}{m_i}, \quad \tau_\alpha \equiv \frac{12\pi^{\frac{3}{2}} \varepsilon_0^2 m_\alpha m_i}{\sqrt{2}\Lambda Z_i Z_\alpha^2 e^4 n_i} \sqrt{\frac{kT}{m_e}} \frac{kT}{m_i}$$

comme :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} = \frac{m_i v_c^3}{m_\alpha \tau_\alpha} \left[ \frac{\mathbf{I}v^2 - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{v^3} \right]$$

L'expression intégrale du coefficient de friction dynamique peut être sommée pour les distributions ionique et électronique du type ; le résultat finale est :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} &= -\frac{Z_\alpha^2 e^4 n_e \sqrt{m_e} \Lambda}{3\varepsilon_0^2 m_\alpha (2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{v} - \frac{Z_i^2 Z_\alpha^2 e^4 n_i (m_i + m_\alpha) \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2 m_i v^3} \mathbf{v} \\ &\quad \text{Ralentissement électronique} \qquad \qquad \qquad \text{Ralentissement ionique} \\ &= -\left( \frac{v_c^3 + v^3}{v^3} \right) \frac{\mathbf{v}}{\tau_\alpha} - \left( \frac{m_i v_c^3}{m_\alpha v^3} \right) \frac{\mathbf{v}}{\tau_\alpha} \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation, qui prend ici la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle}{2\delta t} = -\frac{1}{\tau_\alpha} \frac{m_i v_c^3}{m_\alpha v^3} \mathbf{v}$$

une partie de la friction dynamique annule une partie du terme de diffusion dynamique ; le résultat finale est alors donné par :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{\tau_\alpha} \left[ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v_c^3 + v^3) f_\alpha + \frac{m_i v_c^3}{m_\alpha} \frac{1}{2v^3 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f_\alpha \right]$$

Cette dernière expression constitue l'équation cinétique des particules alpha dans les plasmas thermonucléaires. La vitesse critique  $v_c$  ( $m_\alpha v_c^2 \approx 33 T_e$ ) marque la limite entre le régime de ralentissement électronique à haute vitesse ( $v > v_c$ ) et le régime de ralentissement ionique à basse vitesse ( $v < v_c$ ). Le terme d'isotropisation est purement ionique. L'équation de Landau pour les particules alpha peut être résolu ; pour ce faire, le terme de diffusion angulaire est diagonalisé sur la base des polynômes de Legendre :  $f_\alpha(v, \theta, t) \sim \sum_l b_l(p, t) P_l(\cos \theta_0) P_l(\cos \theta)$ , et les équations différentielles ordinaires du premier ordre sur  $b_l(p, t)$  ainsi obtenues sont résolues par quadrature, le résultat final s'exprime donc comme une somme sur la base des polynômes de Legendre.

$$\begin{aligned} f_\alpha(v, \mu, t) &= \frac{\delta \left[ \frac{t}{\tau_\alpha} - \frac{1}{3} \log \frac{v_c^3 + v^3}{v^3} \right]}{2\pi (v_c^3 + v^3)} \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} \left( l + \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{1 + v_c^3/v_0^3}{1 + v_c^3/v^3} \right]^{\frac{m_i}{m_\alpha} \frac{l(l+1)}{6}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta_0) \end{aligned}$$

Cette expression n'est autre que la fonction de Green de l'opérateur de collision et constitue le point de départ d'un ensemble de méthodes perturbatives de résolution des problèmes de cinétique ionique dans les plasmas thermonucléaires ; en particulier, les problèmes de dépôt d'énergie et de confinement magnétique peuvent être abordés sur la base de ce résultat général.

Une deuxième population énergétique se rencontre communément dans les plasmas thermonucléaires, ce sont les électrons rapides possédant des énergies dans la bande [100 KeV – 10 MeV]. L'origine de cette population d'électrons rapides peut-être :

- soit l'accélération dû au champ électrique dans les décharges Tokamak à basse densité,
- soit la diffusion quasi-linéaire dans les expériences de génération non-inductive de courant dans les décharges Tokamak longues,
- soit l'interaction d'un pulse laser intense avec un plasma dans les expériences d'allumage rapide en fusion inertielle.

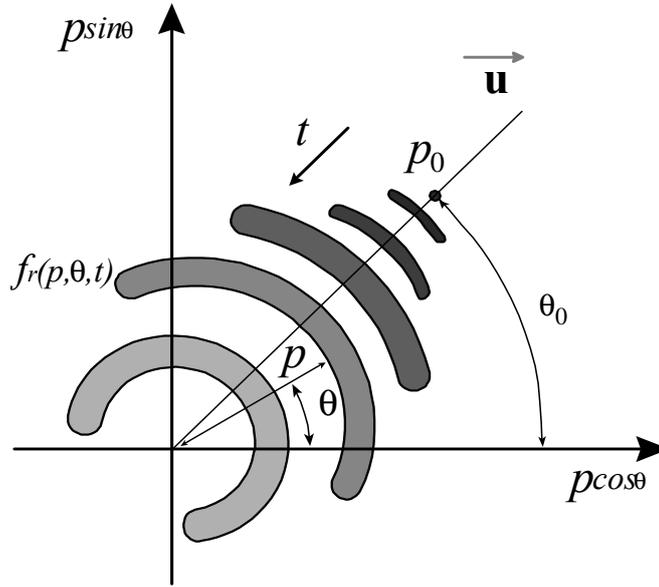
La dynamique de ces électrons est contrôlée par deux processus,

- le ralentissement sur les électrons thermiques du plasmas et
- l'isotropisation sur les ions.

Au delà de quelques dizaines de MeV le rayonnement doit être pris en compte dans l'équation de Landau. Considérons un électron rapide décrit par la fonction de distribution  $f_r(\mathbf{p}, t) = f_r(p, \theta, t)$  ( $\cos \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}/p$ ). Cet électron rapide possède une impulsion initiale  $p_0$  faisant un angle  $\theta_0$  par rapport à une direction de référence  $\mathbf{u}$  ( $\cos \theta_0 = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{u}/p_0$ ), qui dans un Tokamak est celle du champ magnétique. La fonction de distribution initiale est donc donnée par :

$$f_r|_{t=0} = \frac{\delta(p-p_0)}{2\pi p_0^2} \delta(\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad \xrightarrow{\text{sur les cibles fixes froides}} \quad \begin{aligned} f_e &= n_e \frac{\delta(p_1)}{4\pi p_1^2} \\ f_i &= n_i \frac{\delta(p_2)}{4\pi p_2^2} \end{aligned}$$

Cet électron interagit avec les électrons du plasma décrit par la distribution  $f_e(\mathbf{p}_1)$  et les ions décrit par la distribution  $f_i(\mathbf{p}_2)$ . Dans ce modèle de cible, nous avons négligé l'élargissement des fonctions de distribution  $f_e$  et  $f_i$  (élargissement décrivant la température finie du plasma) car l'ordering des vitesses des électrons, ions et électrons rapides s'établi comme suit :  $p^2 \gg m_e k T_e$  et  $p^2 \gg m_i k T_i$ .



Le temps caractéristique de ralentissement et de diffusion pour les électrons relativiste est défini par :  $\tau_e = 4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 c^3 / e^4 n_e \Lambda$  ;  $f_r(\mathbf{p}, t)$  obéit à une équation de Landau du type :

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left( \frac{\langle \delta \mathbf{p} \rangle}{\delta t} f_r \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\langle \delta \mathbf{p} \otimes \delta \mathbf{p} \rangle}{2\delta t} f_r \right)$$

Mais, les expressions des coefficients de friction  $\langle \delta \mathbf{p} \rangle / \delta t$  et de diffusion  $\langle \delta \mathbf{p} \otimes \delta \mathbf{p} \rangle / 2\delta t$  doivent être étendues au cas du régime relativiste. Pour ce faire, les intégrales de collisions doivent être calculées à partir de l'expression du terme inertiel relativiste dans l'équation de Newton :  $m d\mathbf{v}/dt \rightarrow d\mathbf{p}/dt = dm\gamma\mathbf{v}/dt$ . Ensuite, la sommation sur l'ensemble des particules du plasma permet d'exprimer ces coefficients relativistes. Dans la suite du problème nous utiliserons un système d'unités adapté à ce régime relativiste :  $m_e = c = e = 1$ . Le résultat final est donné par :

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} = \frac{1}{\tau_e} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \gamma^2 f_r + \frac{1}{\tau_e} \frac{Z+1}{2} \frac{\gamma}{p^3} \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f_r$$

Cette équation cinétique relativiste décrit le ralentissement dû aux collisions électron rapide-électrons (premier terme du membre de droite) et la diffusion angulaire dû aux électrons et ions (deuxième terme du membre de droite). La solution correspondant aux conditions initiales est obtenue en développant la fonction  $f_r$  sur une base de polynômes de Legendre, l'opérateur de diffusion angulaire est ainsi diagonalisé, puis l'équation différentielle ordinaire du premier ordre sur l'impulsion résolu par quadrature. La solution ainsi établi :

$$f_r(p, \theta, t) = \frac{\delta \left[ \arctan(p) - p - \arctan(p_0) + p_0 - \frac{t}{\tau_e} \right]}{4\pi \gamma^2} \times \sum_{l=0}^{l=+\infty} (2l+1) \left[ \frac{p(\gamma_0+1)}{p_0(\gamma+1)} \right]^{\frac{(Z+1)l(l+1)}{2}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta_0)$$

décrit la combinaison d'un ralentissement et d'une diffusion illustrée par la figure ci-dessus. Cette solution est particulièrement utile pour étudier la génération de courant dans les Tokamaks et le dépôt rapide d'énergie en fusion inertielle.

# Chapitre 10

## Annexes

### 10.1 E/B and c<sup>2</sup>B/E velocities

Le mouvement cycloïdal dans une configuration de champs croisés s'interprète sur la base d'un changement de référentiel. Elargissons la perspective et considérons le cas général de deux champs statiques dans le temps et homogène dans l'espace interagissant avec une particule en régime relativiste. La loi de transformation de Lorentz des champs électrique et magnétique entre deux référentiels  $R$  et  $R'$ , tels que la vitesse de  $R'$  par rapport à  $R$  soit  $\boldsymbol{\beta}c$ , est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{B}' &= \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

où  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ , et si nous considérons les projections parallèles et perpendiculaires à  $\boldsymbol{\beta}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}_{\perp}\right)\end{aligned}$$

Deux conséquences de ces lois de transformations sont immédiates :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' \\ \varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} &= \varepsilon_0 E'^2 - \frac{B'^2}{\mu_0}\end{aligned}$$

- Si  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont orthogonaux dans un référentiel, ils le seront dans tous les autres.
- Si  $E/c$  est plus grand que  $B$  dans un référentiel, il le sera dans tous les autres, ainsi l'ordering entre énergie électrique et magnétiques et un invariant. Cherchons un référentiel où les champs électrique et magnétique sont parallèles,  $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{0}$ . Si un tel référentiel existe, alors il en existe une infinité puisque une transformation de Lorentz le long de leur direction commune ne modifie pas leur directions relatives. Considérons l'une de ces transformation telle que  $\boldsymbol{\beta}$  soit dirigé par  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}$ , c'est à dire  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} = 0$ , sous ces conditions,  $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'$  s'exprime suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'}{\gamma^2} &= (\mathbf{E}_{\perp} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}) \times \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}_{\perp}\right) \\ &= \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{B}_{\perp} \times (c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}) - \mathbf{E}_{\perp} \times \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}_{\perp}\right) - (c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}) \times \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}_{\perp}\right) \\ &= \mathbf{E} \times \mathbf{B} - B^2 c\boldsymbol{\beta} - E^2 \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\beta} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} - c\boldsymbol{\beta} \left(B^2 + \frac{E^2}{c^2}\right) + (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \beta^2\end{aligned}$$

ainsi :

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{0} \rightarrow \frac{1 + \beta^2}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) \rightarrow \frac{\boldsymbol{\beta}}{1 + \beta^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2/c + cB^2}$$

Les deux solutions de cette équation en  $\beta$  sont inverses l'une de l'autre, l'une est de module inférieur à 1 et l'autre de module supérieur à 1, sauf lorsque  $E/c - B = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Dans ce dernier cas, les deux invariants sont

nuls et  $\beta = 1$  ce qui est non physique. Dans les autres cas, il existe toujours une transformation de Lorentz ramenant le champ électrique sur le champ magnétique. En particulier si ces deux champs sont orthogonaux dans le repère  $R$ , cette transformation annulera l'un des deux champs dans  $R'$ ,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \frac{\beta}{1 + \beta^2} = \frac{EB}{E^2/c + cB^2} \rightarrow (1 + \beta^2) EB - (E^2/c + cB^2) \beta = 0$$

Les solutions de cette équation algébrique sont :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{E^2/c + cB^2 \pm \sqrt{(E^2/c + cB^2)^2 - 4E^2B^2}}{2EB} \\ &= \frac{(E^2/c + cB^2) \pm (E^2/c - cB^2)}{2EB} = \frac{E}{Bc} \text{ ou } \frac{Bc}{E} \end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{B^2}{\mu_0} > \varepsilon_0 E^2 &\rightarrow \beta = \frac{E}{Bc} \rightarrow \beta c = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \rightarrow E' = 0, B' = \sqrt{B^2 - E^2/c^2} \\ \varepsilon_0 E^2 > \frac{B^2}{\mu_0} &\rightarrow \beta = \frac{Bc}{E} \rightarrow \beta c = c^2 \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2} \rightarrow B' = 0, E' = \sqrt{E^2 - c^2 B^2} \end{aligned}$$

Trois cas doivent donc être considérés :

- soit les champs électrique et magnétique sont orthogonaux et leur rapport est différent de la vitesse de la lumière, alors il existe un repère où le champ est purement électrique ou purement magnétique,
- soit les champs ne sont pas orthogonaux et il existe un référentiel où ils sont parallèles,
- soit les champs sont orthogonaux et leur rapport est égal à la vitesse de la lumière.

L'analyse du mouvement cycloïdal dans le cadre d'un changement de référentiel, laissé au lecteur, correspond au premier cas lorsque  $B^2/\mu_0 > \varepsilon_0 E^2$ .

## 10.2 Frenet and Serret

Soit  $C$  une courbe plane orientée représentée paramétriquement par les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  du vecteur position  $\mathbf{OM}$  d'un point courant  $M(u)$  suivant la relation  $\mathbf{OM}(u) = x(u)\mathbf{e}_x + y(u)\mathbf{e}_y$  où le paramètre  $u \in \mathbb{R}$  et  $O$  est l'origine des coordonnées. Définissons l'abscisse curviligne  $s(u)$  du point  $M \in C$  comme la longueur de cette courbe à partir d'un point arbitraire  $A \in C$  illustrée sur la figure A.1.

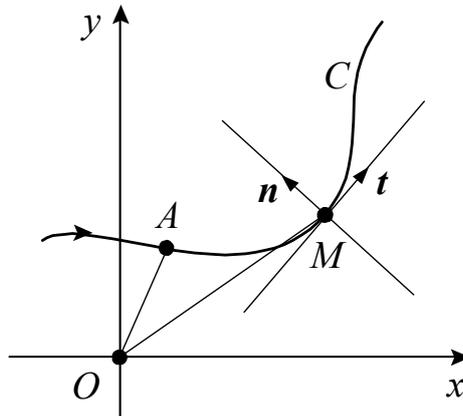


Figure A.1 - Vecteurs unitaires tangent  $\mathbf{t}$  et normal  $\mathbf{n}$  à une courbe plane  $C$ .

$$\text{Abscisse curviligne : } ds^2 = dx^2 + dy^2 \rightarrow s_{AM} = \int_{u(A)}^{u(M)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2} dv$$

Au voisinage d'un point  $M(s) \in C$  un petit déplacement  $\delta\mathbf{M}$  le long de  $C$  peut être rectifié localement suivant le développement :

$$\delta\mathbf{M} = \delta s \frac{d\mathbf{OM}}{ds} + \frac{\delta s^2}{2} \frac{d^2\mathbf{OM}}{ds^2} + O[\delta s^3]$$

Le vecteur  $d\mathbf{OM}/ds$  est unitaire par définition de l'abscisse curviligne,  $|d\mathbf{OM}| = |ds|$ , il définit le vecteur tangent  $\mathbf{t}$ .

$$\text{Vecteur tangent : } \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{OM}}{ds}$$

Le vecteur dérivé d'un vecteur de norme constante est orthogonal à ce vecteur,  $2\mathbf{t} \cdot d\mathbf{t}/ds = d\mathbf{t}^2/ds = 0$ , ainsi  $d^2\mathbf{OM}/ds^2$  est donc orthogonal à  $\mathbf{t}$  et sa norme peut être identifiée en introduisant l'angle de rotation infinitésimal  $d\varphi$  et le rayon  $R$  du cercle osculateur à  $C$  en  $M$ . Si nous représentons  $\mathbf{t}$  en fonction de  $\varphi$  suivant  $\mathbf{t} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y$ , conformément à la figure A.2 (a), alors  $d\mathbf{t} = \mathbf{n}d\varphi$  et la lecture de figure A.2 (b) conduit à  $ds = R d\varphi$ .

$$\text{Vecteur normal : } \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{d\varphi}, R = \frac{ds}{d\varphi} \rightarrow \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}$$

Ainsi le développement de  $\delta\mathbf{M}$  au voisinage d'un point  $M$  se présente sous forme canonique :

$$\text{Courbure : } \delta\mathbf{M} = \delta s \mathbf{t} + \frac{\delta s^2}{2R} \mathbf{n} + O[\delta s^3]$$

$\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent,  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal et  $R$  le rayon de courbure.

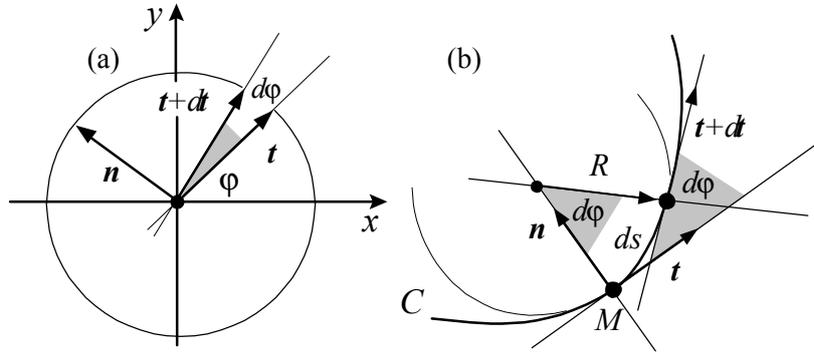


Figure A.2 - Cercle unitaire et vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  (a) et cercle osculateur (b) pour la courbe  $C$ .

Le repère local, dit de Frenet,  $[\mathbf{t}, \mathbf{n}]$  évolue donc suivant l'abscisse curviligne  $s$  conformément à la première formule de Frenet.

$$1^{\text{re}} \text{ formule de Frenet : } \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

Cette analyse peut être étendue aux courbes gauches orientées. Soit  $C$  une courbe orientée dans l'espace représentée paramétriquement en coordonnées cartésiennes suivant la relation  $\mathbf{OM}(u) = x(u) \mathbf{e}_x + y(u) \mathbf{e}_y + z(u) \mathbf{e}_z$ . Définissons l'abscisse curviligne  $s(u)$  d'un point  $M \in C$  comme la longueur de cette courbe à partir d'un point arbitraire  $A \in C$  sur cette courbe :

$$\text{Abscisse curviligne : } s = \int_A^M ds = \int_{u(A)}^{u(M)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2} dv$$

Au voisinage d'un point  $M$  un petit déplacement  $\delta\mathbf{M}$  le long de cette courbe peut être rectifié suivant le développement :

$$\delta\mathbf{M} = \delta s \frac{d\mathbf{OM}}{ds} + \frac{\delta s^2}{2} \frac{d^2\mathbf{OM}}{ds^2} + \frac{\delta s^3}{6} \frac{d^3\mathbf{OM}}{ds^3} + O[\delta s^4]$$

Il est alors nécessaire d'introduire le trièdre de Frenet-Serret  $[\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}]$ ,  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent,  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal et  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  le vecteur binormal ;  $[\mathbf{t}, \mathbf{n}]$  constitue le **plan osculateur**,  $[\mathbf{t}, \mathbf{b}]$  le **plan rectifiant** et  $[\mathbf{n}, \mathbf{b}]$  le **plan normal**. Le développement au voisinage d'un point  $M$  se présente sous forme canonique :

$$\text{Torsion : } \delta\mathbf{M} = \delta s \mathbf{t} + \frac{\delta s^2}{2R} \mathbf{n} - \frac{\delta s^3}{6} \left( \frac{\mathbf{b}}{RT} + \frac{dR}{ds} \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{\mathbf{t}}{R^2} \right) + O[\delta s^4]$$

où nous avons introduit la torsion  $T$  décrivant la cambrure nécessaire à l'entrée et à la sortie du plan osculateur. Le trièdre de Frenet-Serret  $[\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}]$  évolue suivant l'abscisse curviligne  $s$  conformément à la deuxième formule de Frenet.

$$2^{\text{e}} \text{ formule de Frenet } \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{T} \\ 0 & \frac{1}{T} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Courbure et torsion traduisent la rotation du trièdre de Frenet-Serret en fonction de  $s$ , cette rotation qui peut être caractérisée par le vecteur de Darboux  $\boldsymbol{\omega}_D$

$$\text{Vecteur de Darboux : } \boldsymbol{\omega}_D = \frac{\mathbf{b}}{R} - \frac{\mathbf{t}}{T} \rightarrow \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}_D \times \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

car la matrice de courbure-torsion est antisymétrique.

### 10.3 Stokes and Ostrogradsky

La somme des circulations et flux infinitésimaux ainsi définis conduit aux relations suivantes où les intégrales de volumes donnent des flux à travers les surfaces fermées délimitant ces volumes et les circulations le long des courbes fermées donnent des flux à travers toutes surfaces s'appuyant sur ces courbes fermées.

$$\begin{aligned} \text{Théorème d'Ostrogradski} & : \boxed{\iiint \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS} \\ \text{Ostrogradski 2} & : \iiint \nabla \times \mathbf{A} dV = \iint \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \\ \text{Ostrogradski 3} & : \iiint \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \iint \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS \\ \text{Ostrogradski 4} & : \iiint \nabla f dV = \iint f \mathbf{n} dS \\ \text{Relation de Green} & : \iiint (f \Delta g - g \Delta f) dV = \iint (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS \\ \text{Green 2} & : \iiint (\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) dV \\ & = \iint (\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS \\ \text{Théorème de Stokes} & : \boxed{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dS} \\ \text{Stokes 2} & : \oint f d\mathbf{l} = \iint \mathbf{n} \times \nabla f dS \\ \text{Stokes 3} & : \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{A} = \iint (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A} dS \\ \text{Stokes 4} & : \oint f dg = - \oint g df = \iint \mathbf{n} \cdot (\nabla f \times \nabla g) dS \end{aligned}$$

L'usage de la convention d'Einstein, du symbole de Kronecker  $\delta_i^j$  et du symbole de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$ ,

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijm} = 2\delta_k^m, \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l$$

permet d'établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{1-} \partial_\mu f g & = f \partial_\mu g + g \partial_\mu f \rightarrow \nabla (fg) = f \nabla g + g \nabla f \\ \mathbf{2-} \partial_\mu f A^\mu & = f \partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu f \rightarrow \nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \\ \mathbf{3-} \varepsilon_{ijk} \partial^j f A^k & = f \varepsilon_{ijk} \partial^j A^k + \varepsilon_{ijk} A^k \partial^j f \rightarrow \nabla \times (f \mathbf{A}) = f \nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A} \\ \mathbf{4-} \partial_j f T^{jk} & = (\partial_j f) T^{jk} + f \partial_j T^{jk} \rightarrow \nabla \cdot f \mathbf{T} = \nabla f \cdot \mathbf{T} + f \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{5-} \partial_j A^j B^k & = (\partial_j A^j) B^k + (A^j \partial_j) B^k \rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \mathbf{6-} \partial^i \varepsilon_{ijk} A^j B^k & = B^k \varepsilon_{kij} \partial^i A^j - A^j \varepsilon_{jik} \partial^i B^k \rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{7-} \varepsilon^{ijk} A_j \varepsilon_{klm} \partial^l B^m & = \varepsilon^{kij} \varepsilon_{klm} A_j \partial^l B^m = (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_l^j \delta_m^i) A_j \partial^l B^m \\ & \rightarrow \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \otimes \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \mathbf{8-} \partial^i A^l B_l & = (\partial^i B_l) A^l + B_l (\partial^i A^l) = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} + (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \rightarrow \\ \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) & = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \\ \mathbf{9-} \varepsilon^{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} A^l B^m & = \varepsilon^{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j A^l B^m = (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_l^j \delta_m^i) (A^l \partial_j B^m + B^m \partial_j A^l) \\ \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) & = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

## 10.4 Green functions

Soit un champ  $F(\mathbf{r}, t)$  s'annulant à l'infini à tout instant  $t$ , ce champ est généré linéairement par une source  $S(\mathbf{r}, t)$  à travers un opérateur différentiel linéaire  $\mathcal{L}(\partial/\partial\mathbf{r}, \partial/\partial t)$ , par exemple  $(\nabla \times \nabla \times) + \partial/\partial t$ ,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}, \frac{\partial}{\partial t}\right) F(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t).$$

Définissons (i) la fonction de Green  $G$  et (ii) une solution homogène  $H$  suivant

$$\begin{aligned} \text{Fonction de Green} & : \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}, \frac{\partial}{\partial t}\right) G(\mathbf{r} - \mathbf{u}, t - s) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}, t - s), \\ \text{Solution homogène} & : \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}, \frac{\partial}{\partial t}\right) H(\mathbf{r}, t) = 0. \end{aligned}$$

La solution générale  $F(\mathbf{r}, t)$  peut être exprimée comme une convolution dans l'espace et le temps,

$$\text{Solution générale: } F(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}, t) + \int ds d^3u G(\mathbf{r} - \mathbf{u}, t - s) S(\mathbf{u}, s).$$

Les expressions des fonctions de Green  $G$  des trois équations précédentes peuvent être établies comme suit. Considérons d'abord la fonction de Green de l'équation de Poisson,

$$\text{Green/Poisson: } \boxed{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{u})}.$$

Ce résultat classique est aisément démontré en considérant un repère sphérique centré sur la singularité

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r).$$

En dehors de la singularité la fonction  $r^{-1}$  est une solution de l'équation de Laplace,

$$r \neq 0 \rightarrow \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{1}{r} = 0.$$

L'opérateur laplacien étant donné par  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ , nous pouvons établir au voisinage de la singularité la relation intégrale

$$r \rightarrow 0 \rightarrow \iiint d^3r \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) = - \iint \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = - \iint d\Omega = -4\pi,$$

où nous avons utilisé le théorème d'Ostrogradski et la définition de l'angle solide vu depuis la singularité. Pour le calcul de la fonction de Green de l'opérateur de Helmholtz,

$$\text{Green/Helmholtz: } \boxed{\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right] \frac{\exp(-j\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{u}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{u})}.$$

L'équation se réduit aussi à sa forme isotrope en coordonnées sphériques centrées sur la singularité à l'origine,

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r).$$

En dehors de la singularité, les ondes sphériques isotropes  $(\exp -j\omega r/c)/r$  sont admissibles comme solutions,

$$\begin{aligned} r \neq 0 \rightarrow & \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{\exp(-j\frac{\omega}{c}r)}{r} \\ & = j\frac{\omega}{c} \frac{\exp(-j\frac{\omega}{c}r)}{r^2} - j\frac{\omega}{c} \frac{\exp(-j\frac{\omega}{c}r)}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\exp(-j\frac{\omega}{c}r)}{r}. \end{aligned}$$

L'opérateur laplacien étant donné par  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ , nous pouvons établir au voisinage de la singularité les relations intégrales

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0 \rightarrow & \iiint d^3r \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) = - \iint \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = - \iint d\Omega = -4\pi, \\ r \rightarrow 0 \rightarrow & \iiint \frac{d^3r}{r} = 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème d'Ostrogradski et la définition de l'angle solide vu depuis la singularité. Enfin, pour le calcul de la fonction de Green de l'opérateur de d'Alembert,

$$\text{Green/d'Alembert : } \left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\delta(t-s) - |\mathbf{r}-\mathbf{u}|/c}{|\mathbf{r}-\mathbf{u}|} = -4\pi \delta(\mathbf{r}-\mathbf{u}) \delta(t-s),$$

le principe de calcul est similaire,

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\delta(t-r/c)}{r} = -4\pi \delta(r) \delta(t),$$

et la méthode d'étude du voisinage de la singularité semblable,

$$\begin{aligned} r \neq 0 &\rightarrow \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\delta(t-r/c)}{r} = 0, \\ r \rightarrow 0 &\rightarrow \iiint d^3r \nabla \cdot \left( \nabla \frac{\delta(t)}{r} \right) = -\delta(t) \iint \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = -\iint d\Omega = -4\pi \delta(t), \\ r \rightarrow 0 &\rightarrow \iiint d^3r \frac{\delta''(t)}{r} = 0. \end{aligned}$$

Ces trois fonctions de Green permettent d'établir, respectivement, les formules des potentiels de Coulomb et Biot et Savart, des potentiels harmoniques et des potentiels retardés.

