

Introduction aux guides d'ondes

Introduction

Les ondes qui véhiculent les informations en espace libre (communications par satellite, par téléphone portable, par talkie walkie, etc.) peuvent être déviées ou détruites par des obstacles matériels ou des perturbations d'origine atmosphérique. Les faisceaux lasers utilisés dans le domaine médical pour détruire une tumeur cancéreuse, ou réparer une rétine peuvent endommager les organes sains. Dans certaines activités il est nécessaire de canaliser et sécuriser la propagation des ondes avec des guides d'ondes.

Objectifs

Définir la notion de propagation guidée des ondes électromagnétiques.

Appliquer les lois fondamentales de l'électromagnétisme pour déterminer les conditions de propagation dans un guide d'ondes.

Définir la notion de modes de propagation.

Plan

- 1 Équations générales des ondes guides
- 2 Choix du système de coordonnées et expression des champs
- 3 Classification des modes de propagation
- 4 Le guide d'onde rectangulaire
- 5 Modes TE
- 6 Modes TM

La propagation guidée consiste à canaliser une onde électromagnétique dans un espace délimité par des interfaces métalliques ou diélectriques, depuis un émetteur jusqu'à un récepteur. Comparée à la propagation en espace libre, la propagation guidée a comme principaux avantages la transmission de l'onde à l'abri de perturbations d'origine atmosphérique, avec une meilleure confidentialité, et parfois avec un faible taux d'atténuation. Le guidage des ondes est réalisé au moyen de dispositifs appelés guides d'ondes, dont la constitution varie suivant le domaine de fréquence des ondes. Ainsi :

- en ondes millimétriques et centimétriques (fréquence < 1 THz), les dispositifs les plus utilisés sont des guides d'ondes creux à section rectangulaires ;
- à haute fréquence (fréquence > 1 GHz), on utilise principalement des câbles coaxiaux ou des lignes bifilaires ;
- dans l'infrarouge et dans le visible (~ 100 THz), on utilise les fibres optiques.

Quel que soit son domaine d'utilisation, un guide d'ondes est généralement constitué d'un milieu vide ou d'un milieu diélectrique, délimité par des dioptries ou des parois métalliques de manière à canaliser la marche d'une onde depuis l'émetteur jusqu'au récepteur. Dans un tel milieu, les ondes ne peuvent exister que si elles obéissent aux **équations de Maxwell** et aux **conditions aux limites** sur les dioptries ou les parois métalliques.

Parmi les guides d'ondes les plus couramment utilisés dans la pratique quotidienne, figurent : les **câbles coaxiaux** et les **câbles RJ45**.

Un **câble coaxial** se présente sous la forme d'un conducteur central (à base de cuivre), entouré d'un isolant puis d'une gaine conductrice (tressée ou enroulée) qui fait office de blindage. Le tout est recouvert d'une enveloppe en PVC. Initialement développé dans les années 1970 pour les lignes numériques à longue distance, le câble coaxial a depuis été remplacé pour cette application par la fibre optique. Actuellement, on trouve principalement des câbles coaxiaux dans les applications suivantes :

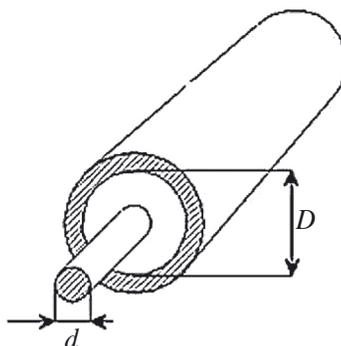


Figure 7.1– Câble coaxial.

- entre l'antenne TV et le poste de télévision ;
- dans le réseau câblé urbain ;
- dans certains câbles sous-marins et liaisons téléphoniques (ancienne génération).

Le câble coaxial est un support difficile à mettre en place et à raccorder (poids, rigidité, connectique délicate) mais très performant. Il offre un débit plus élevé et une moindre sensibilité aux perturbations électromagnétiques que la paire torsadée utilisée dans le câblage RJ45 (ethernet). On lui préfère cependant cette dernière dans les applications informatiques et les réseaux domestiques, pour des raisons de coût et de facilité de mise en œuvre.

