

## TD n°1 Optique ondulatoire : Diffraction

### 1 De Fresnel à Fraunhofer

Jusqu'à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle : les comportements de la lumière sont expliqués par une théorie corpusculaire. On peut par exemple citer Descartes, qui modélise la lumière comme suivant la trajectoire d'une balle, pour expliquer les lois de la réfraction (1625). Newton (autour de la fin du XVII<sup>e</sup> siècle) modélise également la lumière par des corpuscules, notamment en travaillant sur les couleurs, des corpuscules de masses différentes selon lui.

À contre courant de ces théories, appuyées par la renommée de leurs auteurs, Augustin Fresnel présente en 1818 ses travaux sur la nature ondulatoire de la lumière pour obtenir le prix de l'Académie des Sciences. Le jury est composé de Laplace, Biot et Poisson, tous des partisans de la théorie corpusculaire. Le scepticisme est donc de mise lors de l'évaluation des travaux de Fresnel. Mais, en plus d'impressionner par la robustesse de sa théorie, un élément particulier va confirmer la vision de Fresnel. En effet, Poisson observe que la théorie de Fresnel prévoit la présence d'un point lumineux derrière un obstacle circulaire, au centre de l'ombre géométrique. Cet effet simple, totalement opposé à l'intuition du jury, fut observé par une expérience d'Arago. Le prix fut donc décerné à Fresnel, permettant à la communauté scientifique d'approuver les travaux de Fresnel et entraînant l'avènement de l'optique ondulatoire.

On s'intéresse à la diffraction unidimensionnelle d'un élément diffractant  $S$  (plan  $(O'x'y')$ ) éclairé par une onde plane d'amplitude  $A_0$  se propageant suivant l'axe  $(Oz)$ . Nous étudions l'évolution du champ diffracté dans le plan  $(Oxy)$  d'un écran à distance  $z$  de l'objet  $S$ . On étudiera l'évolution du profil d'intensité diffractée dans un cas simple en régime de diffraction de Fresnel puis de diffraction à l'infini appelé diffraction de Fraunhofer.

#### 1.1 Diffraction de Fresnel

Selon le principe de Fresnel, l'amplitude du champ diffracté d'un point  $P = (x', y', 0)$  de  $S$  dans le plan  $(O'x'y')$  en un point  $M = (x, y, z)$  du plan  $(Oxy)$  s'écrit :

$$A(M) \approx \iint_S A(P) \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikPM}}{PM} dx' dy' \quad (1)$$

1. On suppose que l'on dispose d'une onde plane incidente sur une ouverture circulaire centrée sur l'axe optique et de diamètre  $d$ .
  - (a) Faire un dessin.
  - (b) On se place dans les coordonnées polaires  $(\rho, \theta, z)$ . Montrer que, si  $M$  appartient à l'axe, alors

$$A_{\text{trou}}(M) = A_0 e^{ikz} - A_0 e^{ik\sqrt{(d/2)^2 + z^2}}. \quad (2)$$

- (c) On considère maintenant un disque plein de diamètre  $d$  également. Expliquer pourquoi, pour  $M$  sur l'axe,  $A_{\text{disque}}(M) = A_0 e^{ikz} - A_{\text{trou}}(M)$ .
- (d) En déduire que, pour un point  $M$  sur l'axe,  $A_{\text{disque}}(M) = A_0 e^{ik\sqrt{(d/2)^2 + z^2}}$ . Conclure quant à l'observation d'Arago vis-à-vis du développement ondulatoire de la lumière proposé par Fresnel.
2. À quoi correspond l'approximation paraxiale ?