## 10.5 Maxwell Tensor

L'analyse dynamique d'un milieu continu, illustré sur la figure 3.7, peut être abordée suivant deux descriptions des contraintes :

- la densité volumique de forces  $\mathbf{F}$  en tout point, qui est un champ de vecteurs, en électrodynamique il se réduit à

$$\begin{aligned} \text{Force de Coulomb} &: \mathbf{F}(\mathbf{r}) [\text{N} \cdot \text{m}^{-3}] = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \\ \text{Force de Laplace} &: \mathbf{F}(\mathbf{r}) [\text{N} \cdot \text{m}^{-3}] = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

- la densité surfacique de forces pour tout élément de surface orientée, qui est un champ de tenseurs  $\mathbf{T}$ , le **tenseur des contraintes**, qui dans le contexte de l'électrodynamique est appelé le **tenseur de Maxwell**. Ainsi, pour un volume  $V$  délimité par une surface  $S$ , les forces électrique et magnétique s'expriment suivant deux relations équivalentes,

$$\begin{aligned} \text{Résultante de Coulomb} &: \mathbf{F} [\text{N}] = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3V \equiv \int_S \mathbf{T}_E(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d^2S, \\ \text{Résultante de Laplace} &: \mathbf{F} [\text{N}] = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3V \equiv \int_S \mathbf{T}_B(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d^2S, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à  $S$  orientée vers l'extérieur (figure 3.7).

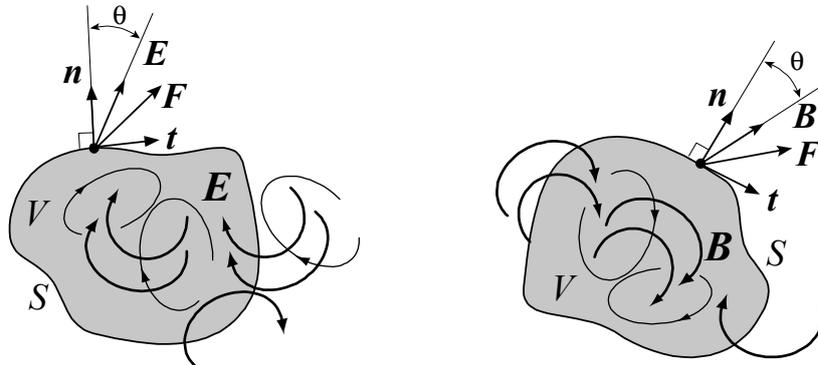


FIGURE 3.7. Contraintes électrique/magnétique transmises à travers la surface  $S$ .

Construisons le tenseur de Maxwell  $\mathbf{T}_E$  à partir de la relation décrivant la force de Coulomb  $\rho\mathbf{E}$ . La relation de Maxwell-Gauss:  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ , projetée sur une base:  $\partial^i E_i = \partial_i E^i = \rho/\varepsilon_0$ , permet d'exprimer chaque composante de la résultante des forces de Coulomb  $F^j$  en fonction du champ électrique:  $F^j = \varepsilon_0 \int_V d^3V E^j \partial_i E^i = \varepsilon_0 \int_V d^3V [\partial_i (E^i E^j) - E_i \partial^i E^j]$ .

La relation de Maxwell-Faraday électrostatique:  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , projetée sur une base:  $\partial^i E^j = \partial^j E^i$ , conduit alors aux transformations

$$\begin{aligned}
 F^j &= \varepsilon_0 \int_V d^3V [\partial_i (E^i E^j) - E_i \partial^j E^i] = \varepsilon_0 \int_V d^3V \left[ \partial_i (E^i E^j) - \frac{1}{2} \partial^j (E^i E_i) \right] \\
 &= \varepsilon_0 \int_V d^3V \partial_i \left[ E^i E^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} E^l E_l \right],
 \end{aligned}$$

qui permettent l'identification de la forme du tenseur  $\mathbf{T}_E$  sur la base de la relation d'Ostrogradski,

$$F^j = \int_V d^3V \partial_i T^{ij} = \int_S d^2S n_i T^{ij} \rightarrow T_E^{ij} \equiv \varepsilon_0 \left( E^i E^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} E^l E_l \right).$$

Définissons ainsi le *tenseur des contraintes électriques de Maxwell* suivant

$$\text{Tenseur des contraintes électriques : } \boxed{\mathbf{T}_E \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \mathbf{I} \varepsilon_0 E^2 / 2.} \quad (10.1)$$

En général, le tenseur de Maxwell ne peut pas être réduit à une pression isotrope.

Par exemple, considérons un champ uniforme  $\mathbf{E}$  dirigé suivant l'axe des  $x$ ,  $\mathbf{T}_E$  est alors représenté par la matrice

$$\mathbf{E} = E \mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{T}_E \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} \begin{pmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Considérons, sur la figure 3.7, un champ  $\mathbf{E}$  non uniforme et une surface  $S$ , soit  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface,  $\mathbf{t}$  le vecteur unitaire tangent à  $S$  du plan  $(\mathbf{E}, \mathbf{n})$  et  $\theta$  l'angle entre la normale  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{E}$ , le champ est donc représenté sur  $S$  suivant :  $\mathbf{E} = E (\cos \theta \mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{t})$  et la contrainte de Maxwell

$$\mathbf{T}_E \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} (\cos 2\theta \mathbf{n} + \sin 2\theta \mathbf{t}).$$

Etudions, sur la figure 3.8, le cas où la surface  $S$  est un tube de champ.

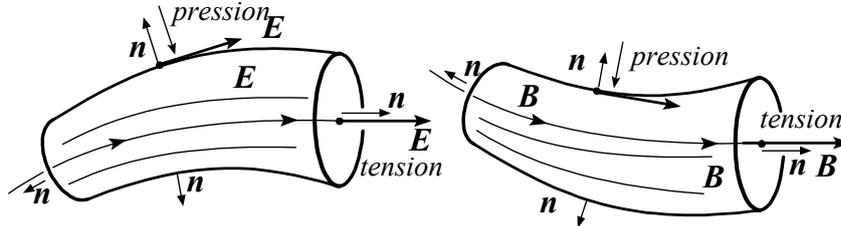


FIGURE 3.8. Contraintes sur des tubes de lignes de champs électrique et magnétique.

Les contraintes transmises à travers un cylindre infinitésimal axé sur le champ sont une traction/tension sur les bases et une compression sur les faces latérales,

$$\begin{aligned}
 \text{Ligne de champ} &: \mathbf{E} \parallel \mathbf{n} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \mathbf{n} \rightarrow \text{tension}, \\
 \text{Tube de champ} &: \mathbf{E} \perp \mathbf{n} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbf{T}_E \cdot \mathbf{n} = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \mathbf{n} \rightarrow \text{pression}.
 \end{aligned}$$

Les lignes de champ sont donc tendues et les tubes comprimés (figure 3.8). Suivant la même analyse, construisons le tenseur de Maxwell  $\mathbf{T}_B$  à partir de la relation décrivant la force de Laplace. La relation de Maxwell-Ampère :  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , projetée sur une base :  $\varepsilon_{ijk} \partial^j B^k = \mu_0 J_i$ , permet d'exprimer chaque composante de la force de Laplace  $F^j$  en fonction du champ magnétique :  $F^j = \int_V d^3V \varepsilon^{jim} J_i B_m = \int_V d^3V \varepsilon^{jim} \varepsilon_{ilk} B_m \partial^l B^k / \mu_0$ . La relation entre les symboles de Kronecker et les symboles de Levi-Civita :  $\varepsilon_{ijm} \varepsilon^{ikl} = \delta_j^k \delta_m^l - \delta_j^l \delta_m^k$ , ainsi que la relation de Maxwell-Thomson :  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , projetée sur une base :  $\partial^l B_l = 0$ , conduisent aux transformations

$$\begin{aligned}
 \mu_0 F^j &= \int_V d^3V \left( \delta_j^k \delta_m^l - \delta_j^l \delta_m^k \right) B_m \partial^l B^k = \int_V d^3V [B_l \partial^l B^j - B^k \partial^j B_k] \\
 &= \int_V d^3V \left[ \partial^l B_l B^j - \frac{1}{2} \partial^j (B^k B_k) \right] = \int_V d^3V \partial_i \left[ B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} B^k B_k \right],
 \end{aligned}$$

qui permettent l'identification de la forme du tenseur  $\mathbf{T}_B$  sur la base de la relation d'Ostrogradski,

$$F^j = \int_V d^3V \partial_i T^{ij} = \int_S d^2S n_i T^{ij} \rightarrow T^{ij} \equiv \frac{1}{\mu_0} \left( B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} B^l B_l \right).$$

Définissons ainsi le *tenseur des contraintes magnétiques de Maxwell* suivant

$$\text{Tenseur des contraintes magnétiques} : \boxed{\mathbf{T}_B \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{I} B^2 / 2\mu_0.} \quad (10.3)$$

Le tenseur de Maxwell ne peut pas être réduit à une pression isotrope. Considérons, par exemple, un champ uniforme  $\mathbf{B}$  dirigé suivant l'axe des  $x$  alors  $\mathbf{T}_B$  est représenté par la matrice

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{T}_B = \frac{1}{2\mu_0} \begin{pmatrix} B^2 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2 \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Utilisons une base locale  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$  en chaque point d'une surface  $S$  tel que  $\mathbf{B} = B (\cos \theta \mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{t})$  :

$$\mathbf{T}_B \cdot \mathbf{n} = \frac{B^2}{2\mu_0} (\cos 2\theta \mathbf{n} + \sin 2\theta \mathbf{t})$$

Les contraintes transmises à travers un cylindre axé sur le champ (figure 3.8) sont donc une traction/tension sur les bases et une compression sur les faces latérales,

$$\begin{aligned} \text{Ligne de champ} & : \quad \mathbf{B} \parallel \mathbf{n} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \mathbf{T}_B \cdot \mathbf{n} = \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{n} \rightarrow \text{tension}, \\ \text{Tube de champ} & : \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{n} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbf{T}_B \cdot \mathbf{n} = -\frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{n} \rightarrow \text{pression}. \end{aligned}$$

Dans le cas magnétique, il est plus instructif de considérer non pas un tube de flux, mais une ligne de champ et de réécrire la force de Laplace suivant deux termes interprétés comme des pressions et tractions

$$\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \left( \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{I} B^2 \right) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2.$$

La force de Laplace est donc la somme du gradient de la pression magnétique  $B^2/2\mu_0$  et d'une traction magnétique  $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}/\mu_0$  qui est une réponse à la courbure de la ligne.

# Chapitre 11

## Problems and exercises

Formulaire :

$$\frac{dZ}{dt} = \mathcal{F}(t) \leftrightarrow Z(t) = a_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{F}(u) du$$

$$\frac{dZ}{dt} \pm i\omega Z(t) = \mathcal{F}(t) \leftrightarrow Z(t) = a_0 \exp(\mp i\omega t + i\varphi_0) + \exp(\mp i\omega t) \int_{t_0}^t \exp(\pm i\omega u) \mathcal{F}(u) du$$

$Z(t)$  et  $\mathcal{F}(t)$  sont des fonctions complexes de la variable réelle  $t$ ;  $a_0$  et  $\varphi_0$  sont des constantes réelles déterminées par les conditions initiales à l'instant  $t_0$ .

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin^2 \left[ \frac{\omega}{2} t \right]}{\omega^2 t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \delta[\omega], \quad \frac{\nu}{\nu^2 + x^2} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \pi \delta(x), \quad 2\pi \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp jkx, \quad \delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

où  $\delta$  et  $\theta$  sont respectivement les distributions de Dirac et Heaviside;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-bx^2) \cos(kx) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right) \\ \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{x} - \gamma x\right) dx &= 2 \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right) \\ \int_0^{+\infty} \exp(-\nu t) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \nu dt &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega^2}{\nu^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\nu^2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(V^2 t^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2}{b^2 V} \\ \int_0^{+\infty} \cosh^{-2}(\nu t) \cos(\omega t) \nu dt &= \frac{\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\nu}}{\sinh\left(\frac{\pi \omega}{2 \nu}\right)} \end{aligned}$$

où  $K_{\frac{1}{2}}$  est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre un demi.



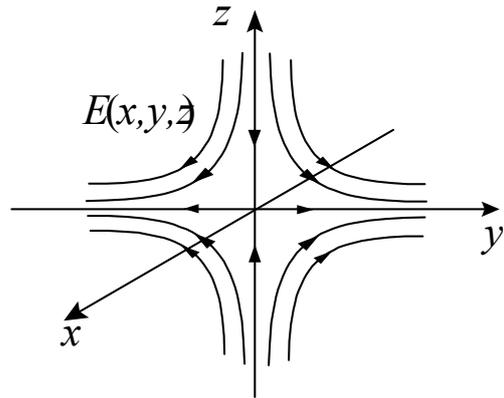
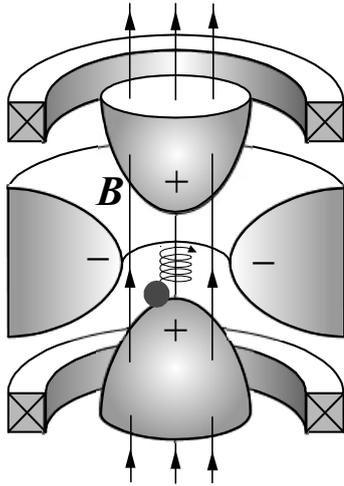
**A** Il est parfois nécessaire de piéger des particules, ion ou atome, grâce à une configuration appropriée de champs électromagnétiques.

Le piégeage et la manipulation d'un ion sont, entre autres, effectués dans des configurations appelées piège de Penning. Ce piège consiste en la superposition d'un champ magnétique uniforme:  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  ( $B > 0$ ) et d'un champ électrostatique dérivant du potentiel  $\Phi(\mathbf{r})$  créé par un système d'électrodes ayant une forme d'hyperboloïde de révolution. Au voisinage du centre de ce système d'électrodes le potentiel est donné par :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{M\omega^2}{4q} [2z^2 - x^2 - y^2]$$

où  $\omega$  est une caractéristique du piège. La position d'un point est repérée par le vecteur  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ,  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  est une base cartésienne orthonormée directe. On considère un ion de charge  $q$  et de masse  $M$  soumis à l'influence de cette configuration de champs électrique et magnétique.

1 Vérifier que  $\Phi$  obéit à l'équation de Laplace:  $\Delta\Phi = 0$ .



2 On introduit la quantité  $\Omega = \frac{qB}{M}$  et on repère la position de l'ion par ses trois coordonnées cartésiennes  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  où  $t$  est le temps. Établir les trois équations différentielles ordinaires vérifiées par  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

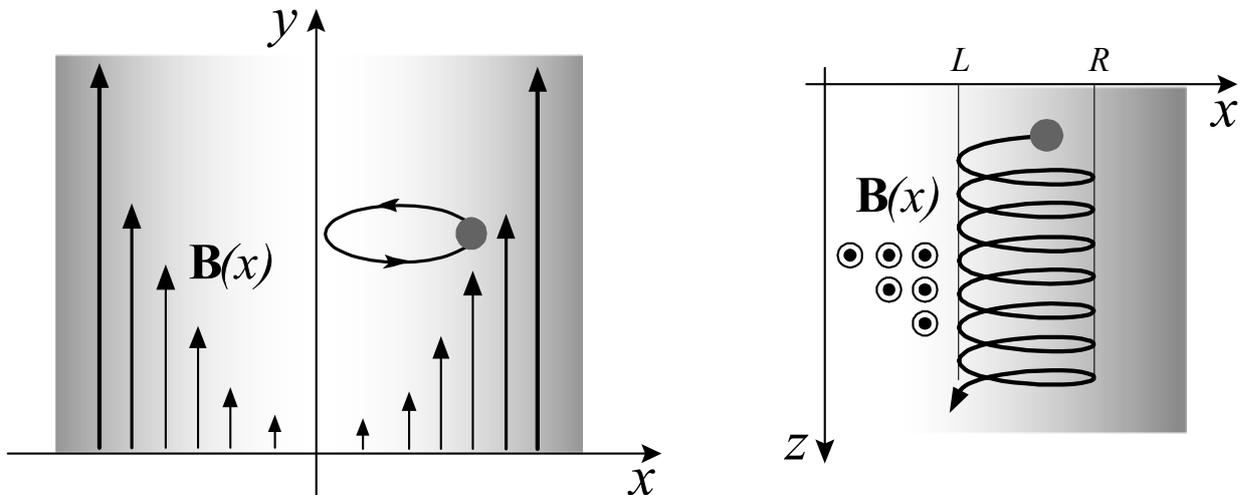
3 Quelle est la nature du mouvement suivant l'axe des  $z$ ?

4 On introduit la variable complexe:  $\zeta = x + jy$ , quelle équation différentielle vérifie  $\zeta(t)$ ?

5 On cherche une solution du type  $\zeta(t) = \zeta_0 \exp(j\omega_0 t)$ , quelle équation algébrique vérifie  $\omega_0$ ? Sous quelle condition le piège de Penning permet-il de confiner un ion?



**B** Le mouvement d'une particule chargée au sein d'un champ magnétique statique et homogène est la combinaison d'une rotation autour des lignes de champ et d'une translation le long des lignes de champ.



Mais les champs magnétiques physiquement réalisables ne peuvent être homogènes dans tous l'espace et présentent des zones de gradient et courbure.

Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ , considérons, suivant le schéma ci-dessus, un champ du type  $B(x)\mathbf{e}_y$  présentant une zone de minimum au voisinage de  $x \sim 0$ ; les particules chargées doivent rester confinées au voisinage de ce minimum et nous allons établir cette propriété de confinement.

Le champ  $\mathbf{B}(x)$  considéré dans cet exercice est donné par :

$$\mathbf{B}(x) = B \frac{x^2}{\lambda^2} \mathbf{e}_y$$

où  $B$  [T] et  $\lambda$  [m] sont deux constantes données de base du modèle. Le mouvement le long des lignes de champ, suivant la direction  $y$ , est trivial et ne sera pas considéré dans cette étude.

Le mouvement dans le plan  $(x, z)$ , en fonction du temps  $t$ , pour une particule de charge  $q > 0$ , de masse  $m$ , de position  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$  et de vitesse :

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z = v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z$$

résulte de la force de Laplace  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

1 Etablir l'équation du mouvement vérifiée par  $dv_x/dt$ .

2 Etablir l'équation du mouvement vérifiée par  $dv_z/dt$ .

3 On introduit la quantité  $W > 0$  telle que :  $W^2 = v_x^2 + v_z^2$ , établir la relation  $dW/dt = 0$  et expliquer son origine et sa signification physique.

4 On introduit la quantité  $V$  telle que :  $V = v_z - \frac{qB}{3m} \frac{x^3}{\lambda^2}$ , établir la relation  $dV/dt = 0$  et expliquer son origine et sa signification physique.

Dans la suite du problème  $W$  et  $V$  constituent donc des données de base de l'étude des orbites au même titre que  $B$  et  $\lambda$ .

5 Etablir l'expression de  $v_x^2$  en fonction de  $x$  et des données du problème.

6 Démontrer que le mouvement suivant  $x$  est borné, c'est-à-dire qu'il existe deux bornes fixes,  $x = L$  et  $x = R$ , telles que  $L \leq x(t) \leq R$ , établir les expressions de  $L(W, V)$  et  $R(W, V)$ .

7 Etablir l'expression de la demi-période  $T/2$  du mouvement  $x(t)$  entre les points  $x = L$  et  $x = R$ , on ne cherchera pas à réduire la quadrature (à calculer l'intégrale définie) apparaissant dans cette expression.

8 Etablir l'expression de la vitesse de dérive  $\langle v_z \rangle$  suivant  $z$  :  $\langle v_z \rangle \equiv \int_0^T v_z(t) dt / \int_0^T dt$ , on ne cherchera pas à réduire les quadratures (à calculer les intégrales définies) apparaissant dans cette expression.

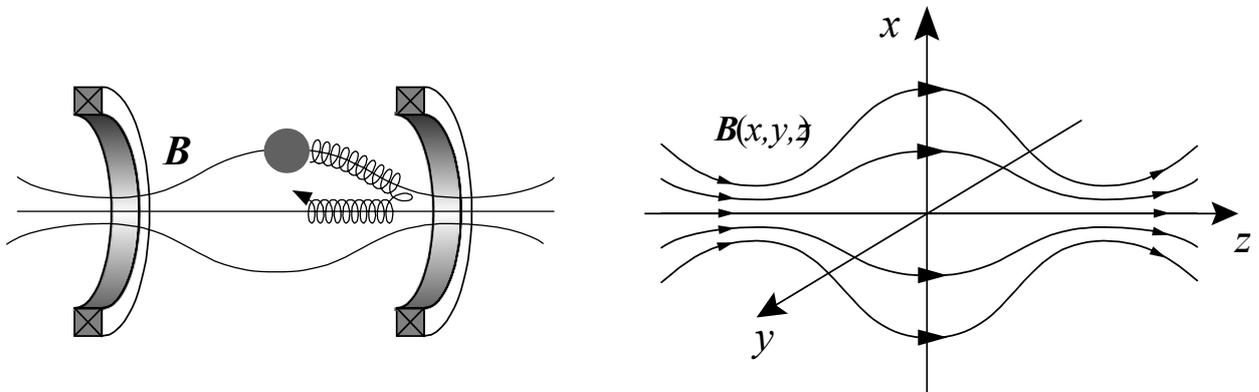


**C** Considérons un champ magnétique stationnaire possédant une symétrie de rotation autour de l'axe des  $z$  et présentant une zone de champ faible encadrée par deux zones de champ fort. Etudions le mouvement d'un électron au voisinage de cet axe de symétrie.

Afin de simplifier l'étude de ce mouvement, effectuons un développement de Taylor du champ au voisinage de l'axe des  $z$  ; la forme générale, au voisinage de l'axe des  $z$ , d'un champ possédant une symétrie de révolution et présentant une zone de champ faible encadrée par deux zones de champ fort, est donnée par :

$$\mathbf{B}(x, y, z) = B \left( 1 + \frac{z^2}{L^2} \right) \mathbf{e}_z - B \frac{xz}{L^2} \mathbf{e}_x - B \frac{yz}{L^2} \mathbf{e}_y$$

où  $x, y$  et  $z$  constituent un système de coordonnées cartésiennes,  $B$  est la valeur du champ au point de référence  $(0, 0, 0)$ ,  $L$  est une longueur caractérisant la dimension du piège ainsi constitué et  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$  est une base cartésienne orthonormée directe associée au système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .



L'équation de Newton se réduit à l'identité entre l'accélération et la force de Laplace que divise la masse.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega_c \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z + \omega_c \mathbf{v} \times \left( \frac{z^2}{L^2} \mathbf{e}_z - \frac{xz}{L^2} \mathbf{e}_x - \frac{yz}{L^2} \mathbf{e}_y \right)$$

où  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$  est la vitesse de l'électron et  $\omega_c = -eB/m$ . Nous allons résoudre cette équation dans le cadre d'une méthode perturbative, le petit paramètre du développement perturbatif est donné par le rapport du rayon de Larmor au voisinage de l'axe divisé par la longueur  $L$ .

1 Le champ  $\mathbf{B}$  est-il à divergence nulle?

2 A l'ordre le plus bas ( $L = \pm\infty$ ), le champ est considéré comme homogène. Introduisons les variables complexes  $\mathcal{Z} = x + jy$  et  $\mathcal{Z}^* = x - jy$ . Quelles équations différentielles ordinaires du deuxième ordre vérifient  $\mathcal{Z}(t)$  et  $z(t)$  lorsque  $L = \pm\infty$ ?

3 Exprimer  $\mathcal{Z}(t)$  pour tout instant  $t$ , la condition initiale étant  $\frac{d\mathcal{Z}}{dt} \Big|_{t=0} = V_c$  où  $V_c$  est une vitesse donnée.

4 Abordons maintenant le cas  $L$  finie et le premier ordre prenant en compte la finitude de cette longueur. Quelles équation différentielle ordinaire du deuxième ordre vérifie  $z(t)$  lorsque  $L$  est finie?

5 Substituer la solution obtenue à la question 3 dans l'équation établit question 4 et commenter le phénomène ainsi identifié?

6 On considère un électron tel que  $z(t=0) = 0$  et  $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = V_{\parallel}$ , sous quelle condition ce piège parabolique, appelé aussi miroir magnétique, confine-t-il cet électron?

