
SISMOLOGIE ET STRUCTURE INTERNE DE LA TERRE

Partie I : Les ondes sismiques de volume

- 1) Il s'agit d'une force de rappel élastique, s'opposant à l'étirement du milieu.
 Cette loi de force phénoménologique est linéaire, il s'agit du premier terme non nul du développement général de la force en fonction de la déformation. Cette approximation linéaire n'est justifiée que pour de faibles écarts à l'équilibre.
 λ et μ ont la dimension d'une force surfacique (pression), exprimée en Pa ou N.m^{-2} ou $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$.

- 2) L'onde plane ne dépendant que de x , des forces ne sont exercées que sur les faces normales à $\vec{e}_x$:

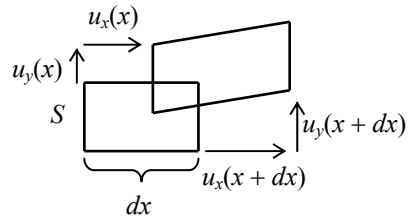
$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \left[-(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} \vec{e}_x - \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \vec{e}_y \right]_x dydz - \left[-(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} \vec{e}_x - \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \vec{e}_y \right]_{x+dx} dydz \\ &= \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \vec{e}_x + \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \vec{e}_y \right] dx dydz \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{f}_v = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \vec{e}_x + \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \vec{e}_y$$

- 3) Soit un volume élémentaire de section S , de longueur dx au repos. Puisque u_y ne dépend ni de y ni de z , sa section S est conservée une fois l'élément déformé, et le volume peut être calculé comme s'il s'agissait d'un cylindre d'axe x :

$$S(dx + u_x(x+dx) - u_x(x)) = Sdx(1 + \partial u_x / \partial x).$$



La conservation de la masse de ce système fermé donne alors : $dm = \rho_0 S dx = \rho S dx (1 + \partial u_x / \partial x)$.

D'où le résultat, après développement limité, au premier ordre par rapport aux déformations.

Ce calcul nécessite de faibles déformations, avec $\partial u_x / \partial x \ll 1$, soit en ordre de grandeur : $\Lambda \gg \lambda$.

- 4) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule solide donne : $dm \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = d\vec{F}$.

D'où selon les deux axes :

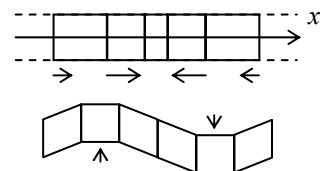
$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \left(\frac{\mu}{\rho_0} \right) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0.$$

Et les célérités des ondes P et S ($c_P > c_S$) :

$$c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho_0} \quad \text{et} \quad c_S = \sqrt{\mu / \rho_0}.$$

- 5) La déformation longitudinale u_x , s'effectue avec compression des particules solides ; il s'agit de l'onde sonore existant dans les fluides.

La déformation transversale u_y , s'effectue sans compression ; sa propagation de proche en proche s'effectue par des contraintes de cisaillement sur les particules solides.



Dans un liquide, les contraintes transversales n'existent pas en statique, elles nécessitent des gradients de vitesse. De telles ondes de cisaillement ne peuvent alors exister dans un liquide.

- 6) Dans un milieu homogène la propagation est rectiligne : $D = c_P (t_P - t_0) = c_S (t_S - t_0)$ avec $\Delta t = t_S - t_P$.

$$D = \Delta t \frac{c_S c_P}{c_P - c_S}$$

7) A.N. $D = 882 \text{ km}$.

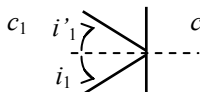
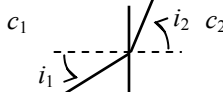
La mesure de D à 1 km près nécessite celle de Δt avec la même précision relative (0,11%) : à 80 ms près. Mais la connaissance des vitesses est bien plus grossière ($> 1\%$), c'est elle qui limite la précision.

