

# Ondes mécaniques et vibrations dans les solides

Niveau : L2

# Prérequis

- Module d'Young
- Module de Poisson
- Équation de d'Alembert
- La solution d'une équation de d'Alembert peut s'écrire comme la somme de deux ondes planes progressives de même vitesse mais de sens de propagation différents



**Comment expliquer les différents timbres des instruments de musique par la propagation d'ondes mécaniques dans les solides ?**



# Corde pincée

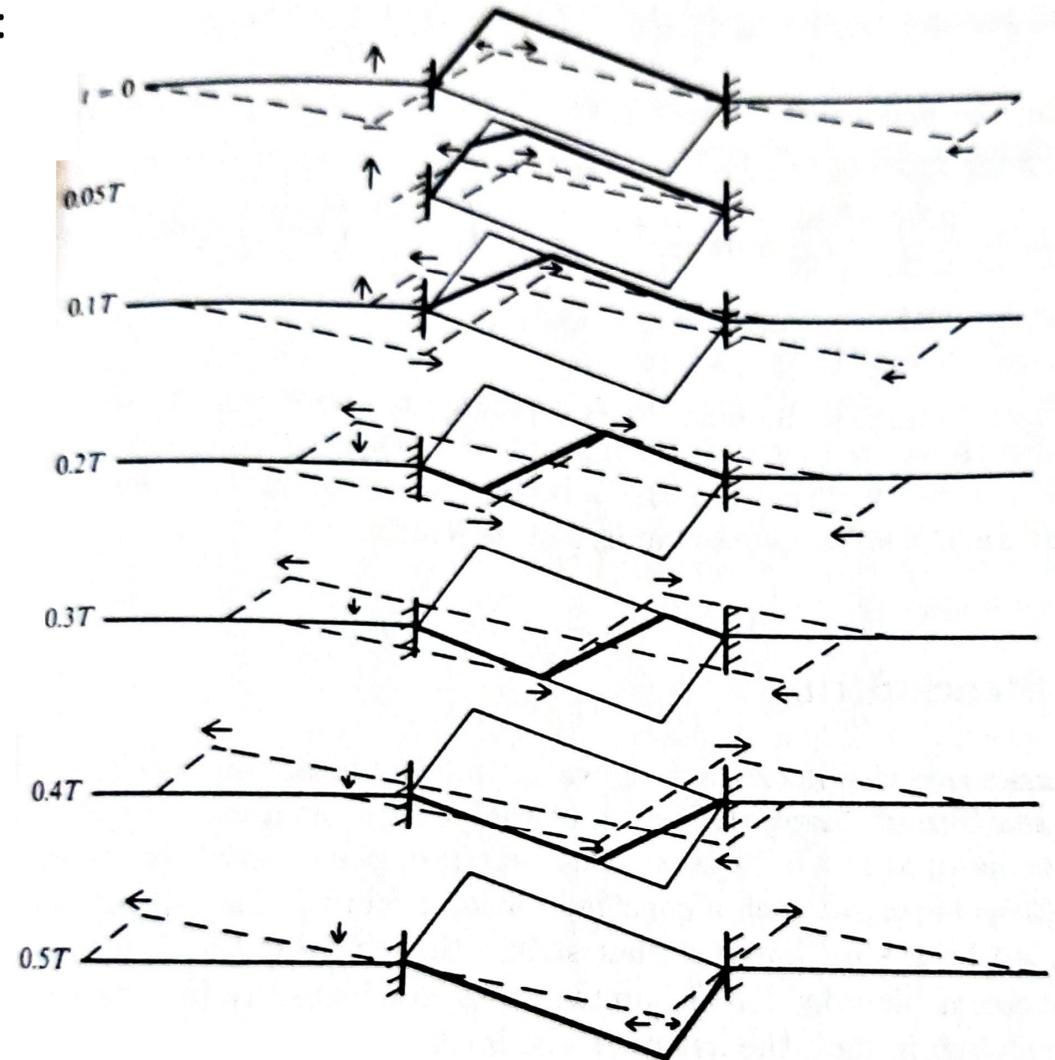
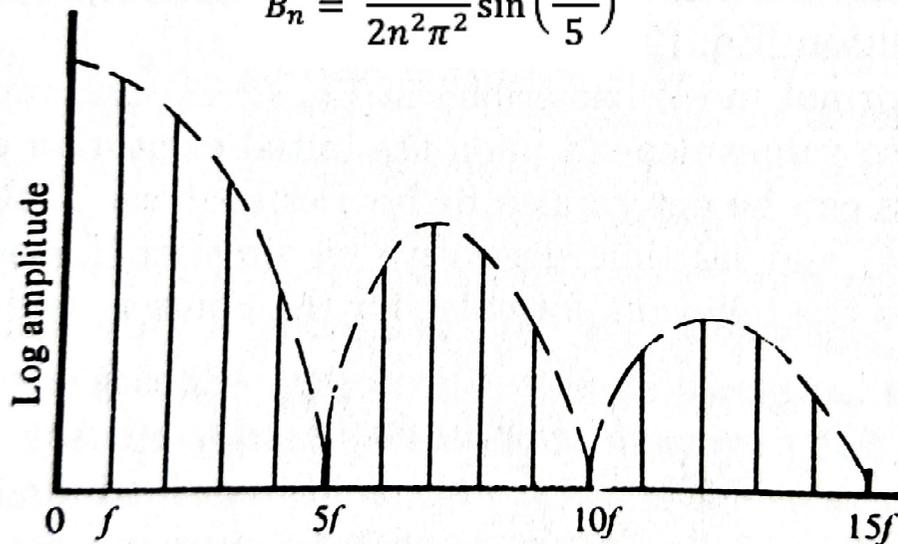
On considère une corde de longueur  $L$ . En  $t = 0$  la corde est pincée en  $x = L/5$  à une hauteur  $y = h$ .

