Modèles physiques de quelques instruments de musique et acoustiques

Ce problème s'intéresse à quelques aspects de la physique des instruments de musique.

La première partie étudie un modèle simple d'instrument à corde, dans lequel seule la physique de la corde vibrante intervient (les effets du couplage entre la corde et l'instrument ne sont pas évoqués).

La deuxième partie propose une étude simplifiée de certains instruments à percussion, à partir des modes de vibrations d'une membrane (là encore, les effets du couplage de la membrane avec le corps de l'instrument ne sont pas pris en compte).

La troisième partie aborde l'étude des instruments à vent, modélisés par de simples tuyaux sonores.

Enfin, la quatrième partie s'intéresse à la restitution d'un son par un haut-parleur, et à l'onde sonore rayonnée par la membrane de celui-ci.

Les quatre parties sont indépendantes.

La description d'une expérience doit comporter un schéma explicatif et le protocole expérimental.

Dans tout le problème, on note $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ la base des coordonnées cartésiennes. Les grandeurs complexes sont soulignées.

Première partie

Corde vibrante - Instruments à cordes

Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L. Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

On commence par étudier le modèle de la corde sans raideur, qui fait l'objet des questions **A.** à **D.**. On néglige l'effet de la pesanteur dans les questions **A.** à **C.** et dans la question **E.**. Cet effet est étudié dans la question **D.**. Enfin, la raideur de la corde est prise en compte dans la question **E.**.

A. Équation de propagation de l'ébranlement

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0. Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox).

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.

On fait les hypothèses suivantes :

(1) Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe Ox, ce qui entraîne : $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$.

(2) La tension de la corde en mouvement est : $T(x,t) = T_0 + T_1(x,t)$ avec $|T_1(x,t)| \ll T_0$ et $\dfrac{|T_1(x,t)|}{T_0}$ infiniment petit du même ordre ou d'un ordre supérieur à $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|$.

(3) On ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x,t)$ et en ses dérivées.

(4) On néglige les effets de la pesanteur.

1. a) On considère l'élément de corde de longueur $\mathrm{d}\ell$ situé entre les plans d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.

Montrer que :

$$\mathrm{d}\ell \simeq \mathrm{d}x$$

au premier ordre en $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|$.

b) Appliquer le théorème de la résultante cinétique à cet élément de corde et le projeter sur $\overrightarrow{e_y}$. En déduire que l'ébranlement $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

où c est une grandeur à exprimer en fonction de T_0 et μ.

2. a) Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue pour c.

b) Donner sans démonstration la forme générale des solutions de l'équation (1).

c) Calculer c pour :

- une corde de guitare : masse linéique $\mu = 3$ g.m^{-1}, tension $T_0 = 103$ N ;
- une corde de piano : masse volumique $\rho = 7800$ kg.m^{-3}, tension $T_0 = 850$ N, diamètre $\phi = 1,2$ mm.

Commenter les valeurs obtenues.

B. Corde fixée à ses deux extrémités, modes propres

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

1. Modes propres, fréquences propres

a) Qu'appelle-t-on *onde stationnaire* ?

b) Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (1) sont de la forme :

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

Quelle est la relation entre ω et k ?

c) Définir les *modes propres* et les *fréquences propres* de la corde.

d) Montrer que les fréquences propres de la corde sont :

$$f_n = n\frac{c}{2L}$$

e) Définir les *ventres* et les *nœuds* de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? entre deux nœuds consécutifs ? entre un ventre et un nœud consécutifs ?

f) Dessiner l'aspect de la corde à différents instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

g) Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

h) On considère les cordes dont on a donné les caractéristiques à la question **A.**2c.

La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré$_2$). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

2. Solution générale

On admet que la solution générale de l'équation (1) correspondant aux conditions aux limites $y(0,t) = y(L,t) = 0$ est une superposition des modes propres. On l'écrit sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2}$$

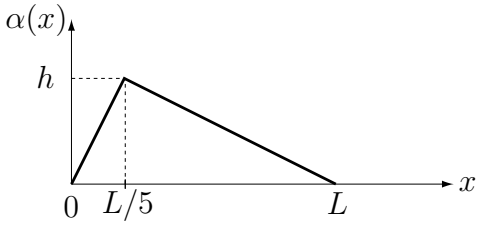
Les conditions initiales sont constituées par la donnée de :

- la forme de la corde : $y(x,0) = \alpha(x)$,
- sa vitesse : $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x)$,

où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions définies sur $[0,\ L]$.

a) Montrer que les coefficients a_n et b_n se déduisent simplement de la décomposition en série de Fourier des fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaires, périodiques de période $2L$ et qui coïncident avec $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sur l'intervalle $[0,\ L]$.

b) On donne la fonction $\alpha(x)$:



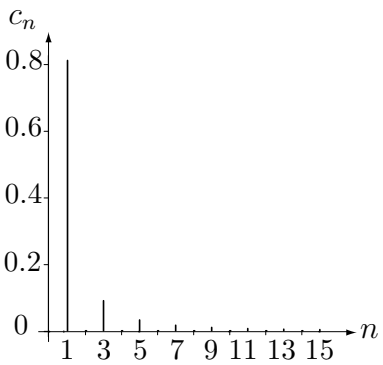
Illustrer graphiquement la construction de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$.

3. Corde pincée

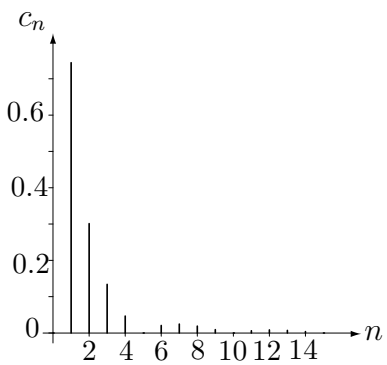
Une corde de longueur L est pincée puis lâchée sans vitesse à l'instant $t = 0$ (corde de guitare ou de clavecin par exemple).

a) Que valent les coefficients b_n ? Comment peut-on déterminer les coefficients a_n (*la détermination de ces coefficients n'est pas demandée ici*) ?

b) On donne les spectres calculés pour une corde pincée à la moitié de sa longueur puis au cinquième de celle-ci, où $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$:



Corde pincée en $L/2$



Corde pincée en $L/5$

Comment peut-on expliquer, dans le cadre de la modélisation précédente, l'absence de certains harmoniques ?