8) Les longueurs d'onde, $\Lambda = cT$, sont comprises entre quelques kilomètres et quelques milliers de kilomètres. Les déformations étant inférieures ou de l'ordre de la dizaine de mètres, l'approximation des faibles déformations est justifiée.

Partie II : La théorie des rais

1) Le comportement d'ondes est essentiellement géométrique si leur longueur d'onde est très inférieure aux distances caractéristiques L du milieu. Des phénomènes de diffraction ou d'interférence ne pourront être décrits par la théorie des rais.

Au sein de la Terre, L est de l'ordre du millier de kilomètre. Avec une célérité de l'ordre de 10 km.s^{-1} , $\Lambda \ll L$ se traduit par $f \gg 0,01 \text{ Hz}$ c'est-à-dire une période bien inférieure à 100 s. Mais au voisinage de la surface de la Terre, L est de l'ordre de 10 à 100 km, cette approximation nécessite : $f \gg 0,1 \text{ Hz}$.

2) Réflexion : $\boxed{\sin i_1 = -\sin i'_1}$  Réfraction : $\boxed{\frac{\sin i_1}{c_1} = \frac{\sin i_2}{c_2}}$ 

Détermination de l'épaisseur de la croûte terrestre par réfraction sismique

3) L'onde P_n est réfractée dans le milieu 2 avec un angle $i_2 = \pi/2$, correspondant à la limite de la réflexion totale, permettant la propagation le long de la surface dans ce milieu et d'émerger en partie en K.

Alors : $\sin(\pi/2 - \theta) / c_1 = 1 / c_2 \Rightarrow \boxed{\theta = \text{Arc cos}(c_1 / c_2)}$.

Et d'après la construction géométrique, on a D_c pour $J = K$: $\boxed{D_c = 2H / \tan \theta = \frac{2Hc_1}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}}$.

4) $\boxed{\Delta t(P_g) = D / c_1}$ $\boxed{\Delta t(P_M P) = \frac{\sqrt{4H^2 + D^2}}{c_1}}$ $\boxed{\Delta t(P_n) = \frac{2H}{c_1 \sin \theta} + \frac{D - D_c}{c_2} = \frac{D}{c_2} + \frac{2H}{c_1 c_2} \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$

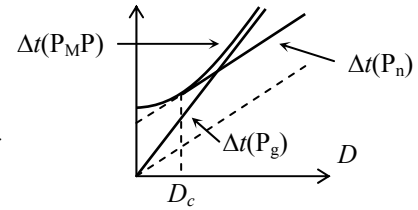
Pour $D = D_c$, l'onde P_n émerge immédiatement, elle s'identifie à $P_M P$; on vérifie $\Delta t(P_M P) = \Delta t(P_n)$.

5) En $D = 0$: $\Delta t(P_g) = 0$; $\Delta t(P_M P) = 2H / c_1$

$$\Delta t(P_n) = 2H / c_1 \sqrt{1 - c_1^2 / c_2^2} < 2H / c_1 \text{ (non réalisé).}$$

Pour $D \rightarrow \infty$, $\Delta t(P_g) = D / c_1$; $\Delta t(P_M P) \approx D / c_1$; $\Delta t(P_n) \approx D / c_2$.

En $D = D_c$: $\Delta t(P_g) = D_c / c_1$; $\Delta t(P_M P) = \Delta t(P_n)$.

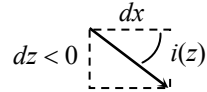


6) D_i correspond à l'intersection des hodochrones $\Delta t(P_g)$ et $\Delta t(P_n)$. D'où : $D_i = 2H \sqrt{\frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}}$.

A.N. $c_1 = D_i / \Delta t_i = 6,52 \text{ km.s}^{-1}$ et $c_2 = D_i / (\Delta t_i - \Delta t_0) = 8,33 \text{ km.s}^{-1}$. Et $H = \frac{D_i}{2} \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}} = 26,2 \text{ km}$.