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{y}(x, 0) &= 0 \\ y(x, 0) &= \frac{5h}{L}x \quad \text{si } 0 \leq x \leq L/5 \\ y(x, 0) &= \frac{5h}{4} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{si } L/5 \leq x \leq L \end{aligned}$$

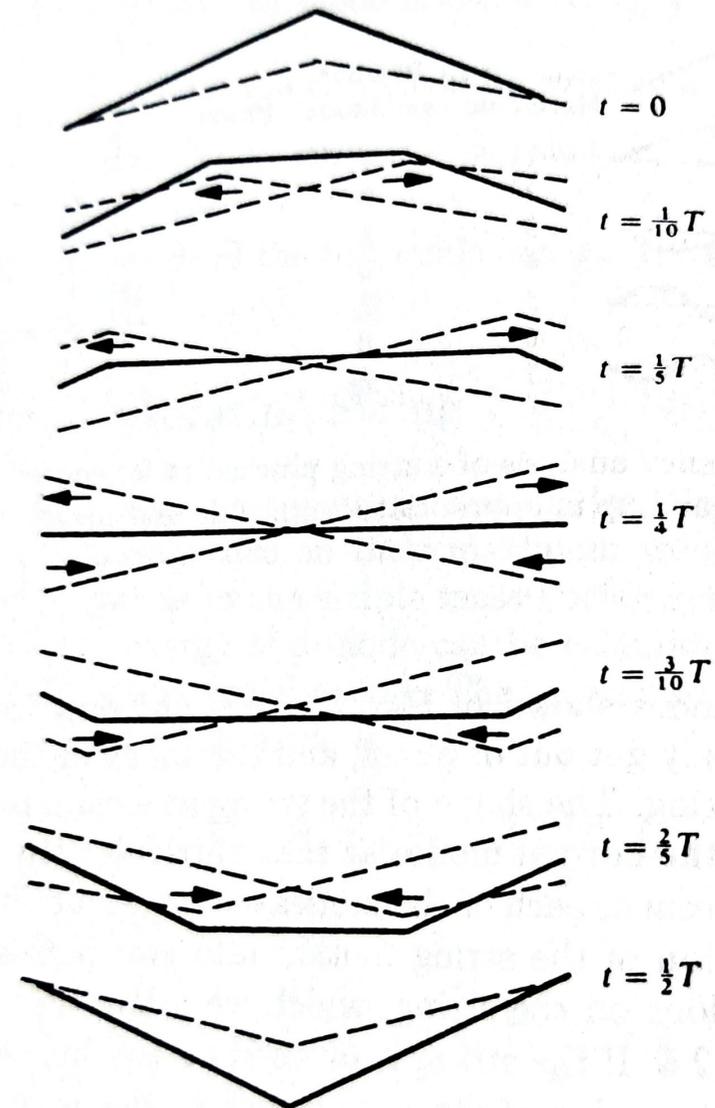
