

# Corrigé : Propagation d'une onde dans le domaine optique

## Partie I : optique géométrique

**I-1-** L'approximation de l'optique géométrique est l'approximation des très faibles longueurs d'onde. L'amplitude des ondes considérées varie peu sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$ , ce qui implique  $\lambda \ll D$ , avec D longueur caractéristique du système (taille de diaphragme, longueur caractéristique des variations d'indices...)

**I-2-** Les rayons lumineux sont les lignes de champ du vecteur de Poynting moyenné dans le temps ; ce sont des courbes selon lesquelles se propage en moyenne l'énergie lumineuse. Ils sont normaux aux surfaces d'onde dans les milieux isotropes.

En optique géométrique :

- indépendance des rayons lumineux ;
- principe du retour inverse dans un milieu transparent isotrope
- propagation rectiligne dans un milieu homogène isotrope.

### I-3- Principe de Fermat

a- Transparent : l'indice  $n(P)$  est réel : il n'y a pas d'absorption de l'énergie lumineuse. Isotrope : toutes les directions de l'espace sont équivalentes vis à vis des propriétés du milieu .

b-  $L_{(\mathcal{C})} = \int_{(C)} \text{nds}$ . C'est la longueur du trajet que parcourrait la lumière dans le vide pendant le temps qu'elle met à parcourir  $(\mathcal{C})$  dans le milieu considéré.

c- Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller de A vers B correspond à un chemin optique stationnaire par rapport à l'ensemble des chemins fictifs voisins allant de A vers B. Ces chemins voisins  $(\mathcal{C}')$  sont obtenus à partir de  $(\mathcal{C})$  en donnant à chaque point courant M de  $(\mathcal{C})$  un déplacement  $d\vec{M}$ , fonction continue et dérivable, s'annulant en A et B. On dit que  $L_{(\mathcal{C})} = L_{AB}$  est stationnaire si  $|L(C) - L(C')|$  est un infiniment petit du second ordre au moins vis à vis de la borne supérieure  $\epsilon$  de  $|d\vec{M}|$  prise comme infiniment petit principal.

### I-4- Conséquences du principe de Fermat. Lois de Snell-Descartes.

a- Homogène :  $n(P)$  est indépendant de P, l'indice est le même en tout point. Alors  $L_{(AB)} = n \cdot \overline{AB}$ .  $L_{(AB)}$  est stationnaire ici si  $\overline{AB}$  est stationnaire, c'est à dire si la longueur du trajet est minimale, ce qui correspond à une droite. La lumière se propage donc en ligne droite dans un milieu homogène.

Si  $L_{(AB)}$  est stationnaire,  $L_{(BA)}$  l'est aussi : loi du retour inverse de la lumière.

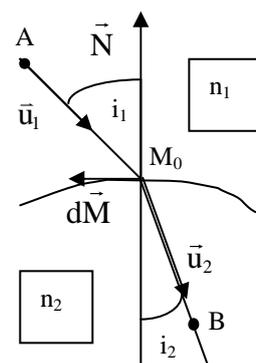
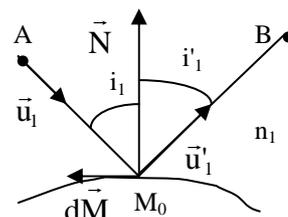
b-  $AB = \vec{u} \cdot \overline{AB}$ . Il vient donc :  $dAB = d\vec{u} \cdot \overline{AB} + \vec{u} \cdot d\overline{AB} = AB d\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot d\overline{AB}$ .

Or  $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$ , d'où  $dAB = \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A})$ .

c- \* **loi de la réflexion** : A et B sont fixés, on cherche la position  $M_0$  de M minimisant le trajet  $(AB) = (AMB) = L_{AB}$ .

$L_{AB} = n_1 AM + n_1 MB$ , et, pour M voisin de  $M_0$ ,  $dL_{AB} = 0$ . Il vient donc :

$n_1 \vec{u}_1 \cdot d\vec{M} - n_1 \vec{u}'_1 \cdot d\vec{M} = 0$  quelque soit  $d\vec{M}$  appartenant au plan tangent au dioptre au voisinage de  $M_0$ . D'où :  $\vec{u}_1 - \vec{u}'_1 = \alpha \vec{N}$  : le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence  $(\vec{u}_1, \vec{N})$  (première loi de Descartes de la réflexion).



De plus, si on note  $\vec{T}$  le vecteur tangent au dioptre appartenant au plan d'incidence, il vient :  $\vec{u}_1 \cdot \vec{T} = \vec{u}'_1 \cdot \vec{T}$ , soit  $\sin i_1 = -\sin i'_1$ , soit  $i'_1 = -i_1$  (ceci fixe la position de  $M_0$ ) (seconde loi de Descartes de la réflexion), les angles étant orientés de la normale vers le rayon.

\* **loi de la réfraction** : A et B sont fixés, on cherche la position  $M_0$  de M minimisant le trajet  $(AB) = (AMB) = L_{AB}$ .

$L_{AB} = n_1 AM + n_2 MB$ , et, pour M voisin de  $M_0$ ,  $dL_{AB} = 0$ . Il vient donc :

$n_1 \vec{u}_1 \cdot d\vec{M} - n_2 \vec{u}_2 \cdot d\vec{M} = 0$  quelque soit  $d\vec{M}$  appartenant au plan tangent au dioptre au voisinage de  $M_0$ . D'où :  $n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = \alpha \vec{N}$  : le rayon réfracté appartient au plan d'incidence  $(\vec{u}_1, \vec{N})$  (première loi de Descartes de la réfraction).

De plus, si on note  $\vec{T}$  le vecteur tangent au dioptre appartenant au plan d'incidence, il vient :  $n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{T} = n_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{T}$ , soit  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  (ceci fixe la position de  $M_0$ ) ((seconde loi de Descartes de la réflexion).

d- Notons que  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ . On considère un faisceau incident dans le milieu 1.

- Si  $n_1 < n_2$  alors  $\sin i_2 < \sin i_1$  ; pour  $i_1 = \pi/2$ ,  $\sin i_{2\text{lim}} = \frac{n_1}{n_2}$  :  $i_{2\text{lim}}$  représente alors l'angle

de réfraction limite, le domaine de variation de  $i_2$  étant alors  $[0, i_{2\text{lim}} = \arcsin \frac{n_1}{n_2}]$ . Il n'y a pas de possibilité d'avoir une réflexion totale.

- Si  $n_1 > n_2$  :  $\sin i_2 > \sin i_1$  et  $\sin i_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin i_2$ . Pour  $i_1 > \arcsin \frac{n_2}{n_1} = i_{1\text{lim}}$ , angle d'incidence limite, il y aura un phénomène de réflexion totale sur le milieu 2, mais pas de réfraction limite.

e- **Application : la fibre optique à saut d'indice.**

α) Il faut pouvoir observer un phénomène de réflexion totale sur la gaine, donc  $n_1 > n_2$

β)  $i_1 - \alpha = \pi/2$ : pour qu'il y ait réflexion totale, il faut que

$\sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}$ , donc  $\cos \alpha > \frac{n_2}{n_1}$ . Or  $\sin \theta$

$= n_1 \sin \alpha$ . Il vient donc :  $\theta < \theta_{\text{max}}$ ,

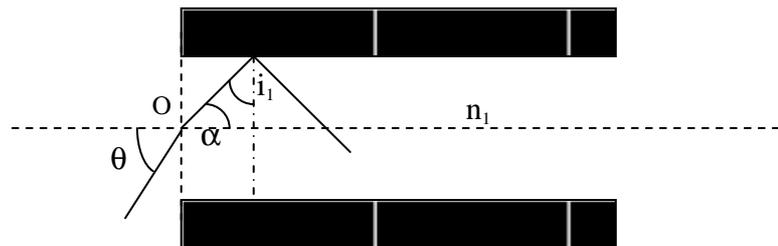
avec  $\sin \theta_{\text{max}} = n_1 \sin(\arccos \frac{n_2}{n_1}) = n_1$

$$\sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}} = n_1 \sqrt{2\Delta}$$

D'où O.N. =  $n_1 \sqrt{2\Delta} = 0,21$

γ) Si on courbe la fibre, l'angle d'incidence est modifié, et par suite  $i_1$  qui peut devenir inférieur à  $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$ . Il y aura alors réfraction, et donc perte énergétique.

