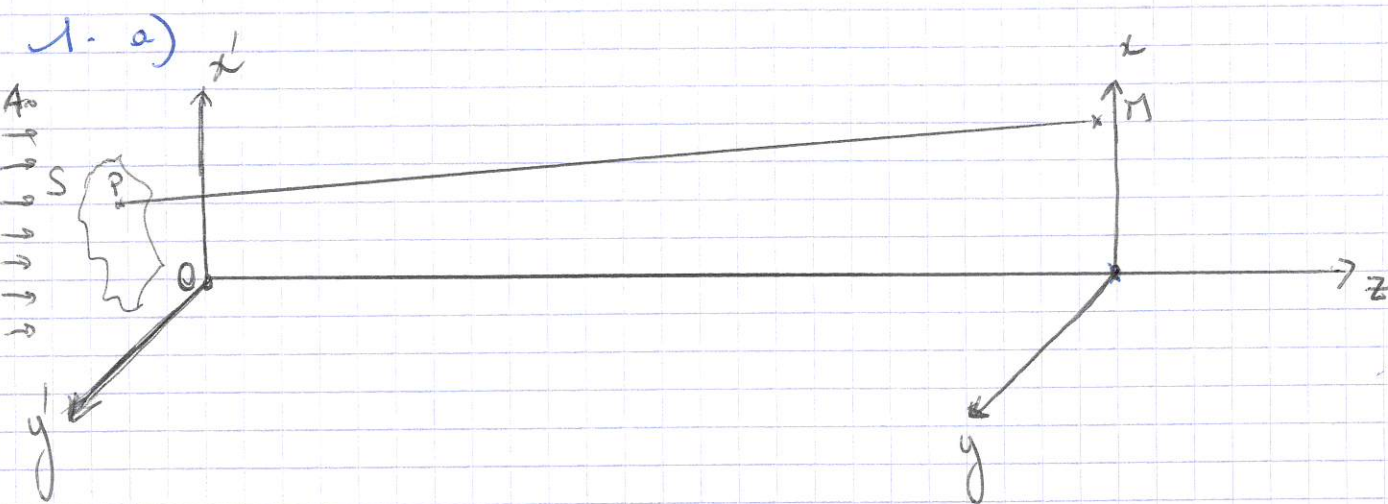


TD 1 d'Optique Ondulatoire : Diffraction

I - De Fresnel à Fraunhofer.

1- Diffraction de Fresnel

$$A(r) = \int_S A(P) \frac{e^{ikr}}{r} dx' dy' \quad \text{On oublie le facteur d'obliquité } \cos \theta \approx 1$$



$$b) A_{\text{trou}}(r) = \int_0^{d/2} \int_0^{2\pi} \frac{A_0}{i\lambda} \frac{e^{ik\sqrt{p^2+z^2}}}{\sqrt{p^2+z^2}} p dp d\theta$$

$$= \frac{2\pi A_0}{i\lambda} \int_0^{d/2} \frac{e^{ik\sqrt{p^2+z^2}}}{\sqrt{p^2+z^2}} p dp = \frac{2\pi A_0}{i\lambda} \frac{1}{ik} \left[e^{ik\sqrt{p^2+z^2}} \right]_0^{d/2}$$

$$\Rightarrow A_{\text{trou}}(r) = A_0 e^{ikt} - A_0 e^{ik\sqrt{(d/2)^2+z^2}}$$

onde incidente

onde issue du bord du trou avec un retard π (chemin optique $\sqrt{(d/2)^2+z^2}$)

Rq: Si on calcule $I = \frac{1}{2} A A^*$, il existe des extinctions (interférences destructives) entre les deux ondes

c) En P, l'état ondulatoire pour le disque est complémentaire à celui du trou:

$$A_{\text{disque}}(P) + A_{\text{trou}}(P) = A_0$$

Sur l'axe, après propagation, on a $A_{\text{disque}}(r) + A_{\text{trou}}(r) = A_0 e^{ikt}$

d) Des deux fonctions précédentes, on obtient $A_{\text{disque}}(r) = A_0 e^{ik\sqrt{(d/2)^2+z^2}}$

$$I(r) = \frac{1}{2} |A_{\text{disque}}|^2 = I_0 \quad \text{Résultat très contre intuitif vis à vis de l'optique géométrique}$$

2- Approx paraxiale. proche de l'axe: les extensions spatiales dans les axes transverses sont petites par rapport à l'extension selon l'axe optique, ce qui se traduit par $z \gg x, y$.

3- cf cours $(r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \Rightarrow r \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z})$

$$\hookrightarrow A(r) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikt}}{z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint dx' dy' A(P) e^{-i\frac{k}{2z}(xx'+yy')} e^{i\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)}$$

diffraction à l'∞: Fraunhofer

diffraction à distance finie: Fresnel

2- Diffraction de Fraunhofer

4-5- $F = \frac{a^2}{\lambda z}$: $F \ll 1$: Fraunhofer (le terme $e^{i\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)}$ disparaît)

~~$F \gg 1$~~ : Fresnel

5- D'après l'expression ci dessus, avec $A(P) = A_0 \text{tobj}(x', y')$,

$$A(r) \propto \iint dx' dy' \text{tobj}(x', y') e^{-i\pi(fx' + gy')} \propto TF_{\text{tobj}}(fx, gy)$$

$$\text{avec } fx = \frac{x}{\lambda z}, \quad gy = \frac{y}{\lambda z}$$

6- Loin ou dans le plan focal image d'une lentille convergente (cf cours)

$$A_{\text{lentille}}(x, y) = e^{-i\frac{\pi}{\lambda f}(x^2+y^2)}$$

7- Cours: $A(r) \propto \text{sinc}\left(\frac{\pi x a}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi y b}{\lambda z}\right)$ Δ à savoir faire!

