

ONDES DE RAYLEIGH

L. SCHOEFFEL

laboratoire Aimé-Cotton, Orsay

J.-P. SCHOEFFEL

laboratoire de physique des solides, Orsay

Introduction

On va s'intéresser dans cet article aux ondes de surface qui se propagent à la surface de la terre après un séisme, ou un violent ébranlement en un point donné. Ce sont des ondes guidées à la surface de la terre, progressives dans la direction horizontale et stationnaires dans la direction verticale. Elles se propagent à partir de l'épicentre du séisme et, pour certaines grandes longueurs d'onde, finissent par faire plusieurs fois le tour de la terre avec la possibilité d'exciter les modes propres de la croûte terrestre.

Ces ondes de surfaces sont communément appelées ondes de Rayleigh ou ondes de Love. On va se limiter, ici, à l'étude du cas de Rayleigh, le plus simple, qui consiste en la propagation d'une onde de surface à travers un demi-espace élastique, homogène et isotrope. On déduira de cette analyse la profondeur de pénétration de l'onde en fonction de sa longueur d'onde, la déformation du sol qui en résulte et on indiquera comment traiter le cas des ondes de grandes périodes où la sphéricité de la terre doit intervenir, ainsi que les conditions qui traduisent la propagation guidée dans un corps de dimensions géométriques finies.

I. Rappels et définitions sur les milieux élastiques

Dans notre problème la terre sera considérée comme un milieu déformable et élastique. On rappelle donc, à cet effet, les principales définitions concernant un tel corps.

On introduit le champ des déformations ou des déplacements $\mathbf{u}(x, y, z, t)$, déplacement d'une particule du corps considéré en un point de coordonnées x, y, z et à l'instant t . De plus un mouvement sismique $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ produit une déformation et on peut définir le tenseur des déformations comme suit :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

Toute déformation entraînant une contrainte dans un milieu élastique, on définit alors le tenseur des contraintes T_{ij} qui, dans le corps étudié, représente la j -ième composante de la force exercée par la partie positive de l'espace sur une surface plane d'aire unité normale à l'axe Ox_i de notre repère :

$$T_{ij} = \lambda \alpha \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2)$$

$$\alpha = \text{div } \mathbf{u}$$

Les paramètres élastiques λ et μ sont appelés paramètres de Lamé, δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et l'expression ci-dessus est un cas particulier, pour les composés élastiques homogènes, de la loi de Hooke. Par exemple, dans un fluide parfait la contrainte est normale à toute surface plane élémentaire (il n'y a pas de force de cisaillement) et les seules composantes non nulles du tenseur sont les T_{ii} . De la définition précédente, il résulte en particulier que le tenseur des contraintes s'exprime en unité de pression (N/m^2) ; l'ordre de grandeur de λ et μ est le mégabar pour les roches constituant l'écorce terrestre. De plus dans le cas de la croûte terrestre qui nous intéresse essentiellement ici, on a pratiquement l'égalité entre λ et μ et on supposera pour les calculs : $\lambda = \mu$.

On donne enfin l'équation que doit vérifier tout mouvement élastique dans le milieu étudié : l'équation fondamentale de la dynamique pour un élément de masse ρdV conduit à l'équation de Navier-Stokes, déduite en utilisant l'expression de la force issue du tenseur des contraintes (2).

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} \quad (3)$$

II. L'onde de Rayleigh

1. Position du problème

Considérons un demi-espace élastique, homogène et isotrope que l'on rapporte à un système d'axes cartésiens Ox, Oy, Oz , l'axe Oz est aligné suivant la verticale du milieu et dirigé vers l'intérieur du milieu. Essentiellement, le milieu qui nous intéresse est la terre. Ox est alors la direction de déplacement de l'onde et l'axe Oz est dirigé vers l'intérieur de la terre.

Alors on exprime le mouvement sismique $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ comme somme d'un gradient et d'un rotationnel ; c'est toujours possible (théorème de Helmholtz) :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \text{grad } f(x, y, z, t) + \text{rot } \mathbf{g}(x, y, z, t)$$

Pour les solutions se propageant suivant Ox et stationnaires en Oz on cherche des fonctions de la forme :

$$f = A \exp(rz) \exp[i(kx - \omega t)]$$

$$\mathbf{g} = B \exp(sz) \exp[i(kx - \omega t)] \mathbf{y}$$

avec $\mathbf{y}$ vecteur unitaire de Oy , r et s décrivant l'atténuation en profondeur. Les vecteurs sont notés en gras et on utilise la notation complexe : A et B sont les

amplitudes complexes des ondes f et g . De plus on note f et g pour $f(x, y, z, t)$ et $g(x, y, z, t)$, on gardera cette convention par la suite.