Les guides d'ondes métalliques. Il s'agit de tuyaux métalliques à section circulaire ou rectangulaire, qui permettent de conduire les micro-ondes compatibles avec leur taille latérale de l'ordre de la longueur d'onde, dans la gamme de fréquence allant de 3 GHz à 90 GHz.

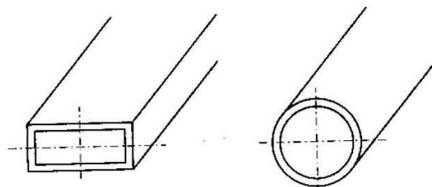


Figure 7.2– Guides d'ondes métalliques.

Les guides d'ondes diélectriques et les fibres optiques. Un guide d'ondes diélectrique est un dispositif constitué d'une juxtaposition de plusieurs matériaux diélectriques d'indices différents, de telle sorte que le matériau d'indice de réfraction le plus élevé soit situé au cœur du guide. L'onde électromagnétique injectée dans le guide reste essentiellement confinée dans ce matériau à haut indice (n_g), qualifié alors de « couche guidante ». Il existe une grande diversité de guides diélectriques, qui se distinguent tant par leurs dimensions (qui vont de l'échelle nanométrique à l'échelle kilométrique) que par leurs géométries, qui peuvent être de forme rectangulaire, cylindrique, planaire, ou d'une forme plus complexe, comme l'illustre la figure 7.3. Parmi les guides diélectriques les plus utilisés, figurent les guides planaires. Fabriqués à des dimensions nanométriques par des techniques de l'Optique intégré, ces guides planaires permettent de réaliser une multitude de fonctions optiques (couplage, modulation, multiplexage, amplification, etc.) au moyen de dispositifs très compacts. Le guide diélectrique le plus répandu est incontestablement la fibre optique, en raison de la diversité de ses domaines d'applications (Télécom, médecine, câblage et connectique, décoration, etc.).

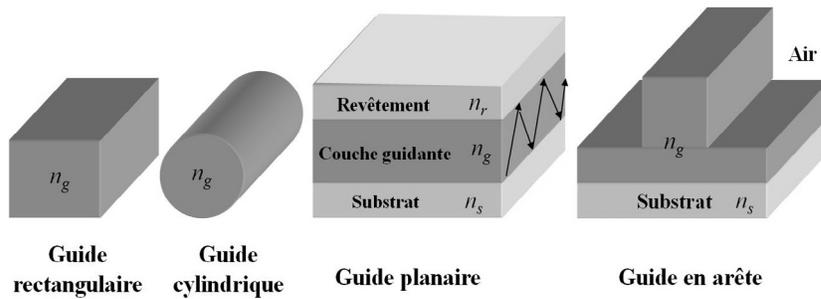


Figure 7.3 – Guides d'ondes diélectriques.

L'objectif de ce chapitre est de décrire le comportement d'une onde électromagnétique se propageant dans un matériau diélectrique occupant un espace restreint délimité par des dioptrés ou des parois métalliques.

1 Équations générales des ondes guidées

Un guide d'ondes est un dispositif hétérogène, mais dans lequel un espace est spécialement conçu pour servir de support physique pour la propagation de l'onde électromagnétique. Comme ce support physique doit être le moins absorbant possible, il est

généralement constitué de l'air ambiant, ou d'un matériau diélectrique. Pour généraliser, nous supposons que ce support physique (que nous qualifierons de « **milieu de propagation** »), est un matériau diélectrique de constante électrique ϵ et constante magnétique μ (pouvant éventuellement être le vide, auquel cas $\epsilon = \epsilon_0$ et $\mu = \mu_0$). Nous supposons en outre que ce milieu est linéaire, homogène, et isotrope.

L'étude du comportement d'une onde électromagnétique dans un tel guide d'ondes s'effectue en principe en deux grandes étapes :

- premièrement, on met en place les équations de propagation dans le milieu de propagation ;
- ensuite, on applique les **conditions aux limites** aux endroits où se trouvent les dioptries ou parois métalliques qui délimitent le milieu de propagation.