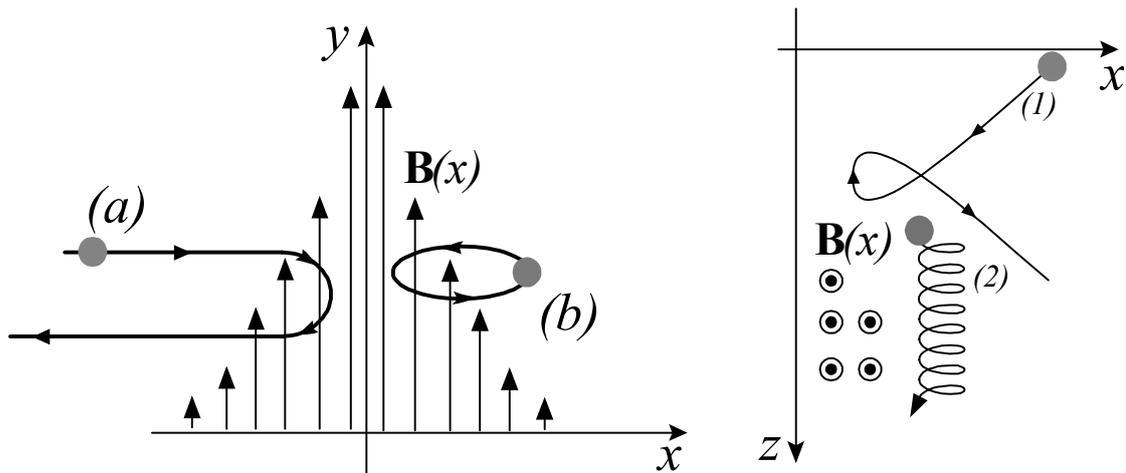


**D** Le mouvement d'une particule chargée au sein d'un champ magnétique statique et homogène est la combinaison d'une rotation autour des lignes de champ et d'une translation le long des lignes de champ. Mais les champs magnétiques physiquement réalisables ne peuvent être homogènes dans tout l'espace et présentent des zones de gradient et courbure et doivent s'annuler à l'infini. Un champ physique est donc localisé dans l'espace et l'analyse des orbites des particules chargées interagissant avec les champs localisés permet de distinguer deux types d'orbites, les orbites externes ou libres (a) et les orbites internes ou liées (b).

Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ , si nous considérons, suivant le schéma ci-dessous, un champ du type  $B(x)\mathbf{e}_y$  concentré au voisinage de  $x \sim 0$  ( $B(x = \pm\infty) = 0$ ), les orbites libres proviennent de  $x \sim \pm\infty$  puis sont réfléchies par le champ; les orbites liées sont périodiques et localisées au voisinage de  $x \sim 0$ .

Le champ  $\mathbf{B}(x)$  considéré dans cet exercice décrit la zone de gradient séparant un espace libre de champ ( $x \rightarrow +\infty$ ) et une zone magnétisée ( $0 < x \sim \lambda$ ) suivant la relation:  $\mathbf{B}(x) = B \exp(-x/\lambda)\mathbf{e}_y$  où  $B$  [T] et  $\lambda$  [m] sont deux constantes données de base du modèle. Ce type de décroissance exponentielle est particulièrement bien adaptée pour les descriptions de la zone de choc d'étrave de la magnétosphère et de la partie évanescence extérieure des champs de confinement magnétique entre deux bobines d'une configuration confinante périodique. La zone  $x \rightarrow -\infty$  de ce champ est non physique, mais les orbites considérées ici n'explorent pas cette zone.

Le mouvement le long des lignes de champ, suivant la direction  $y$ , est trivial et ne sera pas considéré dans cette étude. Le mouvement dans le plan  $(x, z)$  présente deux classes d'orbites: les orbites basse énergie (2) confinées dans la zone magnétisée, constituées par la superposition d'une rotation et d'un mouvement de translation; et les orbites haute énergie (1) qui proviennent de la zone non magnétisée ( $x \gg \lambda$ ), sont réfléchies par la zone magnétisée de fort champ puis repartent vers la zone libre ( $x \gg \lambda$ ) de champ.



L'objectif de cet exercice est d'identifier ces deux classes d'orbites, libres (1) et piégées (2) et d'analyser le mouvement des orbites liées (piégées). A un instant quelconque  $t$  l'interaction entre une particule de charge  $q$ , de masse  $m$ , de position  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$  et de vitesse  $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = v_x\mathbf{e}_x + v_z\mathbf{e}_z$ , est décrite par la force de Laplace  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

1 Etablir les équations du mouvement vérifiées par  $dv_x/dt$  et  $dv_z/dt$ .

2 On introduit les quantités:  $E = \frac{m}{2}v_x^2 + \frac{m}{2}v_z^2$  et  $p_z = m\left(v_z + \frac{\lambda q B}{m} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\right)$ . Dédurre du résultat précédent les relations:  $dE/dt = 0$  et  $dp_z/dt = 0$ . Dans la suite du problème  $p_z$  et  $E$  constituent donc des données de base de l'étude des orbites au même titre que  $B$  et  $\lambda$ .

3 Démontrer que l'étude des orbites dans le plan  $(x, z)$  se réduit à l'analyse de l'équation vérifiée par  $dv_x/dt$  qui est équivalente au problème du mouvement suivant  $x$  d'une particule de masse  $m$  interagissant avec un potentiel  $D\left[1 - \exp\left(-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\right]^2$ :

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} D \left[ 1 - \exp\left(-\frac{x-x_0}{\lambda}\right) \right]^2$$

et exprimer  $D$  et  $x_0$  en fonction des données du problème.

Tracer la courbe de potentiel  $D\left[1 - \exp\left(-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\right]^2$  en fonction de  $x$  et expliquer sur la base de cette figure l'existence de deux classes d'orbites: les orbites liées dont l'extension en  $x$  reste bornée et les orbites libres dont l'extension suivant  $x$  n'est pas limitée suivant  $x > 0$ .

4 Dans la suite du problème on s'intéresse uniquement aux orbites liées. On introduit les variables  $u, v$  et  $\tau$  suivant les relations :

$$u = 1 - \exp\left(-\frac{x - x_0}{\lambda}\right), \quad v = \frac{v_x}{\sqrt{2D/m}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2D}{m}} \frac{t}{\lambda}$$

Ainsi,  $x = x_0 - \lambda \log(1 - u)$ ,  $v_x = \sqrt{2D/m} v$  et  $t = \lambda \tau \sqrt{\frac{m}{2D}}$ . Etablir les deux équations vérifiées par  $du/d\tau$  et  $dv/d\tau$  en fonction de  $u$  et  $v$ .

5 On définit l'énergie normalisée  $\varepsilon = u^2 + v^2$  et la pulsation  $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon}$ . Démontrer l'invariance :  $d\varepsilon/d\tau = 0$ . Quelles sont les valeurs prises par  $\varepsilon$  pour la classe des orbites liées.

6 On considère la variable  $s(u, v) : s = (\omega v) / (\varepsilon - u)$ . Etablir l'équation vérifiée par  $ds/d\tau$  en fonction de  $u, v, \varepsilon$  et  $\omega$  et en déduire l'équation vérifiée par  $ds/d\tau$  en fonction de  $u, \varepsilon$  et  $\omega$ . Exprimer  $1 + s^2$  en fonction de  $u$  et  $\varepsilon$ . Déduire des relations précédentes que la variable  $s$  vérifie l'équation différentielle :  $ds/d\tau = \omega(1 + s^2)$ , c'est-à-dire  $s = \tan(\omega\tau)$ . Les variables  $u$  et  $v$  vérifient donc les deux relations algébriques :  $u^2 + v^2 = \varepsilon$  et  $\omega v \cos(\omega\tau) = (\varepsilon - u) \sin(\omega\tau)$ . Déduire de ces relations que les variables  $u$  et  $v$  sont des fonctions périodiques du temps  $\tau$ .

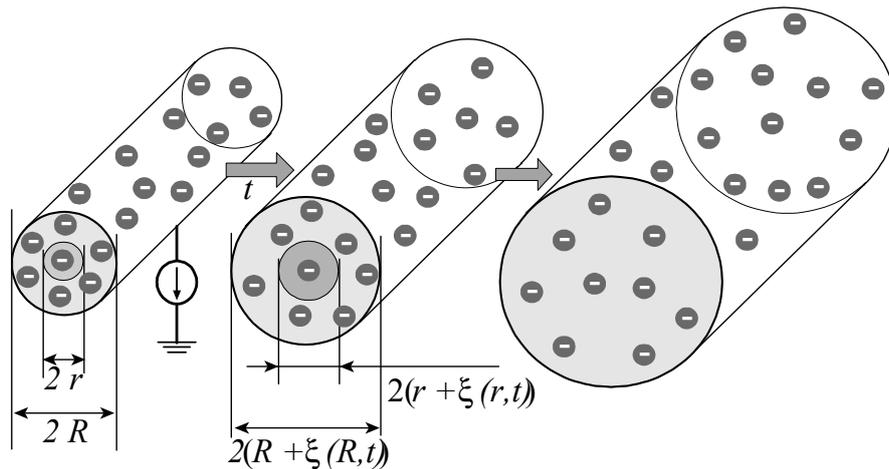


**E** On considère un faisceau électronique cylindrique de longueur infinie et de rayon  $R$ . On note  $N$  le nombre d'électrons, de charge  $q$  et de masse  $m$ , par unité de volume (la densité électronique) et  $\mathbf{V} = V\mathbf{u}_z$  la vitesse des électrons.  $N$  et  $\mathbf{V}$  sont uniformes à l'intérieur du faisceau et nulles à l'extérieur. On utilisera un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  suivant une base cylindrique  $[\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z]$ .

- 1 Exprimer la densité volumique de charge du faisceau  $\rho$ .
- 2 Exprimer le champ électrique à l'intérieur du faisceau en fonction de  $r$ .
- 3 Exprimer la densité volumique de courant du faisceau  $J\mathbf{u}_z$ .
- 4 Exprimer le champ magnétique à l'intérieur du faisceau en fonction de  $r$ .
- 5 Calculer la somme des forces s'exerçant sur un électron.
- 6 Pour quelle valeur de  $V$  y a-t-il compensation de ces forces? Commenter le résultat.



**F** On considère un plasma cylindrique constitué uniquement d'électrons, de charge  $-e$  et de masse  $m$ , initialement au repos. On utilise un système de coordonnées cylindriques de vecteur radial unitaire  $\mathbf{e}_r$ ; la position d'un point, dans un plan de section perpendiculaire à l'axe, est donc donnée par  $r\mathbf{e}_r$  où  $r$  est la coordonnée radiale du vecteur position. On note  $n(r, t)$  la densité d'électrons en un point de position  $r$  à un instant  $t$ ; la densité initiale à l'instant  $t = 0$  étant homogène et égale à  $N$  :  $n(r, t = 0) = N$  si  $0 < r < R$  et  $n(r, t = 0) = 0$  si  $r > R$ . Il n'y a pas de dynamique axiale. A l'instant initial,  $t = 0$ , ce cylindre d'électrons est donc de rayon  $R$ .



Sous l'effet des forces répulsives coulombiennes ce cylindre éclate suivant la direction radiale. On appelle  $\xi(r, t)$  le déplacement radial, à l'instant  $t$ , des électrons situés initialement en  $r$ , à l'instant  $t = 0$ ; au temps  $t > 0$ , la position d'un électron, initialement en  $r$ , est donc donnée par  $r + \xi(r, t)$ . A l'instant  $t = 0$ , le déplacement radial ainsi que la vitesse radiale sont nuls :  $\xi(r, t = 0) = 0, \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ .

1 Calculer le champ électrique,  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_r$ , créé à l'intérieur du cylindre, en  $r + \xi(r, t)$ , à l'instant  $t$ , par ce plasma électronique en expansion.

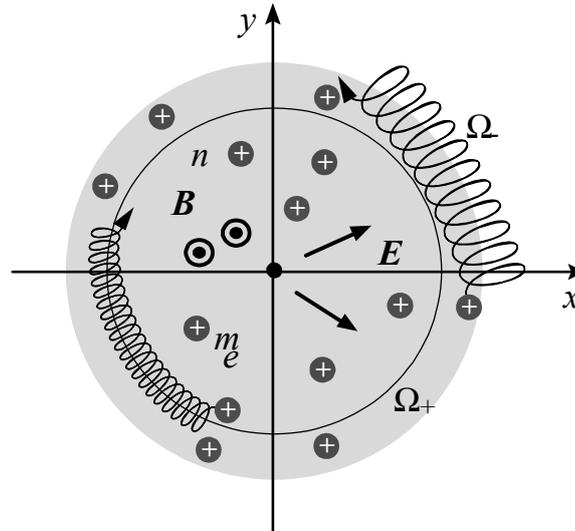
2 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2}$ ; on introduira  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$ ; quel est le nom et quelle est la signification de cette quantité?

3 En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\frac{\partial \xi(r,t)}{\partial t}$ .

4 Exprimer  $\omega_p t$  en fonction de  $\xi$  et  $r$  et commenter. En particulier, quel est le temps  $T$  de doublement du rayon ( $R \rightarrow 2R$ ) du cylindre? Le processus d'éclatement est-il exponentiel, pourquoi?



**G** On considère un faisceau électronique cylindrique de longueur infinie et de rayon  $R$ . On note  $N$  le nombre d'électrons, de charge  $q$  et de masse  $m$ , par unité de volume (la densité électronique). On considère une situation où ce faisceau électronique, qui a tendance à éclater, est stabilisé par l'influence d'un champ magnétique statique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . L'effet des forces de Laplace compensant l'effet des forces répulsives de Coulomb, la densité reste donc homogène et égale à  $N$ , les électrons décrivant des orbites bornées radialement. Pour cette étude on utilisera une base cartésienne  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  et on considérera qu'il n'y a pas de mouvement le long de l'axe du cylindre:  $\frac{dz}{dt} = 0$ .



1 A l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ électrique  $\mathbf{E}(x, y) = E_x(x, y)\mathbf{e}_x + E_y(x, y)\mathbf{e}_y$  créé en tout point du cylindre homogène.

2 Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées cartésiennes,  $x(t)$  et  $y(t)$ , d'un électron du cylindre soumis à l'influence des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  (on introduira  $\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 M}$  et  $\omega_c = \frac{qB}{M}$ ).

3 On introduit la variable complexe  $Z(t) = x(t) + jy(t)$ , déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{d^2 Z}{dt^2}$ .

4 On cherche une solution de la forme  $Z(t) = Z_0 \exp(j\omega t)$ , établir l'équation algébrique vérifiée par  $\omega$  et en déduire la condition vérifiée par la quantité  $\frac{\omega_c}{\omega_p}$  pour que le mouvement soit borné. Commenter.



**H** On considère un plasma constitué uniquement d'ions, de charge  $q$  et de masse  $M$ , initialement au repos et situés entre les plans  $x = -a$  et  $x = +a$ . La densité initiale est homogène et égale à  $N$ ,  $n(x, t = 0) = N$  si  $-a < x < a$  et  $n(x, t = 0) = 0$  si  $|x| > a$ . A l'instant initial  $t = 0$ , l'épaisseur de ce plasma d'ions est donc  $2a$ . Sous l'effet des forces répulsives coulombiennes ce plasma a tendance à éclater suivant la direction  $x$ . On appelle  $h(x_0, t)$  le déplacement, à l'instant  $t$ , des ions situés en  $x = x_0$  à l'instant  $t = 0$ .

A l'instant  $t = 0$  on a donc le déplacement  $h(x_0, t = 0) = 0$  et la vitesse  $\frac{\partial h(x_0, t=0)}{\partial t} = 0$ . Aux temps  $t > 0$  la position d'un ion initialement en  $x_0$  est donc  $x = x_0 + h(x_0, t)$ .

1 Calculer le champ électrique,  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ , créé en  $x = x_0 + h(x_0, t)$ , à l'instant  $t$ , par le plasma.

2 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $h(x_0, t)$ , on introduira  $\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 M}$ .

3 Quel est le nom et la signification physique de cette quantité  $\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{\epsilon_0 M}}$ ?

4 Exprimer  $h(x_0, t)$ .

5 Au bout de quel temps  $T$ ,  $h(a, T) = a$ ?

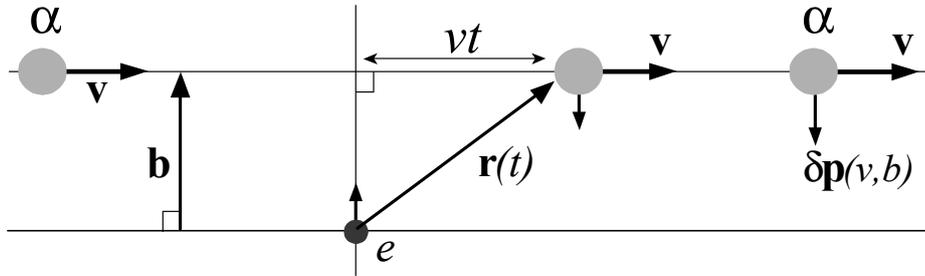
6 Au bout de combien de temps la densité en  $x = 0$  est-elle égale à  $\frac{N}{2}$ .



**I** Le problème du confinement thermonucléaire n'est pas simplement restreint à l'analyse des orbites, il doit aussi établir la possibilité pour une particule alpha de déposer toute son énergie au sein du plasma thermonucléaire réactif. La longueur d'arrêt par collisions est donc un paramètre important. Considérons une

particule alpha et un électron; la particule alpha, de masse  $M$ , est supposée initialement ( $t = -\infty$ ) en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{v}$  et l'électron initialement ( $t = -\infty$ ) au repos. La force de Coulomb entre ces deux particules génère un transfert d'impulsion sur la durée de l'interaction de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ :  $[\text{alpha } (M\mathbf{v}) + \text{électron } (\mathbf{0})]_{t=-\infty} \rightarrow [\text{alpha } (M\mathbf{v} - \delta\mathbf{p}) + \text{électron } (\delta\mathbf{p})]_{t=+\infty}$  où nous supposons  $|\delta\mathbf{p}| \ll M|\mathbf{v}|$ ; cette hypothèse réaliste permet de négliger, en première approximation, la variation de vitesse de la particule alpha et de considérer que l'électron reste au repos durant toute la durée de l'interaction.

Ainsi, sous ces approximations, la trajectoire  $\mathbf{r}(t)$  de la particule alpha, repérée à partir de l'électron au repos, est donnée par:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{b}$  où  $t$  est le temps et  $\mathbf{b}$  est le paramètre d'impact perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = 0$  et dont la norme  $b$  mesure la distance de la trajectoire à la parallèle à  $\mathbf{v}$  passant par l'électron au repos.



La figure ci-dessus illustre la collision ainsi modélisée. Après le passage de la particule alpha ( $t = +\infty$ ), l'électron initialement immobile a acquis une impulsion  $\delta\mathbf{p}$  somme des incréments infinitésimaux  $d\mathbf{p}$  entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ :

$$\delta\mathbf{p} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} dt \rightarrow |\delta\mathbf{p}| = \delta p$$

ou  $-e$  et  $2e$  sont les charges de l'électron et de la particule alpha.

1 Etablir, par projections suivant  $\mathbf{b}/b$  et suivant  $\mathbf{v}/v$ , l'expression de la norme  $\delta p(v, b)$  de ce transfert d'impulsion, entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ , de la particule alpha de trajectoire  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{b}$  vers l'électron au repos; en déduire l'expression du transfert d'énergie  $\delta\varepsilon(v, b) = \delta p^2/2m$  de la particule alpha vers l'électron.

Nous supposons, dans la suite, que l'essentiel du transfert d'énergie  $\delta\varepsilon(v, b)$  de la particule vers un électron immobile se déroule lorsque les deux particules sont proches, c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ . Pour une population d'électrons au repos de densité  $n$ , nous supposons donc que la perte totale d'énergie  $\langle\delta E\rangle$  subie par une particule alpha de vitesse  $\mathbf{v}$  durant un temps  $\delta t$  est due aux électrons contenus dans un ensemble de couronnes cylindriques d'axes dirigés suivant  $\mathbf{v}$ , de hauteurs  $v\delta t$  et d'épaisseurs  $db$ ,  $b$  variant de  $\lambda_L$  à  $\lambda_D$ .

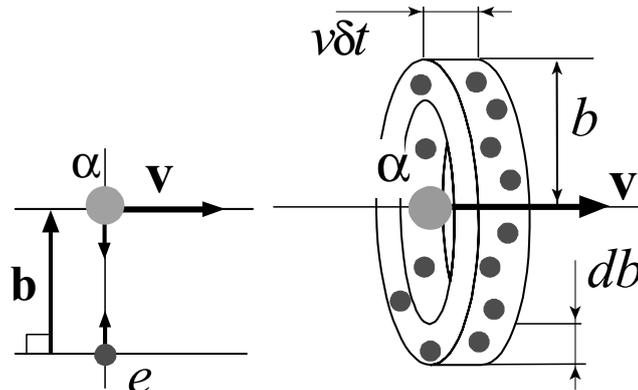
L'interaction coulombienne étant exponentiellement faible au-delà d'une distance  $\lambda_D$  et statistiquement insignifiante en deçà d'une distance  $\lambda_L$  (on introduira la constante  $\Lambda = \log(\lambda_D/\lambda_L)$ ).

2 Sous cet ensemble d'hypothèses, établir l'expression du coefficient de ralentissement  $\langle\delta E\rangle/\delta t$  d'une particule alpha en fonction des données du problème,  $\langle\rangle$  désignant la somme sur tous les électrons fixes participant au ralentissement durant le temps  $\delta t$ , chaque électrons recevant la quantité d'énergie  $\delta\varepsilon(v, b)$ .

3 Considérant la relation  $\langle\delta E\rangle/\delta t = d(mv^2/2)/dt$ , déduire du résultat précédent l'expression de la fréquence de friction  $\nu(v, n)$  décrivant le ralentissement d'une particule alpha de vitesse  $v$  interagissant avec une population électronique de densité  $n$ :

$$\frac{dv}{dt} \equiv -\nu(v, n) v$$

4 Etablir la loi horaire de ralentissement  $v(t)$  pour une particule alpha thermonucléaire de vitesse initiale  $c/23$  ( $c$  est la vitesse de la lumière).



5 En déduire l'expression de la distance  $D(n)$  parcourue par une particule alpha thermonucléaire de vitesse initiale  $c/23$  lorsqu'elle atteint l'état de repos.

6 Le calcul qui vient d'être mené suppose l'interaction entre une particule alpha et une population froide d'électrons, décrire, en quelques lignes, comment il serait possible de calculer la longueur d'arrêt  $D(n, T)$  d'une particule alpha thermonucléaire interagissant avec un population électronique chaude de température  $T$ .



**J** L'objectif de ce problème est d'établir la condition de découplage des électrons rapides dans un plasma de tokamak. La relation exprimant le taux de variation temporel de la vitesse  $\mathbf{v}$  d'un électron ( $\langle \delta \mathbf{v} \rangle / \delta t$ ) de charge  $-e$  et de masse  $m$ , interagissant avec une population d'ions au repos, de charge  $Ze$  et de densité  $n_i$  est donnée par :

$$\frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} = -\frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^2 v^3} \mathbf{v}$$

où  $\Lambda$  est un coefficient sans dimension, le logarithme coulombien, de valeur comprise entre 10 et 20 dans un plasma de tokamak.

1 Expliquer qualitativement l'origine de la dépendance en  $-V/V^3$ .

Dans un tokamak, la décroissance de ce terme de friction collisionnelle avec la vitesse est à l'origine du phénomène de production d'électrons dit *runaway* ; en effet, l'accélération électrique le long des lignes de champ, nécessaire à la production du courant toroïdal, peut, à partir d'une certaine vitesse critique, être plus importante que la décélération collisionnelle.

Les électrons ainsi découplés, ou *runaway*, apparaissent dans les décharges basse densité lorsque le champ électrique inductif toroïdal  $\mathbf{E}$  engendre une force de Coulomb supérieure à la force de friction collisionnelle (les disruptions majeures du plasma génèrent aussi des *runaway*). L'équation décrivant l'accélération électrique et le ralentissement collisionnel,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m} \frac{\mathbf{v}}{v^3} - e\mathbf{E}$$

peut être étudiée après projection sur une base polaire dont l'axe est dirigé par le champ magnétique statique  $\mathbf{B}$  ; ainsi la norme de la vitesse  $v$  et l'angle par rapport au champ magnétique  $\theta$  évoluent suivant le système :

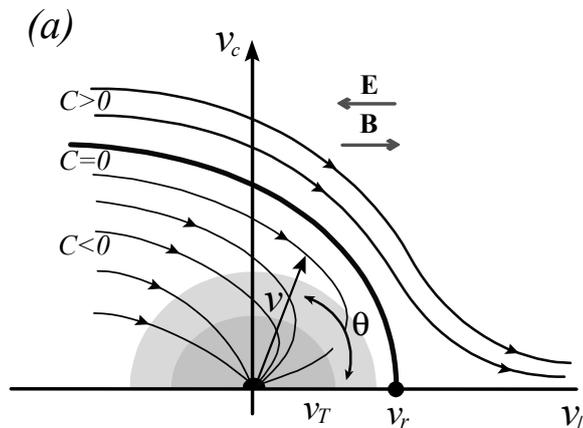
$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^2} \frac{1}{v^2} + \frac{eE}{m} \cos \theta \\ \frac{d \cos \theta}{dt} &= \frac{eE \sin^2 \theta}{m v} \end{aligned}$$

où nous avons considéré le champ électrique  $\mathbf{E} = -E\mathbf{B}/B$ .

2 Ce système de deux équations à deux inconnues admet un invariant du mouvement,  $C(\theta, v)$ , permettant de distinguer deux régimes dynamiques. Pour quelle valeur du paramètre  $a$  la quantité :

$$C = v^2 \sin^2 \theta - a \frac{n_i Z^2 e^3 \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 E m} (1 - \cos \theta)$$

est-elle un invariant du mouvement, c'est à dire  $dC/dt = 0$ ?



3 Etablir une classification du comportement des électrons sous l'effet d'une accélération électrique selon la valeur de  $C$ .

4 Définir le champ critique  $E_D$ , aussi appelé champ critique de *Dreicer*, tel que  $\frac{dv}{dt} = 0$  pour  $\theta = 0$  et  $v = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m}}$  où  $T_e$  est la température électronique.

5 Décrire le comportement des électrons runaway ainsi identifiés et proposer un procédé pour les contrôler.



**K** Les conclusions de l'analyse précédente pourraient laisser croire qu'une fraction significative des électrons dans un tokamak peut atteindre de très hautes énergies sans qu'aucun processus ne vienne limiter la croissance de cette énergie au cours du temps. Cette conclusion est éronnée car nous avons négligé les processus de rayonnement ; en particulier, le rayonnement synchrotron résultant de la courbure de la trajectoire le long des lignes de champs, qui présente une dépendance en la puissance quatre de l'énergie, offre un mécanisme de freinage haute vitesse suffisamment efficace pour arrêter les runaway. Introduisons l'énergie relativiste d'un électron runaway  $mc^2\gamma$  et négligeons la friction collisionnelle, à haute énergie, l'évolution de l'énergie est alors contrainte par deux tendances antagonistes, l'accélération inductive et le ralentissement radiatif.

$$mc \frac{d\gamma}{dt} = eE - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 R_0^2} \gamma^4$$

1 Pour quelle valeur  $\gamma_0$  du facteur relativiste  $\gamma$  l'accélération équilibre-t-elle le ralentissement synchrotron, c'est à dire  $\frac{d\gamma}{dt} = 0$ ?