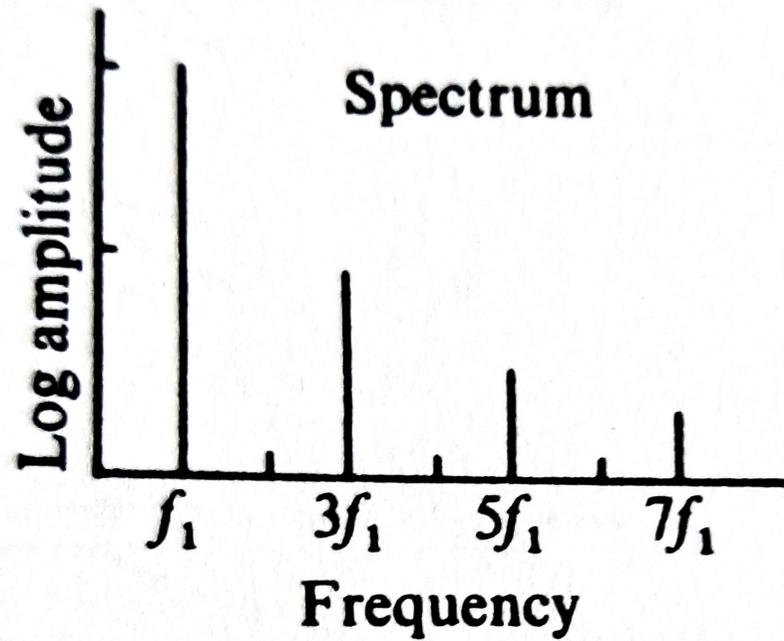
Soit :  $A_n = 0$

$$B_n = \frac{25h}{2n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$



# Corde pincée en $x = L/2$

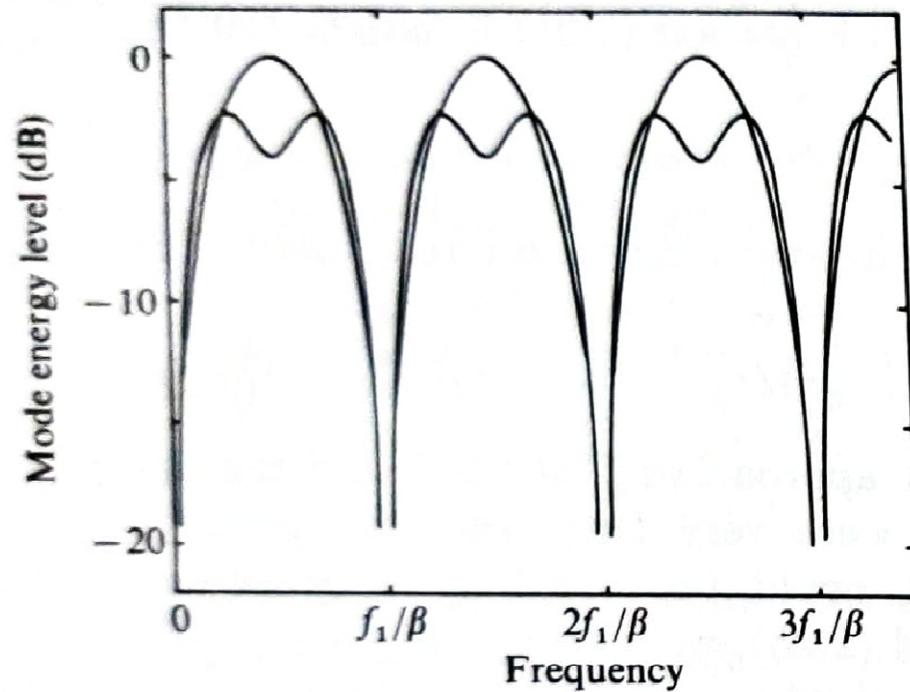
Même raisonnement que précédemment, cette fois la corde est pincée en  $x = L/2$ .