II - Optique de Fourier

1 - Filtrage spatial d'objet opaque

le A (x) il suffit de normaliser sur tout l'espace à la fin.

$$1 - A_{PF}(x) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 t_{obj}(x) e^{-i2\pi f x} dX = \mathcal{F}[t_{obj}(x)] \left(f_x = \frac{x'}{\lambda f} \right) : \text{Plan de Fourier}$$

$$t_{in}(x') = 1 \Rightarrow A_{in}(x') \propto \int_{-\infty}^{+\infty} A_{PF}(x) e^{-i2\pi f x' x} dx$$

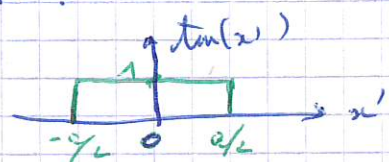
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dX A_0 t_{obj}(X) e^{-i2\pi \frac{x}{\lambda f} X} \right) e^{-i2\pi \frac{x'}{\lambda f} x}$$

$$\propto \int_{-\infty}^{+\infty} dX A_0 t_{obj}(X) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i2\pi \frac{x}{\lambda f} (X+x')} \right)}_{\delta(X+x')}$$

$$\left[A_{in}(x') = A_0 t_{obj}(-x') \right] \Rightarrow \text{résultat de l'optique géométrique (image inversée)}$$

si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ grandissement!

$$2 - t_{in}(x') = \text{Rect}(x'/a) : t_{obj}(X) = \delta(X)$$



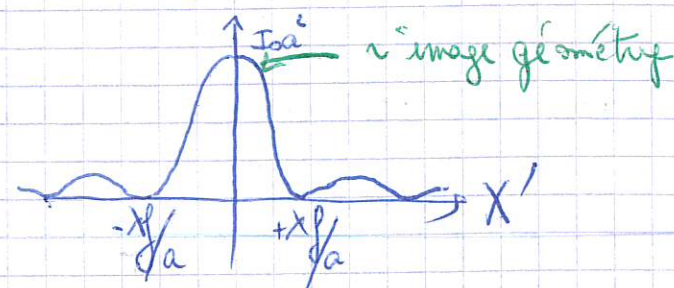
$$A_{PF}(x) \propto \mathcal{F}(A_0 \delta(X)) = A_0 : \text{amplitude constante dans le PF}$$

$$A_{in}(x') \propto \mathcal{F}(A_0 \text{Rect}(x'/a)) \Big|_{f_x} = \int_{-a/2}^{a/2} A_0 e^{-i2\pi \frac{x'}{\lambda f} x} dx$$

$$= A_0 \left(-i2\pi \frac{x'}{\lambda f} \right)^{-1} \left(e^{-i2\pi \frac{x'}{\lambda f} \frac{a}{2}} - e^{+i2\pi \frac{x'}{\lambda f} \frac{a}{2}} \right)$$

$$= A_0 \left(i2\pi \frac{x'}{\lambda f} \right)^{-1} \sin\left(\pi \frac{x' a}{\lambda f}\right) = A_0 a \text{sinc}\left(\pi \frac{x' a}{\lambda f}\right) \propto A_{in}(x')$$

$$\left[I_{in}(x') \propto I_0 a^2 \text{sinc}^2\left(\pi \frac{x' a}{\lambda f}\right) \right]$$

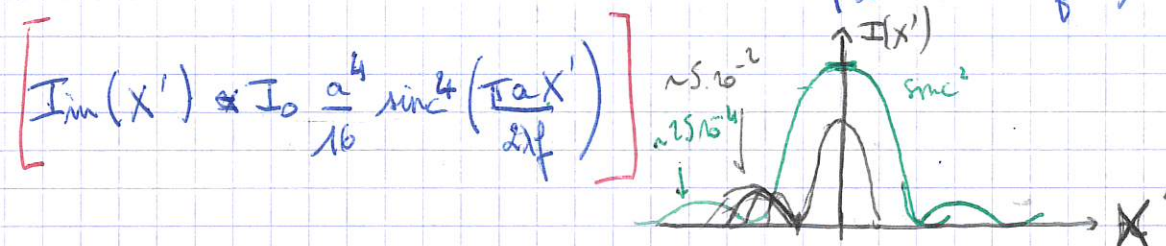


3 - Apodisation

$$a) t_{in}(x') : \text{Graphs of } t_{in}(x'), g(t), \text{ and } f(t) \text{ showing convolution. } t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) f(t) dt$$

$$A_{in}(x') \propto \mathcal{F}\left(A_0 \text{Rect}\left(\frac{2x'}{a}\right) * \text{Rect}\left(\frac{2x'}{a}\right)\right) = A_0 \left[\mathcal{F}\left(\text{Rect}\left(\frac{2x'}{a}\right)\right) \right]^2$$

$$= A_0 \left(\frac{a}{2} \text{sinc}\left(\frac{\pi a x'}{2 \lambda f}\right) \right)^2$$



b) Fenêtrage (cf FFT)

Il s'agit d'un filtrage des fréquences spatiales, ici passe-bas.