On pourra calculer les coefficients de Fourier de la fonction dérivée de $\tilde{\alpha}(x)$ pour obtenir simplement ceux de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$. On rappelle que si $f(t)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes, périodique de période T, les coefficients de Fourier de $f(t)$ sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N} \\ b_n = \dfrac{2}{T_s}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

les coefficients ne dépendant pas de l'instant t_0 choisi pour le calcul.

4. Corde frappée

Une corde de piano est frappée par un petit marteau à la distance $x_0 = sL$ de son extrémité $x = 0$.

a) Que valent maintenant les coefficients a_n ? Quelle valeur faut-il donner à s si on veut rendre l'amplitude de l'harmonique n la plus petite possible ?

b) On peut montrer que les coefficients a_n associés à la corde pincée étudiée à la question **B.**3 décroissent globalement comme $\dfrac{1}{n^2}$. En revanche les amplitudes des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en $\dfrac{1}{n}$ (au moins à partir d'une certaine valeur de n).

Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées).

5. Limites du modèle

Quel phénomène essentiel a été oublié (on ne s'intéresse pas ici au couplage entre la corde et l'instrument mais uniquement à la vibration de la corde) ?

C. Étude énergétique

1. a) Exprimer la densité linéique d'énergie cinétique e_C de la corde en mouvement en fonction de μ et de $\dfrac{\partial y}{\partial t}$.

b) On étudie la portion de corde située entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Dans cette question, il est conseillé de travailler avec les variables $T_y = T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}$ et $v = \dfrac{\partial y}{\partial t}$.

i) Exprimer la puissance des forces extérieures à ce système.

ii) En appliquant le théorème de la puissance cinétique à ce système, exprimer la puissance des forces intérieures.

iii) En déduire que l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_P(x,t) = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

en prenant l'énergie potentielle nulle quand la corde est au repos.

2. a) On étudie la corde dans le mode propre n. L'ébranlement est écrit sous la forme :

$$y_n(x,t) = c_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode n s'écrit :

$$E_n = n^2c_n^2\frac{\pi^2}{4L}T_0$$

b) On considère maintenant la solution générale sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie E de la corde est :

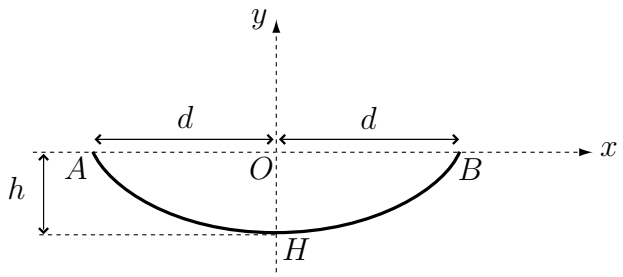
$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

Commenter.

3. On a vu précédemment que les amplitudes des différents harmoniques d'une corde pincée sont de la forme $c_n = \dfrac{c_1}{n^2}$ alors que ceux d'une corde frappée sont de la forme : $c'_n = \dfrac{c'_1}{n}$. Comparer les énergies des différents modes d'une corde de clavecin (corde pincée) et d'une corde de piano (corde frappée). Commenter.

D. Influence de la pesanteur

Pour étudier les effets de la pesanteur, nous allons faire le calcul exact de la forme d'une corde parfaitement souple tendue entre deux points A et B situés à la même altitude, comme sur la figure ci-dessous. Nous appliquerons ensuite les résultats obtenus aux cordes d'instruments de musique.



Dans cette question **D.** et dans celle-là uniquement, les déformations ne sont plus considérées comme petites.

1. On considère l'élément de corde compris en x et $x + \mathrm{d}x$.

a) Quelle est la relation entre $\mathrm{d}\ell$, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$?

b) Écrire l'équation vectorielle traduisant l'équilibre de ce système.

c) Montrer que la projection de la tension sur Ox est uniforme. On note T_0 cette projection.

d) Montrer enfin que la fonction donnant la forme de la corde $y(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{T_0}{\mu g}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{3}$$

2. On pose $\delta = \dfrac{T_0}{\mu g}$. Quelle est la dimension de δ ?

3. a) Montrer que la solution de l'équation (3) est :

$$y(x) = \delta \left(\mathrm{ch}\frac{x}{\delta} - 1\right) - h$$

On rappelle que :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \mathrm{argsh}u$$

b) Calculer la longueur de la corde en fonction de d et δ.

c) En déduire la relation :

$$h = \delta\left(\sqrt{1+\frac{L^2}{4\delta^2}}-1\right)$$

d) Calculer h pour une corde de guitare de masse $m = 1,9$ g, de longueur $L = 63$ cm, telle que $T_0 = 103$ N. On prendre $g = 10$ m.s^{-2}.

Le fait de négliger la pesanteur dans les questions précédentes est-il justifié ?

E. Prise en compte de la raideur de la corde

Dans cette question, on suppose que la corde est cylindrique de rayon a et qu'elle est faite en acier, de masse volumique $\rho = 7800$ kg.m^{-3} et de module d'Young $E = 190\ 10^9$ U.S.I.. La pesanteur n'est plus prise en compte et les déformations sont de nouveau considérées comme petites.

1. Rappeler la définition du module d'Young et préciser son unité.

2. On considère une déformation de cette corde dans le plan xOy comme précédemment.

La théorie de l'élasticité montre que la tension $\overrightarrow{T}$ n'est plus tangente à la corde et que, pour permettre la courbure de la corde, il faut un couple de moment $\overrightarrow{\Gamma} = \pm\Gamma_z(x,t)\overrightarrow{e_z}$ qui s'exprime, dans le cadre de notre étude, par :

$$\Gamma_z(x,t) = ESK^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{4}$$

où S la section de la corde et K un coefficient dépendant de la forme de la section droite de la corde, égal à $K = \dfrac{a}{2}$ pour une corde cylindrique.