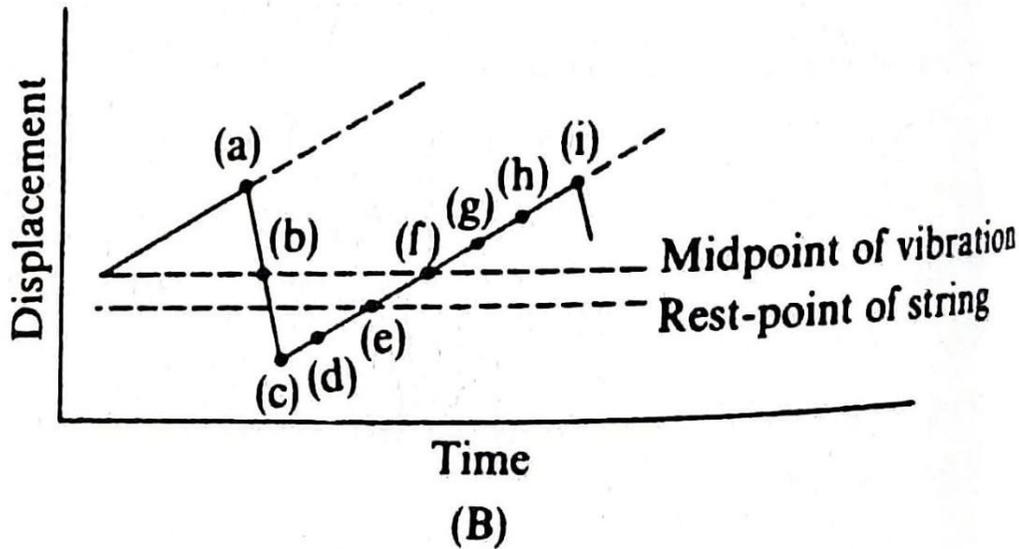
## Corde frappée

Conditions initiales : cette fois on considère un déplacement initial nul mais avec une vitesse non nulle.