δ) Le trajet le plus rapide est celui correspondant à l'incidence nulle :  $t_{\text{min}} = n_1 L/c$ . Le trajet le plus long est celui correspondant à l'angle d'incidence  $\theta_i$ . Ce rayon fera



$$\frac{L \tan \alpha_i}{r_1} \text{ trajets de type OA (cf figure ci-dessus) qui prennent chacun le temps}$$

$$n_1 \frac{r_1}{c \sin \alpha_i}. \text{ D'où } t_{\max} = \frac{L \tan \alpha_i}{r_1} n_1 \frac{r_1}{c \sin \alpha_i} = \frac{n_1 L}{c \cos \alpha_i} = \frac{n_1 L}{c \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}}$$

$$\text{D'où } \Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}} - 1 \right) = 0,22 \text{ ns.}$$

### I-5- Extension à un milieu non homogène : loi fondamentale de l'optique géométrique.

a- la concavité du rayon est toujours tournée dans le sens de  $\vec{\text{grad}} n$ .

**Exemple 1 :** Dans une cuve, avec un mélange d'eau et de sel qu'on a laissé reposer, la concentration, donc l'indice, croissent de la surface au fond.  $\vec{\text{grad}} n$  est donc dirigé verticalement vers le fond de la cuve. Un rayon arrivant normalement dans la cuve s'incurvera alors vers le bas.

**Exemple 2 :** Phénomène de mirage : lorsque le sol est très chaud, l'indice croît avec l'altitude  $z$ . Les rayons provenant d'un objet s'incurvent en semblant provenir du sol comme s'ils avaient subi une réflexion sur une surface réfléchissante comme de l'eau.

b- **Application : la fibre optique à gradient d'indice.**

$$\alpha) \frac{d(n\vec{u})}{ds} = \vec{\text{grad}} n = \frac{dn}{dr} \vec{u}_r. \text{ Il vient donc } \frac{d}{ds} (n(r) \cos \alpha(r) \vec{u}_z + n(r) \sin \alpha(r) \vec{u}_r) = \frac{dn}{dr} \vec{u}_r$$

$$\text{Par identification, on obtient } n \cos \alpha = \text{cste} = n_1 \cos \theta_0, \text{ soit } \cos^2 \alpha = \left( \frac{n_1}{n} \right)^2 \cos^2 \theta_0.$$

$$\text{Or } \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 = \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{n^2}{n_1^2 \cos^2 \theta_0} - 1 = \frac{1 - 2\Delta \left( \frac{r}{r_1} \right)^2}{\cos^2 \theta_0} - 1. \text{ Si on dérive cette}$$

$$\text{expression, on obtient : } \frac{d^2 r}{dz^2} = - \frac{2\Delta}{r_1^2 \cos^2 \theta_0} r$$

$$\text{Soit } r = A \cos \left( \frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos \theta_0} z \right) + B \sin \left( \frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos \theta_0} z \right). \text{ Compte tenu des conditions en } z=0$$

$$\text{qui s'écrivent } r(z=0) = 0 \text{ et } \left( \frac{dr}{dz} \right)_{z=0} = \tan \theta_0, \text{ on obtient finalement :}$$

$$r = \frac{r_1 \sin \theta_0}{\sqrt{2\Delta}} \sin \left( \frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos \theta_0} z \right). \text{ La trajectoire est donc sinusoïdale, de période spatiale}$$

$$2d = 2 \frac{\pi r_1 \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}, \text{ d'où } d = \frac{\pi r_1 \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}.$$

β) Il faut que  $r_{\max} < r_1$ , soit  $\sin\alpha_0 < \sqrt{2\Delta}$ , soit finalement  $\sin\alpha < n_1 \sqrt{2\Delta} = \text{O.N.}$  On retrouve donc la même valeur que dans la fibre à saut d'indice : l'intérêt d'une fibre à gradient d'indice ne réside donc pas dans l'ON.

γ)  $\Delta t' = 0,46 \cdot 10^{-12} \text{s} \ll \Delta t$  : l'élargissement est beaucoup plus faible que dans une fibre à saut d'indice, d'où l'intérêt des fibres à gradient d'indice (qui ne réside pas dans l'O.N) pour le transport d'information avec des hauts débits.

δ) Fibroscopie, endoscopie, communication, réseau câblé...

## Partie II : Propagation dans un milieu diélectrique non magnétique

### A- Etude générale macroscopique

#### II-A-1- Définitions générales.

a- **Charges libres** : charges électriques susceptibles de se déplacer (sous l'action de champs appliqués) dans l'ensemble du matériau, sur des distances  $\gg$  dimensions atomiques.

**Charges liées** : charges qui sont liées aux atomes ou aux molécules, ions liés les uns aux autres ; elles peuvent se déplacer (sous l'action de champs appliqués) légèrement autour de leur position d'équilibre, sur des distances de l'ordre des dimensions atomiques.

b- Un milieu diélectrique est un milieu qui, sous l'action d'un champ électrique exciteur, réagit par l'apparition d'une polarisation  $\vec{P}$  en son sein, qui représente les moment dipolaire induits par unité de volume.

Sous l'action du champ exciteur, l'élément de volume  $d\tau$  mésoscopique acquiert un moment dipolaire  $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$  (phénomène de polarisation).  $\vec{P}$  est en  $\text{C.m}^{-2}$ .

c-  $\rho_{\text{liées}} = -\text{div} \vec{P}$ ,  $\vec{j}_{\text{liées}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

d- On introduit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  en  $\text{C.m}^{-2}$ . Il vient alors, dans un milieu non magnétique :

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libres}} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

e- On considère un point M de la surface de séparation, et  $\vec{n}_{12}$  la normale en M à la surface  $\Sigma$  orientée du milieu 1 vers le milieu 2. On introduit la densité surfacique de charges libres en M  $\sigma_{\text{libre}}(M)$  et la densité surfacique de courants libres en M  $\vec{j}_{s,\text{libres}}(M)$ . Les relations de passages entre les deux milieux non magnétiques s'écrivent alors :

Pour tout M de  $\Sigma$ , et pour tout t :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{2,\text{tan gentiel}}(M, t) - \vec{E}_{1,\text{tan gentiel}}(M, t) &= \vec{0} \\ \vec{D}_{2,\text{normal}}(M, t) - \vec{D}_{1,\text{normal}}(M, t) &= \sigma_{\text{libres}} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_{2,\text{tan gentiel}}(M, t) - \vec{B}_{1,\text{tan gentiel}}(M, t) &= \mu_0 \vec{j}_{s,\text{libres}}(M, t) \wedge \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_{2,\text{normal}}(M, t) - \vec{B}_{1,\text{normal}}(M, t) &= \vec{0} \end{aligned}$$

#### II-A-2- Cas particulier d'un milieu diélectrique parfait, non magnétique, linéaire, homogène et isotrope.

a- **Linéaire** : Il existe une relation linéaire entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  donc entre  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  et  $\vec{E}$ , c'est à dire que les composantes de  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$ , ou de  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont liées par des équations différentielles linéaires. On peut ainsi appliquer le théorème de superposition.

**Homogène** : les propriétés du milieu ne dépendent pas de M

**Isotrope** : le milieu ne présente pas de direction privilégiée, c'est à dire que les propriétés optiques observées ne dépendent pas de la direction que prend le champ électrique.

La linéarité permet d'utiliser la notation complexe de façon judicieuse, puisque que si alors on utilise la représentation complexe, on peut écrire  $\vec{P}(M, t) = \epsilon_0 [\underline{\chi}(M)] \vec{E}(M, t)$  avec  $[\underline{\chi}(M)]$  tenseur complexe de susceptibilité diélectrique. Si le milieu est de plus homogène, il en résulte que  $[\underline{\chi}(M)]$  ne dépend plus de M :  $[\underline{\chi}(M)] = [\underline{\chi}]$ , et si il est de plus isotrope, dans ce cas, la matrice  $[\underline{\chi}]$  se réduit à un scalaire :  $[\underline{\chi}] = \chi [I]$ .