Modèle plus réaliste d'un gradient de célérité

7) Pour une variation continue de la célérité, la loi de Descartes s'écrit : $\cos i(z) / c(z) = \text{cste} = \cos i_0 / c_{10}$.

Or, $\cos i(z) = dx / \sqrt{dx^2 + dz^2} \Rightarrow dx = -dz \frac{\cos i(z)}{\sqrt{1 - \cos^2 i(z)}}$ d'où le résultat. 

8) $x = -\int_0^z \frac{1}{k \cos i_0} \frac{d[1 - (1 - kz)^2 \cos^2 i_0]}{\sqrt{1 - (1 - kz)^2 \cos^2 i_0}} \Rightarrow (k \cos i_0) x = \sin i_0 - \sqrt{1 - (1 - kz)^2 \cos^2 i_0}$.

Et finalement :
$$\left[x - \frac{\tan i_0}{k} \right]^2 + \left[z - \frac{1}{k} \right]^2 = \frac{1}{k^2 \cos^2 i_0}.$$

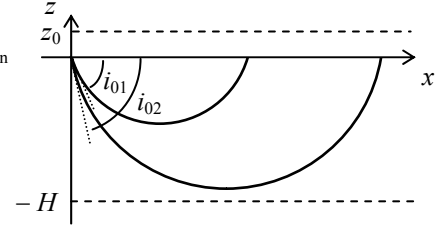
Il s'agit bien de cercles de rayon : $R = 1 / k \cos i_0$, centrés en $(x_0 = \tan i_0 / k, z_0 = 1 / k)$.
Cas limite du milieu homogène : $k = 0, R \rightarrow \infty$, on retrouve la trajectoire rectiligne.

9) $R(i_{01}) < R(i_{02}), x_{01} < x_{02}$ et $z_{01} = z_{02} > 0$.

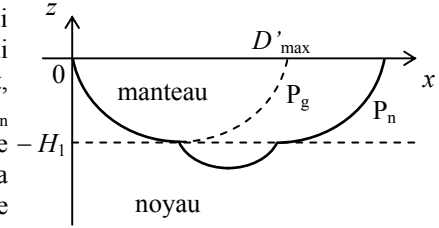
10) Si le rai atteint $z = -H$, il est réfracté dans le manteau. Or, $z_{\min}$ est obtenu en $x = x_0$, et $D_{\max} = x(z = 0)$ lorsque $z_{\min} = -H$.

$$z_{\min} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{\cos i_0} \right) \quad \text{et} \quad D_{\max} = 2 \frac{\tan i_0}{k}.$$

Finalement :
$$D_{\max} = 2H \sqrt{1 + 2 / kH}.$$



11) Le comportement d'un rai dans le manteau est similaire à celui étudié précédemment dans la croûte. À l'incidence limite lui faisant atteindre le noyau, il est réfracté dans celui-ci. En effet, avec $c_1(-H_1) > c_2(-H_1)$, on a $i_1(=0) < i_2$ à l'interface. Le rai P_n décrit alors un arc de cercle dans le noyau et ressort dans le manteau plus loin, avec un angle nul, comme pour P_g . Alors, la distance horizontale parcourue par P_n est la même que P_g dans le manteau augmentée de la distance parcourue dans le noyau.



12) Comme il a été dit au I)5), les ondes S, dites de cisaillement, ne peuvent exister dans un liquide. Leur absence dans le noyau externe (Figure 2) met en évidence sa nature liquide, alors que la graine et le manteau peuvent être considérés solides.