1.1 Équations de Maxwell

Le milieu de propagation est un matériau diélectrique non conducteur, dépourvu de charges libres et de courants libres : $\rho_{\text{libre}} = 0$ et $\vec{j}_{\text{libre}} = 0$. En tout point de ce milieu, les équations de Maxwell se mettent sous la forme suivante :

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}} = 0 \quad (7.1)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (7.2)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.3)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (7.4)$$

1.2 Relations constitutives

Le milieu étant linéaire homogène et isotrope, les relations constitutives s'écrivent :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (7.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (7.6)$$

Remarque Ici, par souci de simplicité, nous avons considéré que le milieu de propagation est non conducteur en posant $\vec{j}_{\text{libre}} = 0$. Mais, lorsque ce milieu est non conducteur ($\vec{j}_{\text{libre}} \neq 0$), là aussi, il n'est pas nécessaire de faire apparaître explicitement le terme \vec{j}_{libre} dans l'équation de Maxwell-Ampère. Il suffit de transférer ce terme dans l'**induction électrique**, qui devient alors une **induction électrique généralisée** \vec{D} , reliée au champ

électrique par la permittivité diélectrique généralisée ε (qui inclut la contribution du courant de déplacement, celle des charges liées, et celles des charges libres) : $\vec{D} = \vec{E}$.

1.3 Équation de propagation

Pour obtenir l'équation de propagation du champ électromagnétique, on applique la **formule du double rotationnel** ($\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \Delta$) aux champs électrique et magnétique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

$$(7.4) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \text{ compte tenu de (7.3).}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}, \text{ compte tenu de (7.1) et (7.5).}$$

On en déduit l'équation de propagation du champ électrique. La même procédure conduit à l'équation de propagation du champ magnétique dans le milieu. Les deux équations, appelées **équations d'Helmholtz**, s'écrivent :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (7.7a)$$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (7.7b)$$

2 Choix du système de coordonnées et expression des champs

À ce stade, il faut choisir une expression analytique du champ électromagnétique qui puisse à la fois satisfaire les équations de propagation (7.7), et satisfaire les conditions aux limites du milieu de propagation. Ce choix est dicté par la géométrie du guide d'onde. Par exemple, dans le cas d'un câble coaxial, il convient de se placer dans des coordonnées cylindriques, tandis que dans le cas d'un guide d'onde rectangulaire, il est préférable de se placer dans des coordonnées cartésiennes. Dans les deux cas, le choix d'une propagation en ondes planes n'est pas envisageable à l'exception de certaines situations particulières, car une telle onde ne pourra satisfaire les multiples conditions aux limites portant sur son amplitude, qui est supposée constante. Les champs doivent être décomposés en champs longitudinaux (\vec{E}_z, \vec{H}_z) (parallèles à l'axe de propagation choisi ici comme étant l'axe Oz), et en champs transverses ($\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$) (orthogonaux à l'axe Oz) :

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_z \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}_\perp + \vec{H}_z \quad (7.8)$$

2.1 Expression des champs dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\vec{E}(r, \theta, z) = [E_z(r, \theta)\vec{e}_z + E_r(r, \theta)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta] e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (7.9a)$$

$$\vec{H}(r, \theta, z) = [H_z(r, \theta)\vec{e}_z + H_r(r, \theta)\vec{e}_r + H_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta] e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (7.9b)$$

où β est la **constante de propagation**, c'est-à-dire, la composante sur l'axe Oz du vecteur d'onde. La résolution de l'équation de propagation (7.7) avec les champs (7.9) sera traitée en détail dans le prochain chapitre. Dans le présent chapitre, nous ne détaillerons la résolution de l'équation (7.7) que dans le cas où les champs s'expriment en coordonnées cartésiennes.

2.2 Expression des champs dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z = [E_x^0(x, y)\vec{e}_x + E_y^0(x, y)\vec{e}_y + E_z^0(x, y)\vec{e}_z] F_0 \quad (7.10a)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = H_x\vec{e}_x + H_y\vec{e}_y + H_z\vec{e}_z = [H_x^0(x, y)\vec{e}_x + H_y^0(x, y)\vec{e}_y + H_z^0(x, y)\vec{e}_z] F_0 \quad (7.10b)$$

$$F_0 = e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (7.10c)$$

2.3 Relations entre champs transverses et champs longitudinaux

Nous allons montrer qu'il est possible d'exprimer toutes les composantes transverses des champs \vec{E} et \vec{H} à l'aide des composantes longitudinales E_z et H_z . En effet,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{soit}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu H_x \quad (7.11a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \quad (7.11b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \quad (7.11c)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{soit}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_x \quad (7.12a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon E_y \quad (7.12b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon E_z \quad (7.12c)$$

$$\text{où } \frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -i\beta \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega.$$

