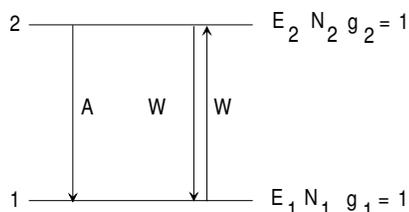


Travaux Dirigés Physique des Lasers n° 4 - Corrigé

Exercice I : Atomes en interaction avec un rayonnement monochromatique

1. Schéma du système à deux niveaux

avec $W_{21} = W_{12} = W$ 

2. Équations d'évolution

$$\frac{dN_2}{dt} = -(A_{21} + W_{21}) N_2 + W_{21} N_1$$

$$\frac{dN_1}{dt} = +(A_{21} + W_{21}) N_2 - W_{21} N_1$$

Avec $N_1 + N_2 = N$. On a bien $\frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_1}{dt} = 0$ comme attendu pour un système fermé.En régime stationnaire : $\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = 0$. On peut écrire le système de deux équations à deux inconnues et le résoudre par la méthode du déterminant de Cramer :

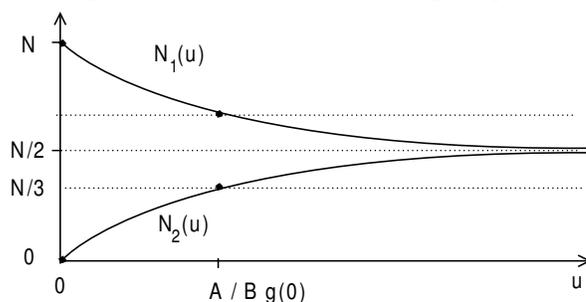
$$\begin{cases} -(A_{21} + W_{21}) N_2 + W_{21} N_1 = 0 \\ N_2 + N_1 = N \end{cases} \quad \text{déterminant } D = \begin{vmatrix} -(A_{21} + W_{21}) & W_{21} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(A_{21} + 2W_{21})$$

$$N_1 = \frac{\begin{vmatrix} -(A_{21} + W_{21}) & 0 \\ 1 & N \end{vmatrix}}{D} = \frac{A_{21} + W_{21}}{A_{21} + 2W_{21}} N = \frac{A_{21} + B_{21}ug(0)}{A_{21} + 2B_{21}ug(0)} N$$

$$N_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & W_{21} \\ N & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{W_{21}}{A_{21} + 2W_{21}} N = \frac{B_{21}ug(0)}{A_{21} + 2B_{21}ug(0)} N$$

Pour $u = 0$, $\frac{A_{21}}{B_{21}g(0)}$ et $+\infty$, les valeurs en régime stationnaire de N_2 et N_1 tendent respectivement vers 0, $N/3$, $N/2$ et N , $2N/3$ et $N/2$. On conserve cependant toujours $N_1 > N_2$, puisque

$$N_2 - N_1 = -\frac{A_{21}}{A_{21} + 2B_{21}ug(0)} N \text{ est toujours négatif.}$$



3. En régime stationnaire, $\frac{dN_2}{dt} = -(A_{21} + W_{21})N_2 + W_{21}N_1 = 0 \Leftrightarrow (A_{21} + W_{21})N_2 = W_{21}N_1$ avec $(A_{21} + W_{21}) > W_{21}$ donc $N_2 \leq N_1$. Lorsque u est très grand, l'émission spontanée devient négligeable devant l'absorption et l'émission induite. Pour ce système non dégénéré, $B_{21} = B_{12}$ (notations du cours). Le régime stationnaire correspond à autant d'émissions induites que d'absorptions avec $W_{21} = W_{12}$, condition obtenue lorsque $N_2 = N_1 = N/2$. Ce graphe donne l'évolution de l'état atteint en régime stationnaire par le système, selon l'intensité du faisceau. On ne peut donc jamais avoir d'inversion de population, ce qui ne permet pas d'en faire un milieu amplificateur utilisable pour un laser.

4. Pour $T = 300 \text{ K}$ et $\lambda = 600 \text{ nm} \Leftrightarrow \nu = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, la loi de Boltzmann prévoit $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 5 \cdot 10^{14}}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}\right) = 1,9 \cdot 10^{-35}$. On a donc bien $N_2 \ll N_1$ donc $N_1 = N$.