Partie III : Les ondes sismiques de surface

1) En $z = 0$, la surface de la Terre est libre, elle ne subit aucune contrainte : $\mu_1 \partial \underline{u}_1 / \partial z = 0$.
En $z = -H$, l'adhérence des deux milieux fournit la continuité de la déformation et le principe des actions mutuelles entre les deux couches fournit la continuité de la contrainte : $\underline{u}_1 = \underline{u}_2$ et $\mu_1 \partial \underline{u}_1 / \partial z = \mu_2 \partial \underline{u}_2 / \partial z$.
À grande profondeur, l'onde de surface n'est plus présente : $\underline{u} \rightarrow 0$ (la contrainte également).

2) En remplaçant la solution proposée dans l'équation, on obtient l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f}(z)$:

$$\underline{f}_i''(z) + q_i^2 \underline{f}_i(z) = 0 \quad \text{avec} \quad q_i = \omega \frac{\sqrt{c^2 - c_i^2}}{c c_i} \quad \text{d'où} \quad \underline{u}_i = [A_i e^{-jq_i z} + B_i e^{jq_i z}] e^{j\omega(t-x/c)}$$

Or $\underline{u}_2 \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow -\infty$; ceci impose q_2 imaginaire donc : $c < c_2$, $k_2 = \omega \sqrt{1/c^2 - 1/c_2^2}$ et $B_2 = 0$.

$$k_1 = \omega \sqrt{1/c_1^2 - 1/c^2} \quad \text{et admettre } k_1 \text{ réel positif fournit : } c_1 < c.$$

3) En $z = 0$: $A_1 = B_1$. En $z = -H$: $A_1 2 \cos(k_1 H) = A_2 e^{-k_2 H}$ et $\mu_1 A_1 2k_1 \sin(k_1 H) = \mu_2 A_2 k_2 e^{-k_2 H}$.

Des deux dernières relation on tire immédiatement la relation demandée :
$$\tan(k_1 H) = \frac{\mu_2 k_2}{\mu_1 k_1}.$$

4) Cette dernière relation lie c et k :
$$\tan \left(kH \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \right) = \frac{\mu_2 c_1}{\mu_1 c_2} \sqrt{\frac{c_2^2 - c^2}{c^2 - c_1^2}}$$

5) D'après cette relation, à une valeur de c correspond plusieurs valeurs de k par périodicité de la fonction tangente. Ainsi il existe plusieurs solutions $c = f_n(k)$ correspondant chacune à un mode de propagation. Le mode n correspond à un argument de la tangente compris entre $n\pi$ et $(n + 1/2)\pi$. $k_{\min n}$ est obtenu pour une tangente nulle donc pour $c = c_2$. Alors :

$$\frac{k_{\min n} H \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}{c_1} = n\pi \quad \Rightarrow \quad k_{\min n} = n \frac{\pi c_1}{H \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$$

- 6) Pour le mode fondamental $n = 0$, $\Lambda \rightarrow 0$ correspond à une onde de surface ne prenant des amplitudes notables que dans la croûte, ce qui est en accord avec une célérité tendant vers c_1 pour $k \rightarrow \infty$. De même, $\Lambda \rightarrow \infty$ correspond à une onde de surface s'étendant très largement dans le manteau, ce qui est en accord avec une célérité tendant vers c_2 pour $k \rightarrow 0$.
- 7) $k_{\min n} = n.1,9.10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Connaissant l'ordre de grandeur de la vitesse de phase, $c \approx 4 \text{ km.s}^{-1}$, on en déduit celui de k connaissant T : $k = 2\pi / cT$. D'où pour $T > 10 \text{ s}$, $k < 1,6.10^{-4} \text{ m}^{-1} < k_{\min 1}$. Seul le mode fondamental est présent à ces fréquences.

$$8) \quad \boxed{V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}}$$

- 9) Les périodes mesurables sur cet enregistrement vont de 40 s à moins de 20 s : correspond à $k < k_{\min 1}$. On constate que les faibles fréquences sont détectées avant les hautes, elles arrivent les premières, elles sont plus rapides. Ceci est bien en accord avec une diminution de la vitesse avec k (k varie dans le même sens que ω , car c varie peu dans le domaine considéré). Aussi bien pour la vitesse de phase c que la vitesse V_g . Plus précisément, un signal non sinusoïdal (de spectre étroit) se propage à la vitesse de groupe. Ici, c'est chaque pic d'amplitude qui se déplace à la vitesse de groupe (méthode de la phase stationnaire). Ce que l'on observe est la diminution de la vitesse de groupe avec la fréquence.