- b- Dans les milieux (M), on a donc, d'après le a-,  $\vec{P}(M, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(M, t)$  avec  $\chi$  susceptibilité diélectrique complexe sans dimension. Il vient alors  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \underline{\epsilon}(\omega) \vec{E}$  avec  $\underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 (1 + \chi)$  permittivité diélectrique complexe en F.m<sup>-1</sup>.

### II-A-3- Propagation des ondes électromagnétiques dans (M).

a- 
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = -\mu_0 \underline{\epsilon}(\omega) \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Or 
$$\text{div}\vec{E} = \text{div}\left(\frac{\vec{D}}{\underline{\epsilon}(\omega)}\right) = \frac{1}{\underline{\epsilon}(\omega)} \text{div}\vec{D} = 0$$

D'où :  $\Delta\vec{E} - \mu_0 \underline{\epsilon}(\omega) \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$  et on trouve par les mêmes arguments la même équation pour le champ magnétique complexe.

- b- On cherche  $\vec{E}_0(M) = \vec{E}_0 \exp(i \underline{k} \cdot \vec{r})$  et  $\vec{B}_0(M) = \vec{B}_0 \exp(i \underline{k} \cdot \vec{r})$  où  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  avec O origine arbitraire.  $\underline{k} = k\vec{u}$  est le vecteur d'onde pour une direction de propagation  $\vec{u}$ . En réinjectant ces expressions dans l'équation de propagation ci-dessus, on obtient la relation de dispersion dans ce milieu :  $k^2 = \mu_0 \underline{\epsilon}(\omega) \omega^2 = \frac{\epsilon_r(\omega)}{c^2} \omega^2$ , avec c célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

- c- On définit  $\underline{n}^2(\omega) = \epsilon_r(\omega)$ . Il vient alors :  $k^2 = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$  d'où  $\underline{k} = \pm \underline{n} \frac{\omega}{c}$ . Si  $\epsilon_r$  est complexe,  $\underline{n}$

le sera aussi, d'où sa décomposition en une partie réelle et une partie imaginaire, avec une partie réelle choisie positive.

En réinjectant dans l'expression du champ électrique, il vient alors :  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp\left[-i\left(\omega t - n_r \frac{\omega}{c}(\vec{u} \cdot \vec{r})\right)\right] \exp\left[-n_i \frac{\omega}{c}(\vec{u} \cdot \vec{r})\right]$ , si on choisit le signe + dans l'expression de  $\underline{k}$ . Ce champ électrique possède donc :

- une partie oscillante se propageant à la vitesse de phase  $v_\phi = \frac{c}{n_r}$  ;
- une partie amplitude souvent décroissante  $\exp\left[-n_i \frac{\omega}{c}(\vec{u} \cdot \vec{r})\right]$  s'atténuant sur une

distance caractéristique  $\delta = \frac{c}{|n_i| \omega}$ .

$n_r$  est appelé indice de réfraction ou de dispersion, il est lié au caractère dispersif du milieu ; si  $n_r$  dépend explicitement de  $\omega$ ,  $v_\phi$  aussi, et le milieu est dispersif.

$n_i$  est appelé indice d'extinction ou d'absorption, il caractérise l'absorption de l'onde par le milieu.

Dans les zones de transparence,  $n_i(\omega)$  peut être considéré comme négligeable devant  $n_r(\omega)$ ,  $\underline{k}$  est réel, l'onde se propage sans être atténuée.

$$d- \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ entraîne } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}; \text{ div } \vec{B} = \text{div } \vec{E} = 0 \text{ entraîne } \vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0.$$

$(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  forme donc un trièdre. L'onde électromagnétique dans un DLHI est donc transverse. Par contre, comme  $\underline{k}$  est complexe (si  $n_i \neq 0$ ) alors  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne sont pas nécessairement en phase.

$$e- \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\vec{E}^* \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0 \omega} |\vec{E}|^2 \text{Re}(\vec{k}) = \frac{|\vec{E}_0|^2 \exp(-2 \frac{n_i \omega}{c} \vec{u} \cdot \vec{r})}{2\mu_0 v_\phi} \vec{u}$$

Le vecteur de Poynting moyen est dans la direction de propagation de l'onde : l'énergie se propage en moyenne dans la même direction que l'onde dans les DLHI. Il s'atténue sur une distance caractéristique de  $\frac{c}{2|n_i| \omega}$ .

## B- Réflexion et réfraction d'une onde plane à la surface de séparation de 2 milieux $(M)_1$ et $(M)_2$ transparents

**II-B-1- Lois de Snell-Descartes.** L'onde incidente dans le milieu 1, de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  et de pulsation  $\omega$ , donne naissance :

- à une onde transmise dans le milieu 2, de pulsation  $\omega_t$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_t$ , qu'on supposera aussi plane progressive monochromatique ;
- à une onde réfléchi dans le milieu 1, de pulsation  $\omega_r$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_r$ , qu'on supposera aussi plane progressive monochromatique .

En écrivant par exemple la continuité de la composante tangentielle du champ électrique à l'interface  $\Sigma$  entre le milieu 1 et le milieu 2, et en prenant O origine sur cette surface  $\Sigma$ , il vient :

Pour tout M de  $\Sigma$ , pour tout t :

$$\vec{E}_{\text{tang},i_0} \exp[-i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM})] + \vec{E}_{\text{tang},r_0} \exp[-i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM})] = \vec{E}_{\text{tang},t_0} \exp[-i(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \overrightarrow{OM})]$$

avec  $k_t = \omega_t \frac{n_2}{c}$ ,  $k_r = \omega_r \frac{n_1}{c}$ ,  $k_i = \omega \frac{n_1}{c}$ . Cette relation devant être satisfaite pour tout t, il vient immédiatement  $\omega_t = \omega = \omega_r$ . D'où  $k_t = \omega \frac{n_2}{c}$ ,  $k_r = \omega \frac{n_1}{c}$ ,  $k_i = \omega \frac{n_1}{c}$ .

On se place au voisinage immédiat de O appartenant à  $\Sigma$ . La relation étant écrite pour tout M, il vient :  $(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \overrightarrow{OM} = (\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot \overrightarrow{OM} = 0$  avec  $\overrightarrow{OM}$  vecteur tangent quelconque à  $\Sigma$  en O.

On peut donc en déduire que  $(\vec{k}_t - \vec{k}_i) // \vec{n}$ ,  $(\vec{k}_r - \vec{k}_i) // \vec{n}$  avec  $\vec{n}$  vecteur normal à  $\Sigma$  en O, et que, quelque soit  $\vec{t}$  appartenant au plan tangent à  $\Sigma$  en O :  $(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{t} = (\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot \vec{t} = 0$  (relation \*)

D'où  $\vec{k}_t = \vec{k}_i + \alpha \vec{n}$ ,  $\vec{k}_r = \vec{k}_i + \beta \vec{n}$  : première loi de Descartes : les rayons réfléchi et réfracté appartiennent au plan d'incidence.

D'autre part, en introduisant les angles orientés (de la normale vers le rayon) d'incidence  $i_1$ , de réflexion  $r_1$ , et de transmission  $i_2$ , la relation (\*) devient  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  et  $r_1 = -i_1$  : seconde loi de Descartes.