2 Ecrire l'équation dynamique décrivant l'évolution du facteur  $\gamma$  en introduisant le temps caractéristique

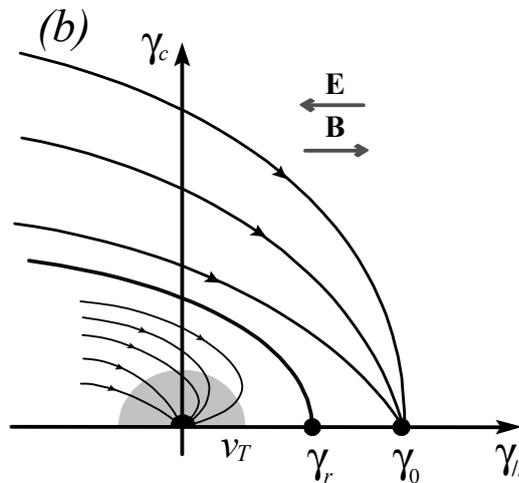
$$\tau_0 \equiv \frac{mc}{eE}$$

ainsi que la limite synchrotron  $\gamma_0$ .

3 Exprimer  $\frac{t}{\tau_0}$  en fonction de  $\gamma$  et  $\gamma_0$ ; on rappelle l'expression des deux primitives suivantes :

$$\int^x \frac{adu}{u^2 + a^2} = \arctan \frac{x}{a}, \quad \int^x \frac{2adu}{u^2 - a^2} = \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|$$

4 Tracer l'allure de la fonction  $\gamma$  en fonction de  $t$  pour  $\tau_0$  et  $\gamma_0$  fixes.

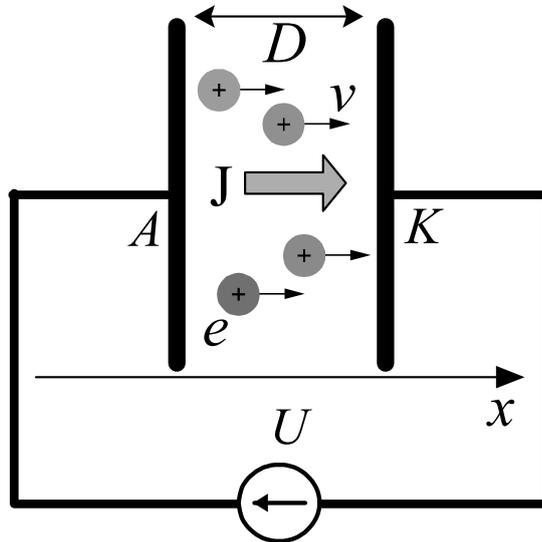


5 On considère  $\Lambda = 15$  et on rappelle  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$  et on prendra  $E = E_D$ . Pour des paramètres typiques de la machine ITER quel est l'ordre de grandeur de la limite synchrotron  $\gamma_0$ ?



**L** Au sein des réacteurs utilisés dans les industries microélectroniques les électrodes sont polarisées de manière à extraire un flux d'ions du plasma. L'impact de ces ions énergétiques sur un substrat de silicium est mis à profit dans les différentes opérations de fabrication des composants. Ce flux ionique, extrait d'un plasma, est accéléré dans une zone appelée gaine. La physique de cette zone est extrêmement complexe ; nous allons modéliser cette partie du réacteur par un écoulement purement ionique (il n'y a pas d'électron dans ce modèle de gaine) entre une anode A plane infinie située en  $x = 0$ , considérée comme une référence de potentiel ( $\phi(x = 0) = 0$ ), et une cathode K plane infinie située en  $x = D$ . Cet écoulement ionique est unidimensionnel et stationnaire suivant l'axe des  $x$ . Les ions sont décrits par leur densité  $n(x)$  et leur vitesse  $v(x)\mathbf{e}_x$ . Le champ électrique créé par la densité volumique de charge  $en(x)$  dérive du potentiel électrostatique  $\phi(x) < 0$ . Les conditions aux limites de ce problème, stationnaire et unidimensionnel, sont :  $\phi(x = 0) = 0$ ,  $\phi(x = D) = -U < 0$ ,  $v(x = 0) = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0} = 0$ . Le courant ionique dans ce modèle de gaine est décrit par la densité volumique de courant  $J = en(x)v(x)$ ,  $J$  est une constante considérée comme une donnée du problème.

- 1 Etablir l'expression de la conservation de l'énergie mécanique pour un ion de masse  $M$  et exprimer la vitesse  $v(x)$  d'un ion en fonction du potentiel électrostatique  $\phi(x)$ ; exprimer la densité ionique  $n(x)$  en fonction de la vitesse  $v(x)$  et de la densité de courant  $J$ .
- 2 Etablir l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre vérifiée par le potentiel électrostatique  $\phi(x)$ .
- 3 Intégrer cette équation et exprimer  $\phi(x)$  en fonction de  $x$ .
- 4 En déduire la relation courant-tension  $U(J, D)$  dans la gaine en exprimant la différence de potentiel  $U$  en fonction du courant ionique  $J$  et des paramètres du problème (relation de Child-Langmuir).



Le modèle précédent de gaine ionique est pertinent dans les réacteurs dits basse pression, mais, pour les procédés de dépôt, il est nécessaire de travailler à haute pression et les collisions deviennent dominantes. La relation entre la vitesse des ions et le potentiel électrostatique est alors donnée par une loi dite de mobilité linéaire :

$$v(x) = -\frac{e}{M\nu} \frac{d\phi}{dx}$$

où  $\nu$  est la fréquence de collisions des ions. Les ions sont décrits par leur densité  $n(x)$  et leur vitesse  $v(x)\mathbf{e}_x$ . Le champ électrique créé par la densité volumique de charge  $en(x)$  dérive du potentiel électrostatique  $\phi(x) < 0$ . Les conditions aux limites de ce problème, stationnaire et unidimensionnel, sont :  $\phi(x = 0) = 0$ ,  $\phi(x = D) = -U < 0$ ,  $v(x = 0) = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0} = 0$ . Le courant ionique dans ce modèle de gaine est décrit par la densité volumique de courant  $J = en(x)v(x)$ ,  $J$  est une constante considérée comme une donnée du problème.

- 5 Etablir l'équation vérifiée par le potentiel électrostatique  $\phi(x)$ .
- 6 Intégrer cette équation et exprimer  $\phi(x)$  en fonction de  $x$ .
- 7 En déduire la relation courant-tension  $U(J, D)$  dans la gaine en exprimant la différence de potentiel  $U$  en fonction du courant ionique  $J$  et des paramètres du problème (relation de Mott-Gurney).

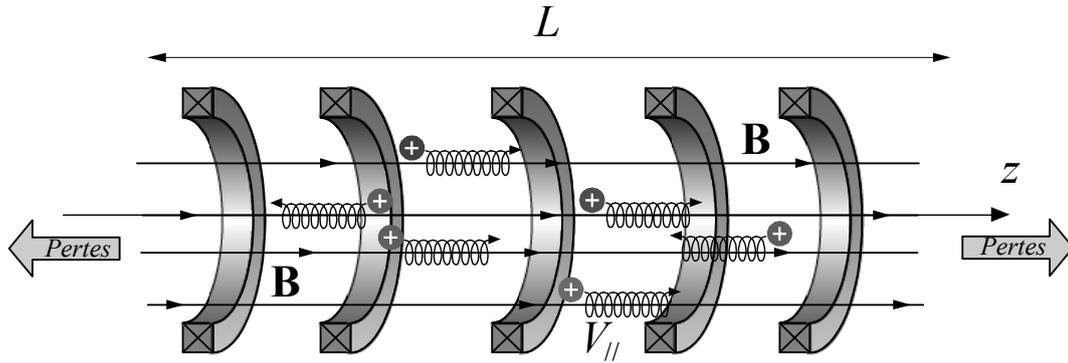


**M** Le mouvement d'une particule chargée interagissant avec un champ magnétique, uniforme et statique, est la combinaison d'une translation uniforme le long des lignes de champ et d'une rotation uniforme autour des lignes de champ; la configuration magnétique constituée par un simple champ droit dirigé suivant l'axe des  $z$ , de grande longueur suivant cette axe, peut donc être envisagée pour confiner la matière et l'énergie d'un plasma thermonucléaire.

Considérons un champ statique et homogène :  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  où  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$  est une base cartésienne orthonormée directe associée à un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . Dans le plan  $[x, y]$  le confinement est assuré par la force de Laplace qui enroule les orbites suivant la rotation cyclotronique, et, si la longueur du piège suivant  $z$  est conséquente, les fuites suivant l'axe des  $z$ , en fin de piège, ramenées au volume du piège, peuvent être maintenues à un niveau compatible avec le critère de combustion.

- 1 Quels sont les ordres de grandeur des rayons de Larmor d'un ion Deutérium et d'un électron, d'énergies cyclotroniques 10 keV, confinés par un champ homogène et statique de 10 T ?  
Les pertes principales pour une telle configuration magnétique ouverte sont de nature convective en sortie de piège : ions et électrons quittent le piège au bout d'un temps dont l'ordre de grandeur est égal au rapport  $L/V_{\parallel}$  où  $L$  est la longueur du piège et  $V_{\parallel}$  la vitesse moyenne le long des lignes de champ.
- 2 Sachant que les contraintes liées à l'équilibre et à la stabilité magnéto-hydrodynamique imposent une densité de particules de l'ordre de  $10^{14}\text{cm}^{-3}$ , le temps de confinement des ions permettant l'entretien de la combustion est donc de l'ordre de 1 s (critère de Lawson); quel doit être l'ordre de grandeur de la longueur

$L$  pour que le temps de confinement d'un ion deutérium, d'énergie cinétique le long des lignes de champ de 10 keV, soit de l'ordre de la seconde?

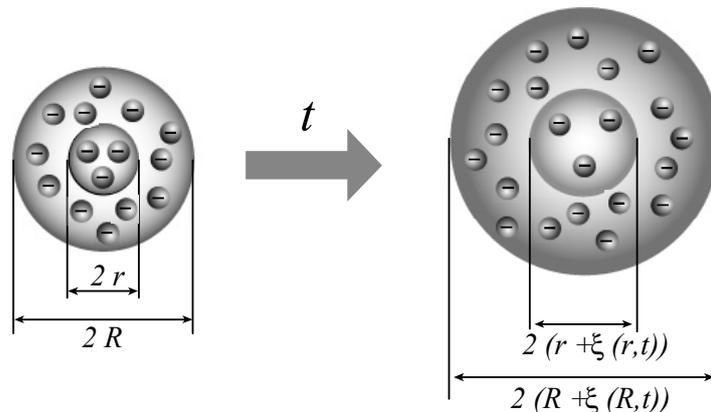


3 Un moyen d'inhiber les pertes en bout de piège consiste à appliquer un champ électrique confinant suivant l'axe des  $z$ , champ dérivant d'un potentiel parabolique:  $\Phi(x, y, z) = \Phi_0 z^2 / \lambda^2$ . Expliquer brièvement, en quelques phrases, pourquoi un tel procédé ne peut pas être mis en oeuvre pour le confinement des plasmas thermonucléaires.



N Dans le cadre de cette partie nous allons étudier les trois échelles de temps associées à la dynamique des sphères de plasmas neutre et non-neutre. De telles sphères de plasmas neutre ou non-neutre sont créées en laboratoire par irradiation laser de nanoparticules en phase diluée. Ainsi des nanoplasmas sphériques sont générés, puis se détendent, soit sous l'effet de la pression cinétique, soit par éclatement coulombien. Nous allons, dans une première partie, étudier l'éclatement coulombien d'une sphère d'électrons et calculer l'échelle de temps caractéristique de cette détente; dans une deuxième partie nous considérerons l'influence des collisions et calculerons le temps de migration des charges vers la surface d'une sphère chargée. Enfin, dans la troisième partie, nous établirons l'existence d'une oscillation électrique pour une sphère de plasma neutre puis la mise en perspective de cet ensemble de résultats sera proposée dans les trois dernières questions.

On considère un plasma sphérique constitué uniquement d'électrons, de charge  $-e$  et de masse  $m$ , initialement au repos. On utilise un système de coordonnées sphériques de vecteur radial unitaire  $\mathbf{e}_r$ ; la position d'un point est donc donnée par  $r\mathbf{e}_r$ , où  $r$  est la coordonnée radiale du vecteur position. On note  $n(r, t)$  la densité d'électrons en un point de position  $r$  à un instant  $t$ ; la densité initiale à l'instant  $t = 0$  étant homogène et égale à  $N$ :  $n(r, t = 0) = N$  si  $0 < r < R$  et  $n(r, t = 0) = 0$  si  $r > R$ . A l'instant initial,  $t = 0$ , cette sphère d'électrons présente donc un rayon  $R$ . Sous l'effet des forces répulsives coulombiennes cette sphère éclate suivant la direction radiale. On appelle  $\xi(r, t)$  le déplacement radial, à l'instant  $t > 0$ , des électrons situés initialement en  $r$  à l'instant  $t = 0$ ; la position d'un électron initialement en  $r$  est donc donnée par  $r + \xi(r, t)$ . A l'instant  $t = 0$ , le déplacement radial ainsi que la vitesse radiale sont nuls:  $\xi(r, t = 0) = 0$ ,  $\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ .



1 Calculer le champ électrique,  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_r$ , créé à l'intérieur de la sphère en  $r + \xi(r, t)$  à l'instant  $t$  par ce plasma électronique en expansion.

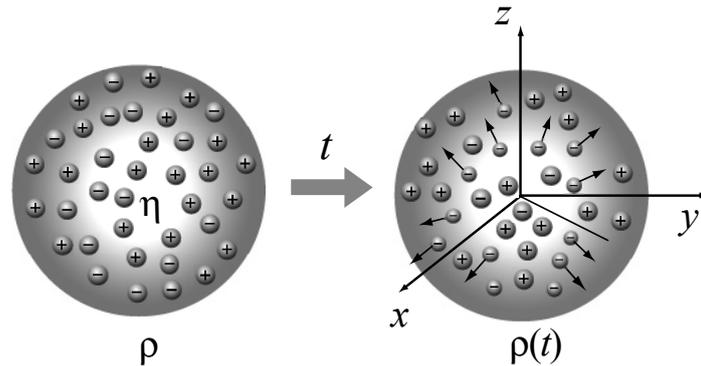
2 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2}$ ; on introduira  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$ . Quel est le nom et quelle est la signification de cette quantité?

3 En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t}$ .

4 Exprimer  $\omega_p t$  en fonction de  $\xi$  et  $r$  et commenter. En particulier, quel est le temps  $T$  de doublement du rayon ( $R \rightarrow 2R$ ) de la sphère? Le processus d'éclatement est-il exponentiel, pourquoi?

La pulsation  $\omega_p$  n'est pas la seule échelle caractéristique associée à la dynamique électrique d'une sphère non-neutre; il existe une deuxième échelle de temps, appelée temps de relaxation de Maxwell, décrivant le processus de disparition des charges libres en volume et de migration collisionnelle vers la surface sous l'effet de leur répulsion mutuelle.

Considérons un plasma sphérique constitué de protons, supposés infiniment lourds, donc au repos, et d'électrons mobiles en interaction collisionnelle avec les protons. Cette sphère de plasma est chargée négativement en raison d'un excès initial d'électrons par rapport aux protons. A un instant initial  $t = 0$  cette sphère est donc globalement chargée avec une densité volumique de charge uniforme  $\rho_0$ . Sous l'effet de la répulsion coulombienne et des collisions, cette densité volumique de charge évolue en fonction du temps, nous la noterons  $\rho$  à un instant  $t$ . Cette densité volumique de charge crée un champ électrique  $\mathbf{E}$  et ce champ électrique met en mouvement les électrons (les protons sont immobiles durant le processus) créant ainsi un une densité volumique de courant  $\mathbf{J}$ . Compte tenu des collisions entre électrons et protons le courant électronique obéit à la loi d'Ohm:  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  où  $\sigma$  est la conductivité électrique, supposée homogène.



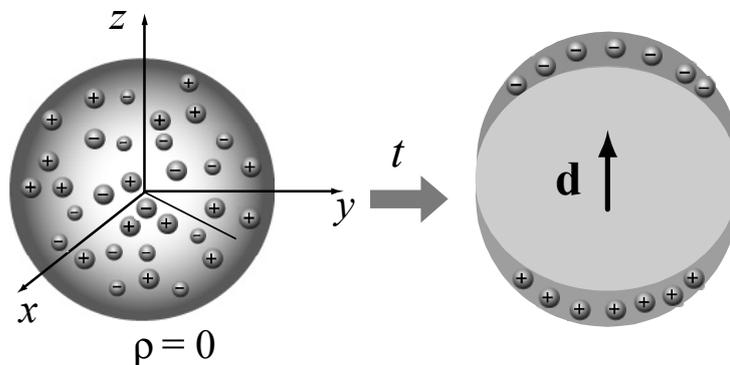
5 Quelle est l'unité de  $\sigma$ ? Quelle est l'unité de  $\epsilon_0$ ?

6 A l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss établir l'équation reliant  $\mathbf{E}$  et  $\rho$  à un instant  $t$ . A l'aide du principe de conservation de la charge établir l'équation reliant  $\mathbf{J}$  et  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  à un instant  $t$ .

7 En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  et  $\rho$ . Exprimer  $\rho(t)$  en fonction des données du problème.

8 Quel est le temps caractéristique  $\tau_M$  (temps de Maxwell) de migration de l'excès de charge électronique vers la surface de la sphère ionique? On introduit la densité de protons  $N$ , la pulsation plasma  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$  et l'expression de Lorentz de la conductivité  $\sigma = \frac{Ne^2}{m\nu}$  où  $m$  est la masse de l'électron,  $-e$  sa charge et  $\nu$  la fréquence de collision. Exprimer  $\tau_M$  en fonction de  $\nu$  et  $\omega_p$  et commenter.

Dans cette dernière partie nous considérons maintenant une sphère, de rayon  $R$ , constituée par un plasma neutre de densité ionique  $n_i$  homogène et de densité électronique  $n_e$  homogène:  $n = n_i = n_e$ , les ions sont des protons. Sous l'effet d'une perturbation initiale la composante électronique du plasma est déplacée; cette perturbation ne modifie pas la forme sphérique de la population électronique et déplace juste le centre de la sphère électronique. Ainsi obtient-on deux sphères homogènes, une sphère ionique, formée de protons, et une sphère électronique, dont les centres sont séparés par une distance  $d$  telle que  $d \ll R$ . On notera  $\mathbf{d}$  le vecteur décrivant ce déplacement entre les deux centres des sphères ionique et électronique; la masse de l'électron est notée  $m$  et sa charge  $-e$ .



9 A l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans le volume commun aux deux sphères.

10 A l'aide du principe fondamental de la dynamique, déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\frac{d^2 \mathbf{d}}{dt^2}$ ; on introduira  $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$ . Quelle est la pulsation caractéristique associée à ce type de perturbation? Commenter.

11 On considère à présent une sphère de protons libres et d'électrons libres froids, cette sphère est chargée négativement telle que de densité volumique de charge initiale ( $t = 0$ )  $\rho_0$  soit uniforme. Construire un modèle

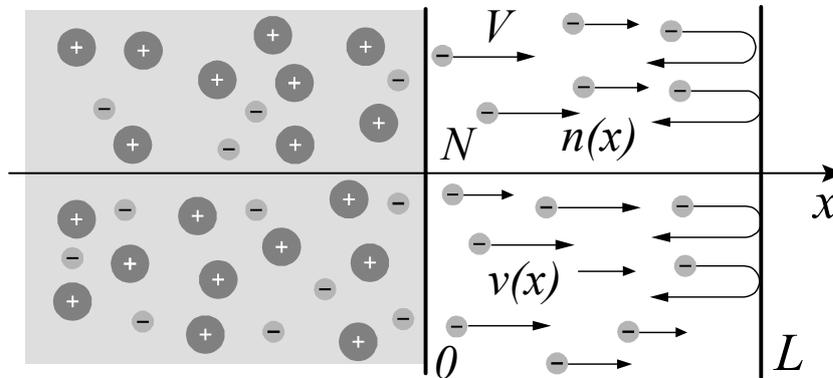
conjuguant l'éclatement coulombien identifié dans la première partie et la migration collisionnelle décrite dans la deuxième partie; proposer un critère permettant de discriminer: (i) un régime inertiel collectif où une sphère chargée négativement éclate sous l'effet de ses forces coulombienne internes et (ii) un régime resistif de relaxation vers l'équilibre. Commenter et discuter le croisement de ces deux régimes ou l'absence de croisement.

12 Quelles seraient les modifications de l'ensemble des modèles proposés dans ce problème si nous considérons: (i) une population d'électrons chauds à une température  $T$ , (ii) une population d'électrons et d'ions chauds à une température commune  $T$ . Proposer une nouvelle échelle caractéristique d'évolution de telles sphères chaudes (temps, longueurs, vitesses...).

13 Quelles seraient les modifications de l'ensembles des modèles proposés dans ce problème si nous considérons une population d'électrons froids à température nulle mais présentant une densité telle que les effets de dégénérescence quantique doivent être pris en compte.



**O** On considère un plasma semi infini occupant la région  $x < 0$ . L'interface  $x = 0$  de ce plasma émet des électrons de vitesse  $V$  dans la direction  $x > 0$ . Sous l'effet des forces électrostatiques ces électrons rebrousseent chemin au bout d'un parcours  $L$ . On appelle  $v(x)$  la vitesse de ces électrons à une distance  $x$  de l'interface, on a donc  $v(x = 0) = V$  et  $v(x = L) = 0$ . On appelle  $n(x)$  la densité de ces électrons et on pose  $n(0) = N$ . On appelle  $U(x)$  le potentiel électrostatique créé par ces électrons.



- 1 En appliquant la conservation de l'énergie des électrons, exprimer  $v(x)$  en fonction de  $U(x)$ ,  $e$ ,  $m$  et  $V$ .
- 2 En appliquant la conservation de la charge, exprimer  $n(x)v(x)$  en fonction de  $N$  et  $V$ .
- 3 Exprimer  $n(x)$  en fonction de  $U(x)$  et des paramètres  $N$ ,  $V$ ,  $e$  et  $m$ .
- 4 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $U(x)$ . En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $U(x)$ .
- 5 En déduire  $U(x)$  et  $L$ , commenter.



**P** Lorsqu'un champ magnétique est appliqué à un plasma, une zone de mélange champ-plasma se crée. La taille de cette zone est fonction du régime d'interaction et du processus d'application. Dans ce problème nous allons étudier successivement les régimes inertiel et collisionnel d'interaction par contact avec une zone magnétisée.

Considérons un plasma homogène, occupant le demi-espace  $x > 0$ , formé d'électrons, de masse  $m$ , de charge  $-e$  et de densité  $n_e$ , et d'un fond neutralisant d'ions supposés infiniment lourds donc immobiles. Le demi espace  $x < 0$  est vide et soumis à un champ magnétique homogène dépendant du temps dirigé suivant l'axe des  $z$ :  $\mathbf{B} = B_0(t)\mathbf{u}_z$ . Par continuité le demi espace  $x > 0$  est soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B} = B(x,t)\mathbf{u}_z$ ; les variations temporelles de ce champ induisent un champ électrique d'induction  $\mathbf{E}$  dirigé suivant l'axe des  $y$ :  $\mathbf{E} = E(x,t)\mathbf{u}_y$  et ce champ est la source d'un mouvement électronique de vitesse:  $\mathbf{V}_e = V(x,t)\mathbf{u}_y$ , donc d'un courant; ce courant crée un champ magnétique de direction opposée à celui appliqué et sa valeur détermine le processus de pénétration magnétique dans le plasma  $x > 0$ . On néglige les collisions et le courant de déplacement  $\partial\mathbf{E}/\partial t$ ; ( $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ ) est une base cartésienne orthonormée directe.

- 1 Enoncer la relation de Maxwell-Faraday et établir la relation entre  $E$  et  $B$ .
- 2 Enoncer la relation de Maxwell-Ampère et établir la relation entre  $B$  et  $V$ .
- 3 Enoncer la loi de Newton et établir la relation entre  $V$  et  $E$ .
- 4 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $E(x,t)$  et exprimer  $B(x,t)$ ; on introduira  $\lambda_p^2 = c^2/\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}$ , quel est le nom de cette longueur? Commenter.



**Q** Le modèle précédent considère un plasma sans collision. Il est donc relevant pour la phase dynamique sur une échelle de temps plus courte que l'inverse de la fréquence de collisions; pour les temps longs la loi de Newton doit être remplacée par la loi d'Ohm:  $\mathbf{J} = \eta \mathbf{E}$  où  $\mathbf{J}$  est la densité de courant électronique dans le plasma et  $\eta$  est la conductivité du plasma résultant des collisions électrons-ions. On néglige le courant de déplacement  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ .

1 Etablir l'équation décrivant la dynamique du champ magnétique dans ce régime collisionnel, c'est-à-dire exprimer la relation entre les variations spatiales  $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$  et les variations temporelles  $\frac{\partial B}{\partial t}$ . Comment appelle-t-on ce type d'équation?

2 Quelle est la dimension de la quantité  $\frac{1}{\mu_0 \eta}$ ? Justifier votre réponse. Dans le cadre d'un modèle dit de Lorentz la conductivité  $\eta$  est donnée en fonction de la fréquence de collisions  $\nu$  par  $\eta = \frac{n_e e^2}{m \nu}$ ; exprimer  $\frac{1}{\mu_0 \eta}$  en fonction de  $\lambda_p^2$  et  $\nu$ , commenter.



