

Modèles physiques de quelques instruments de musique et acoustiques

Corrigé

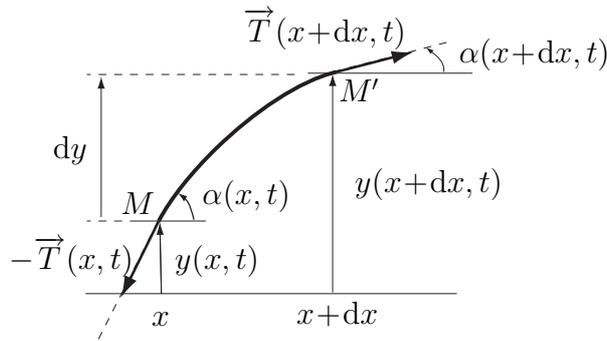
Première partie

Corde vibrante - Instruments à cordes

A. Équation de propagation de l'ébranlement

1. a) $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$. Au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$: $d\ell = dx$.

b) Soit l'élément de corde MM' compris entre les abscisses x et $x + dx$ (sur la figure les angles ont été exagérés pour la rendre lisible) :



Puisque le poids est négligé, l'élément de corde, de longueur $d\ell \simeq dx$, de masse $dm = \mu d\ell$, est soumis à :

- la tension de la portion de fil située à droite du point M' , soit $\vec{T}(x + dx, t)$,
- la tension de la portion de fil située à gauche du point M' , soit $-\vec{T}(x, t)$.

Le mouvement de la corde ayant lieu selon Oy , le théorème de la résultante cinétique appliqué à cet élément de corde s'écrit :

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t). \quad (1)$$

Soit en projection sur Oy :

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (T \sin \alpha)(x + dx, t) - (T \sin \alpha)(x, t). \quad (2)$$

Au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$dm = \mu dx, \quad \cos \alpha(x, t) = 1 \quad \text{et} \quad \sin \alpha(x, t) = \alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

En se limitant à l'ordre 1 en $\frac{\partial y}{\partial x}$, l'équation (2) s'écrit :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial(T\alpha)}{\partial x} dx. \quad (3)$$

Mais le module de la tension lui-même est une légère perturbation par rapport à sa valeur T_0 au repos. Au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$, $T\alpha = T_0\alpha$ puisque l'angle α est un infiniment petit du premier ordre.

L'équation (3) s'écrit alors, au premier ordre :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

L'élongation $y(x, t)$ vérifie donc l'équation d'onde de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4)$$

où $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

2. a) T_0 est une force, donc s'exprime en N ou encore en kg.m.s^{-2} , μ est une masse linéique, donc s'exprime en kg.m^{-1} , $\frac{T_0}{\mu}$ s'exprime donc en $\text{m}^2.\text{s}^{-2}$: c est bien homogène à une vitesse.

b) La solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle est la somme d'une onde plane progressive dans le sens des x croissants et d'une onde plane progressive dans le sens des x décroissants, les deux à la vitesse c :

$$y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

ou

$$y(x, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

c) Pour la corde de guitare : $c = 185 \text{ m.s}^{-1}$, pour celle de piano : $c = 310 \text{ m.s}^{-1}$ ($\mu = \rho \times s = 8,82 \text{ g.m}^{-1}$).

La célérité c est d'autant plus grande que la corde est plus tendue.

B. Corde fixée à ses deux extrémités. Modes propres

1. Modes propres, fréquences propres

a) Une onde stationnaire est une onde de la forme $y(x, t) = f(x)g(t)$, elle ne se propage pas.

b) On cherche des solutions particulières de l'équation de d'Alembert sous la forme $y(x, t) = f(x)g(t)$ où $f(x)$ est une fonction de l'abscisse seule et $g(t)$ du temps seul.

Alors :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Leftrightarrow f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$$

en supposant que les fonctions f et g ne sont pas identiquement nulles. Les variables x et t étant indépendantes, si une fonction de x est égale à une fonction de t , elle est nécessairement constante. On pose alors :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = C_0$$

où C_0 est une constante.

Si C_0 est positive, $f(x)$ et $g(t)$ s'écrivent comme la somme de deux exponentielles réelles, l'une croissante, l'autre décroissante. Quand t tend vers l'infini, $g(t)$ tend ou bien vers l'infini (en valeur absolue) ou bien vers 0. Le premier cas n'a pas de réalité physique (et dans ce cas le cadre de l'étude - petites perturbations - n'est plus respecté), le second correspond à un régime transitoire inintéressant. Si C_0 est nul, le problème est le même. Le seul cas physiquement acceptable est donc C_0 négatif. On pose : $C_0 = -k^2$. Alors :

$$\begin{cases} f(x) = A \cos(kx + \varphi) \\ g(t) = B \cos(\omega t + \psi) \quad \text{où } k = \frac{\omega}{c}. \end{cases}$$

c) Les conditions aux limites imposent à la fréquence $f = \omega/2\pi$ de ne prendre que certaines valeurs f_n , ce sont les *fréquences propres*. L'élongation correspondante, $y_n(x, t) = y_{0n} \cos(\omega_n t + \varphi) \cos(k_n x + \psi)$ est le *mode propre* associé.

d) La condition $y(0, t) = 0$ impose $\cos(\psi) = 0$. On choisit $\psi = -\frac{\pi}{2}$, d'où :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx)$$

La deuxième condition $y(L, t) = 0$ donne : $\cos(kL) = 0$, soit $kL = n\pi$ où n est un entier strictement positif. Or $f = \omega/2\pi$ et $k = \omega/c$ donc :

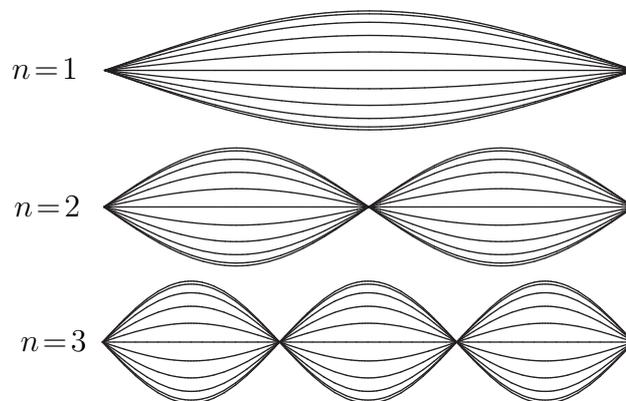
$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

e) Un nœud de vibration est un point qui reste immobile : $\forall t, y(x, t) = 0$. Les nœuds se situent en x_n tel que $kx_n = n\pi$ où n est un entier positif. Deux nœuds sont donc distants de $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$.

Un ventre de vibration est un point pour lequel l'amplitude de vibration est maximale. Les ventres se situent en x'_m tel que $kx'_m = m\pi + \frac{\pi}{2}$ où m est un entier. Deux ventres sont donc également distants de $\frac{\lambda}{2}$.

Un nœud et un ventre consécutifs sont distants de $\frac{\lambda}{4}$.

f) L'aspect de la corde pour les premiers modes propres est le suivant :



g) Expérience : corde de Melde, les fréquences propres de la corde sont les fréquences pour lesquelles il y a résonance (à peu près ...).

On peut aussi enregistrer le son émis par une corde (micro + carte d'acquisition) et faire l'analyse harmonique (logiciel).

h) Guitare : $L = 63$ cm. Piano : $L = 105$ cm.