Autre application : débramage $t(x) \propto \cos(2\pi f x)$ pour filtrer sélectivement certains composantes. Ici inutile car photoshop.

2 - Filtrage spatial d'un objet de phase

$$4 - t_{obj}(X) = 1 + (e^{i\phi} - 1) \text{Rect}(X/a)$$

$$\Rightarrow A_{obj}(X) = A_0 + \underbrace{A_0(e^{i\phi} - 1) \text{Rect}(X/a)}_{\text{onde plane non perturbée} \quad \text{onde diffractée}}$$

$$5 - \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 e^{-i2\pi \frac{x'}{\lambda f} X} dX = A_0 \delta\left(\frac{x'}{\lambda f}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_0 \text{Rect}(X/a) (e^{i\phi} - 1) e^{-i2\pi \frac{x'}{\lambda f} X} dX = A_0 (e^{i\phi} - 1) \left[\frac{e^{-i2\pi \frac{x'}{\lambda f} X}}{-i2\pi \frac{x'}{\lambda f}} \right]_{-a/2}^{a/2}$$

$$= A_0 (e^{i\phi} - 1) a \text{sinc}\left(\pi \frac{x' a}{\lambda f}\right)$$

$$\Rightarrow A_F(x') \propto A_0 \delta\left(\frac{x'}{\lambda f}\right) + A_0 (e^{-i\phi} - 1) \text{sinc}\left(\frac{ax'}{\lambda f}\right)$$

6. cf 2.1. : $A_{im}(x') \propto A_0 \cos(-x')$
 $A_{im}(x') \propto \text{TF}[A_F(x')]\left(\frac{x'}{\lambda f}\right)$

$$\hookrightarrow A_{im}(x') \propto A_0 + A_0 (e^{i\phi} - 1) \text{rect}\left(-\frac{x'}{a}\right)$$

$$I_{im}(x') \propto |A_0|^2 \text{ pour } |x'| > a/2$$

$$\propto |A_0|^2 |1 + e^{i\phi} - 1|^2 = |A_0|^2 \text{ pour } |x'| < a/2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{im}(x') = |A_0|^2} : \text{pas de visualisation de l'objet!}$$

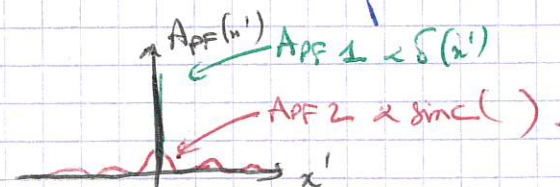
7 - Sin $[-a/2; a/2]$ $A_{im}(x') \propto \underbrace{A_0}_{A_1} + \underbrace{A_0 (e^{i\phi} - 1)}_{A_2 \approx i\phi A_0}$ $\swarrow$ déphasage $\pi/2$
 $\nwarrow$ amplitude $\phi A_0 \ll A_0$

$$I_{im}(x') \propto I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\propto I_0 (1 + \phi^2) \approx I_0 \text{ (ouf! c'est identique à 6.)}$$

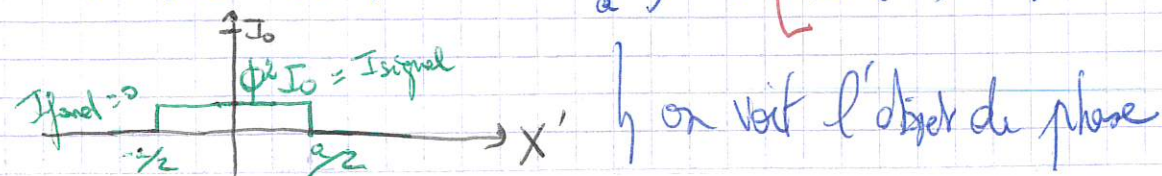
$\hookrightarrow$ deux options : - sténographie : supprimer A_1
 - contraste de phase : changer la phase ($\neq \pi/2$)

8 - Sténographie



$$a) A_{PF}(x') \propto a(i\phi) A_0 \text{sinc}\left(\pi \frac{x'}{\lambda f} a\right)$$

$$b) A_{im}(x') \propto \phi A_0 \text{rect}\left(-\frac{x'}{a}\right) \Rightarrow \boxed{I_{im}(x') \propto \phi^2 A_0^2 \text{rect}\left(-\frac{x'}{a}\right)}$$



$$c) \boxed{\Gamma = 1}$$

d) Interf. : excellent contraste : image sur fond noir

Defauts : • pas de $\neq$ entre ϕ et $-\phi$

• amplification des fluctuations, signal faible (ϕ^2).