**R** On considère un plasma semi-infini de densité électronique homogène  $N$ , occupant la région  $x > 0$ . La région  $x < 0$  est vide et soumise à un champ magnétique homogène  $\mathbf{B}(x, t)|_{x < 0} = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$  dirigé suivant l'axe des  $z$ . La région  $x > 0$  est soumise à un champ magnétique inhomogène résultant de la pénétration du champ appliqué dans le vide:  $\mathbf{B}(x, t)|_{x > 0} = B(x) \cos[\omega t + \psi] \mathbf{e}_z$ . Ce champ magnétique variable crée un champ électrique d'induction  $\mathbf{E}(x, t) = E(x) \cos[\omega t + \varphi] \mathbf{e}_y$ , dirigé suivant l'axe des  $y$ , qui met en mouvement les électrons du plasma semi-infini. On supposera les ions immobiles et les électrons collisionnels tels que leur vitesse suivant  $y$ ,  $\mathbf{V}(x, t) = V(x) \cos[\omega t + \phi] \mathbf{e}_y$ , soit solution de l'équation:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q\mathbf{E} - m\nu\mathbf{V}$$

où  $m$  et  $q$  sont respectivement la masse et la charge de l'électron et  $\nu$  la fréquence de transfert d'impulsion (friction). On négligera le courant de déplacement et la force de Laplace, mais on ne négligera pas l'inertie électronique. On introduit les variables complexes  $\tilde{B}(x)$ ,  $\tilde{E}(x)$  et  $\tilde{V}(x)$  telle que  $B(x) \cos[\omega t + \psi] = \text{Re} [\tilde{B}(x) \exp(j\omega t)]$ ,  $E(x) \cos[\omega t + \varphi] = \text{Re} [\tilde{E}(x) \exp(j\omega t)]$ ,  $V(x) \cos[\omega t + \phi] = \text{Re} [\tilde{V}(x) \exp(j\omega t)]$ .

1 Exprimer  $\tilde{V}(x)$  en fonction de  $\tilde{E}(x)$ .

2 Enoncer la relation (équation) de Maxwell-Faraday et établir la relation entre  $\frac{d\tilde{E}(x)}{dx}$  et  $\tilde{B}(x)$ . Enoncer la relation (équation) de Maxwell-Ampère et établir la relation entre  $\frac{d\tilde{B}(x)}{dx}$  et  $\tilde{V}(x)$ .

3 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\tilde{E}(x)$  et exprimer  $\tilde{E}(x)$ , on introduira  $\lambda_p^2 = c^2 / \frac{Nq^2}{\epsilon_0 M}$ .

4 Retrouver les deux cas limites de pénétration inertielle (London) et résistive (Kelvin) du champ magnétique.



**S** Considérons maintenant un troisième mécanisme d'interaction champ magnétique-plasma. Nous allons étudier le phénomène de pénétration d'un plasma dans un champ en présence d'un écoulement et calculer la longueur d'interaction. Soit, en régime stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), un écoulement  $\mathbf{V}$ , interagissant avec un champ magnétique  $\mathbf{B}$ :

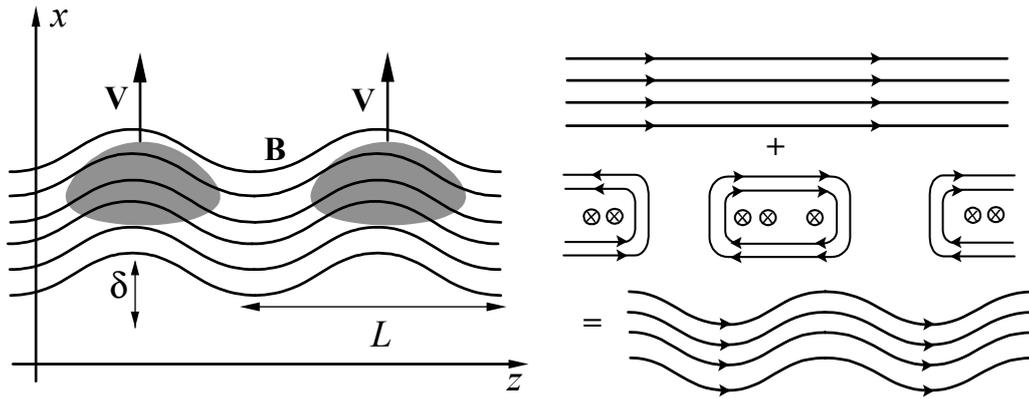
$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V \cos \frac{z}{L} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{B} &= b(z) \mathbf{u}_x + B \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$  est une base cartésienne orthonormée directe;  $V$  et  $B$  sont deux constantes. L'écoulement de plasma est supposé collisionnel; la densité de courant  $\mathbf{J}$ , le champ électrique  $\mathbf{E}$  et la vitesse  $\mathbf{V}$  sont donc reliés par la loi d'Ohm  $\mathbf{J} = \eta (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$  où  $\eta$  est la conductivité du plasma résultant des collisions électrons-ions.

On néglige le courant de déplacement  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ .

1 Etablir l'équation, reliant  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{B}$ , traduisant l'interaction champ-écoulement en régime stationnaire.

2 En déduire une relation entre  $\frac{d^2 b}{dz^2}$  et  $z$ . On introduira le nombre sans dimension  $\mathcal{R}_M = \mu_0 \eta V L$ .



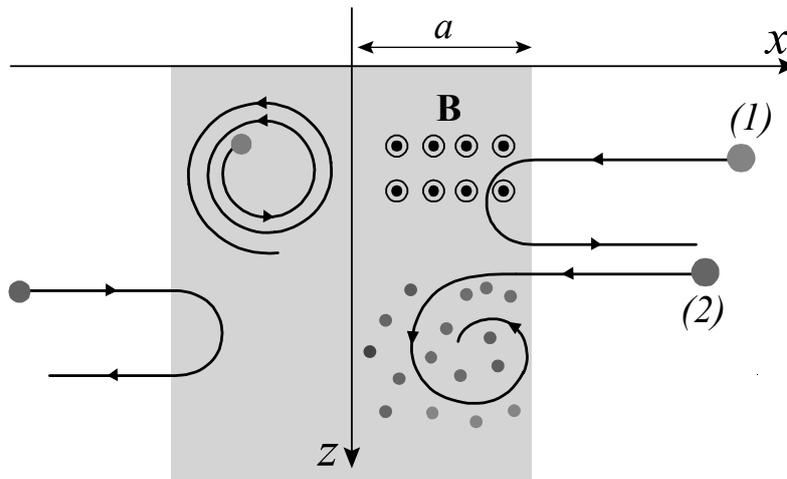
3 L'équation des lignes de champ est donnée par :  $\frac{dx}{dz} = \frac{b(z)}{B}$ . Intégrer l'équation précédente C8 et déduire la structure des lignes de champ magnétique; quelle est l'amplitude  $\delta$  de leur ondulation? Exprimer  $\delta$  en fonction de  $\mathcal{R}_M$  et  $L$ ; commenter.



T Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ . Considérons le champ magnétique inhomogène localisée  $\mathbf{B}(x)$  décrivant un espace libre de champ ( $x \rightarrow +\infty$ ) et une zone magnétisée ( $x \sim 0$ ) suivant la relation :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= B\mathbf{e}_y \text{ si } -a < x < a \\ \mathbf{B}(x) &= \mathbf{0} \text{ si } |x| \geq a \end{aligned}$$

ou  $B$  et  $a$  sont deux constantes données de base du modèle. La trajectoire d'un ion deutérium (1) sur la figure ci-dessous est dite libre car la particule ne reste pas localisée au voisinage de  $x \sim 0$ .



Si la zone magnétisée  $|x| < a$  est aussi rempli d'un plasma d'électron, les collisions assurent un transfert d'énergie de l'ion de vitesse  $\mathbf{V}$  vers les électrons, décrit par une force de friction  $-m\nu\mathbf{V}$ , permettant ainsi une transition vers une orbite liée (2). L'objectif de cet exercice est d'établir le critère de piégeage collisionnel. La dynamique d'un ion deutérium dans cette configuration de force de Laplace et de force de friction est donnée par :

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = e\mathbf{V} \times \mathbf{B}(x) - m\nu\mathbf{V} \text{ si } |x| < a \text{ et } \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{0} \text{ si } |x| \geq a$$

1 Définissons la variable complexe  $\mathcal{Z} = V_x + jV_z$  et notons  $\omega_c$  la pulsation cyclotron :  $\omega_c = eB/M$ , établir l'équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par  $\mathcal{Z}(t)$  et  $d\mathcal{Z}/dt$  si  $|x| < a$ .

2 Résoudre cette équation pour la condition initiale  $\mathbf{V}(t) = -V_0\mathbf{e}_x$  lorsque  $x(t) = +\infty$  si  $|x| < a$ .

3 Déduire du résultat précédent la condition de piégeage collisionnel d'un ion deutérium en fonction des données du problème.



**U** L'objectif de ce problème est d'établir les conditions théoriques d'optimisation du fonctionnement de certains réacteurs tels que ceux utilisés pour le dépôt de couches ultra-minces dans les industries optiques. On considère un plasma faiblement ionisé, créé à partir d'un gaz neutre, et entretenu grâce au mécanisme d'ionisation par impacts électroniques : la population électronique est générée par un champ électrique statique  $\mathbf{E} \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right] = -E\mathbf{e}_x$ ; durant toute cette étude on notera  $E = \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}$  la norme du champ électrique. La pression du gaz neutre non ionisé est notée  $P$  et la densité d'électrons  $n_e \text{ [m}^{-3}\text{]}$ .

Le phénomène d'amplification électronique le long de la direction  $x$  du champ électrique de l'ionisation est décrit par l'équation :  $\left. \frac{dn_e}{dx} \right|_{\text{ampli}} = \alpha(E, P) n_e(x)$

**6** Pourquoi le coefficient  $\alpha(E, P)$  dépend-il de la pression de gaz neutre  $P$  et du champ électrique  $E$ ?

Une théorie simple, basée sur le concept de libre parcours moyen, permet d'établir une forme fonctionnelle du type :  $\alpha(E, P) = aP \exp(-bP/E)$ , conforme aux résultats expérimentaux. Néanmoins le désaccord entre l'expérience et la théorie est de l'ordre de 10%. Une théorie plus élaborée permet d'établir une forme fonctionnelle du type :  $\alpha(E, P) = CP \exp\left[-D\sqrt{P/E}\right]$ , le désaccord avec l'expérience étant alors ramené à quelques %. C'est cette deuxième forme que nous utiliserons dans cette étude. On considère que le potentiel électrostatique  $\phi(x)$  est une fonction monotone croissante de la position  $x$  ( $\mathbf{E} = -\frac{d\phi}{dx}\mathbf{e}_x$ ) de la cathode vers l'anode, il est donc possible d'utiliser ce potentiel  $\phi$  pour repérer la position  $x$  dans le plasma et d'effectuer le changement de variable  $x \rightarrow \phi$  dans l'équation décrivant l'amplification électronique :

$$\left. \frac{d \ln n_e}{d\phi} \right|_{\text{ampli}} = \frac{\alpha(E, P)}{E}$$

Le coefficient  $\alpha(E, P)/E = C(P/E) \exp\left[-D\sqrt{P/E}\right]$  dépend alors uniquement du rapport  $\frac{E}{P}$ .

**7** Etablir l'existence d'un maximum de ce coefficient  $\frac{\alpha}{E}$  considéré comme une fonction de  $\frac{E}{P}$ . On notera  $\left. \frac{\alpha}{E} \right|_s$  la valeur de ce maximum et  $\left. \frac{E}{P} \right|_s$  la valeur de  $\frac{E}{P}$  permettant d'atteindre ce maximum dit *maximum de Stoletow*. Exprimer  $\left. \frac{E}{P} \right|_s$  et  $\left. \frac{\alpha}{E} \right|_s$  en fonction de  $D$  et  $C$ .



**V** L'objectif de ce problème est d'identifier la nature des flux de particules collisionnels en régime classique. Les processus de transport étant lents au regard des autres échelles de temps d'un plasma thermonucléaire, ils peuvent être considérés comme une suite d'équilibre prenant en compte : (i) les forces de pression, (ii) la densité volumique de force de Coulomb et (iii) la densité volumique de force de Laplace, (iv) plus un terme de friction traduisant les transferts d'impulsions collisionnels entre électrons et ions; la dynamique du plasma se réduit donc au bilan de forces :

$$\underbrace{-\nabla P}_{\text{Pression}} + \underbrace{nq\mathbf{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{nq\mathbf{V} \times \mathbf{B}}_{\text{Laplace}} - \underbrace{nm\nu\mathbf{V}}_{\text{Friction}} = \mathbf{0}$$

Ce bilan des forces auquel est soumis un fluide électronique, ou ionique, permet d'étudier les phénomènes de mobilité et diffusion magnétisées et d'établir ainsi l'équation de transport de la matière en présence d'un champ magnétique statique  $\mathbf{B}$ .

**1** Former le produit vectoriel de la vitesse  $\mathbf{V}$  avec l'expression précédente.

**2** Former le produit scalaire de la vitesse  $\mathbf{V}$  avec l'expression précédente.

**3** En déduire l'expression de la vitesse  $\mathbf{V}$  en fonction des champs  $\mathbf{E}$ ,  $\nabla P$  et  $\mathbf{B}$ .

**4** On introduit  $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b})$ ,  $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)$  et  $\nabla_{\perp} = -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla)$  où  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  et  $D_{\parallel} = \frac{k_B T}{m\nu}$ ,  $\mu_{\parallel} = \frac{q}{m\nu}$  et  $\omega_c = qB/m$  et la pression  $P$  est reliée à la température  $T$  suivant l'équation d'état classique  $P = nk_B T$ . Exprimer la vitesse  $\mathbf{V}$  sur la base  $\mathbf{E}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{E}_{\perp}$ ,  $\nabla_{\parallel} n$ ,  $\nabla_{\perp} n$ .

**5** Identifier les termes dits de Hall et commenter.



**W** L'existence des oscillations plasma peut être mise à profit pour transférer, de manière irréversible, de l'impulsion et de l'énergie d'un champ électrique vers la population électronique. Ce problème propose une étude de ce mécanisme de chauffage résonant. Soit un plasma homogène infini constitué d'électrons et de protons. Ces protons sont supposés infiniment lourds et donc restent au repos. A l'équilibre les électrons sont supposés au repos, la densité électronique,  $n_0$ , est homogène et égale à la densité protonique, et le champ électrique est identiquement nul en tout point de l'espace. On considère une perturbation (unidimensionnelle le long de l'axe des  $x$ ) de cet état d'équilibre, telle que tous les électrons appartenant à un plan  $x = x_0$  à l'instant initial  $t = 0$  sont déplacés dans le plan  $x = x_0 + \xi(x_0, t)$  à l'instant  $t$ , les protons restant au repos. La densité électronique devient donc inhomogène et la séparation de charges résultantes génère un champ électrique  $\mathbf{E}$ . La fonction  $\xi(x_0, t)$  est telle que tous les électrons situés initialement entre le plan  $x = x_0$  et le plan  $x = x_0 + \xi$  sont déplacés vers des coordonnées  $x > x_0 + \xi$  afin de préserver l'ordre initial entre les

différentes couches d'électrons. On observe donc à l'instant  $t$  un déficit de charges négatives à gauche du plan  $x = x_0 + \xi$ .

1 Calculer le champ électrique  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$  en un point  $x = x_0 + \xi$  à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{e}_x$  est un vecteur unitaire le long de l'axe des  $x$ . On établira la valeur de  $E$  sous la forme  $E = \frac{m}{q}\omega_p^2\xi$  où l'on explicitera  $\omega_p$  en fonction des données du problème.

2 Etablir l'équation vérifiée par  $\xi$  et  $\partial^2\xi/\partial t^2$ .

3 On introduit la variable complexe  $\mathcal{Z}(t) = \omega_p\xi + i\frac{\partial\xi}{\partial t}$ ; établir l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial t}$  et  $\mathcal{Z}$ .

4 Exprimer l'énergie mécanique (cinétique plus potentielle)  $\varepsilon$  d'un électron en fonction de  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{Z}^*$ .

On considère dans la suite du problème que la population électronique est soumise à un champ électrique harmonique d'origine extérieure au plasma:  $\mathcal{E}(t) = -\frac{m}{q}A\cos(\omega t)$ . Ce champ électrique interagit avec les électrons qui sont ainsi soumis à deux forces: la force étudiée dans les questions précédentes décrivant l'interaction avec le reste du plasma, et la force  $-q\mathcal{E}$ .

5 Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial t}$ ,  $\mathcal{Z}(t)$  et  $A\cos(\omega t)$ .

6 Exprimer  $\mathcal{Z}(\tau)$  lorsque les conditions initiales sont données par  $\mathcal{Z}(0) = a_0\exp(i\varphi_0)$ ;  $\omega$  étant de l'ordre de grandeur de  $\omega_p$  on ne conservera de cette expression de  $\mathcal{Z}(\tau)$  que la partie dite résonante présentant un dénominateur proportionnel à  $\omega_p - \omega$ .

7 En déduire l'énergie absorbée par un électron:  $\delta\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(0)$ ; on ne conservera de cette expression de  $\delta\varepsilon$  que la partie linéaire en  $A$  et on négligera la partie en  $A^2$ .

8 Faire la moyenne de ce transfert d'énergie sur la phase initiale de l'oscillation  $\varphi_0$  et exprimer  $\langle\delta\varepsilon\rangle_{\varphi_0}$ . Calculer  $\langle\delta(\sqrt{\varepsilon})\delta(\sqrt{\varepsilon})\rangle_{\varphi_0}$  moyennée sur la phase initiale de l'oscillation ( $\delta(\sqrt{\varepsilon}) = \frac{\delta\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}$ ).

9 Exprimer  $\frac{\langle\delta\sqrt{\varepsilon}\delta\sqrt{\varepsilon}\rangle_{\varphi_0}}{2\tau}$  lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ ; on exprimera ce coefficient explicitement en fonction des données du problème.

On considère une description cinétique de l'excitation des oscillations plasma et on introduit la fonction de distribution  $F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t)$  décrivant la densité de probabilité qu'une oscillation de la tranche centrée au repos sur  $x_0$  possède l'énergie  $\varepsilon$  à l'instant  $t$  ( $F$  est une densité de probabilité et la probabilité est donnée par  $F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t)d\sqrt{\varepsilon}dx_0$ ); cette densité de probabilité est factorisable et normalisée:  $F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t) = f(\sqrt{\varepsilon}, t)n_0(1 + \frac{x_0}{\lambda})$ ,  $\int_0^{+\infty} f(\sqrt{\varepsilon}, t)d\sqrt{\varepsilon} = 1$ ,  $n_0$  et  $\lambda$  sont deux constantes modélisant un gradient de densité non perturbé. L'équation cinétique vérifiée par  $f$  est donnée par:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{\partial}{\partial\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} \frac{\langle\delta\sqrt{\varepsilon}\delta\sqrt{\varepsilon}\rangle_{\varphi_0}}{2\tau} \frac{\partial}{\partial\sqrt{\varepsilon}} \right] f$$

10 Exprimer la puissance absorbée par le plasma:  $P = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{+\infty} d\sqrt{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \varepsilon F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t) \right]$  en fonction des données du problème.



**X1** Le confinement d'un plasma thermonucléaire par un champ magnétique repose, en première analyse, au niveau microscopique, sur le résultat suivant: *le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique homogène et statique est composé d'une translation uniforme le long des lignes de champ et d'une rotation uniforme autour des lignes de champ*. Pour établir ce résultat classique considérons un proton de vitesse  $\mathbf{v}$  plongé dans un champ magnétique *statique uniforme*  $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b}$  est un vecteur unitaire. Afin d'étudier l'orbite décrite par ce proton dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$ , introduisons un système de coordonnées  $[X, Y, Z]$  associé à la base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{b}]$ ;  $X$  et  $Y$  constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$  et  $v_X$  et  $v_Y$  sont les composantes cartésiennes de la vitesse  $\mathbf{v}$  dans ce plan; définissons la variable complexe  $\mathcal{Z} \equiv v_X + jv_Y$  et notons  $\omega_c$  la pulsation cyclotron:  $\omega_c \equiv eB/m$ .

1 L'écriture de l'équation du mouvement d'un proton se réduit à la prise en compte de la force de Laplace, établir l'équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par  $\mathcal{Z}(t)$  et  $d\mathcal{Z}/dt$ .

2 Résoudre cette équation et exprimer la solution  $\mathcal{Z}(t)$  décrivant le mouvement de rotation cyclotronique autour des lignes de champ pour la condition initiale  $\mathcal{Z}(t=0) = \mathcal{Z}_0$ .

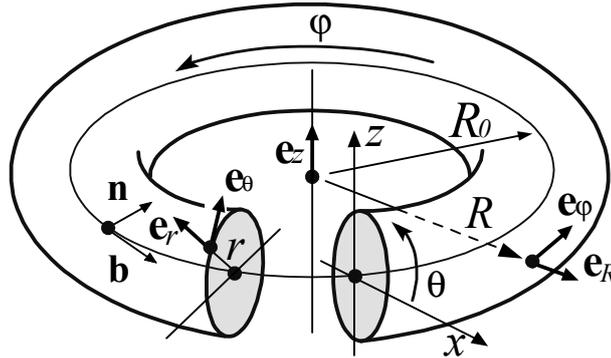
Considérons à présent un **champ magnétique inhomogène confinant**. Le vecteur position d'un proton peut être décomposé en la somme de la position du centre de la rotation cyclotronique locale, la position du *centre guide*, plus le rayon tournant de l'orbite cyclotronique, le *rayon de Larmor*  $\left(\int^t \mathcal{Z}(u) du\right)$ , nous ne nous intéresserons pas à ce mouvement cyclotronique rapide à petite échelle. Les centres guides des protons dans un champ magnétique *inhomogène* ne suivent pas exactement les lignes de champ et leurs mouvements sont la combinaison: (i) d'une translation le long des lignes de champ ( $v_{\parallel}$ ) et (ii) d'une lente *dérive* perpendiculairement aux lignes de champ ( $\mathbf{v}_D$ ) de vitesse:

$$\mathbf{v}_D \equiv \mathbf{v}_{DC} + \mathbf{v}_{DG} = v_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R\omega_c} + \frac{v_c^2}{2} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R\omega_c}$$

où  $R$  est le rayon de courbure des lignes de champ,  $\mathbf{b}$  le vecteur tangent aux lignes de champ et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal aux lignes de champ;  $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$  et  $v_c^2 = \mathcal{Z}\mathcal{Z}^*$  où  $\mathcal{Z}^*$  est le complexe conjugué de  $\mathcal{Z}$ .

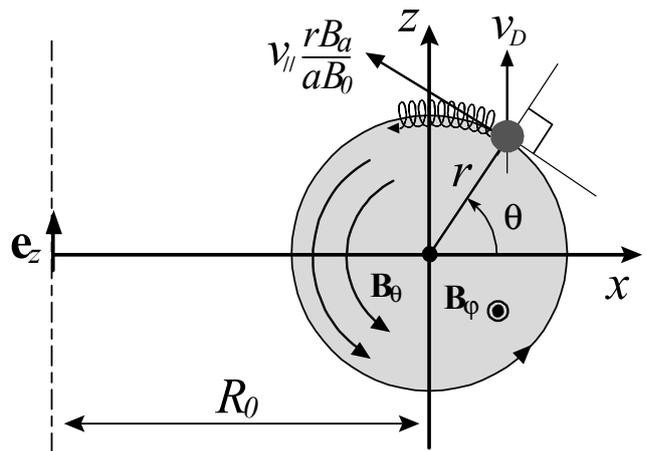
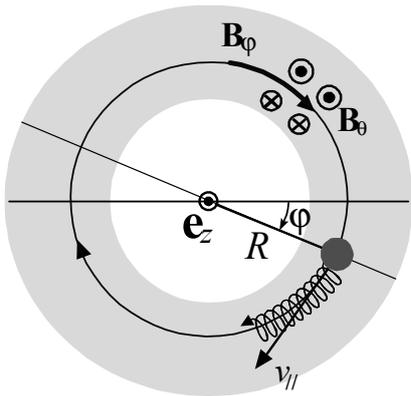
3 Expliquer, en quelques lignes, l'origine physique des deux composantes de la vitesse de dérive  $\mathbf{v}_D$ :  $\mathbf{v}_{DG}$  la vitesse de dérive de gradient et  $\mathbf{v}_{DC}$  la vitesse de dérive de courbure.

Pour une géométrie toroïdale, deux systèmes de repérage de la position du centre guide d'un proton peuvent être utilisés: (i) un repérage de type cylindrique  $[z, R, \varphi]$  sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi]$  et (ii) un repérage de type toroïdal  $[r, \theta, \varphi]$  sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi]$ ; on considérera aussi les projections cartésiennes ( $x \equiv r \cos \theta = R - R_0$ ,  $z \equiv r \sin \theta$ ) sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z]$  dans un plan  $\varphi$  constant. Considérons une configuration magnétique composée d'un champ magnétique toroïdal  $B_\varphi \mathbf{e}_\varphi = B_0 \frac{R_0}{R} \mathbf{e}_\varphi$  et d'un champ magnétique poloïdal  $B_\theta \mathbf{e}_\theta = B_a \frac{r}{a} \mathbf{e}_\theta$ . Le champ magnétique total est donc donné par l'expression:  $\mathbf{B} = B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi \equiv B_a \frac{r}{a} \mathbf{e}_\theta + B_0 \frac{R_0}{R} \mathbf{e}_\varphi$ ,  $R_0$  est le grand rayon du tokamak,  $B_0$  la valeur du champ toroïdal en  $R = R_0$ , c'est-à-dire en  $r = 0$ , et  $B_a$  la valeur du champ poloïdal en  $r = a$  où  $a$  est le petit rayon du tore.



Les lignes de champ sont alors des hélices s'enroulant sur des tores emboîtés. Au sein d'une telle configuration nous noterons  $v_{\parallel}$  la vitesse d'un proton le long des lignes de champ magnétique et  $\mathbf{v}_D = v_D \mathbf{e}_z = (v_{\parallel}^2 + v_c^2/2) \mathbf{e}_z / R_0 \omega_{c0}$  la vitesse de dérive magnétique verticale, où  $\omega_{c0} \equiv eB_0/m$  est la pulsation cyclotronique en  $R = R_0$  (c'est-à-dire  $r = 0$ ). Nous supposons les vitesses  $v_D$  et  $v_{\parallel}$  constantes, restreignant ainsi l'analyse aux *protons circulants*. Sous l'hypothèse  $B_a < B_0$ ,  $B_\varphi \approx B_0$ , la vitesse du centre guide d'un proton,  $v_D \mathbf{e}_z + v_{\parallel} \mathbf{B}/B$ , peut être écrite comme la combinaison de trois composantes:

$$v_{\parallel} \mathbf{e}_\varphi + v_{\parallel} \frac{r B_a}{a B_0} \mathbf{e}_\theta + v_D \mathbf{e}_z$$



4 Sur la base de cette expression, établir les deux équations différentielles du premier ordre vérifiées par  $dx/dt$  et  $dz/dt$  (les composantes de la vitesse du centre guide suivant  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z]$ ) en fonction de  $v_{\parallel}$ ,  $B_a/B_0$ ,  $v_D$ ,  $x/a$  et  $z/a$ .

5 On introduit la variable complexe  $\mathcal{C}(t) \equiv x(t) + \alpha + jz(t)$ , choisir une constante réelle  $\alpha$  telle que l'équation différentielle vérifiée par  $\mathcal{C}(t)$  soit simple, exprimer  $\alpha$  et établir cette équation différentielle sur  $\mathcal{C}(t)$ .