La portion de corde comprise entre les points d'abscisse x et $x + \mathrm{d}x$ est donc soumise aux deux tensions :

$$\overrightarrow{T}_g(x,t) = -\left(T_x(x,t)\overrightarrow{e_x} + T_y(x,t)\overrightarrow{e_y}\right) \quad \text{en} \quad x$$

et :

$$\overrightarrow{T}_d(x+\mathrm{d}x,t) = T_x(x+\mathrm{d}x,t)\overrightarrow{e_x} + T_y(x+\mathrm{d}x,t)\overrightarrow{e_y} \quad \text{en} \quad x+\mathrm{d}x$$

et aux deux couples :

$$-\Gamma_z(x,t)\overrightarrow{e_z} \quad \text{en} \quad x$$

et :

$$\Gamma_z(x+\mathrm{d}x,t)\overrightarrow{e_z} \quad \text{en} \quad x+\mathrm{d}x$$

dont le moment est donné par l'expression (4).

a) Vérifier l'homogénéité de l'expression (4).

b) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la tranche $\{x, x+\mathrm{d}x\}$, montrer que T_x ne dépend que du temps.

On supposera que T_x est constante et on la prendra égale à T_0.

Établir une relation différentielle entre T_y et y.

c) En appliquant le théorème du moment cinétique au centre de masse de la tranche $\{x, x+\mathrm{d}x\}$, établir une nouvelle relation différentielle entre T_y, Γ_z et y. On justifiera le fait que le moment d'inertie de ce système est d'ordre 3 en $\mathrm{d}x$ donc négligeable à l'ordre d'approximation envisagé.

d) En déduire l'équation de propagation :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ESK^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

3. Modification des fréquences propres

a) En supposant que la déformation est harmonique, donc de la forme :

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \varphi)$$

donner la relation entre ω et k.

b) i) Dans le cas où la raideur de la corde reste faible, montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre $x = 0$ et $x = L$ se mettent sous la forme :

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2}$$

où c est la célérité des ondes dans la corde sans raideur et B une constante à exprimer en fonction de E, S, K, T_0 et L.

ii) Tracer, sur le même graphique, les courbes représentant f_n en fonction de n pour une corde sans raideur puis pour une corde avec raideur.

iii) Pour une corde de piano étudiée plus haut, on donne : $B = 4\ 10^{-4}$. À partir de quelle valeur de n la fréquence propre de la corde avec raideur est-elle plus aiguë d'un demi-ton que celle de la corde idéale ? On rappelle que la gamme tempérée divise l'octave en 12 intervalles, appelés *demi-tons*, et que les fréquences successives f_p des notes espacées par ces demi-tons forment une suite géométrique vérifiant la loi générale $f_p = 2^{p/12} f$ où $p \in [1, 12]$ (p entier).

Deuxième partie

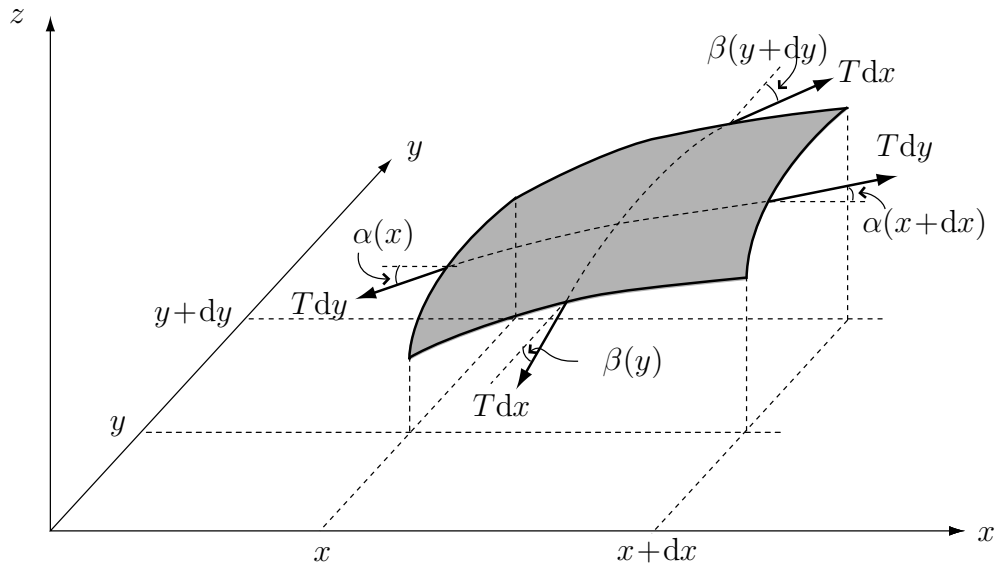
Membranes vibrantes - Instruments à percussion

Dans cette partie, on étudie les vibrations d'une membrane élastique, sans raideur, de masse surfacique σ, tendue avec la tension T. La tension d'une membrane est définie de la façon suivante : pour un petit élément de longueur $\mathrm{d}l_M$ de la membrane, situé au point M, orthogonal à la direction $\overrightarrow{n_M}$, la membrane exerce la force $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = T\mathrm{d}l\overrightarrow{n_M}$, le vecteur unitaire $\overrightarrow{n_M}$ étant tangent à l'élément de surface.

Nous n'étudierons que les petits mouvements transverses d'une membrane horizontale quand elle est au repos. Dans ce cas, nous admettrons que T est une constante, indépendante du point et de la direction de la force.

Le petit élément de surface $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ autour du point M de coordonnées (x, y) qui était sur le plan $z = 0$ quand la membrane est au repos se trouve en $z(x, y, t)$ quand celle-ci est en mouvement.

Un élément de membrane est donc soumis aux forces suivantes :



On néglige les effets de la pesanteur.

A. Équation de propagation de la déformation

1. Les angles $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ sont faibles. Montrer que la résultante des forces de tension agissant sur le petit élément de membrane ci-dessus s'écrit, en première approximation :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_T} = T\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \overrightarrow{e_z}$$

2. En déduire l'équation de propagation de la déformation $z(x, y, t)$.

3. a) Quelle est la célérité des ondes c dans la membrane ?

b) Retrouver ce résultat par un simple argument dimensionnel en supposant que c s'écrit sous la forme : $c = T^\alpha \sigma^\beta$ où α et β sont des nombres rationnels.

c) On donne : $T = 3990$ N.m^{-1} et $\sigma = 0,35$ kg.m^{-2}. Calculer la valeur numérique de c.

B. Modes propres d'une membrane circulaire

La membrane est un disque de rayon a fixée rigidement sur sa circonférence. On donne le laplacien en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

On cherche des solutions sous la forme $z(r, \theta, t) = F(r)G(\theta)H(t)$.