3. Montrer que l'amplitude au point  $M$  dans ce cas (diffraction à distance finie dans le cas paraxial) s'écrit :

$$A(M) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik(x^2+y^2)/2z} \iint dx' dy' A(P) e^{-ik(xx'+yy')/z} e^{ik(x'^2+y'^2)/2z} \quad (3)$$

## 1.2 Diffraction de Fraunhofer

4. On définit le nombre de Fresnel comme  $F = \frac{a^2}{L\lambda}$  où  $a$  correspond à la taille caractéristique de l'objet diffractant,  $L$  à la distance entre l'objet et l'écran et  $\lambda$  à la longueur d'onde incidente. Définir les deux régimes  $F \ll 1$  et  $F \gg 1$  (Fraunhofer ou Fresnel).
5. En déduire, vis-à-vis de l'expression obtenue à la question 3, quel terme disparaît en régime de Fraunhofer. Expliquer alors pourquoi, dans ce régime, on peut définir l'amplitude de l'onde diffractée comme la transformée de Fourier spatiale de la transmission de l'objet.
6. Expérimentalement, dans quel régime faut-il se placer idéalement pour observer la diffraction de Fraunhofer ?

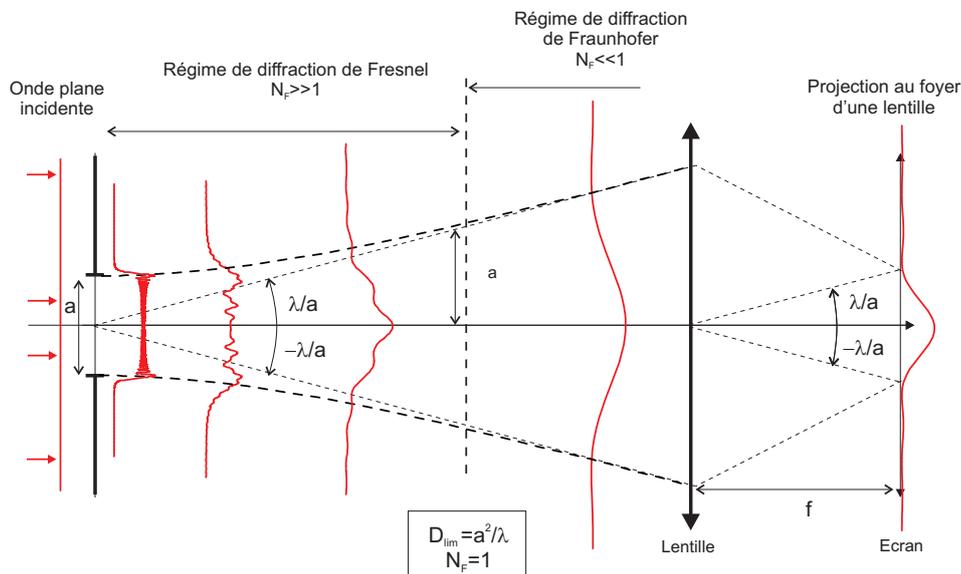


FIGURE 1 – Représentation schématique des différents régimes de diffraction. Source : IOGS

7. Dans le régime de Fraunhofer, calculer l'amplitude diffractée par une ouverture rectangulaire de dimension  $a$  suivant l'axe  $(Ox)$  et  $b$  suivant l'axe  $(Oy)$ .