6 Exprimer la solution générale de cette équation différentielle et en déduire que l'orbite du centre guide dans le plan  $(x, z)$  est un cercle dont le centre a pour coordonnées  $(x = \delta_B, z = 0)$ ; établir l'expression du rapport  $|\delta_B/a|$  en fonction de  $v_D/v_{\parallel}$  et  $B_a/B_0$ .

7 Calculer le courant toroïdal total  $I$  [A] générant le champ poloïdal  $B_a r \mathbf{e}_\theta / a$ , courant circulant suivant  $\mathbf{e}_\varphi$  entre le centre  $r = 0$  et le bord  $r = a$ , on négligera la courbure  $R_0$  du tore ainsi assimilé à un cylindre. Sous

l'hypothèse  $v_{\parallel}^2 + \frac{v_z^2}{2} \approx 2k_B T/m$  et  $mv_{\parallel}^2 \approx k_B T$  où  $T$  est la température de la population de protons considérée, exprimer le rapport  $|\delta_B/a|$  en fonction de  $k_B T$ ,  $\mu_0 |I|$ ,  $a/R_0$  et des données du problème.

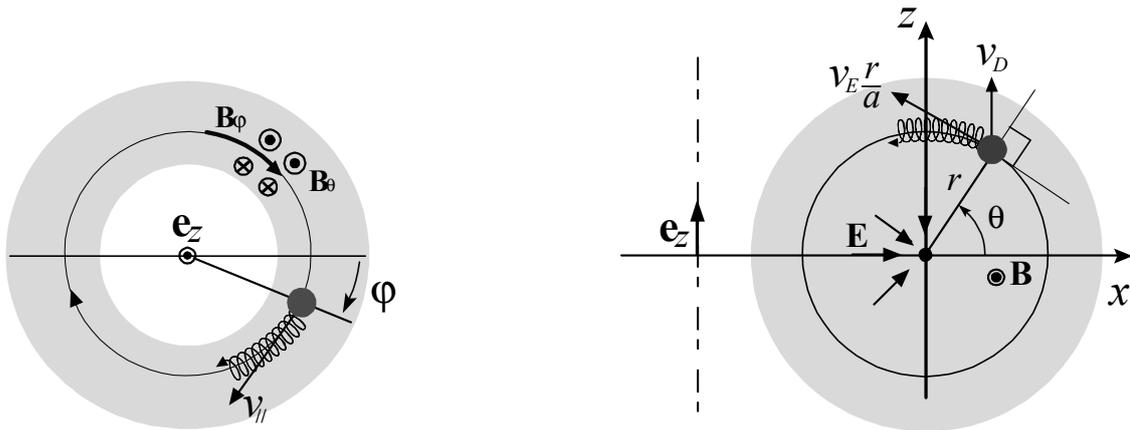
L'entretien d'un champ magnétique poloidal  $B_a r \mathbf{e}_{\theta}/a$ , au sein du tore de plasma thermonucléaire nécessite un apport de puissance continu. Nous noterons  $\eta$  la conductivité du plasma dans la direction toroïdale  $\mathbf{e}_{\varphi}$ .

8 En négligeant la courbure  $R_0$  du tore, c'est-à-dire en assimilant le tore à un cylindre, exprimer la puissance  $W_B$  nécessaire à l'entretien d'un courant toroïdal total  $I$  réparti uniformément entre le centre  $r = 0$  et le bord  $r = a$ , on supposera  $\eta$  constant.

**X2** Deux systèmes de repérage de la position du centre guide d'un proton peuvent être utilisés en géométrie toroïdale: (i) un repérage de type cylindrique  $[z, R, \varphi]$  sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_{\varphi}]$ ,  $\mathbf{e}_z$  étant dirigé verticalement, et (ii) un repérage de type cylindrique-toroïdal  $[r, \theta, \varphi]$  sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi}]$ , on considérera aussi les projections cartésiennes ( $x \equiv r \cos \theta = R - R_0$ ,  $z \equiv r \sin \theta$ ) sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z]$ . Considérons une configuration magnétique composée d'un champ magnétique uniquement toroïdal  $\mathbf{B} = B_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} = B_0 R_0 \mathbf{e}_{\varphi}/R$  et d'un champ électrique radial  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r = -E_0 r \mathbf{e}_r/a$  où  $R_0$  est le grand rayon du tore,  $B_0$  la valeur du champ magnétique en  $R = R_0$ , c'est-à-dire en  $r = 0$ , et  $-E_0$  est la valeur du champ en  $r = a$  où  $a$  est le petit rayon du tore. Les lignes de champ magnétique sont donc de simples cercles. Au sein d'une telle configuration nous noterons: (i)  $v_{\parallel}$  la vitesse d'un proton le long des lignes de champ magnétique, (ii)  $\mathbf{v}_D = v_D \mathbf{e}_z$  la vitesse de dérive magnétique verticale et (iii)  $\mathbf{v}_E$  la vitesse de dérive électrique suivant  $\mathbf{e}_{\theta}$ .

$$\mathbf{v}_D \equiv \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{v_z^2}{2}}{R_0 \omega_{c0}} \mathbf{e}_z = v_D \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_E \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{E_0 r}{B_0 a} \mathbf{e}_{\theta} = v_E \frac{r}{a} \mathbf{e}_{\theta}$$

où l'on définit  $v_E \equiv E_0/B_0$  et  $\omega_{c0} \equiv eB_0/m$ , et où nous avons considéré  $B \approx B_0$ , nous supposons ainsi la vitesse de dérive  $v_D$  constante.



Au sein de cette configuration de champs, les équations du centre guide  $(x, z)$  d'un proton prennent la forme simple:  $\frac{dx}{dt} = -v_E \frac{z}{a}$ ,  $\frac{dz}{dt} = v_D + v_E \frac{x}{a}$ .

9 On introduit la variable complexe  $\mathcal{Z}(t) \equiv x(t) + \beta + jz(t)$ , choisir une constante  $\beta$  telle que l'équation différentielle vérifiée par  $\mathcal{Z}(t)$  soit simple, exprimer  $\beta$  et établir cette équation différentielle.

10 Exprimer la solution générale de cette équation différentielle, et en déduire que l'orbite du centre guide dans le plan  $(x, z)$  est un cercle dont les coordonnées du centre sont  $(x = \delta_E, z = 0)$ ; on exprimera le rapport  $|\delta_E/a|$  en fonction de  $v_D$  et  $v_E$ .

11 Calculer la différence de potentiel radiale,  $U[\text{V}] (= \int E_r dr)$ , associée au champ  $\mathbf{E}$ , entre le centre  $r = 0$  et le bord  $r = a$ ; on négligera la courbure  $R_0$  du tore ainsi assimilé à un cylindre. Sous l'hypothèse  $v_{\parallel}^2 + \frac{v_z^2}{2} \approx 2k_B T/m$ , où  $T$  est la température de la population de protons considérée, exprimer le rapport  $|\delta_E/a|$  en fonction de  $|k_B T/eU|$  et  $a/R_0$ .

L'entretien d'un champ électrique radial,  $-E_0 r \mathbf{e}_r/a$ , au sein du tore de plasma thermonucléaire nécessite un apport de puissance continu. La conductivité au sein d'un plasma thermonucléaire magnétisé n'est pas de nature scalaire mais tensorielle; ainsi, suivant la direction radiale  $\mathbf{e}_r$  le champ magnétique réduit cette conductivité à la valeur  $\eta \nu^2 / \omega_{ce0}^2$  où  $\nu$  est la fréquence de collisions supposée donnée et  $\omega_{ce0}$  la pulsation cyclotronique électronique ( $\eta$  et  $\eta \nu^2 / \omega_{ce0}^2$  sont respectivement appelées *conductivité de Spitzer* et *conductivité de Braginsky*).

12 En négligeant la courbure  $R_0$  du tore, c'est-à-dire en assimilant le tore à un cylindre, exprimer la puissance  $W_E$  nécessaire au maintien d'une tension (différence de potentiel) radiale  $U$ , entre le centre  $r = 0$  et le bord  $r = a$ , on supposera  $\eta \nu^2 / \omega_{ce0}^2$  constant.

On note  $\varepsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide,  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide et  $c$  la vitesse de la lumière. On considère un écoulement ionique, unidimensionnel et stationnaire, suivant l'axe des  $x$ , entre le plan  $x = 0$  et le plan  $x = d$ .

Les ions de charge  $q$  et de masse  $M$  sont décrit par :  $n(x)$  la densité (d'ions par unité de volume) et  $v(x)$  la vitesse.

Le champ électrique  $e(x)$  créé par la charge d'espace  $qn(x)$  dérive du potentiel électrostatique  $\varphi(x)$ .

Les conditions aux limites de ce problème stationnaire unidimensionnel sont:  $\varphi(x=0) = 0$ ,  $e(x=0) = 0$ ,  $v(x=0) = 0$  et  $\varphi(x=d) = u$ .

En régime stationnaire la densité volumique de courant électrique,  $j = qn(x)v(x)$ , est constante:  $\frac{dj}{dx} = 0$ .



**Y** On considère un champ magnétique stationnaire possédant une symétrie de rotation autour de l'axe des  $z$ . En coordonnées cylindriques on a donc l'expression générale:

$$\mathbf{B}(r, z) = B_r(r, z) \mathbf{e}_r + B_z(r, z) \mathbf{e}_z, \quad B_z \gg B_r$$

On étudie le mouvement d'un électron de masse  $m$  et de charge  $q$  au voisinage de l'axe  $r = 0$ . Afin de simplifier l'étude de ce mouvement on effectue un développement du champ au voisinage de l'axe  $r = 0$ :

$$B_z(r, z) = B_z(r = 0, z) + O[r]$$

et on considère l'équation de Maxwell:  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$  qui au voisinage de l'axe permet d'établir le développement suivant:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r(r, z) = - \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r=0} - r \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial z \partial r} \right|_{r=0} + O[r^2]$$

cette dernière identité s'intégrant pour donner

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r=0} + O[r^2]$$

A l'ordre le plus bas on considère donc le développement suivant du champ:

$$\mathbf{B}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(r = 0, z)}{\partial z} \mathbf{e}_r + B_z(r = 0, z) \mathbf{e}_z$$

que l'on notera dans la suite du problème:

$$\mathbf{B} = -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz} \mathbf{e}_r + B(z) \mathbf{e}_z$$

On rappelle l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z$$

**1** Ecrire les équations du mouvement d'un électron en coordonnées cylindriques en utilisant l'approximation précédente du champ au voisinage de l'axe.

**2** On considère dans la suite du problème les orbites passant par  $r = 0$ . A l'aide des identités:

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[ r^2 \frac{d\theta}{dt} \right], \quad \frac{dr}{dt} B(z) + \frac{dz}{dt} \frac{dB}{dz} = \frac{1}{2r} \frac{d}{dt} [r^2 B(z)]$$

établir l'équation vérifiée par  $\frac{d\theta}{dt}$  en fonction de  $B(z)$ ; interpréter le facteur  $\frac{1}{2}$  ainsi obtenu.

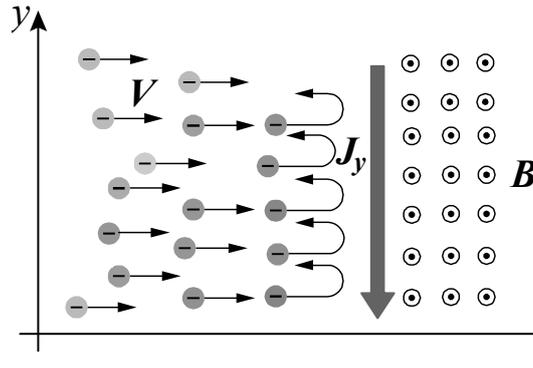
**3** Etablir l'équation vérifiée par  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  en fonction de  $B(z)$ .

**4** Etablir l'équation vérifiée par  $\frac{d^2 z}{dt^2}$  en fonction de  $\frac{dB}{dz}$ .

**5** En déduire l'existence d'une force diamagnétique ("*moins- $\mu$ -grad- $B$* ") et commenter.



**Z** On considère un plasma de particules de charge  $q$  et de masse  $m$ . Cette population mobile est neutralisée par un fond continu de particules infiniment massives de charge opposée et de densité identique en tout point. On considère un système de coordonnées cartésiennes  $[x, y, z]$ . Le plasma est situé dans la région des  $x$  négatifs où le champ magnétique  $b(x)$ , dirigé suivant l'axe des  $z$ , est quasiment nul; ce champ magnétique a une valeur constante dans la zone des  $x$  positifs grands où la densité devient nulle. On note  $n(x)$  et  $v_x(x)$  la densité et la vitesse suivant  $x$  des particules se dirigeant vers l'interface champ/particules ( $x \sim 0$ ) à partir de  $x = -\infty$ . En  $x = -\infty$  l'écoulement vers l'interface possède une vitesse  $v_0$  dirigée suivant l'axe des  $x$ :  $v_x(x = -\infty) = v_0$  (il existe également un écoulement de retour possédant une densité égale et une vitesse opposée). On note  $v_y(x)$  la vitesse suivant l'axe des  $y$ ; en  $x = -\infty$ :  $v_y(x = -\infty) = 0$ , la densité  $n(x = -\infty) = n_0$  et le champ magnétique est nul  $b(x = -\infty) = 0$ . En  $x = +\infty$  la densité de particules est nulle  $n(x = +\infty) = 0$  et le champ magnétique atteint la valeur constante  $b(x = +\infty) = b_0$ .



Le champ magnétique  $b(x)$  dérive d'un potentiel vecteur  $a(x)$ :  $b(x) = \frac{da}{dx}$  tel que  $a(x = -\infty) = 0$ . Au voisinage de l'interface champ/particules la force de Laplace incurve les trajectoires des particules et génère une composante de vitesse suivant l'axe des  $y$ . Cette composante est à l'origine d'un courant et ce courant est la source d'un champ magnétique qui permet d'annuler le champ dans la zone occupée par le plasma. La force de Laplace induit un retour des particules et empêche le plasma de pénétrer dans la zone occupée par le champ; il s'établit ainsi un équilibre dynamique entre le champ et la matière de part et d'autre de l'interface. Nous allons calculer les caractéristiques de cette interface et la condition de l'équilibre champ-fluide. En régime stationnaire la dynamique des quatre inconnues décrivant le fluide et le champ,  $[n(x), v_x(x), v_y(x), b(x)]$ , est déterminée par les quatre équations:

$$\begin{aligned} m v_x(x) \frac{d v_x(x)}{d x} - q v_y(x) b(x) &= 0 \\ m v_x(x) \frac{d v_y(x)}{d x} + q v_x(x) b(x) &= 0 \\ \frac{d}{d x} [n(x) v_x(x)] &= 0 \\ \frac{d b}{d x} + q \mu_0 n(x) v_y(x) &= 0 \end{aligned}$$

Afin de résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues on introduit un système de variables et d'inconnues normalisées:  $[n(x), v_x(x), v_y(x), b(x), a(x)] \rightarrow [N(X), V(X), W(X), B(X), A(X)]$  où la variable de position normalisée  $X$  et les densité, vitesse et champs normalisés sont définis par:  $X = \frac{q b_0}{m v_0} x$ ,  $N = \frac{n}{n_0}$ ,  $V = \frac{v_x}{v_0}$ ,  $W = \frac{v_y}{v_0}$ ,  $B = \frac{b}{b_0}$ ,  $A = \frac{q a}{m v_0}$ .

1 Etablir le système de cinq équations différentielles vérifié par  $N(X), V(X), W(X), B(X)$  et  $A(X)$ ; on introduira le paramètre  $\beta = \frac{\mu_0 n_0 m v_0^2}{b_0^2}$  dans l'écriture de ces équations. Quelle est la dimension de  $\beta$ ?

2 A partir de ce système d'équations, construire une combinaison,  $C[W(X), A(X)]$ , de  $W(X)$  et  $A(X)$ , indépendante de  $X$ ; c'est à dire un invariant  $C$  tel que  $\frac{dC}{dX} = 0$ . Compte tenu des conditions aux limites,  $[W(X = -\infty) = 0, A(x = -\infty) = 0]$ , quelle est la valeur de  $C$ ?

3 Construire une combinaison,  $K[V(X), A(X)]$ , de  $V(X)$  et  $A(X)$ , indépendante de  $X$ , c'est à dire un invariant  $K$  tel que  $\frac{dK}{dX} = 0$ . Compte tenu des conditions aux limites,  $[V(X = -\infty) = 1, A(x = -\infty) = 0]$ , quelle est la valeur de  $K$ ? Identifier une combinaison,  $G[N(X), V(X)]$ , de  $N(X)$  et  $V(X)$ , indépendante de  $X$ , c'est à dire un invariant  $G$  tel que  $\frac{dG}{dX} = 0$ . Quelle est la valeur de  $G$ ?

4 Dédire des résultats précédents la relation reliant  $\frac{d^2 A}{d X^2}$ ,  $A(X)$  et  $\beta$ . Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{dA}{dX}$  et  $A(X)$ . Dans la zone d'écoulement on pose  $A(X) = \sin 2\phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ ; établir l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{d\phi}{dX}$  et  $\phi$ .

5 Exprimer  $B$  en fonction de  $\phi$ . Exprimer  $X$  en fonction de  $\phi$ ; . Quelle est la valeur de  $\beta$ ?



**A'** La description des décharges électriques dans les gaz ionisés s'articule autour de la séparation entre une zone dite de plasma quasi-neutre et une zone de gaine au voisinage des parois. Les gaines ont été traitées en travaux dirigés et ce problème propose une étude complémentaire de la zone de plasma quasi-neutre dans le cas inertiel. La description complète d'une décharge nécessite le raccord de la solution obtenue ici et des solutions étudiées en travaux dirigés. Le problème de ce raccord est complexe et donne lieu à l'énoncé du critère de Bohm, il n'est pas considéré ici.

On considère donc un fluide constitué d'électrons et de protons, les protons sont traités comme un fluide inertiel sans collisions et les électrons comme une population sans inertie. La dynamique de ce modèle est décrite par le système d'équations:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) &= \nu_i n_e \\ \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + e\phi &= 0 \\ n_e &= n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \end{aligned}$$

$n_e$  et  $n_i$  sont respectivement les densités d'électrons et de protons,  $\mathbf{v}$  est la vitesse des protons,  $n_0$  la densité électronique au centre de la décharge,  $\phi$  est le potentiel électrostatique,  $T_e$  la température électronique et  $\nu_i$  est la fréquence d'ionisation:  $\nu_i n_e$  est le nombre de protons créés par unité de volume et unité de temps. En général ce processus de génération est dû à l'impact électronique; afin de préserver la généralité des résultats nous ne précisons pas la nature du mécanisme d'ionisation et nous considérerons cette fréquence d'ionisation comme une constante, donnée de base du modèle.

1 Quels processus, phénomènes, lois de conservation, lois de comportement, équations d'état... décrivent ces trois équations? Commenter brièvement.

Nous disposons donc de trois équations qui ne permettent pas de déterminer les quatre inconnues,  $n_e$ ,  $n_i$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\phi$ ; une hypothèse supplémentaire est nécessaire: la quasi-neutralité:  $n_e = n_i = n$ . Le modèle étant restreint à l'étude des écoulements unidimensionnels suivant l'axe des  $x$ , le système décrivant ce modèle quasi-neutre se réduit donc à:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(nv) &= \nu_i n \\ v^2 &= -\frac{2e\phi}{M} \\ n &= n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \end{aligned}$$

2 Justifier l'hypothèse de quasi-neutralité.

Afin de résoudre ce système de trois équations à trois inconnues on introduit un système de variables et d'inconnues normalisées:

$$[n(x), v(x), \phi(x)] \rightarrow [N(X), V(X), \Phi(X)]$$

où la variable normalisée de position est définie par  $X = \frac{\nu_i}{C_B} x$  et les densité, vitesse et potentiel par:  $\Phi = \frac{e\phi}{k_B T_e}$ ,  $V = \frac{v}{C_B}$ ,  $N = \frac{n}{n_0}$ . La vitesse  $C_B$  est définie par  $C_B = \sqrt{\frac{kT_e}{M}}$ . Les conditions aux limites sur la densité, la vitesse et le potentiel sont données par:  $N(X=0) = 1$ ,  $V(X=0) = 0$ ,  $\Phi(X=0) = 0$ .

3 Etablir le système de trois équations vérifié par  $N(X)$ ,  $\Phi(X)$  et  $V(X)$ .

4 En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\frac{dN}{dX}$  et  $N$ .

5 Résoudre cette équation et exprimer  $X$  en fonction du profil de densité  $N$  (on cherchera une équation sur  $u = \sqrt{-2 \log N}$ ).

6 Exprimer  $X$  en fonction du profil de potentiel  $\Phi$ .

7 Exprimer  $X$  en fonction du profil de vitesse  $V$ .

8 Pour quelle valeur  $X^*$  la vitesse devient elle supersonique:  $V(X^*) = 1$ ?

9 Ce point  $X^*$  marque le seuil d'entrée de la zone de raccordement entre le plasma quasi-neutre et la gaine. Exprimer  $N(X^*)$ .

10 Exprimer  $\Phi(X^*)$  et commenter les résultats ainsi obtenus.



**B'** On considère l'interaction entre un proton et un champ magnétique stationnaire inhomogène  $\mathbf{B}$ . Les lignes de champs de cette configuration magnétique sont des droites parallèles mais l'amplitude du champ varie de manière linéaire d'une ligne à l'autre dans la direction des  $x$ .

$$\mathbf{B} = B \left(1 + \frac{x}{L}\right) \mathbf{e}_z$$

$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  est une base cartésienne orthonormée directe,  $B$  est la valeur du champ à l'origine et  $L$  une longueur donnée. La position et la vitesse de ce proton sont repérées par les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z$$

1 Etablir les équations du mouvement; on introduira  $\omega_c = \frac{eB}{M}$  pour exprimer ce système d'équations.

2 Comment appelle-t-on la quantité  $\omega_c$ , quelle est sa signification physique et sa valeur pour un champ de un tesla?

Dans la suite de ce problème on considère  $z = \frac{dz}{dt} = 0$  et on introduit la variable complexe:

$$Z = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$$

3 Etablir l'équation différentielle ordinaire du premier ordre vérifiée par  $\frac{dZ}{dt}$ ,  $Z(t)$  et  $x(t)$ .

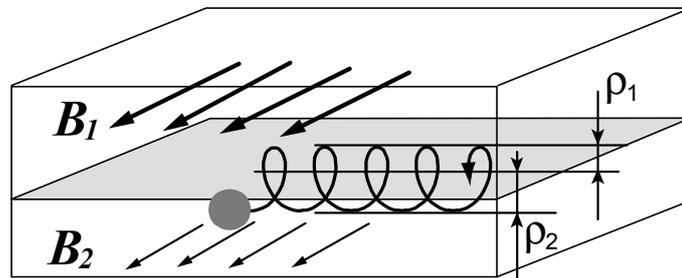
4 Résoudre cette équation dans le cas homogène:  $L = +\infty$  et en déduire les expressions de  $Z(t)$  et  $x(t)$ , les conditions initiales du problème étant  $Z(t=0) = V_c \exp(i\varphi_0)$  où  $V_c$  et  $\varphi_0$  désignent une amplitude et une phase réelles.

On considère maintenant le cas général du champs linéaire ( $L \neq +\infty$ ) et, sous une hypothèse d'adiabaticité, on substitue  $Z(t)$  et  $x(t)$ , obtenue dans la question 4, dans le terme décrivant l'inhomogénéité du champ de l'équation générale obtenue question 3.

5 Justifier cette approximation par un "ordering" entre longueurs.

6 Résoudre l'équation différentielle ordinaire du premier ordre avec second membre ainsi obtenue et exprimer  $Z(t)$ , les conditions initiales du problème étant  $Z(t=0) = V_c \exp(i\varphi_0)$  où  $V_c$  et  $\varphi_0$  désignent une amplitude et une phase réelles.

7 En déduire l'existence d'une dérive perpendiculaire aux lignes de champ  $V_D \mathbf{e}_y$  se superposant aux mouvements de rotation autour des lignes de champ, exprimer  $V_D$  en fonction de  $V_c$ ,  $\omega_c$  et  $L$ .



8 Expliquer l'origine physique de cette vitesse de dérive  $V_D \mathbf{e}_y$ .



**C'** On considère l'écoulement d'un fluide constitué de protons, écoulement unidimensionnel et stationnaire, suivant l'axe des  $x$ , entre le plan  $x = 0$  et le plan  $x = d$ . Les protons sont décrits par  $n(x)$  la densité (de protons par unité de volume) et  $v(x)$  leur vitesse. Le champ électrique créé par la charge d'espace  $en(x)$  dérive du potentiel électrostatique  $\phi(x)$ . Les conditions aux limites de ce problème stationnaire unidimensionnel sont:

$$\phi(x=0) = 0, v(x=0) = 0, \phi(x=d) = U, \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = f$$

En régime stationnaire la vitesse  $v(x)$  et la densité  $n(x)$  obéissent à l'équation de conservation du nombre de protons et à l'équation du mouvement:

$$nv = \frac{J}{e}$$

$$Mv \frac{dv}{dx} + e \frac{d\phi}{dx} = 0$$

$J$  est une densité de courant donnée,  $f$  un champ électrique donné et  $U$  un potentiel donné, ce sont les données de base du modèle.

1 Quelle équation supplémentaire permet d'établir un système de trois équations à trois inconnues? Etablir ce système complet.

2 Etablir l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre vérifiée par  $\phi(x)$  et  $\frac{d^2\phi}{dx^2}$ .

Afin de résoudre cette équation on introduit un système de variables et d'inconnues normalisées:  $[\phi(x)] \rightarrow [\Phi(X)]$  où la variable de position normalisée est définie par  $X = \frac{x}{d}$  et le potentiel normalisé par:  $\Phi = -\frac{\phi}{U}$ .

On introduit le paramètre de contrôle  $R = \frac{J}{J_c}$  ou  $J_c = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{M}} \frac{U^{\frac{3}{2}}}{d^2}$ .

3 Etablir l'équation vérifiée par  $\frac{d^2\Phi}{dX^2}$ ,  $R$  et  $\Phi$ .

4 On introduit le paramètre de contrôle  $F = \frac{fd}{U}$ , établir l'équation vérifiée par  $\frac{d\Phi}{dX}$ ,  $R$ ,  $F$  et  $\Phi$ .

5 En déduire qu'il existe une relation entre les paramètres  $F$  et  $R$ , exprimer cette relation en gardant les intégrales qui apparaissent sous forme intégrale.

6 Exprimer cette relation entre les paramètres  $F$  et  $R$  sous forme algébrique.

7 En déduire la valeur de  $F$  permettant d'obtenir un optimum de courant  $J$ ; commenter.



**D'** On considère un plasma complètement ionisé plongé dans un champ magnétique homogène statique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  dirigé suivant l'axe des  $z$ . Les ions sont supposés immobiles et les électrons possèdent une distribution anisotrope de vitesses  $f(v_x, v_y, v_z)$  telle que l'énergie perpendiculaire moyenne  $E_{\perp} = \frac{m}{2} \langle v_x^2 \rangle + \frac{m}{2} \langle v_y^2 \rangle$  soit différente de l'énergie parallèle moyenne  $E_{\parallel} = \frac{m}{2} \langle v_z^2 \rangle$ .