Application : repérage de défauts dans une lentille (Δn) ou lame.
 $\hookrightarrow \Delta \phi$

9 - Contraste de phase

a) $\lambda/4 \xrightarrow{\delta = \pi/2}$ déphasage de $\pi/2$ ($\propto e^{i\pi/2}$).

$$A_{PF}(x') \propto i \delta\left(\frac{x'}{\lambda f}\right) A_0 + a A_0 (i\phi) \text{sinc}\left(\frac{ax'}{\lambda f}\right)$$

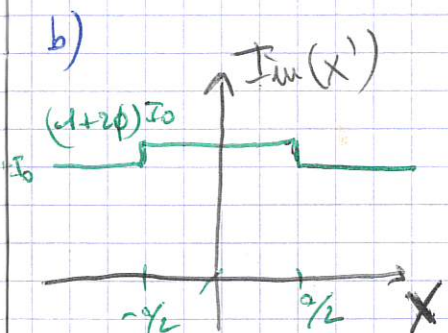
R_g : i intervient encore une fois uniquement sur $\delta(x')$: m raisonnement que 8-

$$\hookrightarrow A_{im}(x') \propto A_0 (i + i\phi \text{rect}\left(-\frac{x'}{a}\right))$$

$$\hookrightarrow I_{im}(x') \propto I_0 \text{ pour } |x'| > a/2$$

$$I_0 |i + i\phi|^2 = I_0 (1 + 2\phi + \phi^2) \approx (1 + 2\phi) I_0$$

$$\Gamma = \frac{1 + 2\phi - 1}{1 + 2\phi} \approx 2\phi \ll 1$$



Interf. : • linéarité

• relief (signe de ϕ)

Defauts : image sur fond brillant.

$\hookrightarrow$ contraste faible.

c) Cette technique peut ajouter l'information du signe du défaut sur une lentille.

III - Effet Talbot

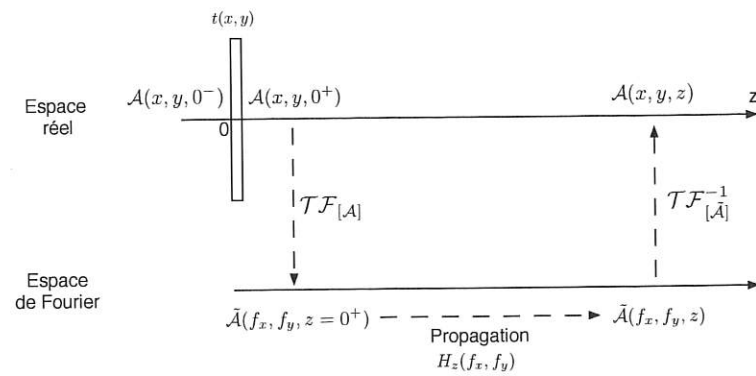


FIGURE 1 - Principe de la propagation d'onde lumineuse en optique de Fourier.

1 - L'objet positionné en $z = 0$ est éclairé par la vibration lumineuse $\mathcal{A}(x, y, z = 0^-)$ dans l'espace réel. Dans l'approximation des objets minces, cet objet peut être décrit par une transmittance $t(x, y)$ telle que le champ après l'objet est

$$\mathcal{A}(x, y, z = 0^+) = t(x, y) \mathcal{A}(x, y, z = 0^-) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + m \cos[2\pi x/p]) \mathcal{A}(x, y, z = 0^-) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + m \frac{e^{2\pi x/p} + e^{-2\pi x/p}}{2} \right) \mathcal{A}(x, y, z = 0^-). \quad (3)$$

Pour obtenir $\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, z = 0^+)$, nous devons effectuer la transformée de Fourier spatiale de $\mathcal{A}(x, y, z = 0^+)$ définie par

$$\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, z) = \iint e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} \mathcal{A}(x, y, z) dx dy, \quad (4)$$

donc

$$\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, z = 0^+) = \iint e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} \mathcal{A}(x, y, z = 0^+) dx dy. \quad (5)$$

Par définition de la distribution de Dirac,

$$\iint e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} e^{2\pi x/p} dx dy = \iint e^{-i2\pi(x(f_x - 1/p) + yf_y)} dx dy = \delta(f_y) \delta(f_x - 1/p). \quad (6)$$

$$\iint e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} e^{-2\pi x/p} dx dy = \iint e^{-i2\pi(x(f_x + 1/p) + yf_y)} dx dy = \delta(f_y) \delta(f_x + 1/p). \quad (7)$$

$$\iint e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} dx dy = \iint e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} dx dy = \delta(f_y) \delta(f_x). \quad (8)$$

Ainsi, la transformée de Fourier de l'équation (3) donne

1

On obtient cette modulation d'intensité correspondante au réseau de départ dans l'équation (19) lorsque

$$\cos \left(2\pi \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{p^2}} - \frac{1}{\lambda_0} \right) z \right) = 1, \quad (22)$$

soit aux positions z_n de propagation

$$z_n = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{p^2}} - \frac{1}{\lambda_0}} \quad (23)$$

avec n un entier. Pour simplifier cette expression, on suppose que $p \gg \lambda_0$, les positions des répliques du réseau initial deviennent

$$z_n = \frac{2p^2 n}{\lambda_0}. \quad (24)$$

Ainsi, le réseau est retrouvé en intensité dès lors que la distance de propagation est un multiple de la longueur de Talbot $z_t = 2p^2/\lambda_0$ (Figure 2).