1. Montrer que $H(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme :

$$H''(t) = KH(t)$$

où K est une constante. Pourquoi choisit-on cette constante négative ? Dans la suite, on posera $K = -\omega^2$.

2. a) Montrer que $G(\theta)$ vérifie une équation différentielle de la même forme :

$$G''(\theta) = K'G(\theta)$$

où K' est une constante.

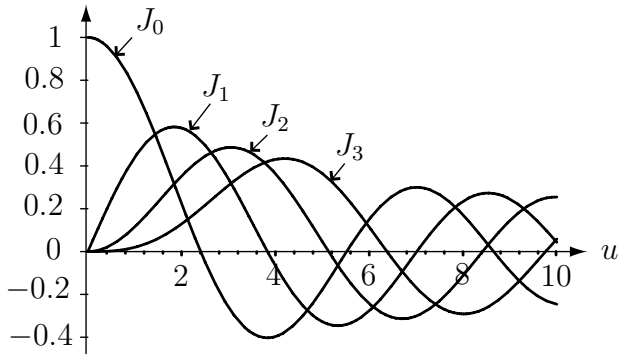
b) En posant $K' = -4\pi^2 m^2$, montrer que m est nécessairement entier.

3. a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $F(r)$?

b) Montrer que, par un changement de variable $u(r)$ à préciser, cette équation se met sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} + \left(1 - \frac{m^2}{u^2}\right) F(u) = 0$$

c) Les solutions de cette équation qui gardent une valeur finie en $u = 0$ sont les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(u)$ dont les graphes sont données par la figure suivante (pour $m = 0, 1, 2$ et 3) :



D'autre part, $J_{-m} = J_m$.

On appelle $\xi_{m,n}$ le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction J_m. Les premières valeurs de $\xi_{m,n}$ sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$m = 0$	2,405	5,520	8,654	11,792
$m = 1$	3,832	7,016	10,173	13,324
$m = 2$	5,136	8,417	11,620	14,796
$m = 3$	6,380	9,761	13,015	16,223

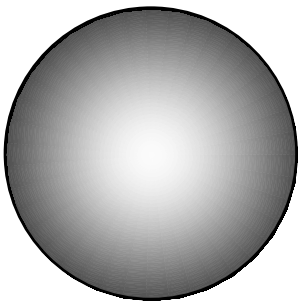
Quelles sont les conditions aux limites que doit satisfaire $z(r, \theta, t)$? En déduire les fréquences propres $f_{m,n}$ de la membrane en fonction de a, c et de $\xi_{m,n}$.

d) Montrer que $f_{-m,n} = f_{m,n}$. Dans toute la suite, on prendra une superposition des solutions correspondant à m et $-m$, paire en θ. La solution correspondant à une valeur du couple (m, n) où $m \geq 0$ est appelée *mode propre* (m, n).

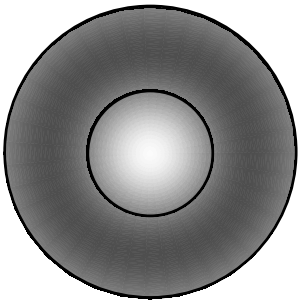
4. a) Calculer la fréquence propre la plus basse pour la membrane étudiée à la question **A.**3c, de diamètre 65 cm.

b) Calculer les fréquences correspondant aux modes $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(2, 2)$. Les différentes fréquences propres sont-elles multiples de la fréquence du fondamental ? Quelle en est la conséquence pour le son émis par la membrane ? Qu'en est-il du son émis par l'instrument lui-même ?

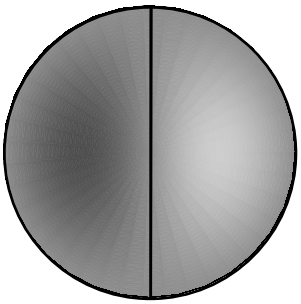
c) Les figures ci-dessous représentent l'aspect de la membrane vue de dessus à un instant fixé. La valeur de $z(M, t)$ a été convertie en niveaux de gris (blanc pour les maxima, noir pour les minima).



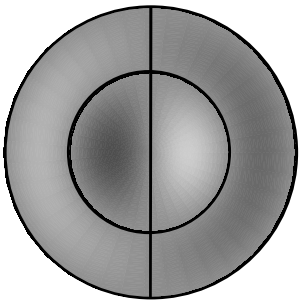
mode (0,1)



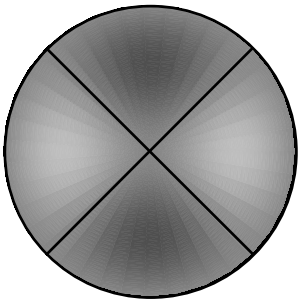
mode (0,2)



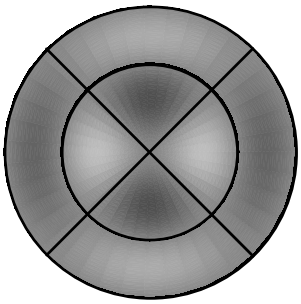
mode (1,1)



mode (1,2)



mode (2,1)



mode (2,2)

Vérifier la cohérence de ces simulations avec les résultats obtenus. On déterminera en particulier les lignes nodales, c'est-à-dire les points de la membrane qui restent immobiles, représentées en traits continus sur la figure.

d) Citer des techniques expérimentales permettant de visualiser ces déformations.

Troisième partie

Tuyaux sonores - Instruments à vent

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation d'ondes sonores dans l'air contenu dans une cavité possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz.

L'air est assimilé à un gaz parfait non visqueux, de masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1}. Le rapport entre les capacités thermiques à pression constante c_p et à volume constant c_v est $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = 1,4$. On prendra la constante des gaz parfaits égale à $R = 8,31$ J.K^{-1}.mol.$^{-1}$.

Au repos, l'état du fluide est décrit par la pression P_0 et la masse volumique μ_0.

En présence de l'onde sonore, l'état du fluide est décrit par :

- la pression $P(M,t) = P_0 + p_1(M,t)$;
- la masse volumique $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$;
- la vitesse particulaire $\overrightarrow{u}(M,t)$.

A. Approximation des ondes sonores - Équation d'ondes

1. Préciser le cadre de l'approximation des ondes sonores en donnant des ordres de grandeurs pour la pression au repos P_0 et pour la surpression $p_1(M,t)$.