On définit la vitesse de phase V par la relation :

$$V = \omega / k$$

On trouve alors l'expression de $u(x, y, z, t)$:

$$u_x = [ikA \exp(rz) - sB \exp(sz)] \exp[i(kx - \omega t)]$$

$$u_y = 0$$

$$u_z = [rA \exp(rz) - ikB \exp(sz)] \exp[i(kx - \omega t)]$$

L'application de l'équation de Navier-Stokes à $u(x, y, z, t)$, avec f et g donnés ci-dessus conduit aux deux équations de propagation pour f et g :

$$\Delta g = \frac{1}{c_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} g \right) \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{1}{c_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} f \right)$$

où c_1 et c_2 valent :

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

On donne en annexe une preuve de ces relations.

Il est important de rappeler ici que dans le cas de la terre, λ est pratiquement égal à μ donc c_1 est pratiquement égal à $\sqrt{3}c_2$.

On déduit des équations pour f et g les relations de dispersion :

$$r^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_1^2} \quad s^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_2^2}$$

2. Conditions aux limites

1- On s'intéresse à des ondes de surface donc, dans les expressions de $u(x, y, z, t)$ ci-dessus il faut imposer en plus la condition au limite suivante : $u(x, y, z, t)$ tend vers zéro quand z tend vers l'infini, c'est à dire, avec nos conventions sur l'orientation de Oz , quand on s'enfonce de plus en plus dans la terre. C'est ce qu'on attend pour une onde de surface qui ne doit pas ou peu affecter les couches profondes de l'écorce terrestre. Il en résulte que, nécessairement r et s sont non nuls et négatifs.

2- La surface du sol (du demi-espace) est une surface libre donc, en négligeant la résistance de l'air, la force qui s'exerce sur le plan $z = 0$ doit être prise

égale à zéro. C'est à dire que les trois composantes T_{zx}, T_{zy}, T_{zz} , calculés avec les formules de la première partie, sont nulles en $z = 0$.

2. Résolution et calcul de la vitesse de phase

Les éléments du tenseur des contraintes prennent la forme suivante :

$$T_{zx} = \mu \left[2ikrA \exp(rz) - (k^2 + s^2)B \exp(sz) \right] \exp[i(kx - \omega t)]$$

$$T_{zy} = 0$$

$$T_{zz} = \left[(\lambda(r^2 - k^2) + 2\mu r^2)A \exp(rz) + 2ik\mu B \exp(sz) \right] \exp[i(kx - \omega t)]$$

La nullité de ces éléments en $z=0$ conduit à un système de deux équations à deux inconnues (A et B) qui n'a de solution non triviale que si son déterminant est nul ; ce qui donne :

$$4k^2 rs = (k^2 + s^2) \left(\frac{\lambda}{\mu} (r^2 - k^2) + 2r^2 \right)$$

Avec les relations de dispersions qu'on a trouvées plus haut, on peut transformer la relation ci-dessus pour obtenir :

$$4k^2 \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} = \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right)^2$$

Dans le cas $\lambda = \mu$, ce qui correspond comme on l'a déjà souligné à la situation pour la croûte terrestre, on est amené à résoudre en x l'équation suivante

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^2$$

$$x = \frac{\omega}{c_2}$$

On vérifie par exemple que : $x = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{3}}}$ convient. Alors :

$$V = c_2 \sqrt{2 - 2/\sqrt{3}} = 0.919c_2$$

Donc, à partir des relations de dispersion on trouve :

$$r = -5.32 / \Lambda \text{ et } s = -2.47 / \Lambda$$

$$\Lambda = 2\pi / k$$

3. Commentaires

L'indépendance de V par rapport à la longueur d'onde résulte de hypothèses sur l'homogénéité du milieu, en particulier du fait que les vitesses sismiques sont des constantes. V étant connue, on a pu calculer r et s en fonction de la longueur d'onde Λ . Ainsi r et s sont en $1/\Lambda$, donc plus Λ est grande, plus r et s sont petits, par suite plus la profondeur de pénétration est importante.

Les expressions :

$$u_x = [ikA \exp(rz) - sB \exp(sz)] \exp[i(kx - \omega t)]$$

$$u_y = 0$$

$$u_z = [rA \exp(rz) - ikB \exp(sz)] \exp[i(kx - \omega t)]$$

traduisent le mouvement sismique du sol, qui correspond à la polarisation de l'onde. C'est une polarisation elliptique en z et x .

4. Remarque

On peut montrer, en particulier, qu'une onde de surface polarisée linéairement ne peut pas se propager dans un tel milieu.

L'onde de surface la plus simple à laquelle on peut penser, qui se propage suivant x , qui s'atténue quand elle s'enfonce dans la terre et qui ait une polarisation linéaire, suivant y par exemple, est de la forme :

$$u(x, y, z, t) = A \exp(rz) \exp[i(kx - \omega t)] y, \quad A \text{ est son amplitude complexe.}$$

Alors :

$\text{div } \mathbf{u} = 0$ et l'équation du mouvement devient :

$$\mu \Delta u_y = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_y$$

D'où la relation de dispersion, avec les mêmes notations que précédemment

$$r^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_2^2}$$

Les conditions aux limites sont les mêmes que pour l'étude précédente :

1- r est non nul et négatif.