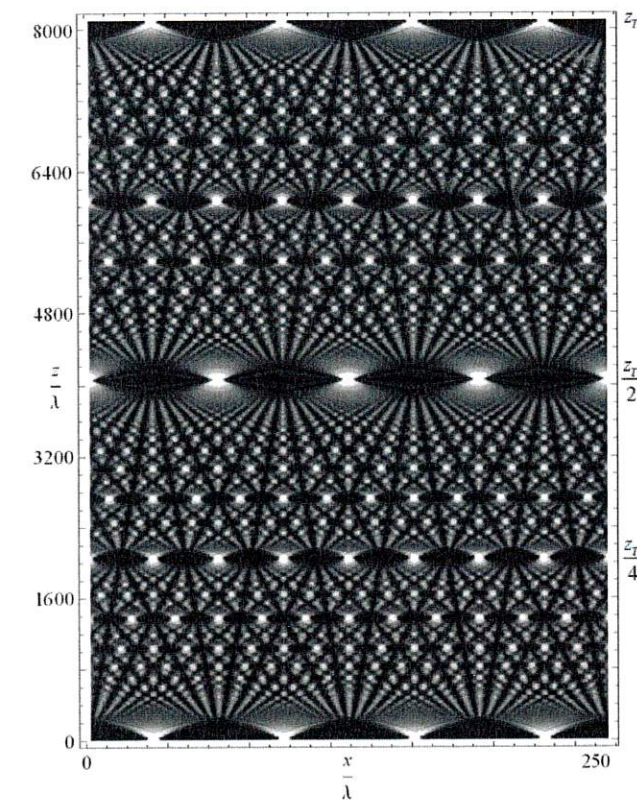


FIGURE 2 - Effet Talbot, propagation d'un faisceau après un objet périodique. L'objet initial est retrouvé pour une distance de propagation de z_t (longueur de Talbot).

4. À mi-chemin, on retrouve le réseau complémentaire $\left(I(x, y) = I_0 \left(\frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{p} \right) \right) \right) \right)$

5. $\Delta x: 1/p = 3 \times 10^3 \text{ traits/mm} \rightarrow p = 3 \times 10^{-4} \text{ m}$
 $\omega \left(z_t = 30 \text{ cm} \right)$

$$\boxed{\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, 0^+) = \frac{1}{2}\delta(f_y) \left(\delta(f_x) + \frac{m}{2}[\delta(f_x - 1/p) + \delta(f_x + 1/p)] \right)} \quad (9)$$

2 - Pour propager le champ dans l'espace de Fourier il suffit de le multiplier au propagateur $H_z(f_x, f_y)$ ainsi

$$\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, z) = H_z(f_x, f_y)\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, z = 0^+) \quad (10)$$

$$= e^{i2\pi\gamma z}\tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, z = 0^+) \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f_y) \left(\delta(f_x) + \frac{m}{2}[\delta(f_x - 1/p) + \delta(f_x + 1/p)] \right) e^{i2\pi\gamma z}, \quad (12)$$

avec $\gamma = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - f_x^2 - f_y^2}$. Pour obtenir l'expression du champ dans l'espace réel, on réalise la transformée de Fourier spatiale inverse :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \int \int e^{i2\pi(xf_x + yf_y)} \tilde{\mathcal{A}}(f_x, f_y, z) df_x df_y \quad (13)$$

$$= \int \int e^{i2\pi(xf_x + yf_y)} \frac{1}{2}\delta(f_y) \left(\delta(f_x) + \frac{m}{2}[\delta(f_x - 1/p) + \delta(f_x + 1/p)] \right) e^{i2\pi\gamma z} df_x df_y. \quad (14)$$

On rappelle l'intégration d'une distribution de Dirac

$$\int f(x)\delta(x - a)dx = f(a). \quad (15)$$

L'intégration de l'équation (14) donne

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0}z} + \frac{m}{2} e^{i2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{p^2}}z} \left(e^{i2\pi x/p} + e^{-i2\pi x/p} \right) \right) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0}z} + m e^{i2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{p^2}}z} \cos(2\pi x/p) \right) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0}z} \left(1 + m e^{i2\pi\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{p^2}} - \frac{1}{\lambda_0}\right)z} \cos(2\pi x/p) \right). \quad (18)$$

On en déduit l'intensité lumineuse $I(x, y, z)$

$$\boxed{I(x, y, z) = |\mathcal{A}(x, y, z)|^2 = \frac{1}{4} \left(1 + m^2 \cos^2(2\pi x/p) + 2m \cos \left(2\pi \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{p^2}} - \frac{1}{\lambda_0} \right) z \right) \cos(2\pi x/p) \right)} \quad (19)$$

3 - L'intensité $I(x, y, z)$ est modulée spatialement autour de la valeur moyenne $I_0 = (1 + m^2)/4$. Pour que cette modulation soit la même que celle du réseau de départ et donc que l'on puisse observer de nouveau le réseau initial il faut

$$I(x, y, z) = \left(\frac{1}{2} \left(1 + m \frac{e^{2\pi x/p} + e^{-2\pi x/p}}{2} \right) \right)^2 \quad (20)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + m^2 \cos^2(2\pi x/p) + 2m \cos(2\pi x/p)). \quad (21)$$