## 2 Optique de Fourier

### 2.1 Filtrage spatial d'un objet opaque

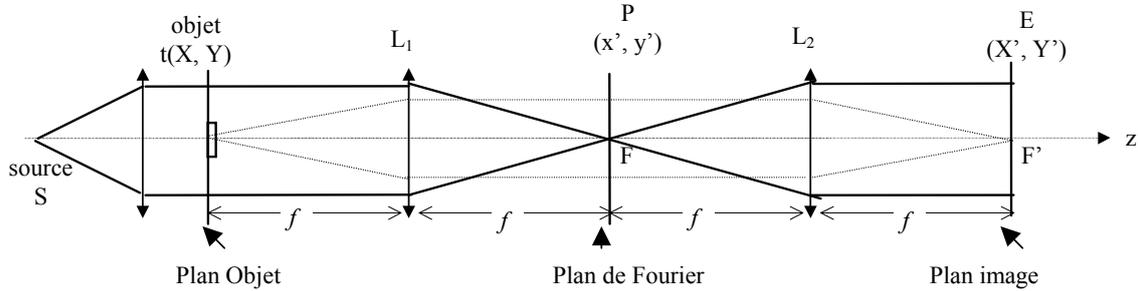


FIGURE 2 – Montage optique pour filtrage spatial

On considère le montage représenté sur la figure ci-contre et on discutera uniquement des propriétés de ce montage dans la direction  $X$ . L'objet, placé dans le plan  $(OX)$  et caractérisé par la transmission  $t_{obj}(X)$ , est éclairé par une onde plane incidente d'amplitude  $A_0$ . Au foyer de la lentille  $L1$  (dans le plan  $(O'x')$ ), on peut disposer différents masques de transmission  $t_m(x')$ . Enfin, on regarde l'image, caractérisée par l'amplitude  $A_{im}(X')$  formée sur un écran dans le plan focal de la lentille  $L2$ . On appelle également  $A_{PF}(x')$  l'amplitude dans le plan de Fourier (au foyer de  $L1$ ).

1. Dans le cas où l'on ne place aucun masque dans le plan de Fourier ( $t_m(x') = 1$ ). Quelle est l'amplitude  $A_{im}(X')$  formée sur un écran dans le plan focal de la lentille  $L2$ ? Comparer avec l'optique géométrique. Que se passerait-il si les focales des lentilles  $L1$  et  $L2$  étaient différentes?
2. Pour étudier l'effet de la taille de la pupille, on place maintenant un diaphragme de diamètre  $a$  dans le plan de Fourier :  $t_m(x') = \text{Rect}(x'/a)$ .

Si l'objet est maintenant une fente infiniment fine ( $t_{obj}(X) = \delta(X)$ ), à quoi correspond l'amplitude dans le plan de Fourier, juste avant le masque  $t_m(x')$ ? Donner l'amplitude  $A_{im}(X')$  puis l'intensité  $I_{im}(X')$  dans le plan image. Retrouve-ton l'image géométrique?

### 3. Apodisation

La figure de diffraction trouvée à la question 2 contient des pics secondaires, inévitables et parfois très gênants. Toutefois il est possible de diminuer fortement l'intensité de ces pics en utilisant un masque approprié. On considère un masque dont la transmission  $t_m(x')$  est donnée par la fonction triangle maximale en  $x' = 0$  et de largeur  $a$  (nulle de  $-a/2$  à  $-\infty$  et de  $a/2$  à  $+\infty$ ).

- (a) Déterminer l'amplitude et l'intensité dans le plan image, toujours pour un objet ponctuel ( $t_{obj}(X) = \delta(X)$ ). Indication : on pourra utiliser le fait que la fonction  $t_m(x')$  peut être simplement obtenue par une convolution de deux fonctions portes.
- (b) Comparer avec le résultat de la question 2. Donner une interprétation physique. Pouvez-vous proposer un profil encore plus adapté?

On peut ainsi "jouer", dans le plan de Fourier, avec les différentes composantes du spectre spatial de l'objet afin de filtrer certaines fréquences. Il est également possible de modifier la phase de l'onde lumineuse comme nous allons le voir dans la section suivante.

## 2.2 Filtrage spatial d'un objet de phase

On se place dans la situation précédente et on considère un objet de phase, parfaitement transparent mais qui comporte, sur une fente de largeur  $a$ , un déphasage  $\phi$  constant par rapport à l'onde traversant le reste de la lame.