$$10) \text{ Pour } k \rightarrow 0 \text{ et } n = 0, c \rightarrow c_2. \text{ Alors : } \tan \left(kH \sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1} \right) \approx kH \sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1} \approx \frac{\mu_2 c_1}{\mu_1 c_2} \sqrt{\frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2^2 - c_1^2}}$$

$$c(k)^2 \approx c_2^2 - \left(kH \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{c_1} \frac{\mu_1 c_2}{\mu_2 c_1} \right)^2 \text{ et finalement : } \boxed{c(k) \approx c_2 \left(1 - \frac{k^2}{2} \left(H \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_1^2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 \right)}$$

- 11) L'application de la formule établie au 8) donne immédiatement le résultat.
- 12) La croissance de V_g avec T , est en accord avec la diminution de V_g avec k . La vitesse c_2 est atteinte lorsque k est suffisamment petit, ou T suffisamment grande, d'autant plus que H est grand. En supposant que dans les deux cas μ_1, μ_2, c_1 et c_2 sont identiques, l'obtention de c_2 pour des périodes plus faibles sous les océans, montre que l'épaisseur de la croûte est plus faible sous les océans qu'au niveau des continents.

Partie IV : Les oscillations libres de la Terre

- 1) Une analyse dimensionnelle donne : $f \approx c / R_T$ d'où : $f \approx 6000 \text{ m.s}^{-1} / 6000 \text{ km} \approx 10^{-3} \text{ Hz}$.
- 2) En remplaçant la solution dans l'équation : $\frac{1}{rR(r)} \frac{\partial^2 rR(r)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2 H(t)} \frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2}$ égalité de deux fonctions indépendantes donnant une constante C . La non divergence de $H(t)$ nécessite alors $C < 0$, soit $C = -K^2$.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + (Kc)^2 H = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 rR}{\partial r^2} + K^2 rR = 0$$

On a des solutions sinusoïdales pour $H(t)$ et $rR(r)$, d'où la forme proposée pour ϕ , avec $K^2 c^2 = \omega^2$.

- 3) La relation de dispersion a été obtenue : $K = \pm \omega / c$. Les conditions aux limites sont :
- $P = 0$ à la surface libre, en $r = a$, donc $\phi(r = a) = 0$
 - La non divergence des grandeurs en $r = 0$

La seconde impose $A = 0$. Et la première donne alors $\sin(\omega a / c) = 0$, d'où : $\boxed{\omega_n = n \frac{\pi c}{a}}$

- 4) Un séisme provoque une excitation impulsionnelle de la Terre (durée très courte devant les périodes caractéristiques de ces modes, donc excitation avec un spectre très large en fréquence). À la suite de celle-ci, la Terre évolue en régime libre, cette évolution étant une combinaison linéaire des différents modes propres. Le spectre de ce comportement libre fournit donc les fréquences propres du système. L'obtention d'une fréquence nécessite l'acquisition du signal sur une durée au moins de l'ordre de la période correspondante. Pour des périodes de l'ordre de $1 / f \approx 1000 \text{ s}$, il faut effectuer une acquisition sur plusieurs heures.

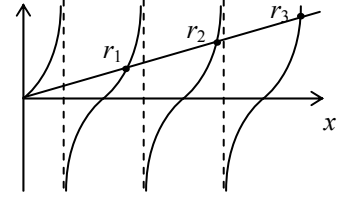
$$5) \quad \phi_n(r, t) = \frac{B_n}{r} \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \Rightarrow u_n(r, t) = \frac{B_n}{r} \left[\frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi r}{a}\right) - \frac{1}{r} \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) \right] \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

Les nœuds correspondent à $u_n = 0 \quad \forall t$, solutions de : $\tan x = x$ avec $x = n\pi r / a$. Les points d'intersection vérifiant à $r < a$ sont les nœuds.