On obtient cette modulation d'intensité correspondante au réseau de départ dans l'équation (19) lorsque

$$\cos \left(2\pi \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{p^2}} - \frac{1}{\lambda_0} \right) z \right) = 1, \quad (22)$$

soit aux positions z_n de propagation

$$z_n = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{p^2}} - \frac{1}{\lambda_0}} \quad (23)$$

avec n un entier. Pour simplifier cette expression, on suppose que $p \gg \lambda_0$, les positions des répliques du réseau initial deviennent

$$z_n = \frac{2p^2 n}{\lambda_0}. \quad (24)$$

Ainsi, le réseau est retrouvé en intensité dès lors que la distance de propagation est un multiple de la longueur de Talbot $z_t = 2p^2/\lambda_0$ (Figure 2).

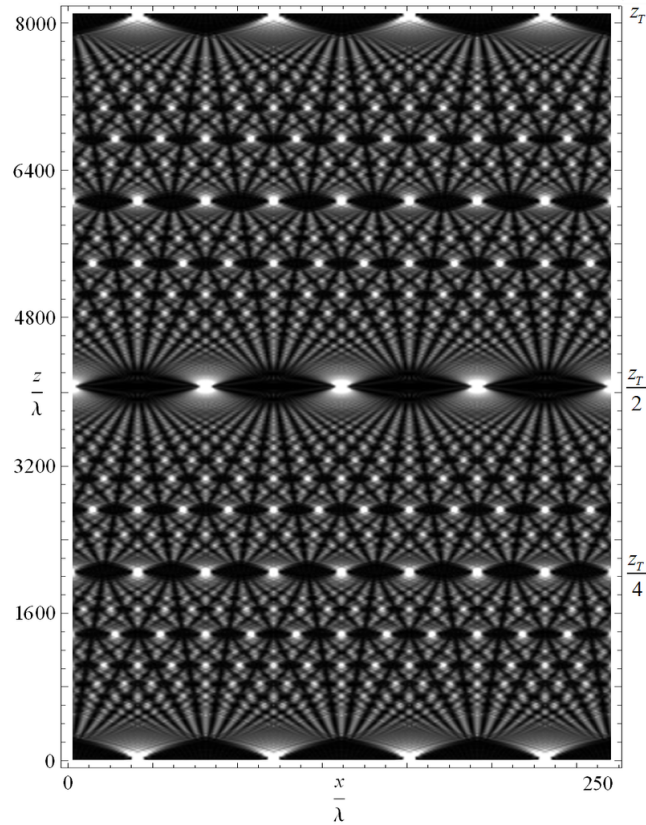


FIGURE 2 – Effet Talbot, propagation d'un faisceau après un objet périodique. L'objet initial est retrouvé pour une distance de propagation de z_t (longueur de Talbot).

6- Le réseau est périodique, on peut donc écrire le transmission du réseau comme une série de Fourier

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_n a_n \exp(i 2\pi \frac{x}{p}) \\ \hat{A}(f_x, f_y, 0) &= \iint dx dy \sum_n a_n e^{i 2\pi \frac{x}{p}} e^{-i 2\pi (f_x x + f_y y)} \\ &= \sum_n a_n \int dx dy e^{i 2\pi x (-f_x + \frac{n}{p})} e^{-i 2\pi f_y y} \\ &= \sum_n a_n \delta(f_x - \frac{n}{p}) \delta(f_y) A_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= \sum_n a_n A_0 \iint dx dy e^{i 2\pi x z} e^{i 2\pi (f_x x + f_y y)} \delta(f_x - \frac{n}{p}) \delta(f_y) \\ &= \sum_{n \leq p_0} a_n A_0 e^{i 2\pi z \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - (\frac{n}{p})^2}} e^{i 2\pi \frac{nx}{p}} \end{aligned}$$

$$A(x, y, z) \approx \sum_{n \ll p_0} a_n A_0 e^{i 2\pi z \frac{1}{\lambda_0}} e^{-i 2\pi \frac{\lambda_0 n^2}{2p^2} z} e^{i 2\pi \frac{nx}{p}}$$

On retrouve les BF du réseau $\left[g_k = \frac{k p^2}{\lambda_0} \right] k \in \mathbb{Z}$

$$\left[I(x, y, z) = I_0 \left| \sum_{n \ll p_0} a_n e^{i 2\pi \frac{nx}{p}} \right|^2 \right]$$

7- Réseau 2D

$$A(x, y) = \sum_{n, m} a_{n, m} e^{i \frac{2\pi}{p} (mx + my)}$$

→ selon 6- $A(x, y, z) = A_0 \sum_{n, m} a_{n, m} e^{i 2\pi z \frac{1}{\lambda_0}} e^{-i 2\pi \frac{\lambda_0}{2p^2} (n^2 + m^2) z} e^{i 2\pi (\frac{nx}{p} + \frac{my}{p})}$

