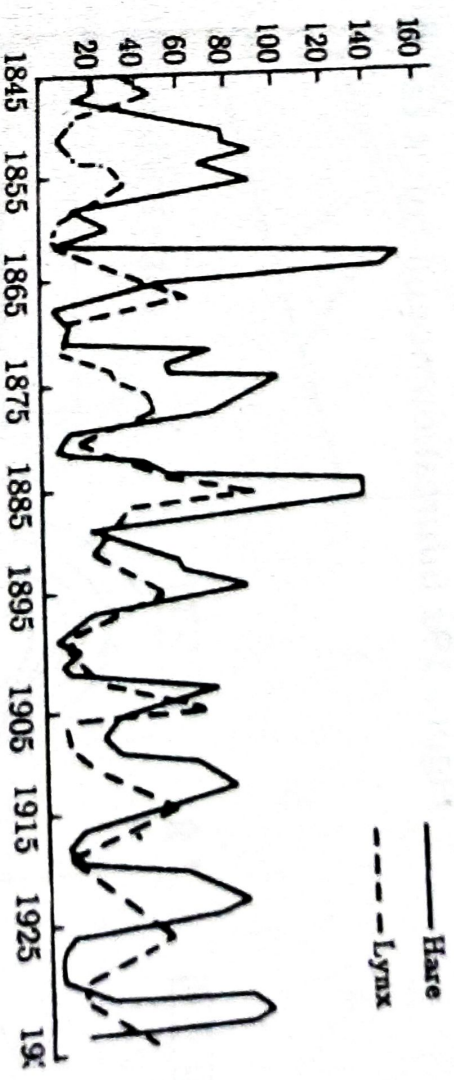
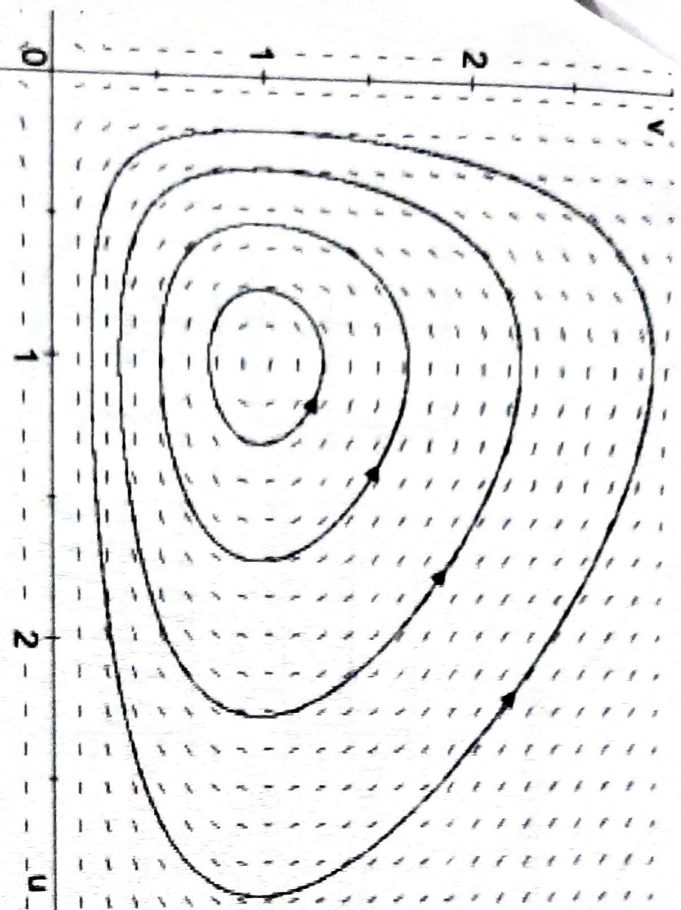




Figures 16 et 17 : Portrait de phase du modèle proies/prédateurs de Lotka-Volterra (droite).
Variations des populations de lynx et de lièvres dans le Nord Canadien (gauche)

- Deux points fixes : $\vec{X}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $[\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ \alpha v & \alpha(u-1) \end{pmatrix}$

➤ Stabilité en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : [\mathcal{L}_{(0,0)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, $\det [\mathcal{L}_{X^*}] < 0$ donc $\vec{X}^*$ est un point col ($\lambda = 1$ et $\lambda = -\alpha$).

➤ Stabilité en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : [\mathcal{L}_{(1,1)}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\det [\mathcal{L}_{X^*}] > 0$ et $\text{Tr} [\mathcal{L}_{X^*}] = 0$ donc $\vec{X}^*$ est un centre ($\lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$).

- Portrait de phase, dynamique d'oscillations avec déphasage (maximum de proies suivi par un maximum de prédateurs), voir Figs. 16 et 17.

• Oscillateur de Van der Pol (Fig. 18)

- Equation de l'oscillateur de Van der Pol : $\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0$, où ϵ est le **paramètre de contrôle** (voir § 1.2.2).

- Qualitativement : si $\epsilon < 0$, il y a toujours dissipation et le point fixe ($x = 0, \dot{x} = 0$) est **asymptotiquement stable** (réponse indécise).

• **Dynamique des populations : modèle proies/prédateurs de Lotka-Volterra** (Figs. 16 et 17)

- Deux espèces (x proies de taux de natalité a et y prédateurs de taux de mortalité c) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

- Adimensionnement du système ($\tau = at, u = x d/c, v = y b/a, \alpha = c/a$) :

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - v) \\ \dot{v} = \alpha v(u - 1) \end{cases}$$