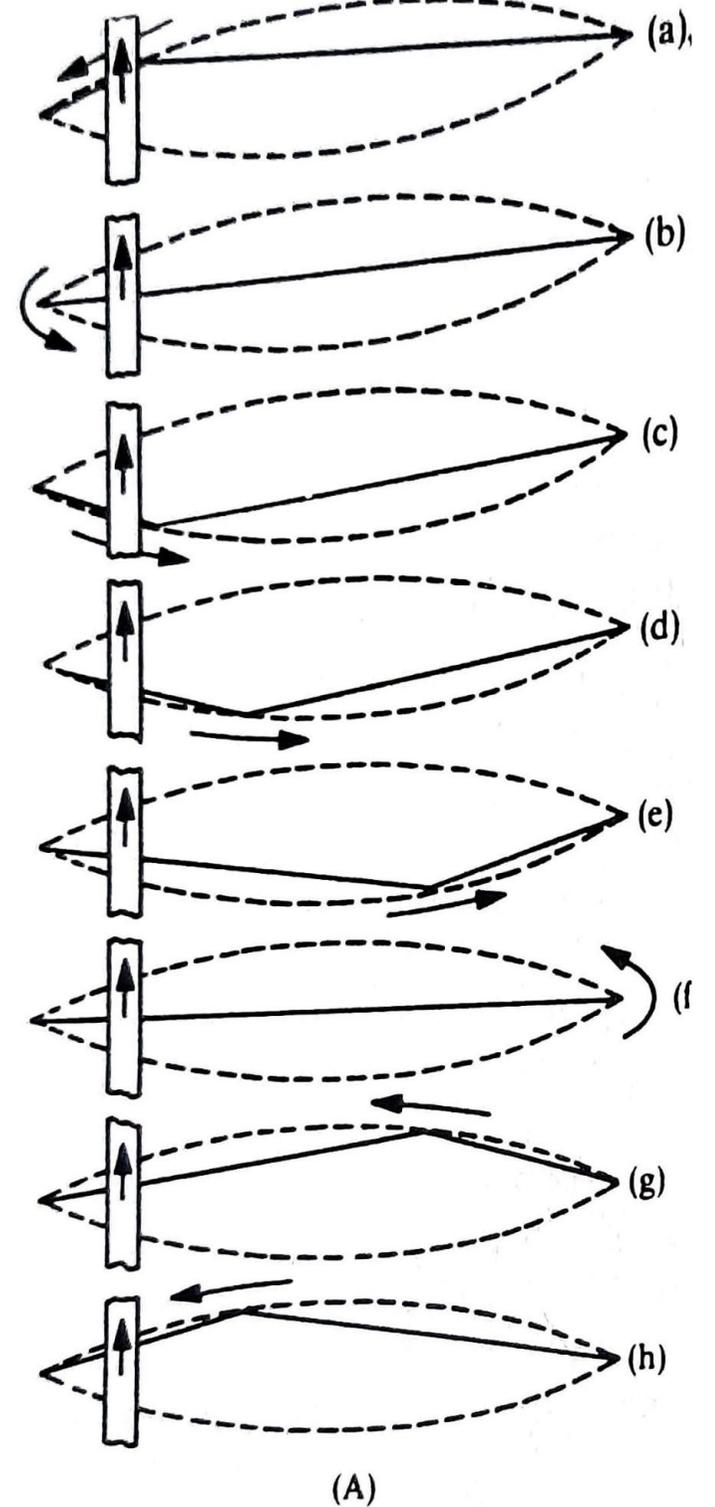


Enveloppe du spectre d'une corde frappée sur une fraction  $\beta$  de sa longueur, la masse du marteau est très faible devant la masse de la corde.