## II-B-2- Formules de Fresnel.

- a- Les quantités qui sont conservées à la traversée de la surface  $\Sigma$  sont la composante tangentielle du champ électrique, la composante normale de l'excitation électrique et le champ magnétique, les milieux étant non magnétiques et parfaitement isolants.

$$b- R_{//} = \frac{\langle dP_r \rangle_{\Sigma}}{\langle dP_i \rangle_{\Sigma}} = \frac{\langle \vec{R}_r \rangle_{\Sigma} \cdot d\vec{S}\vec{n}}{\langle \vec{R}_i \rangle_{\Sigma} \cdot d\vec{S}\vec{n}} = \frac{\cos r_1 |\underline{E}_{r0}|^2}{\cos i_1 |\underline{E}_{i0}|^2} = |r_{//}|^2 = \left| \frac{\tan(i_2 - i_1)}{\tan(i_2 + i_1)} \right|^2 = \left( \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \right)^2$$

$$T_{//} = \frac{\langle dP_t \rangle_{\Sigma}}{\langle dP_i \rangle_{\Sigma}} = \frac{\langle \vec{R}_t \rangle_{\Sigma} \cdot d\vec{S}\vec{n}}{\langle \vec{R}_i \rangle_{\Sigma} \cdot d\vec{S}\vec{n}} = \frac{n_2 \cos i_2 |\underline{E}_{t0}|^2}{n_1 \cos i_1 |\underline{E}_{i0}|^2} = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} |t_{//}|^2 = \frac{4n_1 n_2 \cos i_2 \cos i_1}{(n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2)^2}$$

Il vient donc :  $R_{//} + T_{//} = 1$  : ceci traduit la conservation de l'énergie.

- c- On remarque que  $R_{\perp} = \left( \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)} \right)^2$  ne peut pas s'annuler ( $i_1 \neq i_2$ ) alors que

$$R_{//} = \left| \frac{\tan(i_2 - i_1)}{\tan(i_2 + i_1)} \right|^2 \text{ est susceptible de s'annuler si } i_2 + i_1 = \pi/2. \text{ Dans ce cas, on est dans ce}$$

qu'on appelle l'incidence de Brewster :  $i_1 = i_{1B} = \pi/2 - i_{2B}$ . L'incidence de Brewster correspond donc à l'annulation du coefficient de réflexion  $R_{//}$ .

$$\text{Or } n_1 \sin i_{1B} = n_2 \sin i_{2B} = n_2 \cos i_{1B}. \text{ Donc } \tan i_{1B} = \frac{n_2}{n_1}$$

Si on envoie sur  $\Sigma$  une onde plane non polarisée sous l'incidence de Brewster, comme cette onde se décompose en deux ondes planes polarisées rectilignement parallèlement et orthogonalement au plan d'incidence, la composante parallèle au plan d'incidence est entièrement transmise (pas de réflexion), et **l'onde réfléchie sur  $\Sigma$  est donc alors une onde plane progressive polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence.** On réalise ainsi un polariseur rectiligne.

- d- On a jusqu'à présent supposé que l'onde transmise existait, c'est à dire que l'on avait  $i_2 < \pi/2$ .

$$\text{Or } \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1.$$

Donc si  $n_1 > n_2$ , l'onde n'est effectivement transmise dans le milieu 2 que si  $\sin i_1 < \frac{n_2}{n_1} =$

$\sin i_{11}$ . Si  $i_1 > i_{11}$ , on a un phénomène de réflexion totale. L'onde dans le milieu 2 est une onde évanescence se propageant parallèlement à  $\Sigma$  et s'atténuant très rapidement  $\perp$  à  $\Sigma$ .

## II-B-3- Application au guidage d'une onde.

- a- Le champ dans chaque couche vérifie une équation de d'Alembert :  $\Delta \vec{E} - \frac{n_i^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ .

Pour  $|x| > \frac{r_1}{2}$ , cette équation devient :  $\left( \frac{d^2 A}{dx^2} - \alpha^2 A \right) + \frac{n_2^2}{c^2} \omega^2 A = 0$ , soit

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + (k_2^2 - \alpha^2) A = 0$$

Pour  $|x| < \frac{r_1}{2}$ , on obtient de même  $\frac{d^2A}{dx^2} + (k_1^2 - \alpha^2) A = 0$

b- Le champ électrique et le champ magnétique doivent être continus aux interfaces  $\pm \frac{r_1}{2}$ . Or,

$$\text{en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient } \vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\omega} A \exp[-i(\omega t - \alpha z)] \\ 0 \\ -\frac{i}{\omega} \frac{dA}{dx} \exp[-i(\omega t - \alpha z)] \end{pmatrix}.$$

Donc A et  $\frac{dA}{dx}$  doivent être continus en  $\pm \frac{r_1}{2}$ .

La géométrie du problème admet le plan Oyz comme plan de symétrie. Il en résulte que les distributions de charges et de courant liés dans ces diélectriques admettront aussi ce plan comme plan de symétrie ou d'antisymétrie, ce qui implique que ce plan sera plan de symétrie ou d'antisymétrie pour le champ électrique, ce qui autorise la recherche de solutions A(x) paires ou impaires.

c- \* Si  $(k_j^2 - \alpha^2) < 0$ ,  $A(x) = a \exp(\sqrt{\alpha^2 - k_j^2} x) + b \exp(-\sqrt{\alpha^2 - k_j^2} x) = a' \text{ch}(\sqrt{\alpha^2 - k_j^2} x) + b' \text{sh}(\sqrt{\alpha^2 - k_j^2} x)$

\* si  $(k_j^2 - \alpha^2) > 0$ ,  $A(x) = a'' \cos(\sqrt{k_j^2 - \alpha^2} x) + b'' \sin(\sqrt{k_j^2 - \alpha^2} x)$

d- Si  $k_1 < \alpha$  alors  $k_2 < k_1 < \alpha$  (en effet,  $n_2 < n_1$ ). On aurait alors :

Pour les solutions paires :  $x < -\frac{r_1}{2}$  :  $a' \exp(\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} x)$  (pas de divergence)

$$-\frac{r_1}{2} < x < \frac{r_1}{2} \quad a'' \text{ch}(\sqrt{\alpha^2 - k_1^2} x)$$

$$x > \frac{r_1}{2} \quad a' \exp(-\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} x)$$

La continuité de A et de dA/dx en  $+\frac{r_1}{2}$  amène à  $\text{th}(\sqrt{\alpha^2 - k_1^2} \frac{r_1}{2}) = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}}{\sqrt{\alpha^2 - k_1^2}} < 0$  ce qui

est impossible.

Pour les solutions impaires :  $x < -\frac{r_1}{2}$  :  $a' \exp(\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} x)$  (pas de divergence)

$$-\frac{r_1}{2} < x < \frac{r_1}{2} \quad a'' \text{sh}(\sqrt{\alpha^2 - k_1^2} x)$$

$$x > \frac{r_1}{2} \quad -a' \exp(-\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} x)$$

La continuité de A et de dA/dx en  $+\frac{r_1}{2}$  amène à  $\text{th}(\sqrt{\alpha^2 - k_1^2} \frac{r_1}{2}) = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}}{\sqrt{\alpha^2 - k_1^2}} < 0$  ce qui

est impossible.

Il n'y a donc pas de solutions au problème pour  $k_1 < \alpha$ .

D'autre part, pour qu'il y ait guidage, il faut qu'il y ait réflexion énergétique totale en  $\pm \frac{r_1}{2}$ .

L'onde dans les parties d'indice  $n_2$  doit donc être évanescente pour que l'onde soit guidée, ce qui impose  $k_2 < \alpha$ .

e-  $k_2 < \alpha \leq k_1$

Pour les solutions paires :  $x < -\frac{r_1}{2}$  :  $E_2 \exp(\gamma x)$

$-\frac{r_1}{2} < x < \frac{r_1}{2}$   $E_1 \cos(\beta x)$

$x > \frac{r_1}{2}$   $E_2 \exp(-\gamma x)$

La continuité de A et de dA/dx en  $+\frac{r_1}{2}$  amène à  $\beta \tan(\beta \frac{r_1}{2}) = \gamma$ , soit  $\gamma \frac{r_1}{2} = \beta \frac{r_1}{2} \tan(\beta \frac{r_1}{2})$ .

f- Pour les solutions impaires :  $x < -\frac{r_1}{2}$  :  $E_2 \exp(\gamma x)$

$-\frac{r_1}{2} < x < \frac{r_1}{2}$   $E_1 \sin(\beta x)$

$x > \frac{r_1}{2}$   $-E_2 \exp(-\gamma x)$

La continuité de A et de dA/dx en  $+\frac{r_1}{2}$  amène à  $\beta \cotan(\beta \frac{r_1}{2}) = -\gamma$ , soit  $\gamma \frac{r_1}{2} = -\beta \frac{r_1}{2} \cotan(\beta \frac{r_1}{2})$ .