2. Solution générale

a) Les conditions initiales imposent :

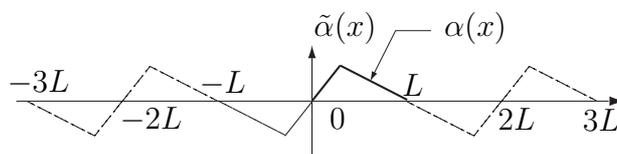
$$y(x, 0) = \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

et :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

Les coefficients a_n apparaissent comme les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$ définie dans l'énoncé. Les coefficients b_n sont égaux à $\frac{L}{n\pi c}$ fois les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $\tilde{\beta}(x)$.

b)



3. Corde pincée

a) La vitesse initiale est nulle donc les b_n sont tous nuls. Pour déterminer les a_n , on calcule les coefficients de Fourier de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$.

b) Soit la fonction α définie par :

$$\begin{cases} \alpha(x) = \frac{\eta h}{L} x & \text{pour } 0 < x < \frac{L}{\eta} \\ \alpha(x) = \frac{\eta h}{(\eta - 1)L} (L - x) & \text{pour } \frac{L}{\eta} < x < L \end{cases}$$

où η est un nombre entier positif (égal à 2 ou 5 dans les exemples proposés).

La dérivée de la fonction $\tilde{\alpha}$ est égale, sur une période, à :

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}'(x) = \frac{\eta h}{L} & \text{pour } 0 < x < \frac{L}{\eta} \\ \tilde{\alpha}'(x) = -\frac{\eta h}{(\eta - 1)L} & \text{pour } \frac{L}{\eta} < x < 2L - \frac{L}{\eta} \\ \tilde{\alpha}'(x) = \frac{\eta h}{L} & \text{pour } 2L - \frac{L}{\eta} < x < 2L \end{cases}$$

Elle est paire donc seuls ses coefficients a_n (en cosinus) sont non nuls. Ils sont proportionnels à $\sin\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)$ donc nuls pour n multiple de η . Les coefficients de Fourier de la fonction $\tilde{\alpha}$ se calculent simplement à partir de ceux de sa dérivée par une intégration par partie :

$$\int_0^{2L} \tilde{\alpha}'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \left[\tilde{\alpha}(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{2L} + \frac{n}{L} \int_0^{2L} \tilde{\alpha}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{n}{L} \int_0^{2L} \tilde{\alpha}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Donc si un coefficient en cosinus de la dérivée est nul, le coefficient en sinus correspondant de la fonction est nul aussi : les harmoniques multiples de η sont absents, ce que l'on voit bien sur les spectres présentés.

Pour la corde pincée en son milieu, on peut donner un argument plus simple : il n'y a que des harmoniques impairs parce que une translation d'une demi-période (c'est-à-dire de L) transforme la fonction en son opposé.

4. Corde frappée

a) Maintenant, ce sont les a_n qui sont nuls puisque $\alpha(x) = 0$.

Là où on frappe la corde, il ne peut pas y avoir de nœud de vibration. Pour supprimer l'harmonique n , il faut interdire le mode où il y a un nœud en $x = sL$, il faut donc que $s = p/n$ où p est un entier pouvant prendre toutes les valeurs de 1 à $n - 1$.

b) Le son d'un clavecin est moins riche en harmoniques que le son d'un piano puisque les amplitudes des harmoniques élevés sont plus faibles que pour le piano.

5. Limites du modèle

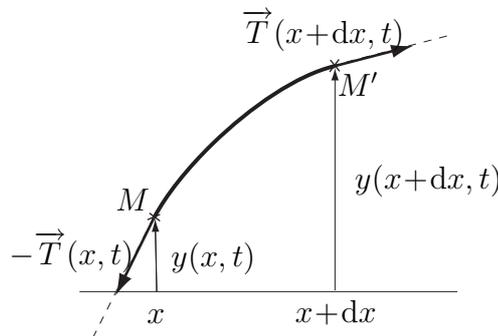
On a oublié tout effet dissipatif (perte d'énergie dans la corde et au contact de l'air en particulier).

C. Étude énergétique

1. a) L'énergie cinétique de la portion de corde $\{x, x + dx\}$ est $de_c = \frac{1}{2} dm v^2(x, t)$, avec $dm = \mu d\ell = \mu dx$ à l'ordre 1. La densité linéique d'énergie cinétique de la corde est donc :

$$e_c = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2.$$

b)



i) La puissance des forces extérieures s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext}} &= T_y(x + dx, t)v(x + dx, t) - T_y(x, t)v(x, t) \\ &= \frac{\partial(T_y v)}{\partial x}(x, t)dx. \end{aligned} \tag{5}$$

où T_y est la projection de la tension sur \vec{e}_y .

ii) Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'élément de corde $\{x, x + dx\}$ s'écrit :

$$\frac{\partial(\delta E_c)}{\partial t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

Or $\delta E_c = e_c(x, t)dx$ donc :

$$\frac{\partial(\delta E_c)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 \right) dx = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right) dx. \tag{6}$$

On déduit des équations (6) et (5) l'expression de la puissance des forces intérieures :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{int}} &= \frac{\partial(\delta E_c)}{\partial t} - \mathcal{P}_{\text{ext}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 \right) dx - \frac{\partial(T_y v)}{\partial x} dx \\ &= \left(\mu v \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial T_y}{\partial x} - T_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx.\end{aligned}$$

Or, compte tenu de la projection du théorème de la résultante cinétique sur l'axe Oy , les deux premiers termes de cette équation s'annulent. Il reste :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -T_y \frac{\partial v}{\partial x} dx = -T_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) dx = -T_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = -\frac{1}{T_0} T_y \frac{\partial T_y}{\partial t} dx = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2T_0} T_y^2 \right) dx$$

iii) La puissance des efforts intérieurs se met sous la forme : $\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{\partial(\delta E_P)}{\partial t}$. La densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_P = \frac{1}{2T_0} T_y^2 = \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2.$$

2. a) L'énergie totale de la corde est :

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 (x, t) + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 (x, t) \right) dx$$

Dans le mode propre n , $y_n(x, t) = c_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x)$. L'énergie E_n de la corde est donc :

$$\begin{aligned}E_n(t) &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} \mu c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) \sin^2(k_n x) + \frac{1}{2} T_0 c_n^2 k_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \cos^2(k_n x) \right) dx \\ &= \frac{L}{4} \mu c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) + \frac{L}{4} T_0 c_n^2 k_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n)\end{aligned}$$

Or $\mu \omega_n^2 = T_0 k_n^2$, donc :

$$E_n(t) = \frac{L}{2} c_n^2 T_0 k_n^2 = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2}{4L} T_0$$

b) Il suffit d'écrire l'énergie de la corde sous forme d'une intégrale sur x et de permuter l'intégrale sur x et la somme sur n . En utilisant l'orthogonalité des polynômes trigonométriques, on obtient :

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

C'est l'égalité de Parseval.

L'énergie de la corde est la somme des énergies de chaque mode propre. Il n'y a pas de "couplage" entre les différents modes propres.

3. Pour une corde frappée : $E_n = \frac{c_1^2 \pi^2 T_0}{n^2 4L}$.

Pour une corde pincée, $E_n = c_1'^2 \frac{\pi^2 T_0}{4L}$.

Pour un instrument à cordes frappées, l'énergie du mode n ne dépend pas de n , tous les harmoniques participent à l'énergie de la même façon ce qui explique en partie la richesse du

son d'un piano. Pour un instrument à cordes pincée, l'énergie des harmoniques décroît en $\frac{1}{n^2}$: le son est plus pur, plus "cristallin".