# Corde frottée

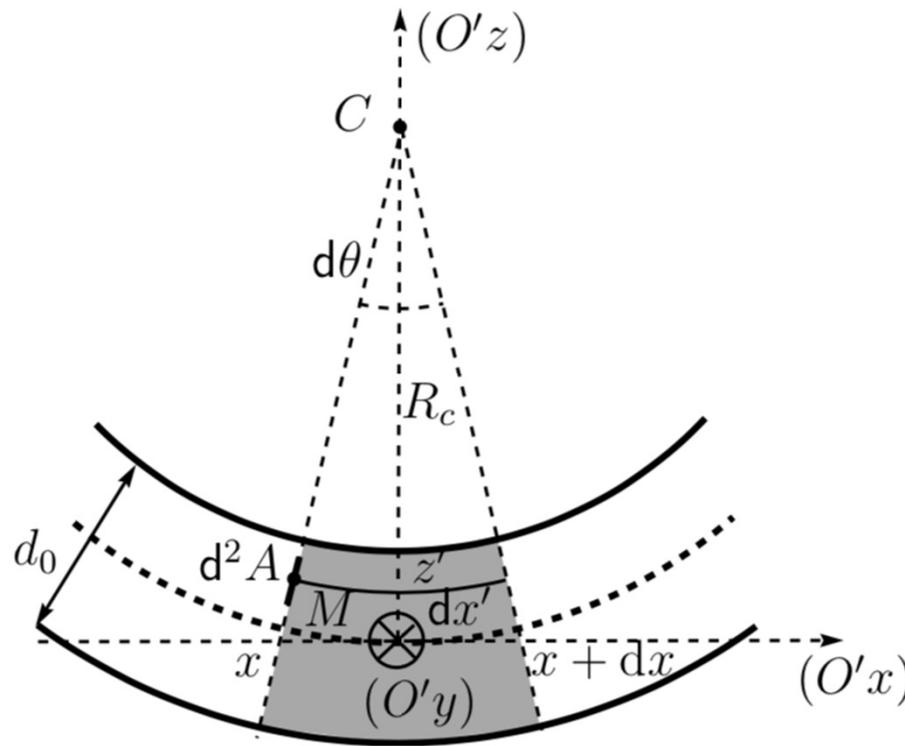


Déplacement de l'archet (pointillé) et de la corde au point de contact (ligne pleine)



Forme de la corde au cours du mouvement

# Ondes de flexion dans une poutre



On considère un élément de longueur infinitésimale  $dx$  d'un cylindre plein, de masse volumique  $\rho$  et de diamètre  $d_0$ .

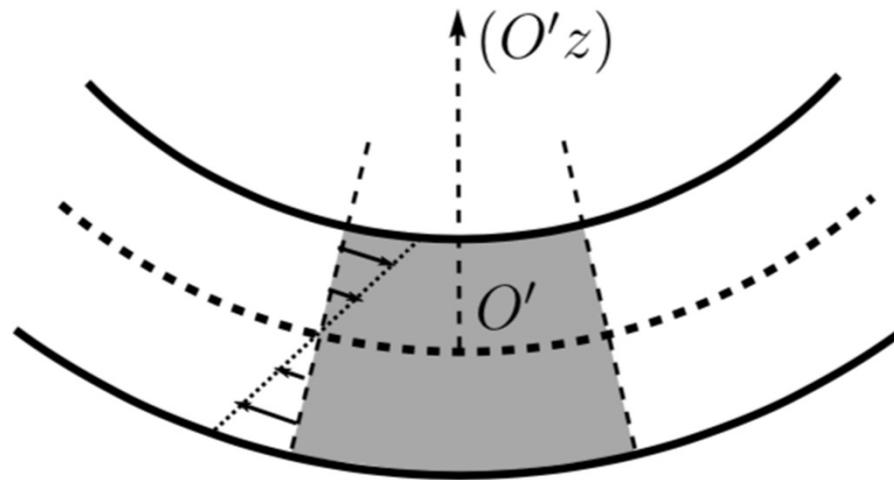
## Hypothèse :

- Lors de la déformation les sections droites restent perpendiculaires à la ligne neutre
- On suppose que la déflexion reste faible, c'est-à-dire qu'on néglige la rotation de la portion de poutre étudiée et que

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \ll 1$$

On note  $z'$  la cote d'un point du nanotube dans le repère local  $(O', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$   
Et  $R_c$  le rayon de courbure algébrique de la ligne neutre.

# Bilan des forces sur une section droite de la poutre



Pour des petites déflexions  
on a :

$$\frac{1}{R_c} \simeq \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

# Mise en équation

On pose :  $\tilde{z}(x, t) = Ae^{\gamma x + j\omega t}$ , l'équation de propagation devient :

$$\gamma^4 Ae^{\gamma x} = \frac{\omega^4}{v^4} Ae^{\gamma x}$$
$$\gamma^2 = \pm \frac{\omega^2}{v^2} = \pm k^2$$

$$\gamma = \pm k \text{ ou } \gamma = \pm jk$$

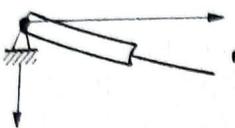
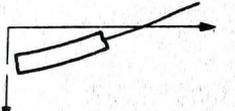
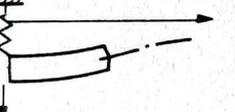
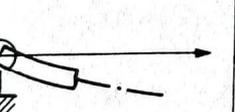
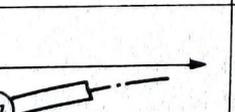
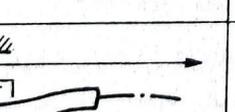
Donc :