4. Écrire la fonction de transmission de l'objet  $t_{obj}(X)$ ? On pourra faire intervenir la fonction  $\text{Rect}(X/a)$ . En déduire l'amplitude dans le plan juste après l'objet. Montrer en particulier que cette amplitude peut être décomposée en une onde plane non perturbée et une onde perturbée, diaphragmée sur une largeur  $a$ .
5. Calculer la répartition d'amplitude  $A_{PF}(x')$  dans le plan de Fourier. Faire apparaître les deux contributions évoquées à la question précédente.
6. Déterminer la répartition d'intensité  $I_{im}(X')$  dans le plan image. Commenter.
7. En considérant que le déphasage est petit ( $\phi \ll 1$ ), montrer que l'on peut interpréter l'intensité  $I_{im}(X')$  comme l'interférence des deux ondes  $A_1$  et  $A_2$  avec  $A_2$  déphasée de  $\pi/2$  et dont l'amplitude est proportionnelle à  $\phi$ . Dans ces conditions, montrer qu'il n'est pas possible de visualiser l'objet de phase.
8. **Strioscopie** : On place maintenant un cache opaque dans le plan de Fourier, en  $x' = 0$ .
  - (a) Donner la l'amplitude  $A_{PF}(x')$  juste après le masque. On simplifiera le problème en supposant que l'onde diffractée n'est pas affectée par le masque.
  - (b) Représenter l'intensité  $I_{im}(X')$  dans le plan image. Décrire ce que l'on observe sur l'écran.
  - (c) Donner l'expression du contraste défini ici par  $\Gamma = (I_{signal} - I_{fond})/I_{signal}$ , où  $I_{signal}$  correspond à l'intensité correspondant au signal d'intérêt et  $I_{fond}$  correspond à l'intensité extérieure provenant de la source mais pas de l'objet.
  - (d) Quel est l'intérêt de ce montage de strioscopie? Quel est son défaut? Proposer une application de la strioscopie.

### 9. Contraste de phase :

On remplace, par rapport à la situation précédente, le cache opaque par une lame de phase en  $x' = 0$ , qui provoque un déphasage  $\lambda/4$ .

- (a) Donner la forme de  $A_{PF}(x')$  après la lame,  $I_{im}(X')$  et le contraste  $\Gamma$ .
- (b) Expliquer les avantages et les inconvénients par rapport à la strioscopie.
- (c) Vis-à-vis de l'application évoquée à la question précédente, expliquer pourquoi les deux méthodes sont complémentaires.

### 3 Effet Talbot

Lorsqu'un réseau est éclairé par un faisceau cohérent, son image se reproduit de manière exacte et périodique, à différentes positions le long de l'axe de propagation  $z$ . Et ce sans qu'il y ait besoin d'utiliser la moindre lentille.

L'objet de cet exercice est de modéliser ce phénomène. La propagation se fait dans le vide. Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation scalaire. Une onde plane, monochromatique, de fréquence  $f_0$  (et de longueur d'onde  $\lambda_0$ ) se propage dans la direction ( $Oz$ ), dans le sens des  $z$  croissants. Elle éclaire un réseau d'amplitude placé dans le plan  $z = 0$ , dont la transmission est modulée sinusoidalement avec un pas  $p$ ; la transmittance du réseau s'écrit :

$$t(x, y) = \frac{1}{2}(1 + m \cos[2\pi x/p]) \quad (4)$$

L'amplitude complexe de la vibration lumineuse est notée  $\mathcal{A}(x, y, z)$  et sa transformée de Fourier selon  $x$  et  $y$  est notée :

$$\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, z) = \int \int e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} \mathcal{A}(x, y, z) dx dy \quad (5)$$

1. Justifier brièvement que

$$\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, 0^+) \propto \frac{1}{2} \delta(f_y) \left( \delta(f_x) + \frac{m}{2} [\delta(f_x - 1/p) + \delta(f_x + 1/p)] \right) \quad (6)$$

On rappelle que pour propager une composante de fréquences spatiales  $(f_x, f_y)$ , de 0 jusqu'à  $z$ , il suffit de la multiplier par :

$$H_z(f_x, f_y) = e^{i2\pi\gamma z} \quad (7)$$

avec  $\gamma = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - f_x^2 - f_y^2}$  à condition que  $\frac{1}{\lambda_0^2} - f_x^2 - f_y^2$  soit positif (ce qui est le cas ici).

2. Déterminer l'expression de  $\mathcal{A}(x, y, z)$  et de l'intensité lumineuse  $I(x, y, z)$ .
3. Montrer que l'on retrouve exactement l'image du réseau de départ pour certaines positions particulières le long de l'axe  $z$ . Préciser ces positions. Simplifier leur expression en prenant en compte que  $p \gg \lambda$ .
4. Qu'observe-t-on à mi-chemin, entre deux de ces positions? (dessiner sur un même graphique le réseau de départ, et l'image obtenue pour ces positions).
5. Pour  $1/p = 3$  traits/mm et  $\lambda_0 = 633$  nm, calculer la position de la première auto-image.
6. Le réseau est toujours unidimensionnel, d'axe  $x$ , et de pas  $p$ . Par contre, il n'est plus sinusoidal; le motif du réseau est quelconque. Obtient-on toujours des auto-images? Si oui, pour quelles positions? (résultat à justifier soigneusement).