2. Quels sont les ordres de grandeurs :

- de la célérité du son dans l'air ?
- de la gamme de longueurs d'onde des ondes sonores dans le domaine audible ?

3. a) Écrire l'équation d'Euler.

b) Comparer l'ordre de grandeur de l'accélération de la pesanteur et celui de l'accélération locale pour une onde de fréquence de l'ordre du kilohertz et une vitesse particulaire de l'ordre de 1 mm.s^{-1}. Compte tenu de ce résultat, expliquer pourquoi malgré tout on ne tient pas compte du terme de pesanteur dans l'étude des ondes sonores.

c) Linéariser alors l'équation d'Euler dans le cadre de l'approximation des ondes sonores.

4. Établir la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = \Delta p_1$$

5. On suppose le comportement du fluide décrit par une équation de la forme : $\mu = \mu(P)$.

a) Linéariser cette équation pour trouver une relation entre μ_1, p_1 et $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}\right)_{p_1=0}$. En déduire que la surpression $p_1(M,t)$ vérifie une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1$$

et donner l'expression de c en fonction de $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}\right)_{p_1=0}$.

b) i) Comparer la durée caractéristique de diffusion thermique sur une longueur L et la durée caractéristique de variation des grandeurs comme la surpression sur la même longueur L en choisissant correctement la valeur de L. On donne la valeur numérique de la diffusivité thermique de l'air : $D_{\mathrm{th}} \simeq 2\ 10^{-5}$ m^2.s^{-1}.

ii) Conclure quant aux caractéristiques thermodynamiques de l'évolution des particules de fluide. En déduire l'expression de la célérité des ondes sonores en fonction de μ_0 et du coefficient de compressibilité isentropique de l'air au repos, χ_{S0}.

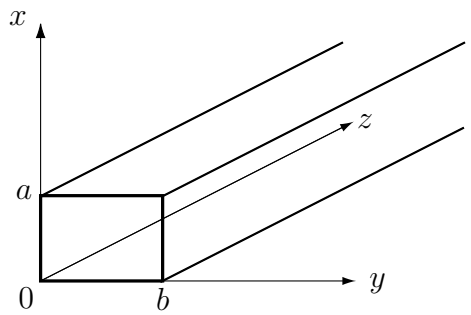
c) i) Dans le cas où l'air est assimilé à un gaz parfait, établir l'expression de c en fonction de la constante des gaz parfaits R, de la masse molaire de l'air M, de γ et de la température T.

ii) Effectuer l'application numérique à 20 °C. Conclure quant à la validité du modèle.

d) Proposer une expérience permettant de mesurer la célérité c du son dans l'air.

B. Propagation guidée dans une cavité infinie

Le tuyau dans lequel on étudie la propagation des ondes sonores est à section rectangulaire, de très grande longueur selon l'axe Oz :



1. Onde plane

On considère une onde plane décrite par la surpression $p_1(z,t)$.

a) Quelle condition doivent satisfaire les dimensions a et b pour que seule cette onde plane puisse se propager ?

b) Établir alors la relation entre la surpression et la vitesse particulaire pour une onde plane progressive dans le sens des z croissants puis pour une onde plane progressive dans le sens des z décroissants et enfin dans le cas général.

2. Modes propres de la cavité

On suppose que la condition précédente n'est pas vérifiée. Dans ce cas, on cherche des solutions de l'équation d'onde sous la forme :

$$\underline{p}_1(M,t) = X(x)Y(y)Z(z)\exp(j\omega t)$$

où $j^2 = -1$.

a) Montrer que les fonctions $X(x)$, $Y(y)$ et $Z(z)$ vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X(x)}\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -k_x^2 \\ \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = -k_y^2 \\ \dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = -k_z^2 \end{cases}$$

où k_x, k_y et k_z sont trois constantes réelles.

Quelle est la relation entre k_x, k_y, k_z, ω et c ?

b) Quelles sont les conditions aux limites imposées par la présence des parois ?

c) En déduire que la surpression $\underline{p}_1(x,y,z,t)$ se met sous la forme :

$$\underline{p}_1(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\underline{p}_{n,m}(x,y,z,t)$$

avec

$$\underline{p}_{n,m}(x,y,z,t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\left(\underline{A}_{n,m}\exp\big(i(\omega t - k_z z)\big) + \underline{B}_{n,m}\exp\big(i(\omega t + k_z z)\big)\right)$$

où n et m sont deux entiers positifs ou nuls.

Le mode propre décrit par la surpression $\underline{p}_{n,m}(x,y,z,t)$ est appelé *mode* (n,m).

d) À quelle condition sur k_z l'onde se propage-t-elle dans le guide ? Montrer que la cavité se comporte comme un filtre passe-haut pour le mode (n,m) et déterminer la fréquence de coupure f_c de ce filtre.

e) i) On appelle λ_g la longueur d'onde de l'onde dans le guide et λ la longueur d'onde de l'onde de même pulsation se propageant dans un milieu illimité. Établir la relation entre λ_g, λ et λ_c où $\lambda_c = \dfrac{c}{f_c}$.

ii) Établir l'expression de la vitesse de groupe de l'onde dans le cas où elle se propage, en fonction de c, λ et λ_g. La comparer à c.

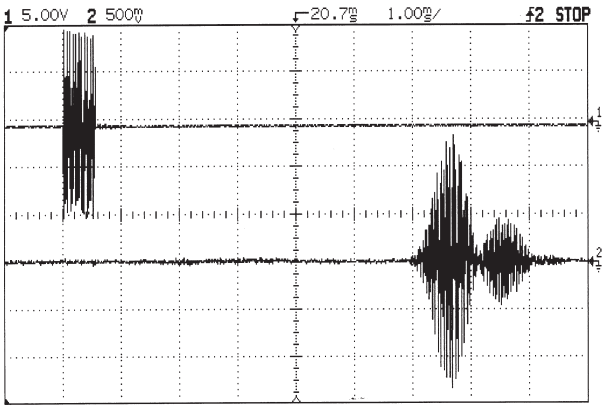
f) On suppose que $a < b$. Quelle est la plus basse fréquence pouvant se propager dans le tuyau pour un mode $(n,m) \neq (0,0)$? Effectuer l'application numérique pour $b = 1$ cm. Conclure quant à l'hypothèse d'une onde plane dans le tuyau.

g) Les instruments réels à section constante sont cylindriques, de rayon a. L'étude se fait de la même façon mais le résultat fait intervenir des fonctions de Bessel de première espèce. La fréquence de coupure la plus basse est alors : $f_c = \dfrac{1,84c}{2\pi a}$.