D. Influence de la pesanteur

1. a) $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.

b) L'élément de corde compris en x et $x + dx$ est soumis à son poids et aux deux tensions en x et en $x + dx$. À l'équilibre :

$$\vec{0} = \vec{T}(x + dx) - \vec{T}(x) + \mu d\ell \vec{g}$$

c) En projection sur Ox , on obtient (avec les mêmes notations que précédemment) :

$$T_x(x + dx) - T_x(x) = 0$$

d'où $T_x = \text{cste} = T_0$, avec $T_x(x) = T(x) \cos \alpha(x)$.

d) En projection sur Oy :

$$T_y(x + dx) - T_y(x) - \mu d\ell g = 0 \Leftrightarrow \frac{dT_y}{dx} = \mu g d\ell$$

Or $T_y(x) = T(x) \sin \alpha(x) = T_x(x) \tan \alpha(x) = T_0 \tan \alpha(x)$ avec $\tan \alpha(x) = \frac{dy}{dx}$.

Finalement, avec $m = \mu L$, on obtient l'équation demandée :

$$\frac{T_0}{\mu g} \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (7)$$

2. δ est homogène à une longueur (rapport d'une force et d'une force par unité de longueur).

3. a) Soit $u(x) = \frac{dy}{dx}$. Cette fonction vérifie l'équation :

$$\delta \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}$$

qui s'intègre en $\text{argsh}(u) = \frac{x}{\delta} + \text{cste}$. Or au point H (voir figure de l'énoncé), u et x sont nuls : la constante est nulle.

Il vient : $\frac{dy}{dx} = \text{sh}\left(\frac{x}{\delta}\right)$, qui s'intègre en : $y(x) = \delta \text{ch}\left(\frac{x}{\delta}\right) - h - \delta$ en tenant compte du fait que $y(0) = -h$. C'est l'équation demandée.

b) La longueur de la corde est :

$$L = \int_{-d}^{+d} d\ell = \int_{-d}^{+d} \text{ch}\left(\frac{x}{\delta}\right) dx = 2\delta \text{sh}\left(\frac{d}{\delta}\right)$$

c) Au point B (par exemple), $y(d) = 0$ soit : $\text{ch}\left(\frac{d}{\delta}\right) = 1 + \frac{h}{\delta}$. D'autre part : $\text{sh}\left(\frac{d}{\delta}\right) = \frac{L}{2\delta}$.

Or : $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$. On en déduit la relation donnée dans l'énoncé.

d) $\delta \simeq 3415$ m et $h \simeq 15$ μm . La corde est quasiment horizontale, il est tout à fait légitime de négliger le poids devant la tension.

E. Prise en compte de la raideur de la corde

1. Soit un échantillon de solide de longueur L et de section S . Quand on exerce la force \vec{F} dans le sens de la longueur de l'échantillon, celui-ci s'allonge de Δl , l'allongement relatif $\frac{\Delta l}{L}$ étant proportionnel à la force surfacique $\frac{F}{S}$ tant que l'on reste dans le domaine d'élasticité du solide. Le coefficient de proportionnalité est l'inverse du module d'Young :

$$\frac{\Delta l}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}. \quad (8)$$

Le module d'Young est homogène à une pression. Il s'exprime donc en pascals ou en newtons par mètres carrés.

2. a) E s'exprime en N.m^{-2} , S en m^2 , K en m et $\partial^2 y / \partial x^2$ en m^{-1} , donc le membre de droite de l'égalité s'exprime en N.m^{-1} . Il est bien homogène à un moment de force.

b) Le théorème de la résultante cinétique pour la tranche $\{x, x + dx\}$ s'écrit (au premier ordre, sa masse est μdx) :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

En projection sur Ox :

$$0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) \Leftrightarrow \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0$$

donc $T_x(x, t)$ ne dépend que de x . On prend : $T_x(x, t) = T_0$.

En projection sur Oy :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) \Leftrightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

c) Soit M et M' les extrémités du segment étudié et G son centre de masse. Le théorème du moment cinétique en G pour cette portion de corde s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}(G)}{dt} = \vec{GM}' \wedge \vec{T}(x + dx, t) - \vec{GM} \wedge \vec{T}(x, t) + \Gamma_z(x + dx, t) \vec{e}_z - \Gamma_z(x, t) \vec{e}_z$$

Or $L(G)$ est proportionnel au moment d'inertie du segment de corde. Celui-ci est proportionnel à dm et à $(dx)^2$. Il est du troisième ordre en dx . On le néglige.

Sachant que $\vec{GM} = -\frac{dx}{2} \vec{e}_x - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{2} \vec{e}_y$ et $\vec{GM}' = \frac{dx}{2} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{2} \vec{e}_y$, on obtient, au premier ordre en dx :

$$T_y(x, t) dx - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial x} dx = 0$$

En remplaçant Γ_z par son expression, on obtient :

$$T_y - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} + ESK^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

d) En éliminant T_y entre les deux équations précédentes, on obtient l'équation de propagation :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ESK^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

3. Modification des fréquences propres

a) En remplaçant $y(x, t)$ par la forme donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\mu} k^2 + \frac{ESK^2}{\mu} k^4$$

b) i) Les conditions aux limites sont les mêmes. Les fréquences propres vérifient, comme pour la corde sans raideur : $k_n L = n\pi$ où n est un entier positif. On reporte dans l'équation obtenue précédemment et on obtient (avec $T_0 \mu c^2 = 1$) :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \left(1 + \frac{ESK^2}{T_0} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{1/2}$$

ou encore :

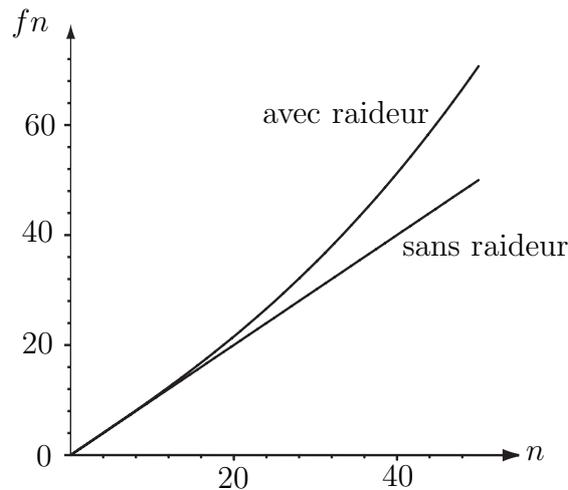
$$f_n = \frac{nc}{2L} \left(1 + \frac{ESK^2}{T_0} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{1/2}$$

C'est bien l'expression demandée en posant :

$$B = \frac{ESK^2 \pi^2}{T_0 L^2}$$

Les fréquences propres de la corde avec raideur ne sont plus multiples d'une fréquence fondamentale : le son n'est pas harmonique.

ii)



iii) On cherche n solution de $\sqrt{1 + Bn^2} = \sqrt[12]{2}$, ce qui donne : $n = 18$.