2- les composantes du tenseur des contraintes sont nulles en $z=0$; La seule composante non nulle est :

$$T_{xy} = A \mu \exp(rz) \exp(kx - \omega t)$$

en $z = 0$ on a donc :

$$T_{zy} = A\mu \exp(kx - \alpha t) = 0$$

La condition 2 implique : $A = 0$, car r est différent de zéro d'après la condition 1.

Finalement, une telle onde ne peut se propager, comme on l'avait prévu.

5. Cas des grandes longueurs d'onde

Pour les ondes de grandes longueurs d'onde, plusieurs milliers de kilomètres, émises à l'occasion de grands séismes, le traitement précédent est insuffisant si on s'intéresse au cas du globe terrestre. En effet, ces ondes peuvent faire plusieurs fois le tour de la terre et exciter ainsi les vibrations propres de la croûte terrestre. On s'attend alors à ce que la longueur d'onde Λ associée à une vibration propre d'ordre L ait pour expression : $\Lambda = 2\pi R / L$ où R est le rayon de la terre. Cette expression est l'analogie du problème bien connu de la corde vibrante avec des conditions aux limites périodiques.

En fait, dans le cas d'un milieu sphérique, le calcul est un peu plus compliqué mais le principe reste le même et conduit à : $\Lambda = 2\pi R / (L+0.5)$, pour les longueurs d'onde associées aux vibrations propres de la croûte terrestre.

Conclusion

On a vu que l'onde de Rayleigh est une onde qui se propage à la surface d'un milieu homogène et isotrope. Le mouvement sismique ainsi créé entraîne une déformation du sol : on a montré, dans le cas qui nous occupe, que la déformation engendrée est elliptique. On a montré également que la profondeur de pénétration de l'onde de Rayleigh est proportionnelle à la longueur d'onde du mouvement sismique. De plus cette onde de surface est le seul type d'onde qui puisse exister dans le cas homogène et isotrope.

Pour les longueurs d'onde de quelques milliers de kilomètres, le problème revient à calculer les modes propres de vibration de l'écorce terrestre, et cette approche bien connue dans le cas du diapason ou de la corde vibrante nous donne les fréquences propres de vibration de l'écorce terrestre.

Bibliographie

LANDAU L. et LIFCHITZ E., *Théorie de l'élasticité* (traduit du russe par E. Gloukhian), éd. Mir, Moscou, 1967.

CARA M., *Géophysique*, Dunod, Paris, 1989.

ANNEXE

L'application de l'équation de Navier-Stokes avec les expressions de f et g qu'on a données :

$$f = A \exp(rz) \exp[i(kx - \omega t)]$$

$$g = B \exp(sz) \exp[i(kx - \omega t)] \quad y$$

conduit à l'équation ci-dessous.

$$\text{grad}((\lambda + 2\mu)\Delta f - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} f) + \text{rot}(\mu \Delta g - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} g) = 0 \quad (i)$$

1- On applique l'opérateur div à cette expression et on obtient :

$$\Delta((\lambda + 2\mu)\Delta f - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} f) = 0$$

$$\text{Donc } \Delta f \text{ vérifie l'équation de propagation : } (\lambda + 2\mu)\Delta(\Delta f) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta f) = 0$$

$$\text{Or, } \Delta f = (r^2 - k^2)f$$

donc $(r^2 - k^2)f$ vérifie l'équation de propagation ci-dessus.

Mais on peut montrer que : $r^2 - k^2$ est différent de zéro.

En effet, si $r^2 - k^2 = 0$.

On utilise les conditions aux limites pour notre problème qui font l'objet du deuxième paragraphe. Elles impliquent la relation ci-dessous dans le cas où A et B sont non nuls :

$$4k^2rs = (k^2 + s^2) \left(\frac{\lambda}{\mu} (r^2 - k^2) + 2r^2 \right)$$

On en déduit qu'alors $r^2 - s^2 = 0$.

De l'équation (i) on déduit alors que $\omega = 0$ si $u(x, y, z, t)$ est différent de zéro (ce qui est le cas si A et B sont non nuls). Cette conséquence est absurde dans le problème qui nous intéresse de la propagation d'une onde de surface guidée où nécessairement ω est différent de zéro.

Donc $r^2 - k^2$ est non nul.

Finalement :

$$(\lambda + 2\mu)\Delta(f) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(f) = 0$$

2- Maintenant, faisons agir l'opérateur rotationnel sur l'équation (i).

Comme $\text{div } \mathbf{g} = 0$, on en déduit, en appliquant l'identité :

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta,$$

$$\Delta(\mu\Delta\mathbf{g} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{g}) = 0$$

Avec un raisonnement en tout point similaire au précédent on montre qu'alors $\mathbf{g}$ vérifie l'équation de propagation :

$$\mu\Delta\mathbf{g} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{g} = 0$$

On a donc obtenu les deux équations de propagation du problème et les vitesses de propagation correspondantes.