On peut facilement combiner les équations dans (7.11b) et (7.12a) de manière à éliminer H_y ; on obtient alors une expression de E_x en fonction de E_z et H_z . On peut aussi combiner (7.11b) et (7.12a) de manière à éliminer E_x ; ce qui conduit à une expression de H_y en fonction de E_z et H_z . Ainsi, (7.11b) et (7.12a) se combinent en :

$$E_x = -\frac{i}{\xi^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu\omega \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (7.13a)$$

$$H_y = -\frac{i}{\xi^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \varepsilon\omega \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (7.13b)$$

(7.11a) et (7.12b) donnent

$$E_y = -\frac{i}{\xi^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu\omega \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (7.13c)$$

$$H_x = -\frac{i}{\xi^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - \varepsilon\omega \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (7.13d)$$

où

$$\xi^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \beta^2 \quad (7.13e)$$

Les équations (7.13a), (7.13b), (7.13c), et (7.13d), permettent de trouver toutes les composantes transversales dès que l'on connaît les deux composantes longitudinales E_z et H_z . On peut donc se contenter de résoudre l'équation de propagation uniquement pour les composantes longitudinales E_z et H_z .

3 Classification des modes de propagation

3.1 Modes TEM (transverse électromagnétique)

Ce sont les modes caractérisés par $E_z = H_z = 0$. De tels modes, appelés aussi « modes transverses électrique-magnétique », ne peuvent exister que dans les guides d'ondes où

il est possible d'établir une différence de potentiel dans le plan transverse (comme dans le cas de la ligne coaxiale).

D'après (7.13a), pour qu'une onde TEM existe, il faut que : $E_x \xi^2 = 0$ soit $\xi^2 = 0$ si $E_x \neq 0$. La relation de dispersion des modes TEM est donc :

$$\beta^2 = 2\mu\omega^2 \quad (7.14)$$

L'équation d'Helmutz pour E_x et E_y conduit à :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (7.15)$$

Remarque Le fait que l'on ait pu obtenir la relation de dispersion sans avoir à appliquer les **conditions aux limites**, implique que, le champ électromagnétique ne doit comporter aucune composante sujette aux conditions de continuité. En d'autres termes, le mode TEM ne peut exister dans un guide d'ondes que si la structure géométrique du guide est telle que :

- le champ électrique \vec{E} est normal aux surfaces diélectriques ou métalliques situées aux frontières du guide. En effet la condition de continuité ne s'applique qu'à la composante tangentielle de \vec{E} .
- le champ magnétique \vec{B} doit être tangentiel aux surfaces diélectriques ou métalliques situées aux frontières du guide. En effet la condition de continuité ne s'applique qu'à la composante normale de \vec{B} .

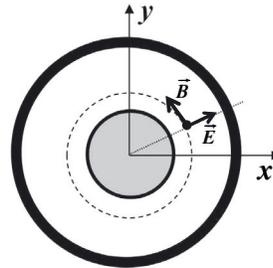


Figure 7.4 – Mode TEM dans la section transversale d'un câble coaxial.

Il en ressort que dans un mode TEM, les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation. La figure 7.4 illustre les lignes de champ d'un mode TEM au sein d'un câble coaxial.

Toutefois, il faut noter que la propagation des ondes TEM n'est pas possible dans tous les guides d'ondes. Dans de tels guides (par exemple le guide d'ondes rectangulaire), au moins l'un des deux champs (E_z ou H_z) doit être non nul. On distingue principalement les modes TE ou TM selon que $E_z = 0$ et $H_z \neq 0$ ou $E_z \neq 0$ et $H_z = 0$.

3.2 Conditions de continuité du champ électromagnétique

Pour tous les modes (excepté le mode TEM), l'obtention de la relation de dispersion dans un guide d'ondes passe obligatoirement par l'application des conditions aux limites du

guide, et plus particulièrement, les conditions de continuité de certaines composantes du champ électromagnétique.