Effectuer l'application numérique pour un tuyau de rayon $a = 1$ cm. Reprendre la conclusion de la question précédente quant à l'hypothèse d'une onde plane dans le tuyau.

h) On étudie le mode particulier $(0,0)$. Écrire la surpression et la vitesse particulaire associée. On appellera A et B les constantes $A_{0,0}$ et $B_{0,0}$.

i) On réalise l'expérience suivante : un émetteur d'ultrasons envoie des trains d'onde de fréquence $f_e = 40$ kHz, de durée $\Delta t = 500$ μs, dans un tuyau cylindrique de diamètre 35 mm. Un récepteur est placé à l'autre extrémité du tuyau, sur l'axe de celui-ci, face à l'émetteur. La distance entre l'émetteur et le récepteur est $L = 201$ cm. On observe à l'oscilloscope les signaux suivants :



L'émetteur est relié à la voie 1 de l'oscilloscope, le récepteur à la voie 2.

i) Expliquer le signal observé au niveau du récepteur.

ii) Mesurer la vitesse de propagation des modes observés. Les résultats sont-ils qualitativement en accord avec l'étude théorique ?

C. Propagation dans une cavité de longueur finie. Impédance

On se place désormais dans l'hypothèse d'une onde plane, c'est-à-dire que l'on ne s'intéresse qu'au fonctionnement du tuyau en dessous de la première fréquence de coupure. Le tuyau a une section constante d'aire S. On note k le module d'onde et ω la pulsation de l'onde.

1. Impédance caractéristique

On définit l'impédance caractéristique du tuyau par la relation : $Z_c = \dfrac{p_1(z,t)}{Su(z,t)}$ pour une onde plane progressive dans le sens des z croissants.

Que représente la grandeur $Su(z,t)$?

Établir l'expression de Z_c en fonction de μ_0, S et c.

2. Impédance acoustique

On définit l'*impédance acoustique* $\underline{Z}_z$ en un point d'abscisse z par la relation :

$$\underline{Z}_z = \frac{\underline{p}_1(z,t)}{S\underline{u}(z,t)}$$

a) Établir l'équation suivante :

$$\underline{Z}_0 = Z_c \, \frac{\underline{Z}_L \cos(kL) + jZ_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + j\underline{Z}_L \sin(kL)} \tag{5}$$

où $\underline{Z}_0$ et $\underline{Z}_L$ sont les valeurs de $\underline{Z}_z$ respectivement en $z = 0$ et en $z = L$.

b) Que devient $\underline{Z}_0$ si $\underline{Z}_L$ tend vers l'infini ? vers zéro ?

3. Fréquences d'une flûte et d'une clarinette

Pour les deux instruments, le tuyau est limité par les plans $z = 0$ et $z = L$. L'extrémité $z = L$ est ouverte. En première approximation, on suppose que l'impédance acoustique est nulle au niveau d'une extrémité ouverte.

a) Pour une flûte, l'extrémité $z = 0$ peut être considérée comme quasiment ouverte. Par contre, pour une clarinette, l'anche située en $z = 0$ se comporte comme un obstacle rigide.

i) En déduire les fréquences propres de la flûte.

ii) Que vaut alors l'impédance acoustique en $z = 0$ pour la clarinette ? En déduire les fréquences propres de cet instrument.

iii) Comment peut-on qualifier l'onde à l'intérieur du tuyau ? Que peut-on dire de la surpression en $z = 0$ pour chacun des instruments ? en $z = L$?

iv) Représenter la surpression à l'intérieur du tuyau pour les deux premiers modes de chacun des instruments.

v) Expliquer le rôle du *trou de registre* situé à la distance $L/3$ (environ) de l'extrémité $z = 0$ de la clarinette.

b) Déterminer la longueur approximative d'une flûte dont le fondamental est un mi de fréquence 330 Hz.

c) À longueur égale, quel instrument, flûte ou clarinette, produit le son le plus grave ? Comparer le timbre (c'est-à-dire les différents harmoniques émis) des deux instruments.

d) Comment évoluent les fréquences propres d'un instrument à vent quand la température augmente ? et celles d'un instrument à corde ?

4. Prise en compte de l'impédance de rayonnement

En réalité, une extrémité ouverte ne se comporte pas comme une impédance nulle. Il faut tenir compte de l'onde sonore rayonnée vers l'extérieur.

a) Justifier qualitativement ceci en exprimant la puissance sonore transmise à l'extrémité de l'instrument vers l'air extérieur.

On étudie le cas d'un tuyau à section circulaire de rayon a. On suppose pour simplifier (et à peu près en accord avec les observations expérimentales) que l'onde rayonnée vers l'extérieur est sphérique. L'extrémité du tuyau se comporte en fait comme une source hémisphérique de rayon a.

b) On donne le laplacien d'une fonction $f(r,t)$ en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}$$

Quelle est alors la forme générale de la surpression dans l'air ?

Dans la suite, on ne considérera que des ondes sphériques harmoniques et on écrira la surpression sous la forme :

$$\underline{p}_1(r,t) = \frac{A}{r}\exp\bigl(j(\omega t - kr)\bigr)$$

c) En déduire l'expression du champ des vitesses puis celle de l'impédance acoustique $\underline{Z}_a$ en $r = a$, appelée *impédance de rayonnement*. Dans l'expression de l'impédance acoustique $\underline{Z}_a$, on prendra pour aire celle de la source, c'est-à-dire l'aire de la demi-sphère de rayon a.

d) Déterminer la puissance moyenne rayonnée par le tuyau vers l'extérieur.

e) On suppose $ka \ll 1$. Quelle est la signification concrète de cette hypothèse ?

Donner l'expression de $\underline{Z}_a$ successivement à l'ordre 0, 1 puis 2 en ka, et commenter les résultats obtenus. Pourquoi faut-il pousser le développement à l'ordre 2 ?

5. Application au son émis par une flûte.

On s'intéresse dans cette question au fonctionnement d'une flûte dont l'extrémité $z = 0$ correspond à une impédance nulle et l'extrémité $z = L$ à une impédance de rayonnement $\underline{Z}_a = Z_c(R + jX)$ où Z_c est l'impédance caractéristique du tuyau et R et X des réels sans dimension, dépendant de k et de a.