La $n^{\text{ième}}$ solution est obtenue pour : $n\pi < x$, c'est à dire $r > a$.

La $(n-1)^{\text{ième}}$ solution est obtenue pour : $n\pi > x$, c'est à dire $r < a$.

Il y a donc n nœuds pour le mode n si on compte $r = 0$.



- 6) Une modification de la vitesse des ondes au rayon r aura essentiellement une influence sur les modes de vibration présentant un ventre à ce niveau (inversement, les caractéristique de la Terre au niveau d'un nœud n'ont aucune influence sur la fréquence de vibration du mode correspondant). Ainsi, les fréquences propres obtenues pour les différents modes, décalées par rapport au modèle de la Terre homogène, nous renseignent sur les caractéristiques de la Terre à différentes échelles de profondeur.

Partie V : La correction gravitationnelle

- 1) Soit un point M. Tout plan contenant l'axe Mx est plan de symétrie pour la distribution $\rho_1(x, t)$, donc $\vec{g}_1(x, t)$ appartient à leur intersection, $\vec{g}_1(x, t)$ est selon e_x . L'analogie électrostatique avec l'équation de Maxwell-Gauss donne : $\text{div } \vec{g}_1 = -4\pi G \rho_1 \Rightarrow \partial g_1 / \partial x = -4\pi G \rho_1$
- 2) Nous avons établi dans la partie I : $\rho = \rho_0 (1 - \partial u_x / \partial x)$. D'où : $\rho_1 = -\rho_0 \partial u_x / \partial x$
- 3) $\vec{g}_1(x, t)$ n'ayant pas de composante selon $\vec{e}_y$, l'équation d'onde de cisaillement n'est pas modifiée.

Les contraintes élastiques gardant la même forme, avec la force volumique $\rho_0 \vec{g}_1(x, t)$ supplémentaire :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = g_1 \quad \text{et} \quad \partial g_1 / \partial x = 4\pi G \rho_0 \partial u_x / \partial x \Rightarrow g_1 = 4\pi G \rho_0 u_x \quad (\text{cste} = 0 \text{ car } < g_1 > = 0)$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 4\pi G \rho_0 u_x$$

- 4) Pour l'onde de compression, la relation de dispersion est : $c_{P0}^2 k^2 = 4\pi \rho_0 G + \omega^2$ où c_{P0} est la vitesse de phase sans correction gravitationnelle. La correction étant faible, on développe au premier ordre :

$$\omega = kc_{P0} \left(1 - \frac{2\pi \rho_0 G}{c_{P0}^2 k^2} \right) \Rightarrow c_P = c_{P0} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\Lambda_G^2} \right) \quad \text{avec} \quad \Lambda_G = c_{P0} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho_0 G}}$$

La vitesse des ondes de cisaillement est par contre inchangée.

- 5) Avec $c_{P0} \approx 6 \text{ km.s}^{-1}$, $\Lambda_G \approx 25000 \text{ km}$.
- 6) La théorie des rais est une théorie géométrique, valable dans le cadre des faibles longueurs d'onde (au moins devant la taille de la Terre), la correction gravitationnelle n'a pas lieu d'être considérée.
- Les ondes de surface ont des longueurs d'onde de l'ordre de l'épaisseur de la croûte terrestre, négligeables devant Λ_G . La correction gravitationnelle est inutile.
- Les oscillations libres de la Terre font intervenir des longueurs d'onde de l'ordre de la taille de la Terre, qui ne sont pas négligeables devant Λ_G . La correction gravitationnelle doit être prise en compte.

FIN