Deuxième partie

Membranes vibrantes - Instruments à percussion

A. Équation de propagation de la déformation

1. Projections de la résultante des forces de tension :

- Sur Ox :

$$dF_x = (T \cos \alpha)(x + dx, y, t)dy - (T \cos \alpha)(x, y, t)dy \simeq \frac{\partial(T \cos \alpha)}{\partial x}(x, y, t)dxdy$$

- Sur Oy :

$$dF_y = (T \cos \beta)(x, y + dy, t)dx - (T \cos \beta)(x, y, t)dx \simeq \frac{\partial(T \cos \beta)}{\partial y}(x, y, t)dydx$$

- Sur Oz :

$$\begin{aligned} dF_z &= (T \sin \alpha)(x + dx, y, t)dy - (T \sin \alpha)(x, y, t)dy \\ &\quad + (T \sin \beta)(x, y + dy, t)dx - (T \sin \beta)(x, y, t)dx \\ &\simeq \frac{\partial(T \sin \alpha)}{\partial x}(x, y, t)dxdy + \frac{\partial(T \sin \beta)}{\partial y}(x, y, t)dydx \end{aligned}$$

Comme α et β sont faibles et que T est uniforme, il vient : $dF_x \simeq 0$ et $dF_y \simeq 0$. D'autre part, $\alpha \simeq \frac{\partial z}{\partial x}$ et $\beta \simeq \frac{\partial z}{\partial y}$ au premier ordre. On obtient alors :

$$d\vec{F}_T = T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dxdy \vec{e}_z$$

2. Le théorème de la résultante cinétique appliqué à cet élément de surface s'écrit :

$$dm \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{e}_z = d\vec{F}_T$$

puisque l'on néglige le poids. Avec $dm = \sigma dxdy$, on obtient, après simplification par $dxdy$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

3. a) C'est une équation de d'Alembert à deux dimensions. La célérité des ondes est :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

b) T s'exprime en N.m^{-1} donc en kg.s^{-2} , σ en kg.m^{-2} et c en m.s^{-1} . On arrive donc au système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a = -1 \\ -2b = 1 \end{cases}$$

ce qui donne : $a = 1/2$ et $b = -1/2$, soit : $c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$.

c) $c = 107 \text{ m.s}^{-1}$.

B. Modes propres d'une membrane circulaire

1. $z(r, \theta, t)$ vérifie l'équation : $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \Delta z$. On cherche $z(r, \theta, t)$ sous la forme : $z(r, \theta, t) = F(r)G(\theta)H(t)$. En utilisant l'expression du laplacien en coordonnées polaires donné par l'énoncé, on obtient :

$$F(r)G(\theta)H''(t) = c^2 \left(F''(r)G(\theta)H(t) + \frac{1}{r}F'(r)G(\theta)H(t) + \frac{1}{r^2}F(r)G''(\theta)H(t) \right)$$

Aux points où $F(r)G(\theta)H(t)$ ne s'annule pas, on a :

$$\frac{H''(t)}{H(t)} = c^2 \left(\frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} \right)$$

r , θ et t sont des variables indépendantes donc les deux termes de cette égalité sont constants. On a donc :

$$H''(t) = KH(t)$$

où K est une constante. Si K est positive, $H(t)$ diverge ou tend vers 0 quand t tend vers l'infini : le premier cas n'a aucune réalité physique et le second aucun intérêt. Si $K = 0$, le problème est le même. On choisit donc $K < 0$. On pose $K = -\omega^2$.

2. a) On en déduit :

$$\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = -\frac{F''(r)}{F(r)} - \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)} - \frac{\omega^2}{r^2 c^2}$$

Donc les deux termes de cette égalité sont constants. On a donc :

$$G''(\theta) = K'G(\theta)$$

b) $G(\theta)$ est périodique de période 2π , ce qui impose à m d'être entier.

3. a) $F(r)$ vérifie l'équation :

$$F''(r) - \frac{1}{r}F'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) F(r) = 0 \quad (9)$$

b) On pose : $u = \frac{rc}{\omega}$. L'équation (9) devient :

$$\frac{d^2 F}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dF}{du} + \left(1 - \frac{m^2}{u^2} \right) F(u) = 0$$

C'est bien l'équation donnée dans l'énoncé.

c) Au bord de la membrane, $z(R, \theta, t) = 0$ donc $J_m \left(\frac{a\omega}{c} \right) = 0$. Les fréquences propres $f_{m,n}$ sont donc :

$$f_{m,n} = \frac{c}{2\pi a} \xi_{m,n}$$

où $\xi_{m,n}$ est le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction J_m .

d) Les fonctions J_m et J_{-m} sont identiques, on a donc naturellement : $f_{m,n} = f_{-m,n}$.

4. a) La plus petite valeur de $\xi_{m,n}$ correspond à $\xi_{0,1}$. La plus petite fréquence propre est donc : $f_{0,1} = \frac{107 \times 2,405}{2 \times \pi \times 0,65} = 63 \text{ Hz}$.

b)

	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
$f_{m,n}$ (en Hz)	145	100	134	184	221

Les fréquences propres ne sont pas des multiples de la fréquence du fondamental. Le son émis par l'instrument n'est pas harmonique. Mais la caisse de l'instrument sélectionne certaines de ces fréquences, celles qui correspondent à ses fréquences propres pour lesquelles il y a résonance entre la membrane et la caisse.

c) Pour le mode (0, 2), $R(r)$ s'annule en r_1 tel que $\frac{\omega r_1}{c} = \xi_{0,1}$, ce qui donne $r_1 = \frac{\xi_{0,1}}{\xi_{0,2}} = 0,436$.

C'est la ligne nodale représentée (cercle) sur la deuxième figure.

Pour les modes où $m = 1$, la fonction $G(\theta) = \cos(\theta)$ s'annule en $\theta = \pm\pi/2$: c'est la ligne nodale verticale représentée sur les troisième et quatrième figures.

D'autre part, pour le mode (1, 2), $R(r)$ s'annule en $r_2 = \frac{\xi_{1,1}}{\xi_{1,2}} = 0,546$, ce que l'on voit sur la quatrième figure.

Pour les modes où $m = 2$, la fonction $G(\theta) = \cos(2\theta)$ s'annule en $\theta = \pm\pi/4$ et $\theta = \pm3\pi/4$: ce sont les lignes nodales rectilignes représentées sur les deux dernières figures.

Enfin, pour le mode (2, 2), $R(r)$ s'annule en $r_3 = \frac{\xi_{1,2}}{\xi_{2,2}} = 0,610$, ce que l'on voit sur la sixième figure.

d) Pour visualiser ces déformations : figures de Chladni (on met de la semoule sur la membrane, on la fait vibrer, la semoule se regroupe au niveau des lignes nodales), interférométrie holographique, par exemple.

Troisième partie

Tuyaux sonores - Instruments à vent

A. Approximation des ondes sonores - Équation d'ondes

1. L'onde sonore est une perturbation par rapport à l'état d'équilibre. Les grandeurs $\frac{p_1}{P_0}$, $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ et $\frac{u_1}{c}$ où c est la célérité des ondes sonores dans le milieu sont des infiniment petits du premier ordre.

La pression au repos est de l'ordre de 1 bar = 10^5 Pa. La surpression maximale supportée par le tympan est de l'ordre de 20 Pa. Au seuil d'audibilité, elle est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

2. $c \simeq 340 \text{ m.s}^{-1}$ et $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$ (la borne supérieure est d'ailleurs plutôt 15 kHz pour la plupart des gens).

3. a) L'équation d'Euler est :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \right) \vec{u} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \vec{g} \quad (10)$$

b) $\left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right\| \sim \frac{U}{T} = fU$. On prend $U \simeq 1 \text{ mm.s}^{-1}$ et $f \simeq 1 \text{ kHz}$ d'où $\left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right\| \simeq 1 \text{ m.s}^{-2}$. Le terme de pesanteur est environ dix fois plus grand. On n'en tient pas compte dans l'étude des ondes sonores car il est pris en compte dans la pression au repos s'il y a lieu, il compense le gradient de pression.

c) Dans l'équation d'Euler, l'accélération convective, produit de deux termes du premier ordre, est du deuxième ordre. Elle est négligeable devant l'accélération locale, qui est du premier ordre. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right\| &\sim \frac{U}{T} \\ \left\| \left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \right) \right\| &\sim \frac{U^2}{L} \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{\left\| \left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \right) \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{U^2 T}{L U} = \frac{U}{L/T} = \frac{U}{c} \ll 1.$$

De plus, $\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ à l'ordre un. L'équation d'Euler linéarisée dans le cadre de l'approximation des ondes sonores est donc :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} p_1.$$

4. L'équation de conservation de la masse s'écrit : $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{u}) = 0$. À l'ordre 1, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div} \vec{u} = 0.$$

On dérive cette équation par rapport au temps, on permute les opérateurs portant sur les dérivées d'espace et ceux portant sur les dérivées temporelles et on utilise l'équation d'Euler linéarisée pour aboutir à l'équation :

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = \Delta p_1$$

5. a) Un développement limité au premier ordre de l'équation de comportement $\mu = \mu(P)$ donne :

$$\mu = \mu(P_0 + p_1) = \mu(P_0) + \left(\frac{d\mu}{dP} \right)_{p_1=0} p_1$$

donc :

$$\mu_1 = \left(\frac{d\mu}{dP} \right)_{p_1=0} p_1.$$

On remplace dans l'équation précédente pour montrer que la surpression p_1 vérifie l'équation de l'Alembert à trois dimensions :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1$$

avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\mu}{dP} \right)_{p_1=0}}}.$$

b) i) La durée caractéristique τ_{diff} de la diffusion thermique sur une longueur L est donnée par : $\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D_{th}}$ où D_{th} est la diffusivité thermique du milieu.