Continuité de la composante normale du champ magnétique \vec{B} . Cette condition résulte du fait que la relation $\text{div} \vec{B} = 0$ s'exprime de la même façon des deux cotés des surfaces frontalières du guide.

Continuité de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E} . Cette condition résulte de la relation $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$, qui s'exprime de la même façon des deux cotés de ces surfaces frontalières.

Si ces deux conditions ne suffisent pas à obtenir la relation de dispersion, on peut leur adjoindre une équation de Maxwell supplémentaire, à condition que la relation en question s'exprime de la même façon des deux cotés des surfaces limitrophes du guide. Par exemple, $\text{div} \vec{D} = 0$ implique une continuité de la composante normale du champ \vec{D} .

3.3 Modes TE (mode transverse électrique : $E_z = 0, H_z \neq 0$)

Les expressions (7.13) conduisent à :

$$H_x^0 = -\frac{i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \quad (7.16a)$$

$$H_y^0 = -\frac{i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \quad (7.16b)$$

$$E_x^0 = -\frac{i\omega\mu}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \quad (7.16c)$$

$$E_y^0 = \frac{i\omega\mu}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \quad (7.16d)$$

Avec H_z^0 donné par :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi^2 \right) H_z^0 = 0 \quad (7.17)$$

Remarque Des modes TE sont susceptibles de se propager dans de nombreux guides d'ondes.

3.4 Modes TM (mode transverse magnétique : $E_z \neq 0, H_z = 0$)

$$H_x^0 = \frac{i\omega\varepsilon}{\xi^2} \frac{\partial E_z^0}{\partial y} \quad (7.18a)$$

$$H_y^0 = \frac{-i\omega\varepsilon}{\xi^2} \frac{\partial E_z^0}{\partial x} \quad (7.18b)$$

$$E_x^0 = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial E_z^0}{\partial x} \quad (7.18c)$$

$$E_y^0 = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial E_z^0}{\partial y} \quad (7.18d)$$

Avec E_z^0 donné par :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi^2 \right) E_z^0 = 0 \quad (7.19)$$

4 Le guide d'ondes rectangulaire

On considère un guide d'ondes rectangulaire rempli d'un milieu diélectrique de constantes électrique et magnétique ε et μ , dont les dimensions intérieures (dans sa section transverse) sont respectivement notées a et b . Par convention et sans restreindre la généralité de l'étude, nous prendrons $a > b$.

Le métal entourant le diélectrique est supposé parfait.

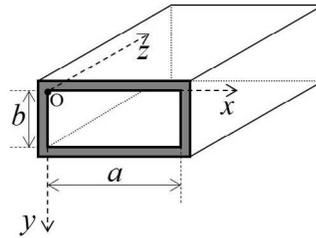


Figure 7.5 – Guide d'ondes rectangulaire.

5 Modes TE

5.1 Solutions de l'équation de propagation

Pour résoudre l'équation (7.17) on utilise la méthode de séparation des variables. On écrit :

$$H_z^0 = \psi_1(x)\psi_2(y) \quad (7.20)$$

• La substitution de (7.20) dans (7.17) conduit à :

$$\psi_2 \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \psi_1 \frac{d^2\psi_2}{dy^2} + \xi^2 \psi_1 \psi_2 = 0.$$

• En divisant par $\psi_1\psi_2$, on obtient :

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2\psi_2}{dy^2} + \xi^2 = 0,$$

que l'on peut remettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \xi^2 = -\frac{1}{\psi_2} \frac{d^2\psi_2}{dy^2}. \quad (7.21)$$

On peut clairement remarquer que le premier membre de l'équation (7.21) ne dépend que de x , tandis que le second membre ne dépend que de y . On peut donc mettre cette équation sous la forme suivante : $g(x) = f(y)$; ce qui n'est possible que si $g(x) = f(y) = \text{constante} = \kappa$. On a donc :

$$\frac{d^2\psi_2}{dy^2} + \kappa\psi_2 = 0 \quad (7.22)$$

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \xi^2 = \kappa \quad (7.23)$$

En écrivant :

$$\kappa = \nu^2 \quad (7.24)$$

la solution générale de l'équation (7.22) s'écrit :

$$\psi_2(y) = c_{01} \exp(i\nu y) + c_{02} \exp(-i\nu y) \quad (7.25)$$

où c_{01} et c_{02} sont des constantes.