$\beta \frac{r_1}{2} \cotan(\beta \frac{r_1}{2})$ .

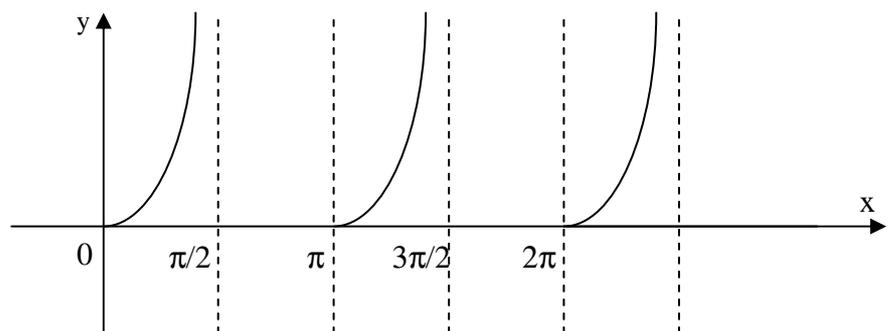
g- Analogie avec le puits quantique : dans la barrière, les ondes sont aussi des ondes évanescentes, et la symétrie est identique.

h- \* Solutions paires :

$$y = \gamma \frac{r_1}{2} > 0$$

$$x = \beta \frac{r_1}{2} > 0$$

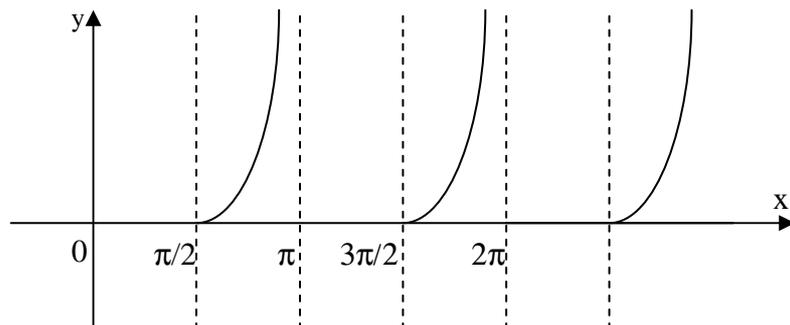
$$y = x \tan x.$$



\* Solutions impaires :

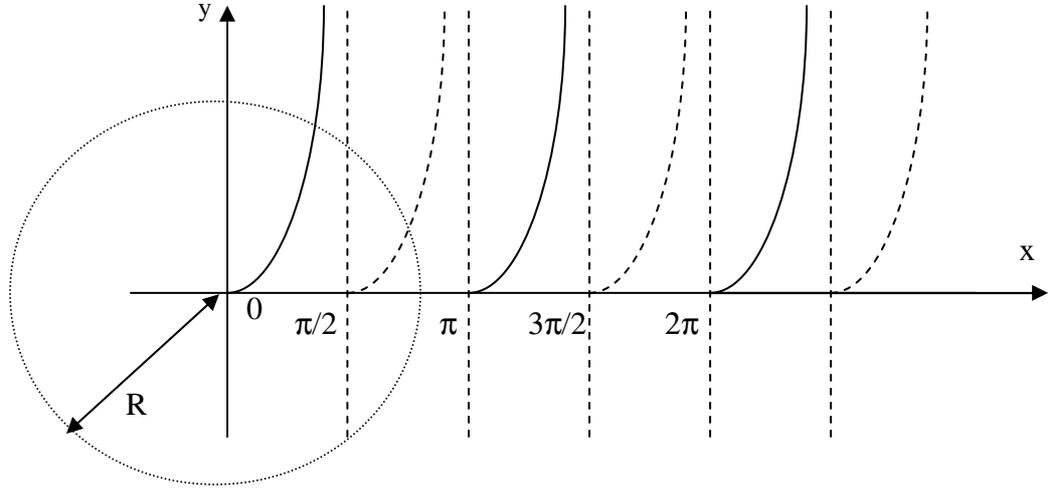
$$y = \gamma \frac{r_1}{2} > 0$$

$$x = \beta \frac{r_1}{2} > 0$$



$$y = -x \cotan x.$$

Sachant que  $x^2 + y^2 = r_1^2 \frac{k_1^2 - k_2^2}{4}$ , ce qui est l'équation d'un cercle de rayon  $r_1 \frac{\sqrt{k_1^2 - k_2^2}}{2} = R$  centré en O, il suffit donc de trouver les intersections de ce cercle avec les solutions précédentes.



Si  $0 < R < \pi/2$ , il n'existe qu'une seule intersection, donc qu'un seul mode, le mode pair TE.

Si  $p\pi/2 < R < (p+1)\pi/2$ , il existe  $(p+1)$  solutions :

- Si  $p+1$  est pair : il y aura alors  $(p+1)/2$  solutions paires et  $(p+1)/2$  solutions impaires.
- Si  $p+1$  est impair, il y aura  $p/2$  solutions impaires et  $p/2 + 1$  solutions paires.

Il existe donc toujours au moins un mode TE qui sera forcément pair.

Si  $N$  représente le nombre de solutions, alors, d'après ce qui précède :  $N = 1 + \text{Ent}(2R/\pi)$ ,

$$\text{d'où } N = 1 + \text{Ent} \left( \frac{r_1 \omega}{c\pi} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)$$

- i- Une fibre monomode est telle que  $N = 1$  : un seul mode TE peut se propager, et il sera pair.

$$\frac{r_1 \omega}{c\pi} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 1, \text{ d'où la valeur de } r_{1\text{max}}.$$

- j- Le  $p^{\text{ième}}$  mode existe si  $R > (p-1)\pi/2$ , donc  $\frac{r_1 \omega}{c\pi} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} > p-1$ , soit  $\omega > \omega_{cp} = \frac{(p-1)\pi c}{r_1 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$ .

La limite d'existence de ce  $p^{\text{ième}}$  mode correspond à  $R = (p-1)\pi/2$ , soit à  $\beta_p \frac{r_1}{2} = (p-1)\pi/2$

$$\text{et } \gamma_p \frac{r_1}{2} = 0.$$

La plus petite pulsation de coupure non nulle se trouve être celle correspondant à  $p=2$ . Si  $\omega < \omega_{2c}$ , il ne pourra se propager dans la fibre qu'un seul mode, le mode  $p=1$  qui est forcément pair.

# Partie III : Propagation dans les milieux non isotropes : biréfringence d'un milieu uniaxe.

## A- Etude générale

### III-A-1- Introduction du tenseur diélectrique

- a- Un milieu est anisotrope optiquement si ses propriétés optiques diffèrent suivant la direction de propagation de l'onde. La réponse du milieu dépendra en fait de la direction du champ électrique associé à l'onde. La relation entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  se met sous forme d'un tenseur qui ne se réduit pas à un scalaire.

Le phénomène de biréfringence correspondant au fait que, dans un milieu anisotrope, pour une direction de propagation donnée, il existe généralement deux valeurs d'indice qui satisfont aux équations de Maxwell.

- b-  $\vec{D} = [\epsilon] \vec{E}$  avec  $[\epsilon]$  tenseur diélectrique à trois dimensions. On peut trouver une base, dite base principale, dans laquelle cette matrice est diagonale. Dans la base principale, on peut

$$\text{donc écrire : } \vec{D} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \vec{E}$$

On appelle alors milieu uniaxe un milieu où deux des permittivités diélectriques principales sont égales entre elles, et différentes de la troisième :  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ .

### III-A-2- Structure de l'onde dans un milieu anisotrope.

$$\text{a- } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}, \quad \vec{B} \perp \vec{k}$$

$$\text{div} \vec{D} = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{k}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \vec{B} = -i \mu_0 \omega \vec{D} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\mu_0 \omega} \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{D} \perp \vec{B}$$

$(\vec{k}, \vec{D}, \vec{B})$  forment donc un trièdre direct, mais  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  ne sont pas parallèles a priori.