$p_0 \gg \sqrt{n^2 + m^2}$

réseau étiré pour $\left[g_k = \frac{k p^2}{\lambda_0} \right] k \in \mathbb{Z}$

$$\hookrightarrow \left[I(x, y, z) = I_0 \left| \sum_{n, m} a_{n, m} e^{i 2\pi (\frac{nx}{p} + \frac{my}{p})} \right|^2 \right]$$

$p_0 \gg \sqrt{n^2 + m^2}$

IV - Modulation acousto-optique



$$u(x, t) = u_0 + \Delta u \cos(\Omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A(x, y, e) &= A(x, t) A(x, y, 0) \quad \text{avec } t(x, t) = e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n(x, t) e} \\ &= A_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 e} e^{i \frac{2\pi e}{\lambda_0} \Delta n \cos(\Omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda})} \\ &= A_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 e} \left[J_0\left(\frac{2\pi e}{\lambda_0} \Delta n\right) + i J_1\left(\frac{2\pi e}{\lambda_0} \Delta n\right) \left(e^{i(\Omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda})} + e^{-i(\Omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda})} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$A(f_x, f_y, e) = A_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 e} \delta(f_y) [\dots]$$

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= A_0 e^{i 2\pi \frac{n_0}{\lambda_0} z} \left[J_0\left(\frac{2\pi e}{\lambda_0} \Delta n\right) e^{i 2\pi \frac{z}{\lambda_0}} + i J_1\left(\frac{2\pi e}{\lambda_0} \Delta n\right) \left(e^{i 2\pi \frac{z}{\lambda_0} + i 2\pi \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} z} + e^{i 2\pi \frac{z}{\lambda_0} - i 2\pi \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} z} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

ordre $m = -1$ (pointing to the first term in the bracket)

ordre $m = 1$ (pointing to the second term in the bracket)

→ série d'ondes planes : vect d'onde $k_m = \left(\frac{\frac{2\pi}{\lambda} m}{2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - (\frac{m}{\lambda})^2}} \right) m \in \mathbb{Z}$

pulsation $\omega = \omega_0 + m\Omega$

$$3- m(x, t) = u_0 + \frac{\Delta u}{2} \left[\cos(\Omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x) + \cos(\Omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x) \right]$$

$$A(x, t) = e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 x} \sum_{l, j} i^j J_{l+j}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\Delta n e}{2}\right) J_{l-j}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\Delta n e}{2}\right) e^{i j \Omega t} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x}$$

1 ordre de diffraction = l fixé $\Rightarrow$ infinité de fréquences avec des amplitudes qui diminuent

$$4- v_a = \lambda \frac{\Omega}{2\pi} \Rightarrow f = f_0 \left(1 - \frac{v_a}{c_{km}} \right)$$

$$\frac{c_{km}}{v_a} = \frac{k \sin \theta}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{k \sin \theta}$$

$$f = f_0 \left(1 - \frac{\lambda \Omega \sin \theta}{\lambda_0 \omega_0} \right)$$

formule de réseau : $n \lambda_0 = \lambda \sin \theta \Rightarrow f = f_0 \left(1 - \frac{n \Omega}{\omega_0} \right) \Rightarrow \omega = \omega_0 - n \Omega$

V - Réseau

1 - Réseau bloqué

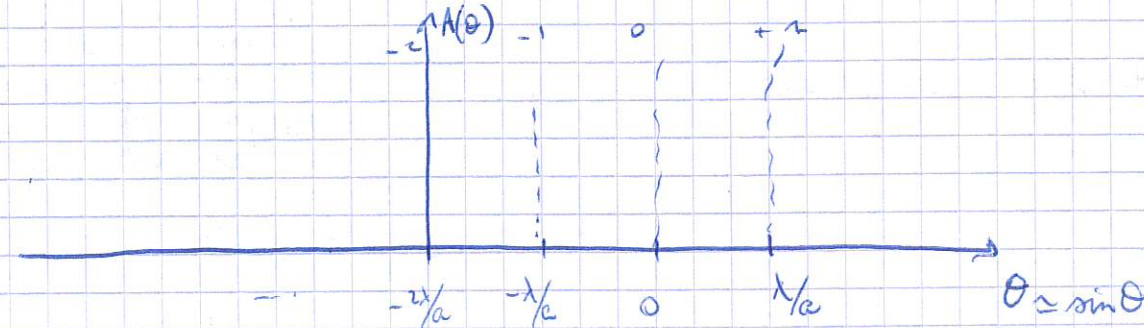
1- $A(\theta) \propto A_0 \text{TF}(t(x))_{x=0}^a$ et $t(x) = t_1(x) * \sum_{p=1}^N \delta(x - pa)$

on répète le motif tous les a .

