

Effet Doppler acoustique : démonstration générale

On veut calculer la relation entre la fréquence ν des ondes sonores émises par une source S et la fréquence ν' perçue par un récepteur R . On suppose que, à la petite déformation près provoquée par le passage de l'onde, les points du milieu dans lequel le son se propage sont fixes les uns par rapport aux autres.

Plaçons-nous dans un référentiel où ce milieu est au repos et notons c la célérité (constante) des ondes sonores, et \vec{v} et \vec{v}' les vitesses (éventuellement variables) de S et R . Ces trois vitesses sont suffisamment faibles devant celle de la lumière pour que la physique newtonienne soit applicable ; en particulier, les distances et les durées entre deux événements sont indépendantes du mouvement de la source et du récepteur.

Considérons deux signaux émis aux instants t et $t + dt$ par S et reçus aux instants t' et $t' + dt'$ par R . Le son se propageant de $S_1 := S(t)$ à $R_1 := R(t')$ et de $S_2 := S(t + dt)$ à $R_2 := R(t' + dt')$ avec une vitesse c , on a

$$t' = t + \frac{\|\vec{S}_1\vec{R}_1\|}{c} \quad \text{et} \quad t' + dt' = t + dt + \frac{\|\vec{S}_2\vec{R}_2\|}{c},$$

d'où

$$dt' = dt + \frac{\|\vec{S}_2\vec{R}_2\| - \|\vec{S}_1\vec{R}_1\|}{c}.$$

Or

$$\begin{aligned} \|\vec{S}_2\vec{R}_2\| &= \|\vec{S}_2\vec{S}_1 + \vec{S}_1\vec{R}_1 + \vec{R}_1\vec{R}_2\| \\ &= \sqrt{(\vec{S}_2\vec{S}_1 + \vec{S}_1\vec{R}_1 + \vec{R}_1\vec{R}_2) \cdot (\vec{S}_2\vec{S}_1 + \vec{S}_1\vec{R}_1 + \vec{R}_1\vec{R}_2)} \\ &= \sqrt{\|\vec{S}_1\vec{R}_1\|^2 + 2 \vec{S}_2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_1\vec{R}_1 + 2 \vec{R}_1\vec{R}_2 \cdot \vec{S}_1\vec{R}_1 + 2 \vec{S}_2\vec{S}_1 \cdot \vec{R}_1\vec{R}_2 + \|\vec{S}_2\vec{S}_1\|^2 + \|\vec{R}_1\vec{R}_2\|^2}. \end{aligned}$$

On a $\vec{S}_2\vec{S}_1 = -\vec{v}(t) dt$ et $\vec{R}_1\vec{R}_2 = \vec{v}'(t') dt'$. Les termes $\vec{S}_2\vec{S}_1 \cdot \vec{R}_1\vec{R}_2$, $\|\vec{S}_2\vec{S}_1\|^2$ et $\|\vec{R}_1\vec{R}_2\|^2$ sont en $dt dt'$, dt^2 et dt'^2 , donc d'ordre 2 et négligeables devant $\|\vec{S}_1\vec{R}_1\|^2$ (ordre 0) et les termes d'ordre 1, $\vec{S}_2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_1\vec{R}_1$ et $\vec{R}_1\vec{R}_2 \cdot \vec{S}_1\vec{R}_1$ (en dt et dt' respectivement). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\vec{S}_2\vec{R}_2\| &\approx \sqrt{\|\vec{S}_1\vec{R}_1\|^2 + 2 \vec{S}_1\vec{R}_1 \cdot (\vec{v}' dt' - \vec{v} dt)} \\ &= \|\vec{S}_1\vec{R}_1\| \sqrt{1 + \frac{2}{\|\vec{S}_1\vec{R}_1\|} \frac{\vec{S}_1\vec{R}_1}{\|\vec{S}_1\vec{R}_1\|} \cdot (\vec{v}' dt' - \vec{v} dt)} \\ &\approx \|\vec{S}_1\vec{R}_1\| \left(1 + \frac{1}{\|\vec{S}_1\vec{R}_1\|} \vec{u} \cdot [\vec{v}' dt' - \vec{v} dt] \right), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\vec{u} := \frac{\vec{S}(t)R(t')}{\|\vec{S}(t)R(t')\|}.$$

On a donc

$$\|\vec{S}_2\vec{R}_2\| - \|\vec{S}_1\vec{R}_1\| = \vec{u} \cdot (\vec{v}' dt' - \vec{v} dt),$$

soit

$$dt' = dt + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}'}{c} dt' - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c} dt.$$

Finalement,

$$dt' = dt \frac{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}/c}{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}'/c}.$$

Remarque. — Le fait que $dt \neq dt'$ n'est pas contradictoire avec ce qui était dit dans le deuxième paragraphe sur l'indépendance des durées vis à vis du mouvement en physique newtonienne, car l'émission et la réception d'un même signal correspondent à des événements différents.

Pour un signal périodique émis à la fréquence $\nu = 1/T$ et reçu à la fréquence $\nu' = 1/T'$, si les périodes T et T' sont petites, on obtient avec $dt = T$ et $dt' = T'$ que

$$\nu' = \nu \frac{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}'/c}{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}/c}.$$

Attention, dans cette formule, \vec{v} est prise à t et \vec{v}' à t' . Quant à \vec{u} , il dépend de t et de t' .