La durée caractéristique τ_{onde} de variation sur la même distance L des grandeurs qui se propagent est : $\tau_{\text{onde}} = \frac{L}{c}$.

On choisit comme longueur L la longueur d'onde : $\frac{\tau_{\text{onde}}}{\tau_{\text{diff}}} = \frac{D_{th}}{c\lambda} = \frac{f D_{th}}{c^2} < 4 \cdot 10^{-6} \ll 1$ (les longueurs d'onde audibles sont comprises entre 1,7 cm à 17 m environ).

ii) La durée caractéristique de la diffusion thermique est beaucoup plus grande que la durée caractéristique de variation des grandeurs qui se propagent : l'évolution du fluide est adiabatique au passage de l'onde sonore.

D'autre part, le fluide est supposé parfait, les effets de la viscosité ont été négligés : les transformations subies par le fluide peuvent être considérées comme réversibles.

Le fluide subit donc des transformations adiabatiques réversibles, c'est-à-dire isentropiques :

$$\left(\frac{d\mu}{dP} \right)_{p_1=0} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{S, \text{repos}} = \mu_0 \chi_{s0}$$

donc :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_{s0}}}$$

c) i) Le fluide est assimilé à un gaz parfait. Son évolution étant adiabatique réversible, l'équation qui la décrit est la loi de Laplace :

$$\frac{P}{\mu^\gamma} = \text{cste} \quad (11)$$

En différentiant le logarithme de l'équation (11), on obtient :

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\mu}{\mu}$$

soit :

$$\left(\frac{dP}{d\mu}\right)_{p_1=0} = \frac{\mu_0}{\gamma P_0}$$

donc :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

ii) Dans le cas de l'air, à 20 °C, l'application numérique donne : $c = 343 \text{ m.s}^{-1}$. Cette valeur est en bon accord avec les constatations expérimentales, ce qui valide *a posteriori* l'hypothèse d'échanges adiabatiques réversibles.

d) Deux micros distants de d recueillent le son émis par un haut parleur (fréquence f) sur l'axe de celui-ci. On visualise à l'oscillo les signaux des deux micros. On commence par prendre d très faible. La courbe donnant le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux signaux en fonction de d a pour équation : $\Delta\varphi = \frac{2\pi f d}{c}$. On trace $\Delta\varphi = f(1/d)$, on obtient une droite de pente $2\pi f/c$.

B. Propagation guidée dans une cavité infinie

1. Onde plane

a) Il faut que a et b soient \ll longueur d'onde.

b) Pour une onde plane progressive dans le sens des z croissants : $u(z, t) = f(t - z/c)$. L'équation d'Euler linéarisée permet d'obtenir la relation :

$$p_1(z, t) = \mu_0 c u(z, t)$$

Dans le cas d'une onde plane progressive dans le sens des z décroissants, $u(z, t) = g(t + z/c)$ et :

$$p_1(z, t) = -\mu_0 c u(z, t)$$

Dans le cas général, $u(z, t) = u_+(z, t) + u_-(z, t)$ où $u_+(z, t)$ est une onde plane progressive dans le sens des z croissants et $u_-(z, t)$ une onde plane progressive dans le sens des z décroissants. On a alors :

$$p_1(z, t) = \mu_0 c (u_+(z, t) - u_-(z, t))$$

2. Modes propres de la cavité

a) En remplaçant $p_1(M, t)$ par l'expression donnée dans l'équation de d'Alambert, on obtient, aux points où $X(x)Y(y)Z(z)$ ne s'annule pas :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

Les variables x , y et z étant indépendantes, $\frac{X''(x)}{X(x)}$, $\frac{Y''(y)}{Y(y)}$ et $\frac{Z''(z)}{Z(z)}$ sont constants.

Sur les parois de la cavité, la vitesse particulière est tangente à celle-ci, les fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ sont donc sinusoïdales sinon leur dérivée ne peut pas s'annuler deux fois. Les constantes

sont négatives et on a bien :

$$\begin{cases} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \end{cases}$$

$$\text{avec } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

b) Sur les parois de la cavité, la vitesse particulière est tangente à celle-ci, d'où : $X'(0) = X'(a) = 0$ et $Y'(0) = Y'(b) = 0$.

c) Compte tenu des conditions aux limites ci-dessus, $X(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ et $Y(y) = \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$ où n et m sont deux entiers positifs ou nuls (donc $k_x = n\pi/a$ et $k_y = m\pi/b$).

En reportant dans l'équation de d'Alembert, on obtient :

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} = -k_z^2$$

La solution est donc de la forme donnée par l'énoncé :

$$p_1(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_{n,m}(x, y, z, t)$$

avec :

$$p_{n,m}(x, y, z, t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \left(A_{n,m} \exp(j(\omega t - k_z z)) + B_{n,m} \exp(j(\omega t + k_z z)) \right)$$

où n et m sont deux entiers positifs ou nuls.

d) L'onde se propage dans la cavité si k_z a une partie réelle non nulle. Comme k_z^2 est réel, k_z est ou bien réel ou bien imaginaire pur. L'onde se propage dans la cavité si $k_z^2 > 0$ donc si $\omega > \omega_{c_{n,m}} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$ dans le cas où $(n, m) \neq (0, 0)$. La cavité se comporte comme un

filtre passe-haut de fréquence de coupure : $f_{c_{n,m}} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$.

Si $(n, m) = (0, 0)$, l'onde est plane.

e) i) La relation $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ s'écrit : $k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c_{n,m}}^2}{c^2}$ ou encore $\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$.

ii) La vitesse de groupe de l'onde est définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk_z}$. De la relation : $k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c_{n,m}}^2}{c^2}$,

on déduit : $c^2 k_z dk_z = \omega d\omega$, puis : $v_g = c^2 \frac{k_z}{\omega} = c \frac{\lambda}{\lambda_g}$. Comme $\lambda_g > \lambda$, on $v_g < c$: la célérité de sondes guidée est inférieure à la célérité des ondes se propageant à l'air libre.

f) Si $a < b$, la plus petite fréquence pouvant se propager correspond à $f_{c_{0,1}} = \frac{c}{2b}$. L'application numérique donne : $f_{c_{0,1}} \simeq 17$ kHz. Cette fréquence se situe à la limite supérieure des fréquences audibles. L'hypothèse selon laquelle l'onde est plane dans le tuyau est donc parfaitement justifiée.

g) La nouvelle fréquence de coupure est : $f_c \simeq 10$ kHz. Il peut donc y avoir des modes propres du tuyau sonore dans le domaine audible.

h) Pour le mode (0,0) :

$$p_{0,0}(x, y, z, t) = A \exp(j(\omega t - k_z z)) + B \exp(j(\omega t + k_z z))$$

avec $k_z = \omega/c$.

i) i) Au niveau du récepteur, on observe deux modes, le troisième étant à peine visible. Ils ne se propagent pas à la même vitesse, donc arrivent à des instants différents à l'autre extrémité du tuyau. Enfin, le caractère dispersif de la propagation se voit dans le fait que le signal est déformé au cours de sa propagation.

ii) La durée de propagation des différents modes observée est :

- pour le premier : $\Delta t = 6,0$ ms ;
- pour le deuxième : $\Delta t = 7.2$ ms ;
- pour le troisième : $\Delta t = 8,1$ ms.

ce qui correspond à une vitesse de groupe :

- pour le premier : $v_g = 335$ m.s⁻¹ ;
- pour le deuxième : $v_g \simeq 280$ m.s⁻¹ ;
- pour le troisième : $v_g \simeq 250$ m.s⁻¹.