Par exemple, dans le cadre du modèle de la question précédente avec $ka \ll 1$, $R = \frac{1}{2}(ka)^2$ et $X = \frac{1}{2}ka$. Des modèles plus réalistes donnent $X = \alpha ka$ avec α variant de $0,61$ à $0,85$ selon le modèle.

On fera les hypothèses simplificatrices suivantes :

- $ka \ll 1$,
- X est proportionnel à ka (on prendra $X = \alpha ka$),
- R est proportionnel à $(ka)^2$,
- les fréquences propres du tuyau sont peu différentes de celles que l'on obtient dans le cas où on suppose $\underline{Z}_L = 0$ donc $\tan(kL) \ll 1$.

a) En utilisant la relation (5), déterminer l'expression de l'impédance acoustique en $z = 0$ en fonction de Z_c, R, X et $\tan(kL)$. La simplifier compte tenu des hypothèses ci-dessus.

b) Montrer que les nouvelles fréquences propres vérifient la relation :

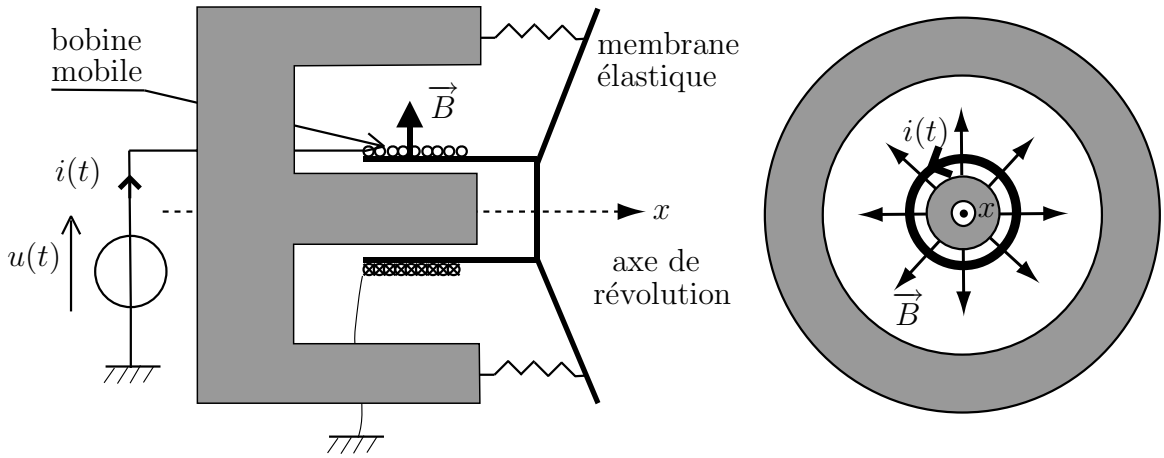
$$\tan(kL) = -\alpha ka$$

c) Par une étude graphique, montrer que les fréquences propres sont légèrement inférieures à celle qu'on obtient en considérant $\underline{Z}_L = 0$ (tuyau idéal). Expliquer pourquoi on peut ramener l'étude à celle d'un tuyau idéal à condition de remplacer la longueur L de celui-ci par une longueur $L + \Delta$ où $\Delta \simeq \alpha a$.

Quatrième partie

Restitution du son - Haut-parleur

Un haut-parleur électrodynamique peut être schématisé de la façon suivante :



Vue de côté Vue de face

Il est constitué :

- d'un aimant annulaire d'axe Ox, créant un champ magnétique radial permanent $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_r}$ de norme quasiment uniforme B dans la région utile de l'entrefer ;
- d'une bobine indéformable de même axe Ox comportant N spires de rayon a, placée dans l'entrefer de l'aimant ;
- d'une membrane $\mathcal{M}$ perpendiculaire à l'axe et pouvant effectuer de faibles déplacements axiaux autour de sa position d'équilibre, grâce à un système élastique modélisé par un ressort unique de raideur k.

L'ensemble mobile {bobine + membrane}, de masse m, repéré par l'abscisse $x(t)$, est de plus soumis à une force de frottement visqueux de la part de l'air de la forme $\overrightarrow{F} = -f\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x}$, essentiellement due à l'onde sonore rayonnée par le haut-parleur.

La bobine a une résistance R et une inductance L.

A. Équations du mouvement

1. Expliquer qualitativement le fonctionnement du dispositif.

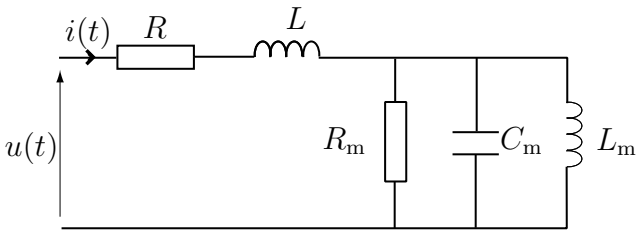
2. Établir l'équation mécanique du système en choisissant l'origine de l'axe (Ox) au niveau de la position d'équilibre lorsque la bobine n'est parcourue par aucun courant.

3. Le haut parleur est connecté à une source de tension parfaite délivrant la tension $u(t)$. Établir l'équation électrique du système.

B. Impédance du haut-parleur

La tension $u(t)$ est sinusoïdale : $u(t) = U_0\cos(\omega t)$.

1. a) Écrire l'équation électrique et l'équation mécanique en notation complexe.
En déduire que le schéma électrique équivalent du haut-parleur est :



Établir les expressions de R_m, C_m et L_m en fonction de N, a, B, f, k et m.

b) Calculer les valeurs numériques de R_m, C_m et L_m pour un haut-parleur tel que :