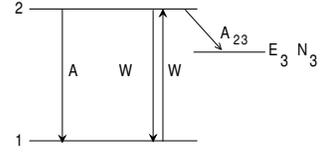
5. $\tau_2 = \frac{1}{A_{21}}$: par définition, on ne tient pas compte des processus induits dans l'écriture de la durée de vie.

6. Pour ce système, la durée de vie du niveau **2** vaut τ_2 avec

$$\frac{1}{\tau_2} = A_{21} + A_{23} \text{ (processus spontanés seulement).}$$

L'équation $\frac{dN_1}{dt}$ est inchangée. Il faut ajouter le terme $-A_{23}N_2$ à $\frac{dN_2}{dt}$, et l'équation $\frac{dN_3}{dt} = A_{23}N_2$.

En régime stationnaire, $\frac{dN_3}{dt} = 0$ entraîne $N_2 = 0$, qui, injecté dans $\frac{dN_1}{dt} = 0$, impose $N_1 = 0$ d'où $N_3 = N$.



Un atome sur **1** a une certaine probabilité d'aller sur **2**. Tout atome sur **2** a une certaine probabilité d'aller sur **3** et d'y rester définitivement. Au bout d'un temps infini (lorsque le système n'évolue plus, régime stationnaire), les atomes sont tous sur le niveau **3**.

Exercice II : Dynamique de l'évolution des populations dans un système à trois niveaux

Partie -A-

1. On a ici un système fermé puisque tous les transferts de population indiqués font intervenir des niveaux explicitement décrits.

2. Équations d'évolution temporelle des populations :

$$\begin{cases} (1) & \frac{dN_1}{dt} = -W_P N_1 + A N_2 + W_P N_3 \\ (2) & \frac{dN_2}{dt} = -A N_2 + \gamma N_3 \\ (3) & \frac{dN_3}{dt} = W_P N_1 - W_P N_3 - \gamma N_3 \end{cases}$$

Rq : γ est grand alors que N_3 est petit, donc on ne sait rien de la valeur de γN_3 par rapport à $A N_2$.

3. N_3 est négligeable devant N_2 et N_1 donc $N_1 + N_2 = N$

$$\begin{cases} N_2 + N_1 = N \\ N_2 - N_1 = \Delta N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{N - \Delta N}{2} \\ N_2 = \frac{N + \Delta N}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \frac{d\Delta N}{dt} &= -2 \frac{dN_1}{dt} = 2 W_P (N_1 - N_3) - 2 A N_2 \text{ avec } N_3 \ll N_1 \\ &= -(W_P + A) \Delta N + (W_P - A) N \end{aligned}$$

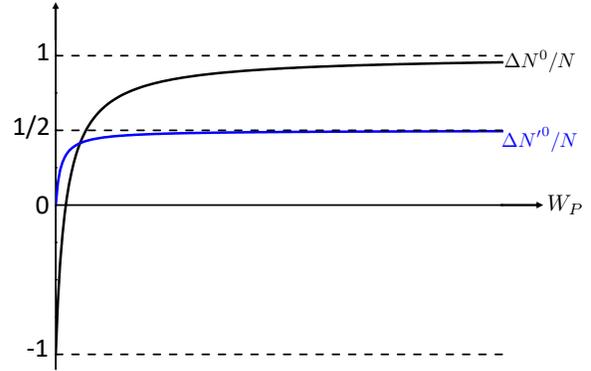
Équation différentielle régissant l'évolution temporelle de $\Delta N(t)$:

$$\boxed{\frac{d\Delta N}{dt} + (W_P + A) \Delta N = (W_P - A) N}$$

4. En régime stationnaire, $\frac{d\Delta N}{dt} = 0$ et $\boxed{\Delta N = \frac{(W_P - A)}{(W_P + A)} N \equiv \Delta N^0}$.

Donc $\Delta N^0 = -N$ pour $W_P = 0$ et $\Delta N^0 = +N$ pour $W_P \rightarrow \infty$.

Remarque : ici quand on écrit $W_P \rightarrow \infty$, cela veut dire que $W_P \gg A$ (par exemple $W_P = 100A$), mais l'hypothèse $\gamma \gg W_P$ doit encore être vérifiée pour que l'expression trouvée pour ΔN^0 reste valable.