On vérifie bien que la vitesse de groupe est inférieure à la célérité des ondes sonores à l'air libre.

D'autre part, la longueur d'onde correspondant à la fréquence de coupure est d'autant plus petite que le mode est élevé, donc la longueur d'onde dans le guide est elle d'autant plus grande que le mode est élevé. Finalement, plus le mode est élevé, moins il se propage vite : les modes observés sont en ordre croissant.

C. Propagation dans une cavité de longueur finie. Impédance

1. Impédance caractéristique

$Su(z, t)$ est le débit volumique à travers une section droite du tuyau. Pour une onde plane progressive dans le sens des z croissants, $Z_c = \frac{\mu_0 c}{S}$.

2. Impédance acoustique

a) D'après les questions précédentes :

$$p_1(z, t) = A \exp(j(\omega t - k_z z)) + B \exp(j(\omega t + k_z z))$$

et :

$$u(z, t) = \frac{A}{\mu_0 c} \exp(j(\omega t - k_z z)) - \frac{B}{\mu_0 c} \exp(j(\omega t + k_z z))$$

d'où : $Z_0 = Z_c \frac{A+B}{A-B}$ et $Z_L = Z_c \frac{A \exp(-jk_z L) + B \exp(jk_z L)}{A \exp(-jk_z L) - B \exp(jk_z L)}$. L'expression de Z_L s'écrit aussi :

$$Z_L = Z_c \frac{(A+B) \cos(kL) - j(A-B) \sin(kL)}{(A-B) \cos(kL) - j(A+B) \sin(kL)} = \frac{Z_0 \cos(kL) - jZ_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) - jZ_0 \sin(kL)}$$

Cette équation s'inverse en :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_L \cos(kL) + jZ_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + jZ_L \sin(kL)} \quad (12)$$

b) Quand Z_L tend vers l'infini, $Z_0 = -jZ_c \cotan(kL)$.
Quand Z_L tend vers zéro, $Z_0 = jZ_c \tan(kL)$.

3. Fréquences d'une flûte et d'une clarinette

Dans les deux cas, $Z_L = 0$ donc $Z_0 = jZ_c \tan(kL)$.

a) i) Pour une flûte, $Z_0 = 0$ d'où $\tan(kL) = 0$ soit $kL = n\pi$ où n est un entier positif. Les fréquences propres de la flûte sont donc :

$$f_n = n \frac{c}{2L} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

ii) Pour la clarinette Z_0 est infinie, ce qui donne : $kL = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ où n est un entier positif (on choisit $-\pi/2$ pour numérotter les fréquences propres de la même façon pour les deux instruments). Les fréquences propres de la clarinette sont donc :

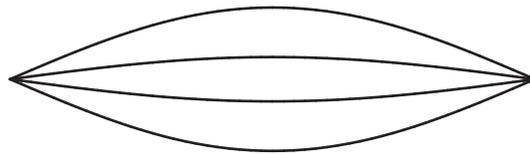
$$f_n = -\frac{c}{4L} + n \frac{c}{2L} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

iii) L'onde est stationnaire à l'intérieur du tuyau. La surpression en $z = 0$ est nulle pour la flûte (nœud), maximale pour la clarinette (ventre). En $z = L$, elle est nulle pour les deux instruments.

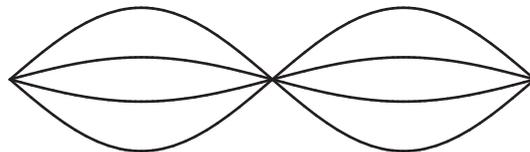
iv) Surpression à l'intérieur des tuyaux :

• Flûte :

$n=1$

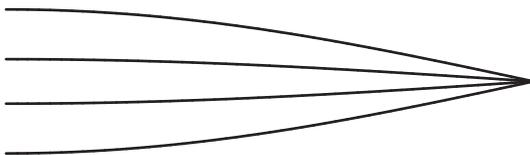


$n=2$

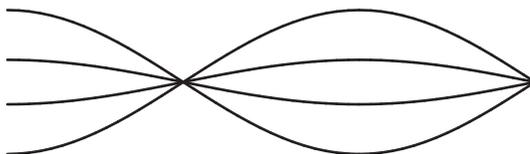


• Clarinette :

$n=1$



$n=2$



v) En ouvrant le trou de registre situé au tiers de la longueur de la clarinette, on impose un nœud de surpression en ce point : on interdit donc tous les modes qui ne possèdent pas ce nœud, en particulier le fondamental. La première fréquence émise est donc l'harmonique 1, de fréquence 3 fois plus élevée que celle du fondamental.

b) $L = c/2f \simeq 52$ cm.

c) À longueur égale la clarinette joue un octave plus bas que la flûte (fréquence fondamentale deux fois plus faible). Le son émis par une flûte possède tous les harmoniques du fondamental alors que celui émis par la clarinette ne possède que les harmoniques impairs.

d) Quand la température augmente, la célérité du son augmente (c est proportionnelle à \sqrt{T}) donc les fréquences propres d'un instrument à vent augmentent.

Pour un instrument à corde, $c = \sqrt{T_0/\mu}$ ne varie pas quand la température augmente mais la longueur de la corde augmente légèrement (la corde se dilate). Les fréquences propres, proportionnelles à $c/2L$ diminuent.

4. Prise en compte de l'impédance de rayonnement

a) La puissance sonore transmise à l'extrémité de l'instrument est $\mathcal{P} = p_1(L, t)u(L, t)S = 0$ car il y a un nœud de surpression en $z = L$.

b) La surpression $p_1(r, t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2}$$

La fonction rp_1 est solution de :

$$\frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2}$$

qui est une équation de d'Alembert à une dimension. On en déduit la forme générale de la surpression :

$$p_1(r, t) = \underbrace{\frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{onde sphérique divergente}} + \underbrace{\frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}}_{\text{onde sphérique convergente}}$$

c) La surpression est : $p_1(r, t) = \frac{A}{r} \exp(j(\omega t - kr))$

L'équation d'Euler linéarisée, $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial p_1}{\partial r}$, permet de déterminer la vitesse particulière :

$$\underline{u}(r, t) = \frac{A}{\mu_0 c r} \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \exp(i(\omega t - kr)) \vec{e}_r$$

L'impédance acoustique en $r = a$ est :

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{p}_1(a, t)}{2\pi a^2 \underline{u}(a, t)} = \frac{\mu_0 c}{2\pi a^2} \frac{1}{1 - \frac{i}{ka}}$$

d) La puissance moyenne rayonnée vers l'extérieur est (en posant $S = 2\pi a^2$) :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{p}_1(a, t) \underline{u}^*(a, t) S) = \frac{|A|^2 \pi}{\mu_0 c}$$

Dans ce modèle, elle est non nulle.

e) Si $ka \ll 1$, c'est-à-dire si $a \ll \lambda$, $\underline{Z}_a \simeq i \frac{\mu_0 c}{2\pi a^2} ka$. Elle est imaginaire pure donc dans cette limite, la puissance rayonnée est nulle (la vitesse particulière et la surpression sont en quadrature).