On identifie la vibration au vecteur  $\vec{D}$  pour conserver la transversalité.

- b- Le plan d'onde est le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$  donc à  $\vec{u}$  : c'est donc le plan  $(\vec{D}, \vec{B})$

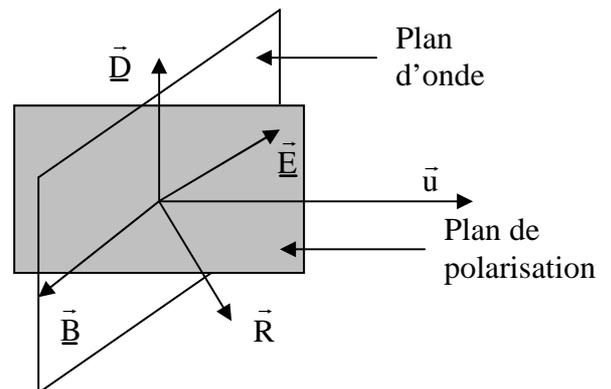
Le plan de polarisation est le plan  $(\vec{D}, \vec{u})$ , il contient donc le champ électrique.

Sachant que le vecteur de Poynting  $\vec{R}$  est donné

$$\text{par } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \text{ il vient donc } \vec{R} \perp \vec{E} \text{ et } \vec{R} \perp \vec{B}, \vec{R} \text{ appartient au plan de polarisation, et est}$$

représenté sur le schéma ci-dessus.

Dans les milieux isotropes,  $\vec{R}$  est parallèle à  $\vec{u}$ , ce qui n'est plus le cas dans les milieux anisotropes. Le rayon lumineux n'est plus colinéaire au vecteur d'onde dans de tels milieux, a priori.



$$c- \quad \omega \mu_0 \vec{D} = \vec{B} \wedge \vec{k} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \wedge \vec{k} = -(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} + k^2 \vec{E}, \text{ d'où } k^2 \vec{E} - \mu_0 \omega^2 \vec{D} = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} \quad . \quad \omega/k$$

représente la vitesse de phase de l'onde considérée

d-

α- Dans ce cas,  $D_x = 0$ , et donc  $E_x = 0$ . Le champ électrique est donc à présent transverse.

β- Si  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement selon OY, alors  $E_z = 0$ , d'où  $D_z = 0$ .  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont colinéaires, et la relation de la question c- permet d'obtenir l'équation suivante :

$$(k^2 - \mu_0 \epsilon_Y \omega^2) E_Y = 0. \quad E_Y \text{ n'étant pas nul, on en déduit que } \omega/k = v_Y = c/n_Y.$$

Si  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement selon OZ, alors  $E_Y = 0$ , d'où  $D_Y = 0$ .  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont colinéaires, et la relation de la question c- permet d'obtenir l'équation suivante :

$$(k^2 - \mu_0 \epsilon_Z \omega^2) E_Z = 0. \quad E_Z \text{ n'étant pas nul, on en déduit que } \omega/k = v_Z = c/n_Z.$$

Ces deux ondes ne se propageront donc pas à la même vitesse dans le milieu, à part si  $n_Z = n_Y \dots$

### B- Lames cristalline uniaxes taillées parallèlement à leur axe optique

**III-B-1-** Toute onde plane polarisée rectilignement suivant une des lignes neutre traverse la lame sans modification de sa polarisation. Ces lignes neutres ont comme directions dans la base principale Oy, avec l'indice associé  $n_0$  et Oz, avec l'indice associé  $n_E$ .

**III-B-2-** On dispose d'une lampe à vapeur de sodium, munie d'un diaphragme D en sortie. On réalise un faisceau parallèle à l'aide d'une lentille, et on place un écran à la sortie du montage. Puis on place un successivement un polariseur P et un analyseur A sur le trajet des rayons parallèles, que l'on croise afin d'obtenir une extinction sur l'écran.

On introduit ensuite la lame biréfringente à étudier entre P et A, et on la fait tourner dans son plan. L'extinction est rétablie à chaque fois qu'une des lignes neutres de la lame correspond à la direction de polarisation de P ou de A.

**III-B-3-**  $n_0 < n_E$  : l'axe lent est l'axe Oz (extraordinaire), l'axe rapide l'axe Oy (axe ordinaire).

**III-B-4-** On suppose que la lame occupe l'espace des x compris entre 0 et e, et on note  $\alpha$  l'angle  $(\vec{e}_z, \vec{E}_i)$ , avec  $\vec{E}_i$  champ électrique de l'onde incidence du côté des  $x < 0$ .

$$\vec{E}_i(x, t) = \vec{E}(x < 0, t) = \begin{cases} 0 \\ -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kx) \end{cases} \quad \vec{E}(0 < x < e, t) = \begin{cases} 0 \\ -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - n_0 kx) \\ E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - n_E kx) \end{cases}$$

$$\vec{E}(x > e, t) = \begin{cases} 0 \\ -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - k(x - e) - n_0 ke) \\ E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - k(x - e) - n_E ke) \end{cases}$$

La lame introduit donc un retard de la composante suivant l'axe lent par rapport à la composante suivant l'axe rapide :  $\Phi = (n_E - n_0) \frac{2\pi}{\lambda} e$ .

- Si  $\Phi = 2p\pi$ , la vibration émergente est polarisée rectilignement parallèlement au champ incident.

- Si  $\Phi = (2p+1)\pi$ , le champ émergent est polarisé rectilignement dans une direction symétrique de la direction du champ incident par rapport aux lignes neutres de la lame.

- Si  $\Phi \neq p\pi$ , la polarisation de l'onde émergente est elliptique dans le cas général.

**III-B-5-** Une telle lame est sans action sur la lumière non polarisée.

**III-B-6-**

Lame  $\lambda/2$  :  $\Phi = (2p+1)\pi$ , soit  $(n_E - n_0)e = \lambda (p+1/2)$

Lame  $\lambda/4$  :  $\Phi = (p+1/2)\pi$ , soit  $(n_E - n_0)e = \lambda (p/2+1/4)$

$$e_{\min} = \frac{\lambda}{2(n_E - n_0)} = 32,4\mu\text{m}.$$

**III-B-7- Polariseur circulaire** : on dispose d'une lampe à vapeur de sodium, munie d'un diaphragme D en sortie. On réalise un faisceau parallèle à l'aide d'une lentille (auto collimation). On place ensuite un polariseur P sur le trajet de l'onde, et derrière P une lame  $\lambda/4$  dont les lignes neutres sont à  $45^\circ$  de l'axe de polarisation de P. La lumière émergente de la  $\lambda/4$  est polarisée circulairement.

**Analyseur circulaire** : on place sur le trajet d'une onde plane de polarisation inconnue, en incidence normale, une lame  $\lambda/4$  suivie d'un analyseur. Si la lumière incidente est polarisée circulairement, son passage dans la  $\lambda/4$  la transforme en rectiligne, elle peut être éteinte par rotation de l'analyseur.

**III-B-8-** On place, entre la source et le miroir, un polariseur P sur le trajet de l'onde, et derrière P une lame  $\lambda/4$  dont les lignes neutres sont à  $45^\circ$  de l'axe de polarisation de P. La lumière émergente de la  $\lambda/4$  (sens aller) est polarisée circulairement, droite ou gauche ; par réflexion sur le miroir, cette lumière reste polarisée circulairement, mais son sens de rotation est inversé. Après traversée en sens retour de la  $\lambda/4$ , elle est transformée en une rectiligne qui sera éteinte par P : dispositif anti-reflet.

**III-B-9-** Si P et A sont croisés, les longueurs d'onde  $\lambda_p$  telles que  $(n_E - n_0) \frac{2\pi}{\lambda_p} e = 2p\pi$  sont éteintes

par A. La lumière recueillie en sortie présente donc des extinctions pour ces  $\lambda_p$  particuliers.