5. En régime stationnaire on a inversion de population si $\Delta N^0 > 0 \Leftrightarrow \boxed{W_P > A}$

6. À $t = 0$, tous les atomes sont sur **1** donc $N_1 = N$, $N_2 = N_3 = 0$ et $\Delta N = -N$.

$\Delta N = \frac{(W_P - A)}{(W_P + A)} N \equiv \Delta N^0$ est une solution particulière de l'équation différentielle obtenue en régime stationnaire. La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est $C \exp -(W_P + A) t$. La solution de l'équation différentielle est $\Delta N^0 + C \exp -(W_P + A) t$ avec à $t = 0$, $\Delta N(0) = -N = \Delta N^0 + C$ d'où $C = -\frac{2W_P}{W_P + A} N$ et

$$\Delta N(t) = \Delta N^0 - \frac{2W_P}{W_P + A} N \exp -(A + W_P)t \text{ soit } \boxed{\Delta N(t) = \Delta N^0 \left[1 - \frac{2W_P}{W_P - A} \exp -(A + W_P)t \right]}$$

Attention : il faut calculer la constante d'intégration C à partir des conditions initiales pour la somme sol. part. + sol. générale de l'équation sans second membre.

Autre méthode : séparation des variables : $\int_{-N}^{\Delta N(t)} \frac{d\Delta N}{\Delta N - \Delta N^0} = -\int_0^t (A + W) dt$.

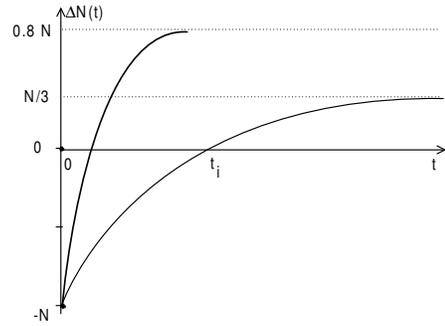
7. On obtient l'inversion de population à **2 conditions** : il faut $\Delta N^0 > 0 \Leftrightarrow W_P > A$, et il faut qu'il existe un temps t_i après lequel la partie apparaissant entre crochets dans l'expression de $\Delta N(t)$ soit positive. On a

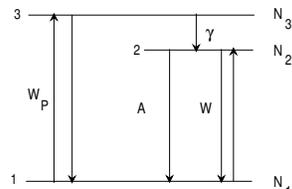
$$\Delta N(t_i) = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_i = -\frac{1}{W_P + A} \ln \frac{W_P - A}{2W_P}}$$

8. Pour $W_P = 2A$: $t_i = 9,2 \cdot 10^{-4}$ s et $\Delta N^0 = N/3$;
 $\Delta N(t) = \Delta N^0 [1 - 4 \exp -(1,5 \cdot 10^3 t)]$ (courbe de droite)

Pour $W_P = 9A$: $t_i = 1,6 \cdot 10^{-4}$ s, $\Delta N^0 = 0,8 N$;
 $\Delta N(t) = \Delta N^0 [1 - 2,25 \exp -(5 \cdot 10^3 t)]$ (courbe de gauche).

Un pompage plus fort permet d'obtenir une différence de population plus importante, et de l'atteindre plus vite.



9. 

$$\begin{cases} (1) \frac{dN_1}{dt} = -W_P N_1 + W_P N_3 + A N_2 & +W N_2 - W N_1 \\ (2) \frac{dN_2}{dt} = & -A N_2 + \gamma N_3 - W N_2 + W N_1 \\ (3) \frac{dN_3}{dt} = W_P N_1 - W_P N_3 & -\gamma N_3 \end{cases}$$

10. En régime stationnaire, $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = 0$. Pour $W_P(N_3 - N_1) \simeq -W_P N_1$, la première équation ne dépend que de N_1 et N_2 qu'on remplace par $\frac{N - \Delta N}{2}$ et $\frac{N + \Delta N}{2}$ d'où :

$$\Delta N (W_P + A + 2W) = N(W_P - A) \text{ et } \Delta N = N \frac{(W_P - A)}{(W_P + A + 2W)} = N \frac{(W_P - A)}{(W_P + A)} \frac{1}{1 + \frac{2W}{W_P + A}} = \frac{\Delta N^0}{1 + \frac{2W}{W_P + A}}$$

Pour l'onde de fréquence $(E_2 - E_1)/h$, la situation d'inversion de population ($N_2 > N_1$ pour des niveaux non dégénérés) fait que le nombre WN_2 d'émissions induites par seconde et par m^3 devient supérieur au nombre des absorptions, WN_1 , lorsque $\Delta N > 0$. Cette onde est donc amplifiée, l'énergie correspondante étant prise à l'onde de fréquence $(E_3 - E_1)/h$.