Il faut pousser le développement limité à l'ordre 2, on obtient alors : $\underline{Z}_a \simeq \frac{\mu_0 c}{2\pi a^2} ((ka)^2 + ika)$.

5. Application au son émis par une flûte.

a) Avec les résultats précédents, on obtient :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_r \cos(kL) + jZ_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + jZ_r \sin(kL)} = Z_c \frac{R + jX + j \tan(kL)}{1 + j(R + jX) \tan(kL)}$$

R est négligeable devant X et au dénominateur, le terme prépondérant est 1. Il reste :

$$Z_0 \simeq jZ_c(X + \tan(kL))$$

b) En $z = 0$, l'impédance est nulle donc $\tan(kL) = -X = -\alpha ka$.

c) On trace les courbes $x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto -\alpha a/L$ sur le même graphique et on cherche leur intersection. Or $\alpha a/L$ est petit ($\tan(kL) \ll 1$) : ces intersections sont légèrement avant les zéros de la fonction tangente. Les fréquences propres sont bien légèrement inférieures à celle que l'on obtient en considérant $Z_L = 0$.

On a donc : $kL = n\pi - \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \ll 1$ avec $\varepsilon_n > 0$. Alors : $\tan(kL) = -\tan \varepsilon_n \simeq -\varepsilon_n = kL - n\pi$. Les valeurs de k vérifient donc : $k(L + \alpha a) = n\pi$. On est ramené à l'étude d'un tuyau idéal de longueur $L + \Delta$ où $\Delta \simeq \alpha a$.

Quatrième partie

Restitution du son - Haut-parleur

A. Équations du mouvement

1. La bobine est alimentée par un générateur. Ce générateur fait donc passer un courant dans le circuit. La bobine, parcourue par un courant et plongée dans le champ magnétique créé par l'aimant, est soumise aux forces de Laplace. Elle est mise en mouvement. Elle engendre alors une onde sonore par déplacement de l'air au voisinage de la membrane mobile.

Mais le circuit mobile se trouve dans un champ magnétique permanent. Il est donc siège d'un phénomène d'induction : une force électromotrice induite $e(t)$ apparaît qui s'oppose à $E(t)$.

L'énergie électrique fournie par le générateur est transformée en énergie mécanique.

2. L'équipage mobile est soumis :

- à son poids ;
- à la tension du ressort équivalent ;
- à la force de frottement de l'air ;
- à la force de Laplace.

La résultante des forces de Laplace sur la bobine est :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{Lap}} &= \oint_{\text{bobine}} i(t) \vec{dl} \wedge \vec{B} \\ &= \oint_{\text{bobine}} i(t) (dl \vec{e}_\theta) \wedge (B \vec{e}_r) \\ &= \oint_{\text{bobine}} i(t) B dl (-\vec{e}_x) \\ &= -i(t) 2\pi N a B \vec{e}_x\end{aligned}$$

Le théorème de la résultante cinétique projeté sur l'axe Ox donne :

$$m \frac{dv}{dt} = -kx(t) - fv(t) - 2\pi N a B i(t) \quad (13)$$

avec $v(t) = \frac{dx}{dt}$.

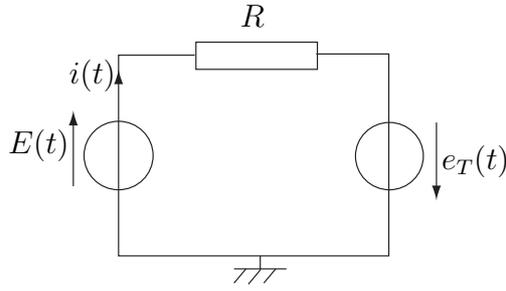
3. La force électromotrice induite par le mouvement du haut parleur dans le champ \vec{B} est égale à :

$$e(t) = \oint_{\text{bobine}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \oint_{\text{bobine}} (v \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_r) \cdot (dl \vec{e}_\theta) = v(t) B \times N \times 2\pi a$$

On a donc :

$$e(t) = 2\pi N a B v(t)$$

L'ensemble du circuit mobile possède une résistance électrique R et une inductance propre L . Le schéma électrique équivalent est donc :



où e_T est la force électromotrice induite totale, somme de la force électromotrice induite par le champ extérieur, e , et de la force électromotrice autoinduite : $e_T(t) = 2\pi NaBv(t) - L\frac{di}{dt}$.

L'équation électrique est :

$$E(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} - 2\pi NaBv(t) \quad (14)$$

B. Impédance du haut-parleur

1. a) Les équations électrique (14) et mécanique (13) s'écrivent en notations complexes :

$$\begin{cases} U_0 = (R + jL\omega)\underline{I} - 2\pi NaB\underline{V} \\ jm\omega\underline{V} = -\frac{k}{j\omega}\underline{V} - f\underline{V} - 2\pi NaB\underline{I} \end{cases}$$

Après avoir éliminé \underline{V} entre les deux équations, on obtient :

$$\left(R + jL\omega + \frac{1}{\frac{f}{(2\pi NaB)^2} + \frac{jm\omega}{(2\pi NaB)^2} + \frac{k}{j(2\pi NaB)^2\omega}} \right) \underline{I} = E_0$$

On voit apparaître l'impédance \underline{Z} du circuit sous la forme $\underline{Z} = \underline{Z}_{\text{él}} + \underline{Z}_{\text{m}}$ où :

$$\underline{Z}_{\text{él}} = R + jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{\text{m}} = \frac{1}{\underline{Y}_{\text{m}}}$$

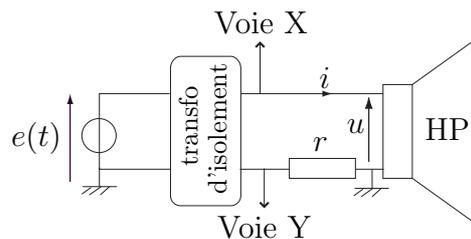
avec :

$$\underline{Y}_{\text{m}} = \frac{f}{(2\pi NaB)^2} + \frac{jm\omega}{(2\pi NaB)^2} + \frac{k}{j(2\pi NaB)^2\omega} = \frac{1}{R_{\text{m}}} + jC_{\text{m}}\omega + \frac{1}{jL_{\text{m}}\omega}$$

ce qui correspond bien au schéma équivalent proposé dans l'énoncé.

b) $R_{\text{m}} = \frac{(2\pi NaB)^2}{f} = 7,8 \, \Omega$, $C_{\text{m}} = \frac{m}{(2\pi NaB)^2} = 7,3 \cdot 10^{-4} \, \text{F}$ et $L_{\text{m}} = \frac{(2\pi NaB)^2}{k} = 4,4 \, \text{mH}$.

2.



Le circuit est alimenté par un signal sinusoïdal $e(t)$. Sur la voie X de l'oscillo, on recueille une tension image de l'intensité ($X = -ri(t)$), sur la voie Y la tension $u(t)$. En faisant varier la

fréquence du signal d'entrée et en mesurant pour chaque fréquence l'amplitude des deux tensions X et Y et le déphasage entre elles, on a accès à l'impédance du haut-parleur en fonction de la fréquence.