Considérons maintenant un réseau bi-dimensionnel. Il est constitué d'un motif quelconque  $M(x, y)$ , répété dans la direction  $x$  avec un pas  $p$ , et aussi dans la direction  $y$  avec le même pas  $p$ . Sa transmittance peut donc s'écrire :

$$t(x, y) = M(x, y) * \sum_{k,l} \delta(x - kp)\delta(y - lp) \quad (8)$$

où  $*$  représente l'opération de convolution.

7. Obtient-on toujours des auto-images ? Si oui, pour quelles positions ? (résultat à justifier soigneusement).

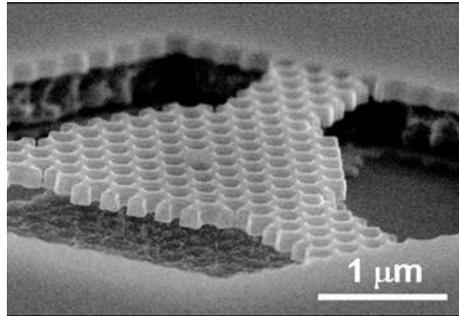
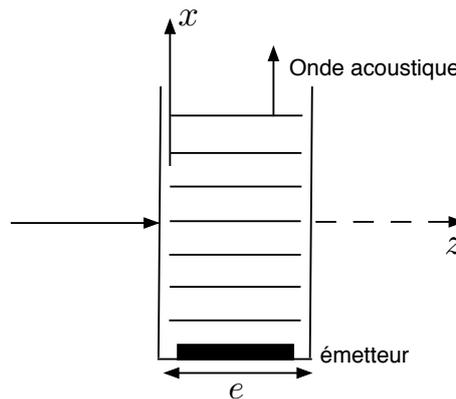


FIGURE 3 – Exemple d'application : réseau (cristal photonique) gravé optiquement dans une résine en utilisant l'effet Talbot.

## 4 Modulation acousto-optique



On peut obtenir un réseau d'indice (variation périodique de l'indice du milieu traversé) à l'aide d'une onde acoustique, qui comprime plus ou moins un liquide contenu dans la cuve traversée. Nous considérons que la cuve est éclairée par une onde plane monochromatique, en incidence normale. L'onde acoustique qui parcourt le milieu est supposée progressive pour commencer. Elle module l'indice selon :

$$n(x, t) = n_0 + \Delta n \cos(\Omega t - 2\pi x/\Lambda) \quad (9)$$

où  $\Omega$  est la pulsation de l'onde acoustique et  $\Lambda$  sa longueur d'onde.

1. Écrire l'amplitude complexe de l'onde en sortie du milieu. Faire apparaître sa décomposition en fréquences spatiales. On rappelle la décomposition suivante, classique en modulation de fréquence :

$$e^{i\phi_0 \cos(u)} = J_0(\phi_0) + iJ_1(\phi_0)(e^{iu} + e^{-iu}) - J_2(\phi_0)(e^{2iu} + e^{-2iu}) - iJ_3(\phi_0)(e^{3iu} + e^{-3iu}) + \dots \quad (10)$$

où  $J_n$  est la fonction de Bessel de type 1, d'ordre  $n$  (si  $\phi_0 \ll 1$ , on retrouve bien sûr par un développement limité que  $J_0(\phi_0) \approx 1$  et  $J_1(\phi_0) \approx \phi_0/2$ ).