11. On peut écrire $\frac{\Delta N}{\Delta N^0}$ sous la forme $\frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$ en remplaçant $W = \sigma(0)\phi = \frac{\sigma(0)I}{h\nu_0}$. Par identification on obtient : $I_s = \frac{h\nu_0(A+W_P)}{2\sigma(0)}$

Partie -B-

1. En conservant les mêmes hypothèses, c'est maintenant N_1 qui est négligeable devant les autres populations. Donc $\Delta N'^0 = N_2 - N_1 \simeq N_2$ et $N \simeq N_0 + N_2$.

$$\begin{cases} (1') & \frac{dN_0}{dt} = -W_P N_0 + W_P N_2 + \gamma N_1 \\ (2') & \frac{dN_1}{dt} = A N_2 - \gamma N_1 \\ (3') & \frac{dN_2}{dt} = W_P N_0 - W_P N_2 - A N_2 \end{cases}$$

A partir de (3') écrite en régime stationnaire, on extrait $N_2 = N_0 \frac{W_P}{A+W_P}$.

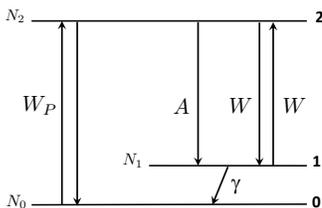
Comme $N_0 = N - N_2$, on en déduit $N_2 = N \frac{W_P}{A+2W_P}$ d'où $\Delta N'^0 = \frac{W_P}{A+2W_P} N$. La condition d'inversion de population en régime stationnaire s'écrit simplement $W_P > 0$: il suffit que le pompage soit allumé pour que la condition soit réalisée (pas de seuil à atteindre).

2. Pour $W_P = 0$, $\Delta N'^0 = 0$; pour $W_P \rightarrow \infty$, $\Delta N'^0 = \frac{N}{2}$ (voir graphe de la question A.4)).
3. Le système à 3 niveaux pour lequel le niveau le plus bas est le niveau inférieur de la transition laser (partie -A-) a l'avantage de permettre en régime stationnaire **d'inverser totalement la population** ($\Delta N^0 = N$) si le pompage est très fort mais il présente 2 inconvénients : il nécessite un **seuil minimum de pompage** pour réaliser l'inversion de population ($W_P > A$) puisqu'on part d'une situation défavorable où initialement toute la population est dans 1 ($N_1 = N$), et il faut un temps t_i pour atteindre l'IP. Dans le cas où le niveau du bas n'est plus le niveau 1 de la transition laser (partie -B-), ces 2 inconvénients n'existent plus (pas de seuil minimum à atteindre ni de temps d'établissement de l'IP (voir question suivante)). En revanche, en régime stationnaire on ne peut obtenir qu'une **inversion de population égale à la moitié de la population totale** ($\Delta N'^0 = \frac{N}{2}$). On verra dans le TD5 qu'un milieu amplificateur constitué d'un système fermé à 4 niveaux combine les avantages des deux systèmes à 3 niveaux étudiés ici.

4. A $t = 0$, $N_1 = N_2 = \Delta N' = 0$. L'équation différentielle d'évolution temporelle de $\Delta N'$ s'écrit dans ce cas : $\frac{d\Delta N'}{dt} + (2W_P + A) \Delta N' = W_P N$ et $\Delta N'^0$ en est une solution particulière.

Son intégration donne : $\Delta N(t) = \Delta N^0 [1 - \exp[-(A + 2W_P)t]]$

On constate donc que dès que $\Delta N^0 > 0$, on a forcément $\Delta N(t) > 0$ donc $t_i = 0$.



Si on a un rayonnement inducteur à la fréquence ν_0 , on peut écrire :

$$\begin{cases} (1') & \frac{dN_0}{dt} = -W_P N_0 + W_P N_2 + \gamma N_1 \\ (2') & \frac{dN_1}{dt} = (A + W) N_2 - (\gamma + W) N_1 \\ (3') & \frac{dN_2}{dt} = W_P N_0 + W N_1 - (W_P + A + W) N_2 \end{cases}$$