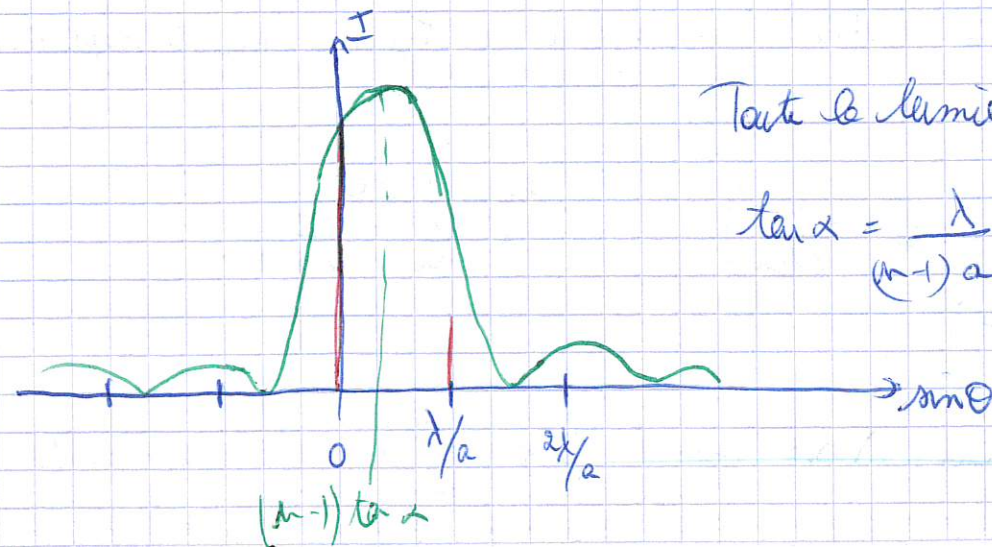
$A(\theta) \propto \text{TF}(A_0) = \text{TF}(t_1(x)) \times \text{TF}(\sum \delta(x - pa))$
 $t_1(x) = e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta}$ avec $\delta = a \tan \alpha + (n-1)x \tan \alpha$

$A(\theta) = \int_0^a dx' A_0 e^{i k x' \sin \theta} t_1(x') \times \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(k - p \frac{2\pi}{a})$
 $= \int_0^a dx' A_0 e^{i k \sin \theta x'} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (a \tan \alpha + (n-1)x' \tan \alpha)} \times \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(k - p \frac{2\pi}{a})$
 $= \int_0^a dx' A_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (a \tan \alpha + (n-1) \tan \alpha x')} \times A_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} a \tan \alpha} \times \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(k - p \frac{2\pi}{a})$
 $= A_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} a \tan \alpha} \times \text{sinc}(\frac{k \sin \theta + (n-1) \tan \alpha}{\frac{2\pi}{\lambda}}) \times \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(k - p \frac{2\pi}{a})$

Finalement,



l'effet du petit miroir et de donner la figure de diffraction (sinc²) d'un angle $(n-1) \tan \alpha$: figure centrée en $\sin \theta = (n-1) \tan \alpha$.



Toute la lumière dans 1.

$\tan \alpha = \frac{\lambda}{(n-1)a}$

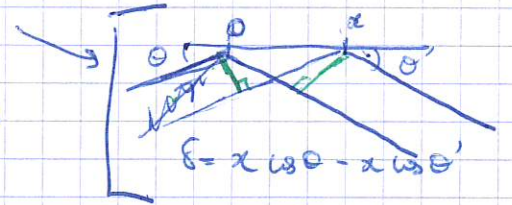
2 - Réseau épais

4- $\sin \theta - \sin \theta' = \frac{\lambda}{a} p$

5- théorème de Babinet: le "petit miroir" diffracte comme une fente de même dimension.

En champ lointain, on a une diffraction en $\text{sinc}(\frac{(k_x' - k_x)L}{2})$ soit ici $A \propto \text{sinc}(\frac{\pi L}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta'))$

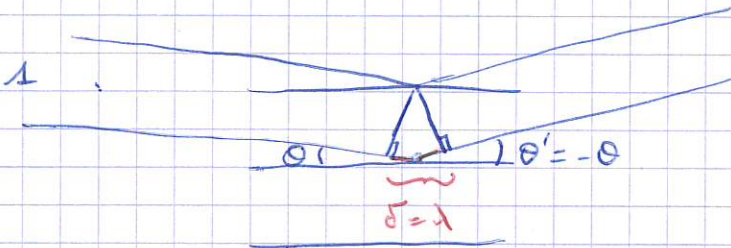
6- Pas pour $\theta = \theta'$: réflexion sur un miroir "petit"



ou $\theta' = \theta$: faisceau transmis directement. (ordre 0 ne diffracte)

7- Pour un réseau épais, il y a donc accord de phase (et l'on observe un ordre de diffraction pour $\sin \theta' = \sin \theta - p \frac{\lambda}{a}$.)
 $\theta' = -\theta$

Ex: pour $n=1$



6- Pour identifier L_c , on considère un cas simple: $\theta = 0$ / ordre 1: $\theta' = -\frac{\lambda}{a}$

On n'est pas dans la condition de Bragg ($\theta \neq \theta'$) donc on observe l'ordre 1 uniquement si le réseau est mince.

Si le réseau est épais, l'amplitude de l'ordre est $\propto \text{sinc}(\frac{\pi L}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta'))$

Il conservera une intensité non négligeable si $\frac{L}{\lambda} \ll 1$

ii) $L \ll \frac{a^2}{\lambda} = L_c$ épaisseur critique

$\approx \text{sinc}(\frac{\pi L}{\lambda} \frac{\theta'^2}{2})$
 $\approx \text{sinc}(\frac{\pi L}{2\lambda} \frac{\lambda^2}{a^2})$
 $\approx \text{sinc}(\frac{\pi L}{2} \frac{\lambda}{a^2})$