$$\tilde{z}(x, t) = e^{j\omega t} (\tilde{A}e^{kx} + \tilde{B}e^{-kx} + \tilde{C}e^{jkx} + \tilde{D}e^{-jkx})$$

$$z(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) (A \cosh(kx) + B \sinh(kx) + C \cos(kx) + D \sin(kx))$$

# Conditions aux limites

TABLE 3.1

Type	Diagram	Equation
Pinned		$y(0,t) = 0$ $\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0$
Fixed		$y(0,t) = 0$ $\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0$
Free		$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^3} = 0$
Deflected spring		$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0$ $-EI \frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^3} = K_D y(0,t)$
Torsion spring		$y(0,t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = K_T \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}$
Mass		$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0$ $-EI \frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial t^2}$
Dashpot		$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0$ $-EI \frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^3} = c \frac{\partial y(0,t)}{\partial t}$

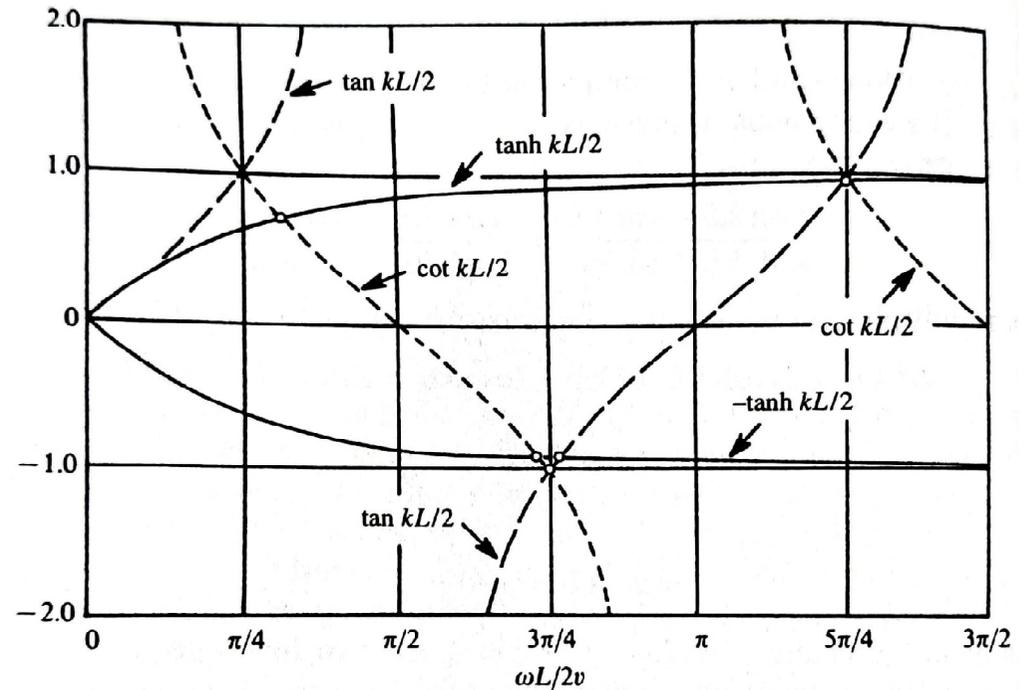
On considère une poutre de longueur L encastée en  $x = 0$  et libre en  $x = L$ . Ces conditions aux limites imposent :

En  $x = 0$  :

$$A + C = 0 = B + D$$

En  $x = L$  (pas de force de cisaillement ni de couple) :