Si  $e$  est faible, il n'y a que quelques longueurs d'onde dans le visible à être éteintes : on observe donc une teinte résultante, colorée, qui correspond à la lumière blanche privée de ces quelques longueurs d'onde (si on supprime le bleu, on observera du rouge, si on supprime le bleu et le rouge, on observera une teinte jaune verdâtre...)

Lorsque  $e$  augmente, il y a de plus en plus de longueurs d'onde à être éteintes dans toute l'étendue du spectre ; il reste alors suffisamment de composantes de chacune des trois couleurs fondamentales pour que l'impression visuelle soit proche du blanc : blanc d'ordre supérieur, blanc grisâtre.

Si P et A sont parallèles, les longueurs d'onde éteintes vérifient à présent  $(n_E - n_0) \frac{2\pi}{\lambda_p} e = (2p+1)\pi$ .

On obtient alors la couleur dite complémentaire de la première (P et A croisés).

### C- Déterminations expérimentales d'une biréfringence.

#### III-C-1- Méthode du spectre cannelé pour une lame « épaisse ».

a- On dispose d'une lampe blanche, munie d'une fente F en sortie. On fait l'image de cette fente sur la fente d'entrée d'un analyseur de spectre (spectromètre à réseau...) placé assez loin de la source pour que le faisceau soit peu convergent. On place ensuite entre la lentille et l'analyseur de spectre un polariseur P et un analyseur A que l'on croise. Entre P et A ainsi croisés, on introduit une lame biréfringente épaisse dont les lignes neutres sont à  $45^\circ$  de l'axe de polarisation de P : on obtient ainsi un spectre cannelé à la sortie de l'analyseur.

b- Entre P et A croisés, les cannelures sombres correspondant à  $\lambda_p = \frac{|n_E - n_0|}{p} e = \Delta n e / p$ .

On repère deux cannelures sombres,  $p$  et  $p+k = p'$ , et on note les longueurs d'onde correspondantes  $\lambda_p$  et  $\lambda_{p'}$ .

On a alors :

$$p = \Delta n e / \lambda_p \text{ et } p+k = \Delta n e / \lambda_{p+k} \quad \text{d'où } k = \Delta n e (1/\lambda_{p+k} - 1/\lambda_p).$$

Il vient donc :  $\Delta n e = \frac{\lambda_{p'} \lambda_p}{\lambda_p - \lambda_{p'}} (p' - p) = \frac{\lambda_{p'} \lambda_p}{\lambda_p - \lambda_{p'}} k$ , où  $k$  représente en fait le nombre de

cannelures brillantes entre les deux cannelures sombres pointées.

c- On pointe une cannelure sombre à  $\lambda_p = 500\text{nm}$ , une autre à  $\lambda_{p'} = 800\text{nm}$  ; on compte  $k=30$  cannelures brillantes entre ces deux cannelures sombres pointées ; On obtient ainsi  $\Delta n = 10^{-2}$ .

**III-C-2-** On peut utiliser la méthode de la lame quart d'onde ou bien la méthode dite du compensateur de Babinet : un compensateur de Babinet est constitué de deux prismes de quartz de très petit angle accolés tête-bêche. L'un des prismes a son axe optique parallèle à son arête, l'autre perpendiculaire à l'arête. On éclaire le compensateur en lumière parallèle, et on fait son image sur un écran. On le place ensuite entre P et A croisés, et on le tourne de  $45^\circ$  à partir de l'extinction. On obtient des franges sur l'écran, dont l'interfrange est reliée à  $\Delta n$ .

**III-C-3-** Oui, on peut rendre certains matériaux isotropes biréfringents, par application d'un champ électrique (effet Pockels ou effet Kerr), d'un champ magnétique (effet Cotton), ou par des contraintes mécaniques.

Applications : modulation de l'intensité d'un faisceau lumineux par effet Pockels ou par effet Kerr, interrupteurs optiques, observation du champ des contraintes s'exerçant sur des matériaux solides comme des résines, verres, et mesure de ces contraintes (photoélasticité).

**III-C-4-** Exemples de milieux biréfringents non cristallins : les cristaux liquides, les solides amorphes ou liquides sous une action extérieure, les films plastiques étirés.

## Partie IV : Propagation dans les milieux diélectriques homogènes isotropes isolants, non magnétiques et non linéaires

### A- Généralités

**IV-A-1-** on peut citer le doublage ou le mélange de fréquences, l'amplification paramétrique optique, la bistabilité optique. Il faut des sources monochromatiques (laser) intenses.

**IV-A-2-** On calcule :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial\vec{\text{rot}}\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}_L + \vec{P}_{NL})}{\partial t^2}$$

Or, par construction du champ électrique,  $\text{div}\vec{E} = 0$ .

D'où, pour tout  $t$  :

$$\Delta(\sum_j \vec{E}_j(\vec{k}_j, \omega_j)) = \sum_j \Delta(\vec{E}_j(\vec{k}_j, \omega_j)) = \sum_j \frac{\partial^2(\mu_0\epsilon_0((1 + \chi(\omega_j))\vec{E}_j(\vec{k}_j, \omega_j) + \frac{\vec{P}_{NL,j}(\vec{k}_j, \omega_j)}{\epsilon_0}))}{\partial t^2}$$

Or  $1 + \chi(\omega_j) = \epsilon_r(\omega_j) = n(\omega_j)^2$ , et  $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

De plus, cette relation devant être vraie pour tout  $t$ , étant donné l'indépendance de la base des fonctions harmoniques, elle doit être vraie pour chacun des champs (de pulsation  $\omega_j$ ) composant le champ électrique total.

D'où la relation :  $\Delta\vec{E}_j - \frac{n(\omega_j)^2}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}_j}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2\vec{P}_{NL,j}}{\partial t^2}$

**IV-A-3-** En utilisant la notation complexe dans l'expression ci-dessus, en développant le Laplacien et en projetant suivant l'axe  $Ox$ , il vient :

$$\frac{\partial^2\underline{E}_j}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\underline{A}_j(z)e^{i(k_j z - \omega_j t)}] = \frac{d^2\underline{A}_j(z)}{dz^2} e^{i(k_j z - \omega_j t)} + 2ik_j \frac{d\underline{A}_j(z)}{dz} e^{i(k_j z - \omega_j t)} + \underline{A}_j(-k_j^2) e^{i(k_j z - \omega_j t)}$$

Dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable, on a  $\left| \frac{d^2 \underline{A}_j(z)}{dz^2} \right| \ll k_j \left| \frac{d \underline{A}_j(z)}{dz} \right|$ ; en utilisant

le fait que  $k_j^2 = \frac{n(\omega_j)^2}{c^2} \omega_j^2$ , sachant que  $\frac{\partial^2 \underline{P}_{NL,j}}{\partial t^2} = -\omega_j^2 \underline{B}_j(z) e^{i(k_j z - \omega_j t)}$ , on obtient, après simplification, le résultat proposé.