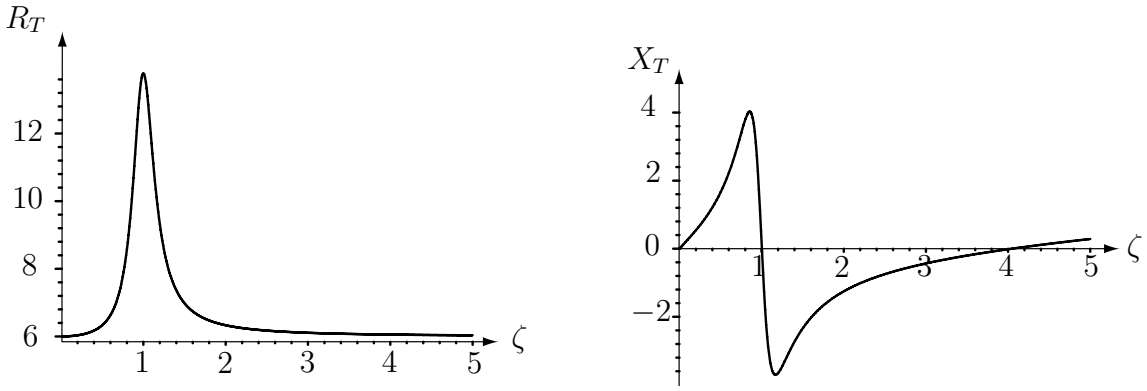
$$m = 3,85 \text{ g}, \quad k = 1200 \text{ N.m}^{-1}, \quad 2\pi NaB = 2,3 \text{ T.m}, \quad f = 0,68 \text{ kg.s}^{-1}.$$

2. Proposer un montage permettant d'étudier expérimentalement l'impédance $\underline{Z}$ du haut-parleur en fonction de la fréquence délivrée par le générateur.

3. On pose $\underline{Z} = R_T + jX_T$ où $j^2 = -1$.

a) Donner l'expression de $R_T(\omega)$ et $X_T(\omega)$ en fonction de R, R_m, C_m, L_m et ω.

b) On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\zeta = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Les courbes $R_T(\zeta)$ et $X_T(\zeta)$ pour le haut-parleur précédent ont l'allure suivante :



Il s'agit d'une simulation informatique pour laquelle, outre les valeurs numériques précédentes, on a pris : $R = 6\ \Omega$ et $L = 0,285$ mH.

Commenter ces courbes en précisant en particulier le comportement en très basse fréquence et en très haute fréquence et en étudiant les éventuelles résonances.

C. Rendement énergétique

1. Écrire l'énergie mécanique E_m du haut-parleur et l'énergie E_L de la bobine puis effectuer un bilan énergétique détaillé du dispositif.

2. Expliquer le rôle du champ magnétique dans le transfert de puissance.

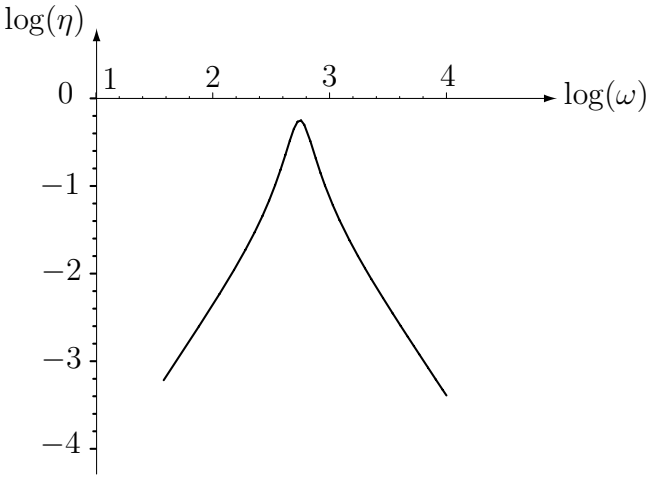
3. **a)** En régime sinusoïdal, comment se répartit la puissance moyenne fournie par le générateur ?

b) Définir alors le rendement η du haut-parleur et l'exprimer en fonction de R et R_T uniquement.

c) Pour le haut-parleur étudié ci-dessus dont les caractéristiques numériques sont données aux questions **B.**1b et **B.**3b, on donne la courbe $\eta(\omega)$ en échelle logarithmique (voir page suivante).

Commenter. Pour quelle fréquence le rendement est-il maximal ? Est-ce en accord avec les valeurs numériques précédentes ?

Dans quelle gamme de fréquence l'utilisation du haut-parleur est-elle intéressante ? Expliquer pourquoi les enceintes acoustiques comportent plusieurs haut-parleurs.



D. Onde acoustique rayonnée

1. On fait dans un premier temps l'hypothèse que l'onde acoustique émise par le haut-parleur est une onde plane progressive harmonique. D'autre part, la force exercée par l'air sur la membrane s'écrit $\overrightarrow{F} = -Sp\overrightarrow{e_x}$ où S est l'aire de la membrane et p la surpression. Dans cette étude, nous ne considérons que la surpression associée à l'onde émise par le haut-parleur du côté des x positifs.

En déduire l'expression du coefficient f en fonction de la célérité c des ondes sonores dans l'air, de la masse volumique de l'air μ_0 et de l'aire de la membrane S. En déduire un ordre de grandeur de S. Commenter.

2. La membrane du haut-parleur est assimilée à un disque de rayon a, d'axe Oz. On suppose que l'ensemble des points de la membrane vibrent en phase, avec la vitesse $v_0 \exp(j\omega t)$.

a) Quelle condition sur la taille de la membrane suppose cette hypothèse ?

b) On admet que chaque surface élémentaire $\mathrm{d}S_P$ autour d'un point P de la membrane se comporte comme une source élémentaire émettant une onde sonore dont la surpression en un point M de l'espace est :

$$\underline{\mathrm{d}p}_P(M,t) = \frac{j\omega\mu_0 v_0}{2\pi PM} \exp\left[j\omega\left(t - \frac{PM}{c}\right)\right] \mathrm{d}S_P \qquad (6)$$

et que la surpression au point M est obtenue en sommant les surpressions émises par ces sources élémentaires. Dans l'expression (6), μ_0 est la masse volumique de l'air.

Établir l'expression de la surpression en un point $M(0,0,x)$ de l'axe du haut-parleur en fonction de μ_0, c, v_0, $k = \omega/c$, a et x.

c) i) Déterminer, en fonction de a et de λ (longueur d'onde des ondes émises), la position des points sur l'axe où le module de la surpression est maximal puis celle des points où il est minimal. Interpréter les résultats obtenus.

ii) À quelle condition sur a n'y a-t-il aucun extremum du module de la surpression sur l'axe ? Cette condition est-elle vérifiée en pratique ?

d) Que devient l'expression de $p(M,t)$ loin du haut-parleur ? Commenter.

e) Que devient l'expression de $p(M,t)$ au niveau du haut-parleur ? Commenter.

Fin