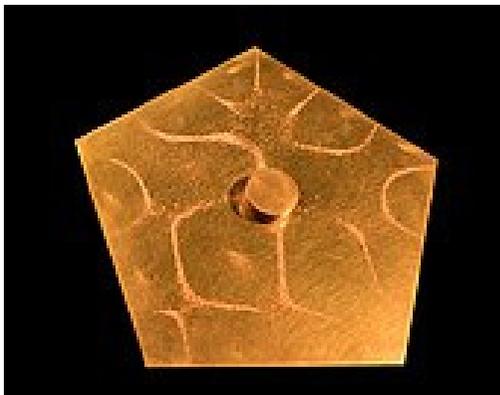
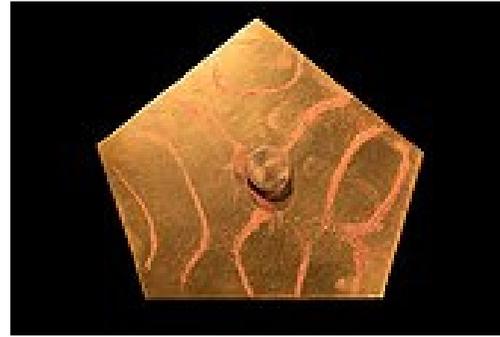
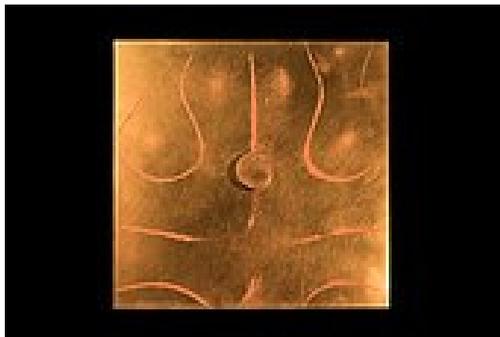
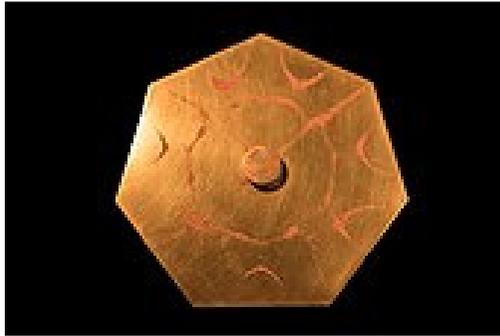
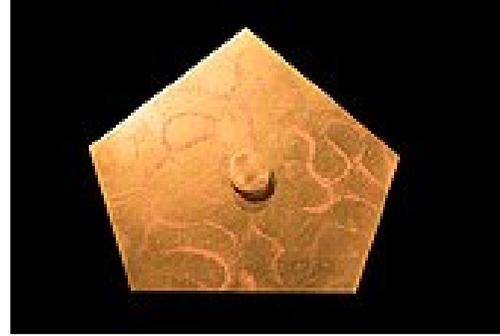
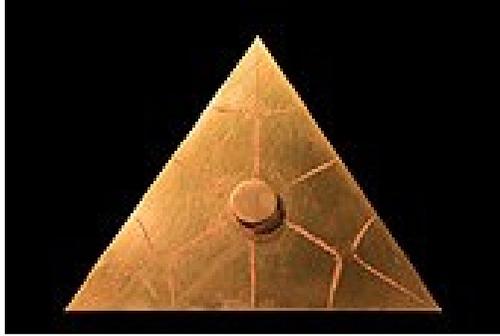
$$\cot(kL/2) = \pm \tanh(kL/2)$$



# Détermination des fréquences des modes propres de vibration



$$f_n = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} (2n - 1)^2$$



# Bibliographie des images

- Corde pincée : The Physics of musical instruments
- Piano : radio classique
- Spectre corde frappée : The Physics of musical instrument
- Violoncelle : [cerveauetpsycho.fr](http://cerveauetpsycho.fr)
- Onde de flexion dans une poutre : problème de physique, agrégation 2015
- Conditions aux limites : Wave motion in elastic solids
- Kalimba : [kytary.fr](http://kytary.fr)