## B- Interaction à trois ondes

### IV-B-1- Equation de propagation

a- Le champ électrique présent à l'entrée du milieu est de la forme :

$$\vec{E} = \frac{\vec{e}_x}{2} \left[ \underline{A}_1(z) e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + cc + \underline{A}_2(z) e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} + cc \right]$$

Dans la polarisation non linéaire en  $\vec{E} \cdot \vec{E}$  on va donc retrouver des termes en  $\exp(i[k_1 + k_2]z - (\omega_1 + \omega_2)t)$  correspondant à l'onde  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  et des termes en  $\exp(i[k_1 - k_2]z - (\omega_1 - \omega_2)t)$  correspondant à l'onde  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$

b- En développant  $2d(\vec{E} \cdot \vec{E})$ , et en ne considérant que le terme en  $\exp(i[k_3 z - \omega_3 t])$  de la polarisation non linéaire correspondant à la pulsation  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , on obtient immédiatement

$$2d \underline{A}_1(z) \underline{A}_2(z) e^{i[(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t]} = \underline{B}_3(z) e^{i[k_3 z - \omega_3 t]}$$

$$\Rightarrow \underline{B}_3(z) = 2d \underline{A}_1(z) \underline{A}_2(z) e^{i(k_1 + k_2 - k_3)z}$$

d'où l'équation de propagation  $\frac{d \underline{A}_3(z)}{dz} = \frac{i \omega_3^2 2d}{2k_3 \epsilon_0 c^2} \underline{A}_1(z) \underline{A}_2(z) e^{i \Delta k z}$

c- Si on suppose  $\underline{A}_1(z) \approx \underline{A}_1(0)$  et  $\underline{A}_2(z) \approx \underline{A}_2(0)$  constantes, l'équation devient

$$\frac{d \underline{A}_3(z)}{dz} = \frac{i \omega_3^2 d}{k_3 \epsilon_0 c^2} \underline{A}_1(0) \underline{A}_2(0) e^{i \Delta k z}$$

$$\underline{A}_3(L) = \int_0^L d \underline{A}_3(z) = \int_0^L dz \frac{i \omega_3^2 d}{k_3 \epsilon_0 c^2} \underline{A}_1(0) \underline{A}_2(0) e^{i \Delta k z} = \frac{\omega_3^2 d}{k_3 \epsilon_0 c^2 \Delta k} \underline{A}_1(0) \underline{A}_2(0) [e^{i \Delta k L} - 1]$$

Donc

$$\underline{A}_3(L) = i \frac{\omega_3^2 d}{k_3 \epsilon_0 c^2} \underline{A}_1(0) \underline{A}_2(0) e^{i \frac{\Delta k}{2} L} \left[ \sin c \left( \frac{\Delta k}{2} L \right) \right]$$

d-  $l_c = 2\pi/\Delta k$  correspond au premier zéro du sinc. Pour une longueur de cristal  $l = l_c$ , l'onde générée a une amplitude nulle. C'est la longueur au bout de laquelle les ondes générées tout au long du cristal interfèrent de manière destructive et où l'efficacité de conversion est nulle.

e- Le  $\text{sinc}$  vaut toujours 1 si  $\Delta k = 0$ , le transfert d'énergie est maximal.

$$\Delta k = 0 \Leftrightarrow k_3 = k_1 + k_2$$

L'onde générée à la pulsation  $\omega_3$  se propage avec le vecteur d'onde  $k_3$ . Cette onde est créée tout au long du cristal à partir de la composante de la polarisation non linéaire à la pulsation  $\omega_1 + \omega_2$  qui se propage avec le vecteur d'onde  $k_1 + k_2$ . Si  $k_1 + k_2 = k_3$ , l'onde générée en un point du cristal est en phase avec l'onde générée en début de cristal et interfère constructivement avec elle. La conversion est alors optimale.

### IV-B-2- Doublage de fréquence

a- Par rapport au paragraphe précédent, on a  $\omega_1 = \omega_2$  donc  $\omega_3 = 2 \omega_1$ .

b- La condition d'accord de phase s'écrit  $k_3 = 2k_1 \Leftrightarrow n_3 \omega_3 = 2 n_1 \omega_1 \Leftrightarrow n_3 = n_1$

c- En posant  $\underline{A}_1 = \underline{A}_2$  et  $\Delta k = 0$  dans l'équation du IV-B-1-b, on a

$$\frac{d\underline{A}_3(z)}{dz} = \frac{i\omega_3^2 d}{k_3 \epsilon_0 c^2} [\underline{A}_1(z)]^2 \text{ soit } K = \frac{\omega_3^2 d}{k_3 \epsilon_0 c^2} \cdot (z)$$

d- On pose  $X = |\underline{A}_1(z)|^2 + |\underline{A}_2(z)|^2 = \underline{A}_1 \underline{A}_1^* + \underline{A}_2 \underline{A}_2^*$

En dérivant par rapport à  $z$ ,  $dX/dz = \underline{A}_1 d\underline{A}_1^* + \underline{A}_1^* d\underline{A}_1 + \underline{A}_2 d\underline{A}_2^* + \underline{A}_2^* d\underline{A}_2 = \underline{A}_1 (-iK \underline{A}_1 \underline{A}_3^*) + \underline{A}_1^* (iK \underline{A}_1^* \underline{A}_3) + \underline{A}_2 (-iK \underline{A}_1^2) + \underline{A}_2^* (iK \underline{A}_1^2) = 0$

Soit  $|\underline{A}_1(z)|^2 + |\underline{A}_2(z)|^2 = \text{cte}$ , correspondant à la conservation de l'énergie totale des ondes le long du cristal.

e- On a  $\frac{d\underline{A}_1(z)}{dz} = iK \underline{A}_1(z) \underline{A}_3(z)$  et  $\frac{d\underline{A}_3(z)}{dz} = iK [\underline{A}_1(z)]^2$  en considérant que  $\underline{A}_1(z)$  reste réel pour tout  $z$ .

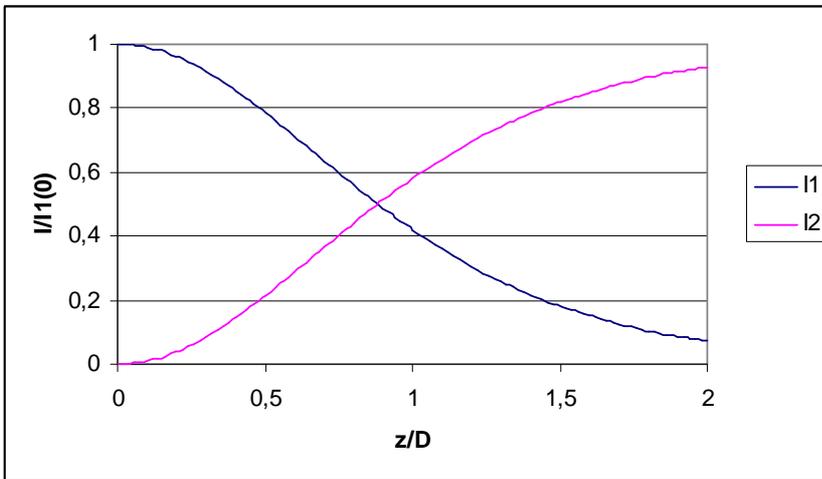
Posons  $\underline{A}_3 = i\underline{A}_3'$ , les nouvelles équations et les conditions initiales  $A_1(0)$  réel et  $\underline{A}_3(0) = 0$  imposent  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_3'$  réels et la conservation de l'énergie s'écrit  $A_1^2 + A_3'^2 = A_1^2(0)$

D'où :

$$\frac{d\underline{A}_3'}{dz} = KA_1^2(0) \left[ 1 - \frac{A_3'^2}{A_1^2(0)} \right] \Rightarrow A_3'(z) = A_1(0) \text{th}(KA_1(0)z) + \text{cte} ; \text{cte} = 0 \text{ car } A_3'(0) = 0$$

donc  $\underline{A}_3(z) = iA_1(0) \text{th}\left(\frac{z}{D}\right)$  avec  $D = \frac{1}{KA_1(0)}$

et  $A_1^2(z) = A_1^2(0) - A_1^2(0) \text{th}^2\left(\frac{z}{D}\right) = \frac{A_1^2(0)}{\text{ch}^2\left(\frac{z}{D}\right)}$  soit  $\underline{A}_1(z) = \frac{A_1(0)}{\text{ch}\left(\frac{z}{D}\right)} = A_1(z)$



Pour transformer la quasi-totalité de l'onde en onde de fréquence double, il faut  $z > 3D$ , plus facilement réalisable pour  $A_1(0)$  grand.

f-  $D = \frac{1}{KA_1(0)} = \frac{k_3 \epsilon_0 c^2}{\omega_3^2 d A_1(0)} = \frac{\epsilon_0 n \lambda}{2\pi d A_1(0)}$ . Or  $P = 1/2 \epsilon c A_1^2 \Rightarrow A_1 = 5,8 \cdot 10^5 \text{ SI}$ , soit  $D = 3,6 \text{ cm}$

Si on prend  $z = D$ ,  $|A_3(D)| = 0,76 |A_3(0)|$  donc  $P_3 = 0,58 \text{ GWm}^{-2}$

**FIN**