2. En déduire que l'on obtient après la cuve des ordres de diffraction, dont on précisera la direction. Préciser la pulsation et l'amplitude de chacune de ces ondes planes.
3. On considère maintenant une onde acoustique stationnaire. La direction des ordres de diffraction est-elle différente de celle trouvée précédemment ? Quelles fréquences sont présentes dans un ordre de diffraction  $p$  donné ? (Penser à décomposer l'onde stationnaire en deux ondes progressives).
4. Pour un des ordres de diffraction (par exemple l'ordre 1), retrouver la pulsation de l'onde diffractée en remarquant qu'il y a un décalage Doppler lorsque l'onde lumineuse rebondit, en quelques sorte, sur l'onde acoustique qui se déplace.

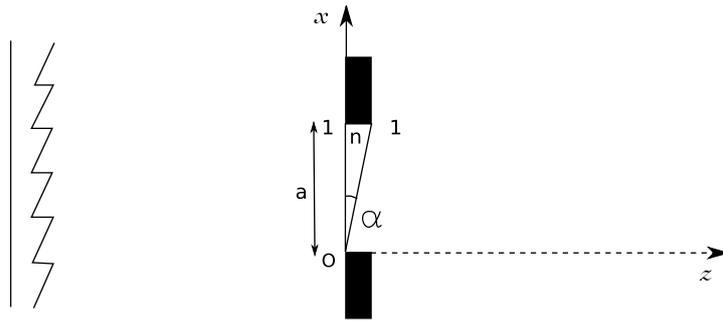
En pratique, les modulateurs acousto-optiques peuvent servir à décaler de manière très contrôlée la fréquence d'un laser. Ils peuvent aussi servir à moduler l'amplitude d'un faisceau lumineux en modulant la puissance de l'onde acoustique (même si, à cette fin, les modulateurs électro-optiques sont plus performants). On choisit bien sûr alors une onde acoustique progressive (pour cela, on se débrouille pour amortir et dévier l'onde acoustique au bout du cristal, afin d'éviter une réflexion vers l'arrière).

## 5 Réseaux

### 5.1 Réseau blazé

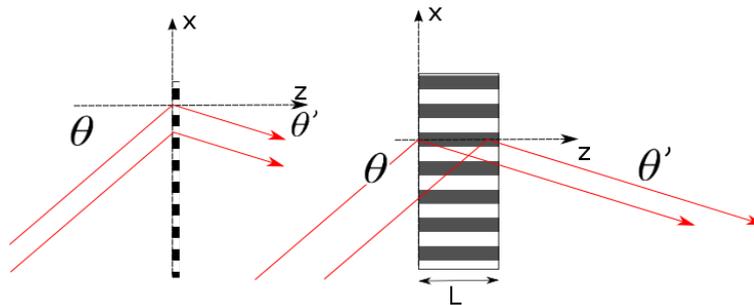
Un réseau est constitué d'une lame de verre sur laquelle sont gravés les motifs représentés ci-dessus. On commence par considérer un seul motif de largeur  $a$ . L'angle de ce petit prisme est noté  $\alpha$ .

1. Déterminer l'expression de la transmittance du réseau  $t(x)$ .
2. Ce motif est éclairé en incidence normale. Calculer l'intensité diffractée (à l'infini) par ce motif dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $z$ . Que remarque-t-on ?



- Tracer l'allure de l'intensité diffractée par le réseau complet, en fonction de  $\sin \theta$ . Comment choisir l'angle de blaze  $\alpha$  pour concentrer toute la lumière dans l'ordre 1 (le réseau étant ici éclairé en incidence normale) ?

## 5.2 Réseau de Bragg



- Dans le cas d'un réseau mince, quelle est la relation entre  $\theta$  et  $\theta'$  satisfaisant l'accord de phase pour le faisceau transmis ?
- Montrer que l'amplitude diffractée par un petit miroir est de la forme  $A \propto \text{sinc}(\frac{\pi L}{\lambda}(\cos \theta - \cos \theta'))$ .
- Pour quels angles cette amplitude est-elle maximale ? Interpréter simplement cette condition.
- Donner finalement les conditions sur  $\theta$  et  $\theta'$  (dites conditions de Bragg) pour lesquelles l'amplitude diffractée est non nulle.
- À partir de quelle valeur  $L_c$  de  $L$  passe-t-on d'un régime de diffraction de type réseau fin à un régime de type réseau épais ?