1 Quelle équation cinétique doit-on utiliser pour étudier la relaxation de cette anisotropie et sur quelle base de polynômes orthogonaux peut-on développer  $f(v_x, v_y, v_z)$  pour décrire la relaxation de cette anisotropie? Lorsqu'un tel calcul de théorie cinétique est effectué il est possible d'identifier une fréquence de relaxation de l'anisotropie  $\nu$  telle que :

$$\frac{d(E_{\perp} - 2E_{\parallel})}{dt} = -\nu(E_{\perp} - 2E_{\parallel})$$

2 Sur la base de cette équation et de la conservation de l'énergie,  $E_{\perp} + E_{\parallel}$ , établir les deux équations décrivant respectivement l'évolution de  $\frac{dE_{\perp}}{dt}$  et de  $\frac{dE_{\parallel}}{dt}$  en fonction de  $E_{\perp}$  et  $E_{\parallel}$ .

3 Le champ magnétique est maintenant lentement variable en fonction du temps,  $B(t)$ , sous quelle condition le moment magnétique des électrons est-il un invariant adiabatique. Lorsque cette condition est vérifiée exprimer le terme de chauffage (de refroidissement) magnétique  $\frac{dE_{\perp}}{dt}$  en fonction de  $E_{\perp}$ ,  $B$  et  $\frac{dB}{dt}$ .

4 Compléter l'équation obtenue dans la question C-2 par ce terme de chauffage adiabatique et établir que la quantité  $\frac{E_{\perp}^2 E_{\parallel}}{B^2}$  ne peut que croître au cours du temps, commenter sur la possibilité d'un chauffage inductif dans un plasma collisionnel.



**E'** L'objectif de ce problème est d'étudier la condition d'équilibre d'une colonne cylindrique de plasma parcouru par un courant  $I$ .

On considère un cylindre circulaire de plasma de rayon  $R$ . Les ions sont supposés infiniment lourds et les électrons de masse  $m$  et de charge  $q$  sont décrits par la fonction de distribution des vitesses et des positions  $F(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ . On utilisera une base cartésienne  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  pour repérer les vitesses:  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$  et une base cylindrique  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_z)$  pour repérer les positions  $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ . L'axe des  $z$  constitue l'axe du cylindre. La densité d'électrons  $n(r)$  est supposée inhomogène et ne dépend que de  $r$ , la fonction de distribution des vitesses  $f(v_x, v_y, v_z)$  est supposée indépendante de la position.

$$dN = F(x, y, z, v_x, v_y, v_z) dx dy dz dv_x dv_y dv_z = f(v_x, v_y, v_z) n(r) 2\pi r dr dz dv_x dv_y dv_z$$

La fonction de distribution des vitesses est donc normalisée à l'unité:

$$\int f(v_x, v_y, v_z) \underbrace{dv_x dv_y dv_z}_{d\mathbf{v}} = 1$$

Les électrons transportant un courant total  $I$ , la distribution de vitesse est anisotrope; afin de quantifier cette anisotropie on introduit les deux moments:

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 + v_y^2 \rangle &= \int (v_x^2 + v_y^2) f(v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v} \\ \langle v_z \rangle &= \int v_z f(v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v} \end{aligned}$$

associés à la pression transverse et à la densité de courant:

$$P(r) = mn(r) \frac{\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle}{2}, \quad J(r) = qn(r) \langle v_z \rangle$$

La densité de courant axiale  $J$  suivant l'axe des  $z$  est la source d'un champ magnétique orthoradial  $B$  qui génère une force de Laplace radiale:

$$\mathbf{J} = J(r) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_{\theta}$$

L'équilibre entre cette force de Laplace et la force de pression est décrit par :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla P \quad \& \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{B}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB)$$

- 1 Exprimer  $I$  en fonction de  $n(r)$  et  $\langle v_z \rangle$ .
- 2 Exprimer  $I$  en fonction de  $B(R)$  et  $R$ .

3 En intégrant  $r^2 \frac{dP}{dr}$  de 0 à  $R$  obtenir une relation entre le courant totale  $I$  et  $\int_0^R rPdr$  (on utilisera le fait que la pression s'annule à l'extérieur du plasma :  $P(R) = 0$ ).

4 En déduire la condition d'équilibre du cylindre de plasma en fonction des moments:

$$\frac{\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle}{\langle v_z \rangle} = c \left( \frac{I}{I_A} \right)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière, exprimer  $I_A$  le courant d'Alfvén. Calculer numériquement  $I_A$ .



**F'** Considérons le processus d'absorption cyclotronique. Soit une population, électronique ou ionique, décrite par sa fonction de distribution du module de la vitesse cyclotronique  $f(v_c, t)$ , cette distribution étant normalisée à l'unité:  $\int f(v_c, t) 2\pi v_c dv_c = 1$ . Cette population interagit avec un champ électrique de fréquence de l'ordre de grandeur de la fréquence cyclotronique:  $E \cos(\omega t) \mathbf{e}_x - E \sin(\omega t) \mathbf{e}_y$ ; l'interaction onde-particules peut être vue comme une suite: émission / absorption / émission / émission / absorption / émission /... Cette série de processus peut être considérée comme une marche aléatoire dans l'espace des vitesses cyclotroniques et nous modéliserons donc l'évolution de la distribution par une équation de Fokker-Planck.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v_c} \frac{\partial}{\partial v_c} v_c \frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{2\delta t} \frac{\partial}{\partial v_c} f$$

Introduisons  $n$  la densité de particules; la densité de puissance déposée est donnée par :

$$w_c = n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} 2\pi v_c \frac{mv_c^2}{2} f dv_c$$

1 Démontrer que l'évaluation de  $w_c$  se ramène au calcul du coefficient de diffusion  $\langle \delta v_c \delta v_c \rangle / 2\delta t$ .

Soit une particule, de masse  $m$  et de charge  $e$ , plongée dans un champ magnétique statique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b}$  est un vecteur unitaire, et interagissant avec le champ électrique  $E \cos(\omega t) \mathbf{e}_x - E \sin(\omega t) \mathbf{e}_y$  où  $x$  et  $y$  constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$ , système de coordonnées associé à la base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{b}]$ . L'écriture de l'équation du mouvement de la particule se réduit à la prise en compte des forces électrique et magnétique. Introduisons la variable complexe  $\mathcal{Z}$ :  $\mathbf{v}_c = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y \rightarrow \mathcal{Z} = v_x + jv_y$ ; la variable  $\mathcal{Z}$  vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z} = \frac{eE}{m} \exp -j\omega t$$

2 Résoudre cette équation, on prendra comme condition initiale  $\mathcal{Z}(t = 0) = v_c$ .

3 L'incrément de vitesse cyclotronique  $\delta v_c(\delta t)$ , durant un temps  $\delta t$ , peut être calculé comme la variation du carré du module de la variable  $\mathcal{Z}$ :  $\delta v_c^2(v_c, \delta t) = \text{Re} [\mathcal{Z}(\delta t) \mathcal{Z}^*(\delta t) - \mathcal{Z}(0) \mathcal{Z}^*(0)] / 2$ , en déduire l'expression de la quantité  $\delta v_c(\delta t)$  au premier ordre en  $E$  en négligeant les termes quadratique en  $E^2$ .

4 Exprimer le coefficient de diffusion quasilinear  $\frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{2\delta t}$  en fonction des données du problème.



**G'** En présence d'un champ électrique des électrons d'un plasma peuvent être suffisamment accélérés pour produire des ionisations lors de leurs collisions avec des atomes du milieu. Ce phénomène d'intensification de l'ionisation est caractérisé par un coefficient appelé le premier coefficient de Townsend et noté  $\alpha$ : il représente le nombre d'électrons produits par unité de longueur par électron incident. En plus de ce phénomène d'amplification, un phénomène de régénération est nécessaire à l'entretien d'un plasma dans un volume fini car les charges sont finalement collectées aux électrodes. Ce phénomène de régénération existe et est décrit par le deuxième coefficient de Townsend noté  $\gamma$ .

Lorsqu'un ion arrive sur la cathode, il peut expulser des électrons secondaires par conversion de ses énergies cinétique et potentielle. Le nombre d'électrons secondaires produits par un ion incident définit le coefficient  $\gamma$ .

Ce deux coefficients de Townsend  $\alpha$  et  $\gamma$  permettent d'établir la condition d'entretien d'un plasma appelée critère de Townsend.

1 Considérons un électron quittant la cathode et terminant son transit sur l'anode. La distance anode-cathode est  $d$ . Combien génère-t-il de nouveaux électrons secondaires par le processus  $\alpha$ ? On notera ce nombre  $g_1$ .

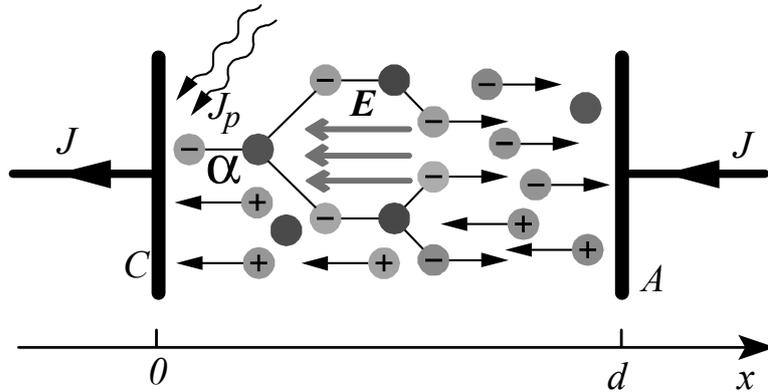
2 Considérons ce même électron quittant la cathode et terminant son transit sur l'anode. Combien génère-t-il d'ions à travers le processus  $\alpha$ ? les ions ainsi générés arrivent sur la cathode et extraient de nouveaux électrons. Ces électrons effectuent un transit de la cathode vers l'anode et donc se multiplient. Combien d'électrons arrivent ainsi à l'anode? On notera ce nombre  $g_2$ .

3 L'électron unique, initialement parti de la cathode est donc source d'une multitude de générations: 1 donne  $g_1$  qui donne  $g_2$  jusque  $g_n$  qui constitue la  $n^{ieme}$  génération. Quelle est la valeur  $N$  du nombre total d'électrons générés à travers les processus  $\alpha$  et  $\gamma$ .  $N = 1 + g_1 + g_2 + \dots$

Sous quelle condition ce nombre devient infini? Commenter.



**H'** On considère le même problème que précédemment avec les mêmes notations: on étudie le processus d'ionisation et de conduction dans une colonne de gaz unidimensionnelle et stationnaire située entre une cathode en  $x = 0$  et une anode en  $x = d$ .



Les densités de courant ionique et électronique sont respectivement  $J_+(x)$  et  $J_-(x)$  et obéissent au système d'équations décrivant la multiplication par avalanche électronique:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_-(x)}{dx} &= \alpha J_-(x) \\ \frac{dJ_+(x)}{dx} &= -\alpha J_-(x) \end{aligned}$$

Au niveau de la cathode un processus d'émission photoélectrique induit par irradiation ultraviolette un faible courant électronique  $J_p$ .

- 1 Ecrire les conditions aux limites sur  $J_-$  en 0 et sur  $J_+$  en  $d$ .
- 2 Exprimer  $J_-$  en fonction de  $x$ .
- 3 De même pour  $J_+$ .
- 4 En déduire le rapport d'amplification  $\frac{J_-(x)+J_+(x)}{J_p}$  en fonction de  $\alpha$  et  $d$ .



**I'** On considère le même problème que précédemment avec les mêmes notations mais on rajoute le processus d'émission  $\gamma$ .  $J_+(x)$  et  $J_-(x)$  obéissent au même système d'équations mais au niveau de la cathode l'impact des ions génère un courant supplémentaire tel que

$$J_-(0) = J_p + \gamma J_+(0)$$

et  $J_+(d) = 0$ .

- 1 Exprimer  $\frac{J_-(x)}{J_p + \gamma J_+(0)}$  en fonction de  $x$ .
- 2 Exprimer  $\frac{J_+(x)}{J_p + \gamma J_+(0)}$  en fonction de  $x$ .
- 3 En déduire  $\frac{J_+(x)+J_-(x)}{J_p}$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $d$ .
- 4 Donner la condition pour que  $J_+(x) + J_-(x)$  soit non nul même quand  $J_p = 0$ .

Le premier coefficient de Townsend dans l'air est donné par  $\alpha = APe^{-\frac{BP}{E}}$  où  $P$  est la pression et  $E$  le champ électrique entre les électrodes. Montrer que la tension de claquage  $V$ , le potentiel disruptif, obtenue lorsque le critère de Townsend est vérifié peut s'écrire sous la forme:  $V = B \frac{Pd}{C + \ln Pd}$  où  $C$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $A$  et  $\gamma$ .

5 Montrer que la fonction  $V$  admet un minimum pour une valeur  $Pd^*$  que l'on donnera. En déduire l'expression de  $V^*$ . Discuter l'existence d'un minimum pour  $V$ .

- 6 Montrer que  $V$  se met sous la forme universelle

$$\frac{V}{V^*} = \frac{Pd/Pd^*}{1 + \ln(Pd/Pd^*)}$$

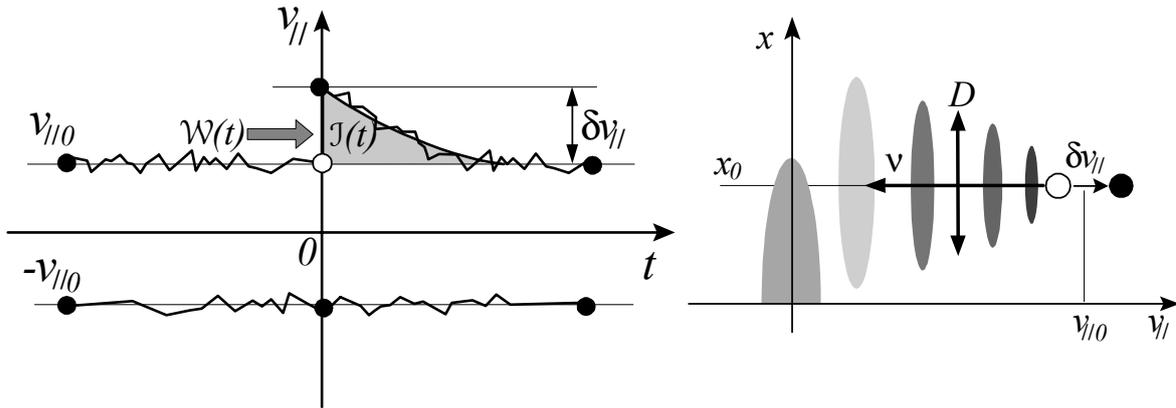
On a  $\gamma = 0.3$ ,  $A = 15(\text{torr.cm})^{-1}$ ,  $B = 365V/\text{torr.cm}$ . Sachant que la pression atmosphérique est de 760 torr, quelle est la tension de claquage  $V$  lorsque l'espace inter-électrode vaut 10 cm.



**J'** L'objectif de cet exercice est d'évaluer l'effet de la diffusion spatiale des électrons sur le processus de génération de courant par absorption Landau. On considère un modèle simple d'excitation/relaxation d'électrons résonnants de vitesse initiale  $v_{\parallel 0}$  et de position radiale initiale  $x = 0$ . A l'instant  $t = 0$ , au point  $x = 0$ ,  $N_0$  électrons de charge  $e$  et de masse  $m$ , absorbent une puissance  $\mathcal{W}(t)$  [W] =  $N_0 m v_{\parallel 0} \delta v_{\parallel} \delta(t)$ , donc une impulsion  $m \delta v_{\parallel}$  par électron, puis relaxent suivant une loi :

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} + \nu(v_{\parallel} - v_{\parallel 0}) = \delta v_{\parallel} \delta(t)$$

- 1 Etablir l'expression de la vitesse ( $v_{\parallel} - v_{\parallel 0}$ ) en fonction du temps  $t$ .



La densité d'électrons résonnant  $n$  suit une loi de diffusion de coefficient de diffusion  $D$  :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = N_0 \delta(x) \delta(t)$$

- 2 Résoudre cette équation en introduisant  $n(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t) \exp(jkx) dx / 2\pi$  la transformée de Fourier de  $n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(k, t) \exp(-jkx) dk$ .

- 3 En déduire l'expression de la densité volumique de courant au point  $x$  à l'instant  $t$ :  $J(x, t) \equiv en(x, t)(v_{\parallel} - v_{\parallel 0})$ .

- 4 Exprimer le rapport de la densité volumique de courant sur la puissance en régime stationnaire:  $\int J(x, t) dt / \int \mathcal{W}(t) dt$  puis commenter.



## Physique des Plasmas - 2016/2017

Cette épreuve, d'une durée de trois heures, est constituée de 5 questions de cours, 2 exercices et 2 problèmes illustrant les principes, méthodes et applications de la physique des plasmas. Le barème approximatif est de l'ordre de un point par question, le tout ramené sur vingt. Les questions 14 et 15 sont facultatives et seront notées hors barème.

**1 Moment magnétique :** Rappeler l'expression du moment magnétique d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique et expliquer sa signification physique. Que signifie l'invariance adiabatique de ce moment magnétique? (10 lignes maximum)

**2 Longueur de London :** Qu'est-ce que la longueur de London? Expliquer qualitativement sa signification physique. (8 lignes maximum)

**3 Diffusion magnétique :** Quelle est l'expression du coefficient de diffusion magnétique  $D_M$  dans un plasma de résistivité  $\eta$ ? Décrire brièvement le phénomène de diffusion magnétique. (8 lignes maximum)

**4 Dérive de champs croisés :** Rappeler et commenter l'expression de la vitesse de dérive électrique pour une particule chargée soumise aux champs électrique et magnétique statiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  tels que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

**5 Fréquence Plasma :** Qu'est-ce que le phénomène d'écrantage électrique dans les plasmas? Expliquer qualitativement l'origine et la signification physique de la fréquence plasma (Langmuir); rappeler son expression en précisant les grandeurs introduites. (10 lignes maximum)

### Problème 1: Filtre plasma isotopique

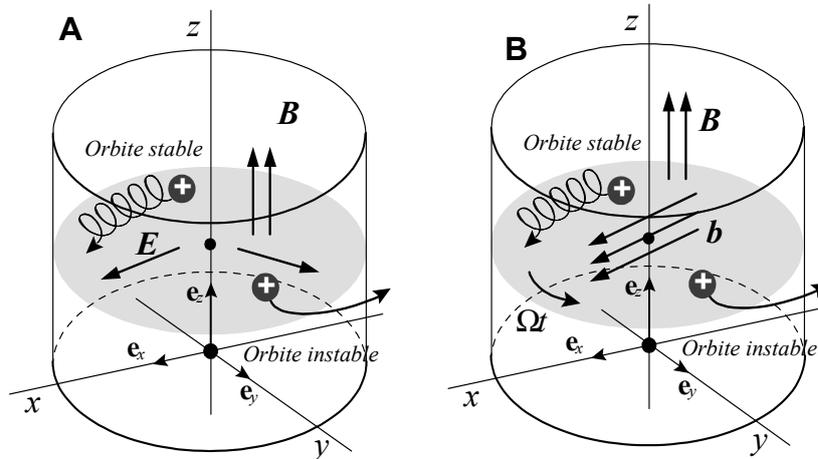
Le retraitement des déchets nucléaires en aval du cycle de combustible, ainsi que l'enrichissement en amont, peuvent être effectués dans des centrifugeuses à plasma. Plusieurs configurations de champs permettant de séparer les déchets de haute activité et longue durée de vie sont possibles.

**A** - Nous étudierons d'abord une configuration statique. Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien de l'espace sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ .

On considère la superposition d'un champ magnétique axial uniforme  $\mathbf{B}$  et d'un champ électrique radial linéaire  $\mathbf{E}$  ( $\lambda$  est une longueur donnée):

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B\mathbf{e}_z \\ \mathbf{E} &= E\left(\frac{x}{\lambda}\mathbf{e}_x + \frac{y}{\lambda}\mathbf{e}_y\right) \end{aligned}$$

**6** Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées cartésiennes,  $x(t)$  et  $y(t)$ , d'un ion de masse  $m$  et de charge  $q$  soumis à l'influence des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  (on introduira les quantités  $\omega_E \equiv \sqrt{qE/m\lambda}$  et  $\Omega_c \equiv qB/m$ ).



**7** On considère la variable complexe  $Z(t) = x(t) + jy(t)$ , établir l'équation différentielle vérifiée par  $d^2Z/dt^2$ .

**8** On cherche une solution de la forme  $Z(t) = Z_0 \exp(j\omega t)$ , établir l'équation algébrique vérifiée par  $\omega$  et en déduire la condition vérifiée par la masse  $m$  pour que le mouvement soit borné et que l'orbite de l'ion reste confiné autour de l'axe  $z = 0$ . Commenter l'usage possible des orbites stables et instables ainsi identifiées pour la séparation isotopique.

Si ce type de filtre opère à haute densité, les collisions perturbent les orbites et une force supplémentaire de friction entre espèces  $\mathbf{F}$  doit être prise en compte:

$$\mathbf{F} = -m\nu \left( \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y \right)$$

où  $\nu$  est la fréquence de collision supposée indépendante de la vitesse et de la position.

**9** Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées cartésiennes,  $x(t)$  et  $y(t)$ , d'un ion de masse  $m$  et de charge  $q$  soumis à l'influence des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  et de la force de friction  $\mathbf{F}$ .

**10** On considère la variable complexe  $Z(t) = x(t) + jy(t)$ , établir l'équation différentielle vérifiée par  $d^2Z/dt^2$ . On cherche une solution de la forme  $Z(t) = Z_0 \exp(j\omega t)$ , établir l'équation algébrique vérifiée par  $\omega$  et discuter brièvement l'impact des collisions sur le procédé de séparation isotopique identifié précédemment.

**B** - Nous étudions ensuite une configuration dynamique sans champ électrostatique radial  $\mathbf{E}$ , mais avec un champ magnétique tournant  $\mathbf{b}(t)$ . Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien de l'espace sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ . On considère la superposition d'un champ magnétique axial uniforme  $\mathbf{B}$  et d'un champ magnétique horizontal tournant  $\mathbf{b}$ :

$$\frac{q}{m}\mathbf{B} = \Omega_c\mathbf{e}_z, \quad \frac{q}{m}\mathbf{b}(t) = \omega_c \cos(\Omega t)\mathbf{e}_x + \omega_c \sin(\Omega t)\mathbf{e}_y$$

Le phénomène d'induction magnétique ne peut être négligé et un champ électrique d'induction  $\mathbf{E}_i$  est associé au champ  $\mathbf{b}$  suivant les relations:

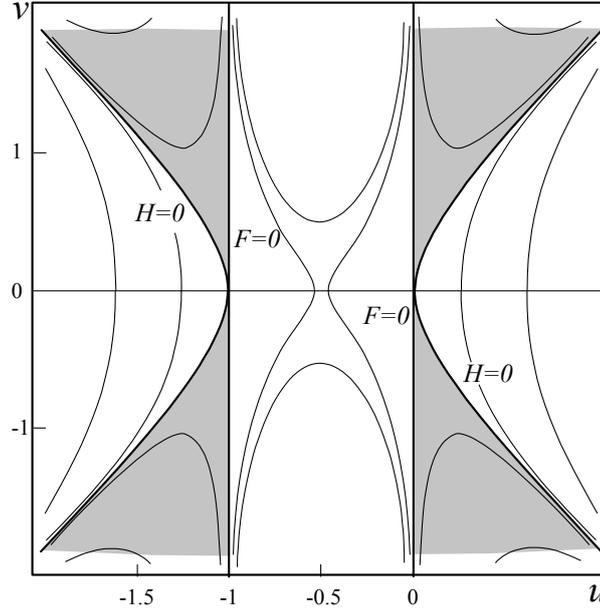
$$\mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \leftarrow \frac{q}{m}\mathbf{A} = \omega_c (y \cos \Omega t - x \sin \Omega t)\mathbf{e}_z \leftarrow \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}$$

**11** Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées cartésiennes,  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ , d'un ion de masse  $m$  et de charge  $q$  soumis à l'influence des champs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{E}_i$ .

12 Afin de résoudre ce système d'équations on effectue un changement de repère et on considère les variables  $(X, Y)$  définies par:  $x + jy = (X + jY) \exp j\Omega t$ . Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées,  $X(t)$ ,  $Y(t)$  et  $z(t)$ .

13 Exprimer  $dz/dt$ , on supposera qu'à l'instant  $t = 0$ :  $dz/dt = 0$  et  $Y = Y_g$

14 On cherche une solution de la forme:  $[X(t), Y(t) - Y_g, z(t)] = (X_0, Y_0, z_0) \exp j\omega t$  où  $(X_0, Y_0, z_0)$  sont des constantes. On définit les paramètres normalisés:  $u = \Omega/\Omega_c$ ,  $v = \omega_c/\Omega_c$ ,  $w = \omega/\Omega_c$ , établir le système de trois équations algébriques vérifié par  $w$  en fonction de  $u$  et  $v$ .



15 Le déterminant caractéristique de ce système est donné par:  $w^4 - [(1+u)^2 + u^2 + v^2]w^2 + u(1+u)(u + u^2 - v^2) = 0$ . Deux nombres sont strictement positifs si et seulement si leur somme et leur produit sont strictement positifs, aussi les racines de cette équation sont positives si  $HF > 0$ , où  $H(u, v) = (u + \frac{1}{2})^2 - v^2 - \frac{1}{4} = 0$  est une hyperbole, et  $F(u) = u(1+u) = 0$  sont deux droites dans le plan  $(u, v)$ . Sur le diagramme ci-dessus les zones stables sont en gris clair. Discuter, sur la base de ce diagramme, un procédé de séparation isotopique basé sur un champ magnétique tournant.

### Exercice 1: Puits magnétiques d'Alfvén

Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien de l'espace sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ , considérons un champ magnétique:

$$\mathbf{B} = B \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \mathbf{e}_y$$

où  $B$  [T] et  $\lambda$  [m] sont deux constantes données de base du modèle. Le mouvement le long des lignes de champ, suivant la direction  $y$ , est une translation uniforme et ne sera pas considéré dans cette étude. Le mouvement dans le plan  $(x, z)$ , en fonction du temps  $t$ , pour une particule de charge  $q > 0$ , de masse  $m$ , de position  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$  et de vitesse  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_z\mathbf{e}_z$ , résulte de la force de Laplace  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

16 Etablir l'équation du mouvement vérifiée par  $dv_x/dt$ . Etablir l'équation du mouvement vérifiée par  $dv_z/dt$ .

17 On introduit la quantité  $H > 0$  telle que:  $H = v_x^2 + v_z^2$ , établir la relation  $dH/dt = 0$  et expliquer sa signification physique.