Si le GBF est à masse flottante, le transformateur d'isolement est inutile.

$$3. \text{ a) } R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 \left(C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega} \right)^2} \text{ et } X_T = L\omega - \frac{R_m \left(C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega} \right)}{1 + R_m^2 \left(C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega} \right)^2}$$

b) Quand $\omega \rightarrow 0$, l'impédance tend vers R , ce que l'on observe bien sur les courbes. De même, en très haute fréquence, R_T tend vers R et X_T vers l'infini.

On observe une résonance de R_T pour $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{L_m C_m}$, ce qui tout à fait en accord avec l'expression littérale de R_T .

Si on cherche les valeurs de ω pour lesquelles X_T s'annule, on trouve une première valeur très proche de ω_0 (compte tenu des valeurs numériques) puis une seconde valeur, pour $\omega \simeq 4\omega_0$.

C. Rendement énergétique

1. L'énergie mécanique du haut-parleur est composée d'un terme d'énergie cinétique et d'un terme d'énergie potentielle élastique :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

L'énergie magnétique de la bobine est :

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Le bilan énergétique du dispositif s'obtient (par exemple) en multipliant l'équation électrique (14) par $i(t)dt$ et l'équation mécanique (13) par $v(t)dt$:

$$E(t)i(t)dt = Ri^2(t)dt + L\frac{di}{dt}i(t)dt - lBv(t)i(t)dt$$

et

$$m\frac{dv}{dt}v(t)dt = -kx(t)v(t)dt - fv^2(t)dt - lBi(t)v(t)dt$$

On en déduit :

$$\underbrace{E(t)i dt}_{\delta E_G} = \underbrace{Ri^2 dt}_{\mathcal{P}_J dt} + \underbrace{L\frac{di}{dt}i dt}_{dE_L} + \underbrace{m\frac{dv}{dt}v dt}_{dE_c} + \underbrace{kxv dt}_{dE_p} + \underbrace{fv^2 dt}_{-\mathcal{P}_{\text{frott}} dt}$$

où :

- $\delta E_G = E(t)i(t)dt$ est l'énergie fournie par le générateur entre t et $t + dt$;
- $\mathcal{P}_J = Ri^2(t)$ est la puissance dissipée par effet Joule ;
- $E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$ est l'énergie magnétique de la bobine à l'instant t ;
- $E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$ est l'énergie cinétique de l'équipage mobile à l'instant t ;
- $E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$ est l'énergie potentielle élastique à l'instant t ;
- $\mathcal{P}_{\text{frott}} = -fv^2(t)$ est la puissance de la force de frottement.

L'énergie fournie par le générateur est en partie stockée sous forme magnétique, cinétique et potentielle dans le dispositif et en partie dissipée par effet Joule et par la force de frottement.

2. Ni la puissance des forces de Laplace ni celle de la force électromotrice induite n'apparaissent dans le bilan énergétique global. Le couplage électromécanique est parfait. La puissance des forces de Laplace et celle de la force électromotrice induite se compensent exactement.

Le champ magnétique permet la conversion de puissance électrique en puissance mécanique.

3. a) Le bilan énergétique : $E(t)i(t) = \frac{dE_m}{dt} + \frac{dE_L}{dt} + Ri^2(t) + fv^2(t)$ s'écrit en valeur moyenne :

$$\langle Ei \rangle = 0 + 0 + \langle Ri^2 \rangle + \langle fv^2 \rangle$$

En effet, l'énergie mécanique et l'énergie magnétique sont périodique, de période $T/2$, la valeur moyenne de leur dérivée est nulle.

La puissance fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule, en partie transmise à l'onde sonore (puissance dissipée par frottements).

b) Le rendement énergétique du haut-parleur donc être peut défini de la façon suivante : $\eta = \frac{\langle fv^2 \rangle}{\langle Ri^2 \rangle + \langle fv^2 \rangle}$. En fonction des résistances, on trouve : $\eta = \frac{R_m}{R_T} = \frac{R_T - R}{R_T}$.

c) Le rendement est maximum pour la valeur de ω qui rend R_T maximal, c'est-à-dire pour $\omega = \omega_0 = 558 \text{ rad.s}^{-1}$ pour le haut-parleur étudié. Cette valeur correspond bien à ce que l'on observe sur la figure ($\log(\omega_0) \simeq 2,7$). La fréquence de résonance de ce haut-parleur est de 89 Hz.

Le haut-parleur est intéressant dans une gamme de fréquence où la puissance acoustique qu'il délivre est à peu près indépendante de la fréquence. Les enceintes acoustiques sont équipées de plusieurs haut-parleurs de fréquence de résonance différentes pour couvrir de manière efficace tout le spectre audible.

D. Onde acoustique rayonnée

1. Pour une onde plane progressive, $p_1 = \mu_0 c u$. D'autre part, au niveau de la membrane, la vitesse du haut-parleur est égale à celle de l'onde sonore, d'où : $\vec{F} = -\mu_0 c S \vec{v}$ où $f = \mu_0 c S$. Avec les valeurs numériques précédentes : $S \simeq 15 \text{ cm}^2$. Cette valeur semble raisonnable.

2. a) Il faut que la taille de la membrane soit faible devant la longueur d'onde des ondes de déformation de la membrane.

b) On intègre l'expression donnée sur toute la surface de la membrane du haut-parleur :

$$\underline{p}(0, 0, x) = \int_0^a \frac{j\omega\mu_0 v_0}{2\pi\sqrt{r^2 + x^2}} \exp j\left(\omega\left(t - \frac{\sqrt{r^2 + x^2}}{c}\right)\right) 2\pi r dr$$

On fait le changement de variable : $\xi = \sqrt{r^2 + x^2}$:

$$\begin{aligned} \underline{p}(0, 0, x) &= \int_0^{\sqrt{a^2 + x^2}} \frac{j\omega\mu_0 v_0}{2} \exp j\left(\omega\left(t - \frac{\xi}{c}\right)\right) d\xi \\ &= \mu_0 c v_0 \left(\exp(-jkx) - \exp(-jk\sqrt{a^2 + x^2}) \right) \end{aligned}$$

où $k = \omega/c$.

c) i) Le module de la surpression en un point de l'axe est :

$$|\underline{p}(0, 0, x)| = 2\mu_0 c v_0 \left(1 - \cos(k\sqrt{a^2 + x^2} - kx) \right)$$

Il est maximal pour x tel que :

$$\sqrt{a^2 + x^2} - x = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$$

et minimal pour x tel que :

$$\sqrt{a^2 + x^2} - x = n\lambda$$

Après quelques calculs, on obtient :

- maxima : $x_n = \left(n + \frac{1}{2}\lambda\right) \left(\left(\frac{a}{(n + 1/2)\lambda}\right)^2 - 1\right)$
- minima : $x_m = m\lambda \left(\left(\frac{a}{m\lambda}\right)^2 - 1\right)$

ii) il n'y a pas d'extremum de surpression sur l'axe si $a < \lambda/2$. Pour un haut-parleur émettant un son de fréquence 500 Hz par exemple, $\lambda \simeq 70$ cm d'où $a < 35$ cm ce qui vérifié dans la pratique.

d) Loin du haut-parleur, $\underline{p}(M, t) \simeq \mu_0 c v_0 j \frac{ka^2}{2x} \exp j(\omega t - kx)$. C'est une onde sphérique : loin du haut-parleur, celui-ci est vu comme une source ponctuelle émettant une onde sphérique.

e) Au niveau du haut-parleur (en $x = 0$), $\underline{p}(M, t) = 2j\mu_0 c v_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \exp j(\omega t - ka/2)$, son module est : $|\underline{p}(M, t)| = 2\mu_0 c v_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$. Près du haut-parleur, l'onde n'est plus du tout sphérique (elles serait alors infinie).

Fin