18 On introduit la quantité  $P$  telle que:  $P = v_z - \frac{qB\lambda}{m} \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ , établir la relation  $dP/dt = 0$  et expliquer sa signification physique.

Dans la suite de l'exercice  $H$  et  $P$  constituent donc des données de base de l'étude des orbites au même titre que  $B$  et  $\lambda$ .

19 Etablir l'expression de  $v_x^2$  en fonction de  $x$  et des données du problème.

20 En déduire que le mouvement suivant  $x$  est borné, c'est-à-dire qu'il existe deux bornes fixes,  $X_L$  et  $X_R$ , telles que  $X_L \leq x(t) \leq X_R, \forall t$ .

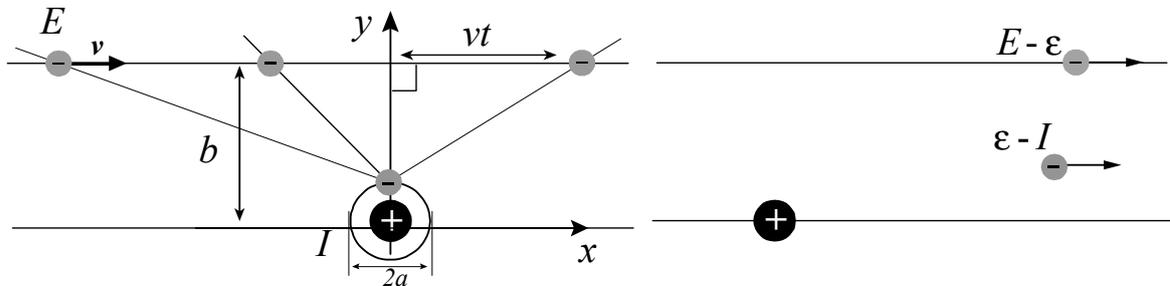
21 Etablir l'expression de la vitesse de dérive  $\langle v_z \rangle$  suivant  $z$ :  $\langle v_z \rangle = \int_0^T v_z(t) dt/T$ , où  $T$  est la période du cycle ( $X_L \rightarrow X_R \rightarrow X_L$ ); on ne cherchera pas à réduire les quadratures (à calculer les intégrales définies) apparaissant dans cette expression. Est-ce une vitesse de dérive de gradient ou de courbure?

Exercice 2: Formule de Thomson

Pour étudier le problème de la section efficace d'ionisation collisionnelle de l'atome d'hydrogène il est instructif de reprendre le modèle classique proposé par Thomson.

Soit  $(x, y)$  un système de repérage cartésien du plan de la collision sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y]$ . Un électron libre, de masse  $m$  de charge  $-e$ , en translation uniforme à la vitesse  $v\mathbf{e}_x$ , présente une énergie cinétique  $E = mv^2/2$ , cet électron libre interagit avec un électron lié orbitant autour d'un proton sur la première orbite de Bohr de rayon  $a$ , l'énergie de liaison sur cette orbite est  $I$ . Nous supposons que la vitesse de l'électron n'est que peu perturbée par l'interaction avec l'atome, ainsi, sa trajectoire demeure rectiligne et son mouvement uniforme dans la direction initiale. La distance minimum entre l'électron libre et le noyau de l'atome d'hydrogène est  $b \gg a$ . Le noyau de l'atome d'hydrogène est situé en  $(x = 0, y = 0)$  et la trajectoire de l'électron libre est donnée par:  $x(t) = vt, y(t) = b$ . Cet électron libre, d'énergie cinétique  $E$ , exerce une force coulombienne répulsive sur l'électron lié situé à une distance  $\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$  de sa position à l'instant  $t$ . Cette force transfère de l'impulsion de l'électron libre vers l'électron lié, elle transfère aussi de l'énergie. Après  $(t = +\infty)$  le passage de l'électron libre, l'électron initialement lié a acquis une énergie  $\varepsilon(E, b)$ . Une partie  $I$  est mise à profit pour libérer cet électron lié du potentiel coulombien et le reste  $\varepsilon - I$  constitue l'énergie cinétique de l'électron ainsi libéré. Ainsi, suivant Thomson, nous analysons, dans un cadre dynamique classique, la collision coulombienne ionisante:

$$\text{électron libre } (E) + \text{électron lié } (-I) \rightarrow \text{électron libre } (E - \varepsilon) + \text{électron libre } (\varepsilon - I)$$



La figure ci-dessus illustre la collision ainsi modélisée. Le passage de l'électron libre  $(t = -\infty \rightarrow t = +\infty)$  donne lieu à un transfert d'impulsion  $\delta\mathbf{p}$  somme des incréments infinitésimaux  $d\mathbf{p}$  entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ :

$$\delta\mathbf{p} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt \rightarrow \delta p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y}{[x(t)^2 + y(t)^2]^{\frac{3}{2}}} dt \right|$$

22 Evaluer l'expression  $\delta p$  de ce transfert d'impulsion, entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ , et en déduire l'expression du transfert d'énergie  $\varepsilon = \delta p^2/2m$  (on rappelle l'expression de l'intégrale définie:  $ab^2 \int_0^{+\infty} (a^2t^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} dt = 1$ ).

La section efficace différentielle de transfert d'énergie  $d\sigma/d\varepsilon$  est définie suivant la relation:

$$\frac{\text{Nombre d'électrons libres d'énergie } E}{\text{Par unité de surface } dS \text{ et de temps } dt} d\sigma \equiv \frac{\text{Nombre d'électrons d'énergie } E \text{ transférant } \varepsilon}{\text{Par unité d'énergie } d\varepsilon \text{ et de temps } dt} d\varepsilon$$

Ainsi, pour le processus: 1 électron libre  $(E, b) \rightarrow$  1 électron libéré  $\varepsilon(E, b) - I +$  1 électron libre  $(E - \varepsilon, b)$ , cette définition se décline suivant la relation:

$$\text{Nombre d'électrons libres } E = 1 \rightarrow \frac{1}{2\pi b(\varepsilon) db} d\sigma(E, \varepsilon) \equiv \frac{1}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

qui peut alors être évaluée en éliminant le paramètre d'impact  $b$  dans la dérivée  $d\varepsilon/db$ .

23 Exprimer  $d\sigma(E, \varepsilon)/d\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  et des données du problème.

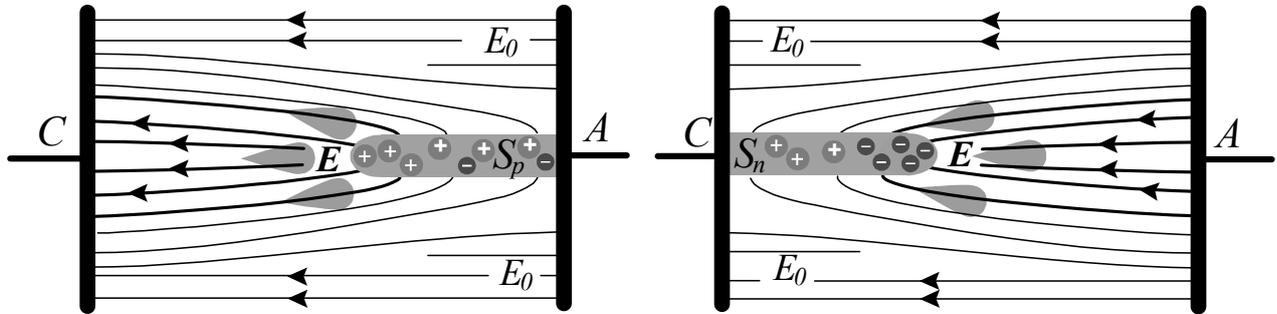
L'énergie transférée  $\varepsilon$  doit: • au minimum, être égale à l'énergie de seuil, c'est-à-dire au potentiel d'ionisation  $I$ , et peut: • au maximum, être égale à l'énergie de l'électron incident  $E$ . Il nous faut donc intégrer cette section efficace différentielle de transfert d'énergie,  $d\sigma/d\varepsilon$ , entre ces deux bornes  $I$  et  $E$ , pour obtenir la section efficace totale d'ionisation  $\sigma(E)$  par impact électronique.

24 Etablir l'expression de  $\sigma(E)$  la section efficace totale d'ionisation par impact électronique, ce résultat constitue la formule de Thomson.

Problème 2: Le critère de Meek-Raether

Considérons une décharge électrique dans un gaz sous pression  $P$  entre une cathode plane  $C$  parallèle à une anode plane  $A$ . La distance  $|AC| = d$  et le champ électrique au sein du gap  $[AC]$ , avant la transition gaz/plasma, présente une valeur uniforme  $E_0$  associée à la chute de potentiel  $V = E_0 d$ .

Pour cette configuration classique, la théorie de la transition gaz/plasma, développée par Townsend et Paschen, est restreinte aux faibles valeurs du produit  $Pd < 200$  [Torr.cm], correspondant à quelques centaines de millions d'électrons par avalanche pour les conditions usuelles des décharges dans l'air; au-delà de ces valeurs, la charge d'espace associée à une avalanche modifie significativement le champ appliqué  $E_0$ .



La théorie de Townsend-Paschen n'est alors plus opérationnelle et la prise en compte de la charge d'espace associée à une avalanche électronique conduit à considérer la création d'une structure filamentaire constituée par un fin canal de plasma issu de plusieurs avalanches. Ce canal de plasma est appelé streamer et sa conductivité modifie la structure du champ appliqué, en particulier au niveau de sa tête présentant un faible rayon de courbure le champ  $E$  est plus intense que  $E_0 < E$ . Deux types de streamers ( $S_p$  et  $S_n$ ) sont observés, (i) si les effets de charge d'espace se manifestent à la fin ( $A$ ) des avalanches, ou (ii) si ils se manifestent dès le début ( $C$ ). Ces deux types de streamers se propagent de  $A$  vers  $C$  ou de  $C$  vers  $A$ , à travers la création d'avalanches secondaires associées à  $E$  et à la photoionisation. Dans ce problème, nous n'étudierons pas la structure et la dynamique d'un streamer  $S_p$  ou  $S_n$ , mais nous établirons le critère de transition entre une simple avalanche électronique, initiée par un électron, et un streamer: le critère de Meek-Raether qui évalue la transition avalanche/streamer. Lorsque ce critère est satisfait, la théorie de la décharge de Townsend n'est plus applicable et la théorie des streamers doit être considérée. Le critère de Meek-Raether est simplement un calcul, sous différentes hypothèses, du champ électrique associé à la structure spatio-temporelle d'une avalanche issue d'un électron primaire. Le champ propre  $E_a$  d'une avalanche ainsi calculé est ensuite pris égal au champ appliqué  $E_0$  pour énoncer un critère de transition avalanche/streamer et exprimer la longueur critique  $x_c$  d'une avalanche telle que  $E_a \sim E_0$ . L'ordre de grandeur de la taille  $x_c$  ainsi évaluée est conforme à l'expérience, confirmant les hypothèses de Meek-Raether sur la transition avalanche/streamer.

Nous allons d'abord étudier le modèle classique de la décharge de Townsend sous l'hypothèse  $E_a \approx 0$ , puis établir différentes formes du critère de Meek-Raether pour  $E_a \neq 0$ .

25 Rappeler les définitions du premier et du deuxième coefficient de Townsend,  $\alpha$  et  $\gamma$ , décrivant respectivement: l'ionisation par impact électronique en volume sous l'influence d'un champ électrique et l'émission par impact ionique en surface.

26 On dirige l'axe des  $x$  d'un repérage cartésien de  $C$  vers  $A$ . La cathode est située en  $x = 0$  et l'anode en  $x = d$ . On considère un modèle stationnaire classique de multiplication électronique entre la cathode  $C$  et l'anode  $A$  polarisant sous un champ  $E_0$  un gaz basse pression,  $N_e(x)$  désigne le nombre total d'électrons contenus dans une avalanche d'extension  $x$  suivant la direction  $C \rightarrow A$ ,  $N_i(x)$  désigne le nombre d'ions résultant de cette avalanche d'extension  $x$ . Pour un germe électronique unique en  $C$ , ces deux fonctions vérifient les conditions aux limites  $N_e(x=0) = 1$ ,  $N_i(x=0) = 0$  et les équations:

$$\frac{dN_e}{dx} = \alpha(E_0) N_e, \quad \frac{dN_i}{dx} = \alpha(E_0) N_e$$

En déduire les expressions de  $N_e(x=d)$  et  $N_i(x=d)$ .

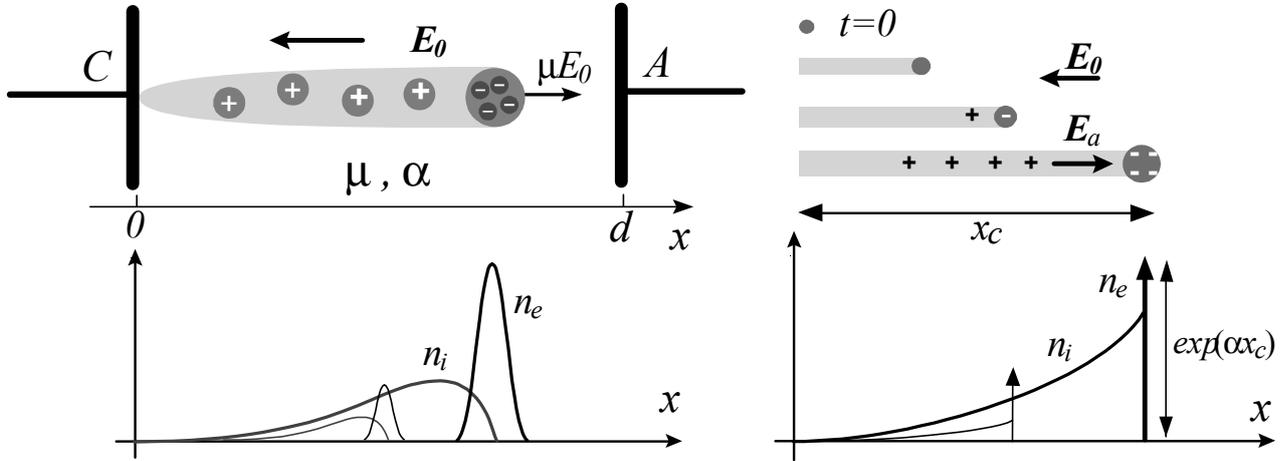
27 Entraînés par le champ électrique appliqué  $E_0$ , les  $N_e(x=d)$  électrons disparaissent à l'anode  $A$  et les  $N_i(x=d)$  ions remontent vers la cathode  $C$  où ils génèrent  $\gamma N_i$  électrons. La décharge sera auto-entretenu si ces  $\gamma N_i$  électrons secondaires remplacent l'électron germe. Exprimer cette condition,  $\gamma N_i = 1$ , dite de Townsend.

28 On considère la forme fonctionnelle suivante du coefficient  $\alpha$ :  $\alpha(E_0) = aP \exp(-bP/|E_0|)$  où  $E_0$  désigne le champ électrique appliqué, supposé uniforme et donné, et  $a$  et  $b$  deux constantes dépendant de la nature du gaz et de la cathode  $C$ . Etablir la loi de Paschen exprimant la condition de Townsend en fonction de  $V = E_0 d$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  et  $Pd$ . En déduire deux paramètres  $V^*$  et  $(Pd)^*$  tels que  $V/V^*$  soit une fonction simple de  $Pd/(Pd)^*$ .

Les résultats classiques qui viennent d'être établis sont construits sous les hypothèses de stationnarité de l'avalanche et de faible distorsion du champ appliqué  $E_0$  par les charges créées. Pour étudier le champ généré

par l'avalanche, il est nécessaire de prendre en compte la structure spatio-temporelle de l'avalanche et le fait que les électrons sont beaucoup plus mobiles que les ions.

Trois modèles peuvent être construits pour évaluer la taille critique  $x_c$  d'une avalanche au seuil de la transition vers un streamer, nous allons considérer et étudier successivement ces trois modèles, malgré des formes fonctionnelles différentes les trois critères ainsi identifiés conduisent au mêmes ordres de grandeurs pour  $x_c$ .



L'avalanche développée peut être étudiée suivant les 3 modèles suivants: • (i) une charge électronique quasi ponctuelle suivie par une traînée ionique, le champ  $E_a$  est alors évalué suivant un modèle dipolaire entre le sillage ionique et la tête électronique; • (ii) une charge électronique sphérique suivie par un sillage ionique, le rayon de cette sphère croissant sous les effets combinés de la multiplication électronique et de la diffusion, le champ  $E_a$  est alors évalué à la surface de cette sphère électronique; (iii) une charge électronique sphérique en expansion sous l'effet de la répulsion électrostatique et de la multiplication électronique, suivie par un sillage ionique, le champ  $E_a$  est aussi évalué à la surface de cette sphère électronique.

29 Dans la suite on notera  $\mu E_0$  ( $\mu E_0 > 0$ ) la vitesse des électrons suivant la direction  $x$  et on introduit donc la *mobilité électronique*. Etablir l'expression la mobilité pour une particule de charge  $e$ , de masse  $m$  et de fréquence de collisions  $\nu$ .

30 La dynamique des charges dans le cadre du modèle (i) est maintenant décrite par les densités d'électrons et d'ions en fonction du temps  $t$  et des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ :  $n_e(x, y, z, t)$  et  $n_i(x, y, z, t)$  s'exprimant en  $[m^{-3}]$ . La dynamique transverse suivant  $y$  et  $z$  est ignorée en première approximation et sera prise en compte ultérieurement pour les modèles (ii) et (iii). L'évolution, pour  $x \geq 0$  et  $t \geq 0$ , d'une avalanche engendrée par  $E_0$  est modélisée par le système:

$$\text{Modèle (i): } \frac{\partial n_e}{\partial t} + \mu E_0 \frac{\partial n_e}{\partial x} = \mu E_0 \alpha n_e, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} = \mu E_0 \alpha n_e$$

où le mouvement ionique lent est négligé devant le mouvement électronique. Les conditions initiales et aux limites de ce modèle unidimensionnel sont:  $n_e(x, y, z, t = 0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$  et  $n_i(x, y, z, t = 0) = 0$  où  $\delta$  est la *distribution de Dirac*. Résoudre ce système d'équations et exprimer  $n_e(x, y, z, t)$  et  $n_i(x, y, z, t)$ ; on recherchera une solution de la forme  $n_e = \delta(x - \mu E_0 t) \delta(y) \delta(z) f(x)$  où  $f(x)$  est inconnue et on notera que  $\theta(\mu E_0 t - x)$  la *fonction de Heaviside* ( $\theta(u > 0) = 1$ ,  $\theta(u \leq 0) = 0$ ) est telle que  $\partial \theta(\mu E_0 t - x) / \partial t = \mu E_0 \delta(x - \mu E_0 t)$ .

31 Calculer la charge ionique totale de l'avalanche,  $eN_i(t)$ , ainsi que le barycentre des charges positives  $X_i(t)$ :

$$N_i = \int \int \int dydz \int_0^d n_i(x, y, z, t) dx, \quad X_i = \frac{\int \int \int dydz \int_0^d x n_i(x, y, z, t) dx}{\int \int \int dydz \int_0^d n_i(x, y, z, t) dx}$$

on supposera l'avalanche développée, c'est-à-dire  $\exp \alpha \mu E_0 t \gg 1$ . Calculer la charge électronique totale  $-eN_e(t)$  ainsi que le barycentre des charges négatives  $X_e(t)$ .

32 Un premier critère de transition *avalanche/streamer* peut être établi en supposant que le l'ordre de grandeur du champ  $E_a$  au sein et au voisinage de l'avalanche est donné par le champ à mi-chemin entre deux charges ponctuelles  $eN_i(t)$  et  $-eN_e(t)$  séparées de  $|X_e(t) - X_i(t)|$ , exprimer  $|E_a(t)|$ .

33 En déduire le premier critère de *Meek-Raether* suivant la relation  $|E_a(t)| = |E_0|$ . Formuler ce critère  $|E_a| = |E_0|$  en terme de taille critique de l'avalanche  $x_c$ , en éliminant le temps ( $x = \mu E_0 t$ ).

La suite du problème est consacrée aux modèles (ii) et (iii) où la charge ionique diluée sur le sillage n'est plus considérée et l'analyse est restreinte à la tête électronique de l'avalanche. Pour étudier le modèle (ii), on considère que les électrons sont distribués en tête de l'avalanche dans une sphère dont la population augmente suivant la multiplication électronique  $\alpha$  et le rayon augmente suivant la diffusion  $D$ .

34 On introduit donc le coefficient de diffusion noté  $D$ , exprimer  $D$  en fonction de la température électronique  $T$ , de la masse  $m$  et de la fréquence de collision  $\nu$  des électrons.

Les conditions initiales et aux limites de ce modèle (ii) sont:  $n_e(x, y, z, t = 0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$  où  $\delta$  est la *distribution de Dirac* et la dynamique électronique d'une avalanche engendrée par  $E_0$  est décrite par:

$$\text{Modèle (ii): } \frac{\partial n_e}{\partial t} + \underbrace{\mu E_0 \frac{\partial n_e}{\partial x}}_1 - \underbrace{D \left( \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n_e}{\partial z^2} \right)}_2 = \underbrace{\mu E_0 \alpha n_e}_3$$

35 Quels sont les processus physiques décrit par les termes 1, 2 et 3?

36 On cherche une solution de la forme:  $n_e(x, y, z, t) = g(x - \mu E_0 t, y, z, t) \exp(\alpha \mu E_0 t)$ . Etablir l'équation vérifiée par la fonction inconnue:  $g$ .

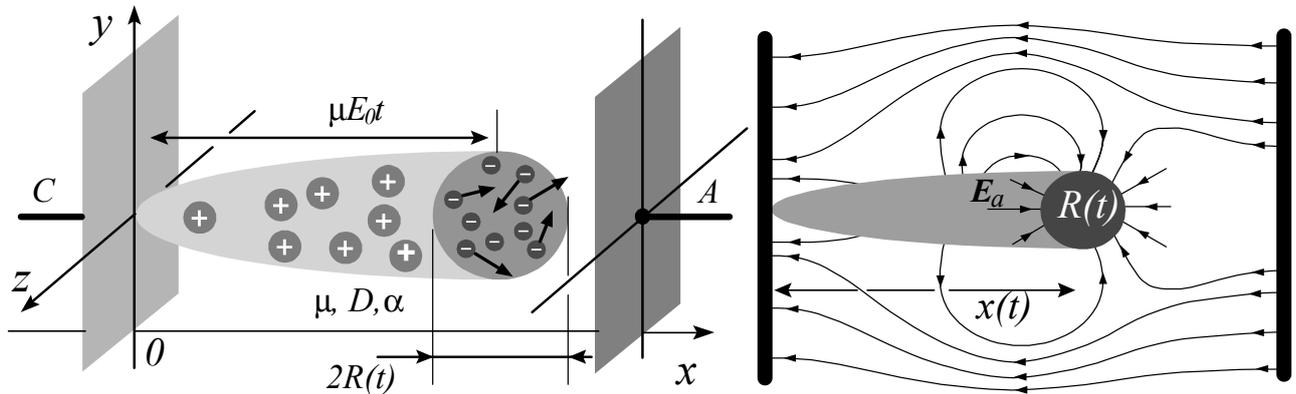
37 L'équation de Fick isotrope en dimension trois:  $\partial h / \partial t - D \partial^2 h / \partial x^2 + D \partial^2 h / \partial y^2 + D \partial^2 h / \partial z^2 = 0$ , pour une fonction  $h(x, y, z, t)$  présentant la condition initiale  $h(x, y, z, t = 0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ , admet comme solution:  $h(x, y, z, t) = (4\pi Dt)^{-\frac{3}{2}} \exp[-(x^2 + y^2 + z^2) / 4Dt]$ . Déduire de ce résultat la distribution  $n_e(x, y, z, t)$  résultant des processus 1, 2 et 3. La relation  $n_e(x - \mu E_0 t = R/\sqrt{3}, y = R/\sqrt{3}, z = R/\sqrt{3}, t) = n_e(x - \mu E_0 t = 0, y = 0, z = 0, t) / \exp(1)$  définit le rayon moyen  $R(t)$  de cette sphère électronique à l'instant  $t$ .

38 Exprimer  $R(t)$  en fonction des données du problème et calculer le nombre total d'électrons dans la sphère de rayon  $R(t)$  en supposant que la densité est uniforme et égale à  $n_e(x = \mu E_0 t, y = 0, z = 0, t)$ .

39 En déduire la valeur du champ électrique  $|E_a|$  sur la surface de cette sphère de rayon  $R(t)$ .

40 Exprimer la longueur critique  $x_c$  d'une avalanche telle  $|E_a| = |E_0|$ , ce résultat constitue le deuxième critère de *Meek-Raether* pour  $x_c$ .

Pour étudier le modèle (iii) on suppose que les électrons sont distribués en tête de l'avalanche dans une sphère dont la population augmente suivant la multiplication électronique  $\alpha$  et le rayon augmente suivant la répulsion électrostatique entre électrons. On considère donc une sphère électronique présentant une densité de charge radialement ( $r$ ) uniforme et un rayon  $R(t)$  à l'instant  $t$ .



Les coordonnées du centre de cette sphère, contenant  $N(t)$  électrons, sont  $[x(t), y = 0, z = 0]$  à l'instant  $t$ . La densité de charge électronique  $-3eN(t) / 4\pi R(t)^3$  reste uniforme radialement ( $r$ ) mais varie en fonction du temps, les quatre équations associées à la dynamique électronique de ce modèle (iii) sont:

$$\begin{aligned} \text{Modèle (iii)} \quad : \quad & 1: \frac{dN}{dt} = \alpha(E_0) N, \quad 2: \frac{\partial [r^2 E_a(r \leq R, t)]}{r^2 \partial r} = -\frac{3eN(t)}{4\pi \epsilon_0 R(t)^3}, \\ & 3: \frac{dR}{dt} = |\mu E_a(r = R(t), t)|, \quad 4: \frac{dx}{dt} = \mu E_0 \end{aligned}$$

Les conditions initiales sont  $N(t = 0) = 1$  et  $x(t = 0) = 0$ .

41 Quels sont les processus physiques associés aux relations 1, 2, 3 et 4?

42 Le critère de transition *avalanche/streamer* est donné par la relation  $|E_a(r = R(t), t)| = |E_0|$ , établir ce troisième critère de *Meek-Raether* et exprimer le en fonction de la taille critique  $x_c$  de l'avalanche lorsque il est satisfait.

Les trois critères ainsi établis, bien que présentant des formes fonctionnelles différentes, prédisent des valeurs similaires pour la longueur critique  $x_c$ , par exemple pour l'air à pression atmosphérique, sous un champ de l'ordre de 30 kV/cm, la taille critique d'une avalanche est de l'ordre de 5 à 6 cm suivant ces trois critères.