En substituant $\kappa = \nu^2$ dans l'équation (7.23), on obtient :

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = (\nu^2 - \xi^2) \psi_1, \quad \text{avec} \quad \xi^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - \beta^2 \quad (7.26)$$

En écrivant :

$$\rho^2 = \xi^2 - \nu^2 \Leftrightarrow \rho^2 + \nu^2 = \xi^2 \quad (7.27)$$

la solution générale de l'équation (7.26) s'écrit :

$$\psi_1(x) = d_{01} \exp(i\rho x) + d_{02} \exp(-i\rho x) \quad (7.28)$$

où d_{01} et d_{02} sont des constantes.

En tenant compte des relations (7.16) et (7.20), les composantes transverses s'écrivent :

$$H_x^0 = \frac{-i\beta}{\xi^2} \psi_2(y) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad (7.29a)$$

$$H_y^0 = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \psi_1(x) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (7.29b)$$

$$E_x^0 = \frac{-i\omega\mu}{\xi^2} \psi_1(x) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (7.29c)$$

$$E_y^0 = \frac{i\omega\mu}{\xi^2} \psi_2(y) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad (7.29d)$$

5.2 Application des conditions aux limites

Le métal étant supposé parfait, on peut considérer que le champ électromagnétique y est nul. De ce fait, les relations de continuité de la composante de \vec{E} tangentielle aux parois métalliques, et la composante de \vec{B} (ou $\vec{H} = \vec{B}/\mu$) normale aux parois métalliques, imposent que ces composantes de champ s'annulent aux endroits où se situent ces parois.

- Continuité de la composante tangentielle de \vec{E} :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y^0(x=0, y) = 0 \\ E_y^0(x=a, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^0(x, y=0) = 0 \\ E_x^0(x, y=b) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (7.31)$$

- Continuité de la composante normale de \vec{H} :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y^0(x, y=0) = 0 \\ H_y^0(x, y=b) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (7.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x^0(x=0, y) = 0 \\ H_x^0(x=a, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.33)$$

Remarque Dans les relations (7.30), (7.31), (7.32), et (7.33), nous avons tenu compte des expressions (7.16). D'autre part, ici, les conditions de continuité décrites par (7.31) et (7.32) aboutissent à la même relation, tandis que les conditions de continuité décrites

par (7.30) et (7.33) aboutissent à la même relation. Conséquemment, seules deux des quatre conditions de continuité suffisent pour traiter le problème.

Les relations (7.30), (7.29d) et (7.28) conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'_1(0) = 0 \\ \psi'_1(a) = 0 \end{array} \right\} \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} d_{01} - d_{02} = 0 \\ d_{01} \exp(i\rho a) - d_{02} \exp(-i\rho a) = 0 \end{array} \right\} \text{ et } \sin(\rho a) = 0 \quad (7.34)$$

$$\rho = \frac{m\pi}{a} \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.35)$$

Les relations (7.31), (7.29c), et (7.25), conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'_2(0) = 0 \\ \psi'_2(b) = 0 \end{array} \right\} \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} c_{01} - c_{02} = 0 \\ c_{01} \exp(ivb) - c_{02} \exp(-ivb) = 0 \end{array} \right\} \text{ et } \sin(vb) = 0 \quad (7.36)$$

$$v = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.37)$$

Les relations (7.34) et (7.36) permettent d'écrire que $d_{01} = d_{02} = D_0$ et $c_{01} = c_{02} = C_0$, et de ré-exprimer les champs ψ_1 et ψ_2 définis dans (7.25) et (7.28), sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x) = D_0 \cos(\rho x) = D_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \\ \psi_2(y) = C_0 \cos(vy) = C_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{array} \right. \quad (7.38)$$

L'expression (7.20) de la composante longitudinale du champ se met alors sous la forme suivante :

$$H_z^0 = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (7.39)$$

où H_0 est une constante.

Les relations (7.29) fournissent la totalité des composantes transverses des champs :

$$\vec{H} = \begin{vmatrix} \frac{i\beta\pi m}{a\xi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{i\beta\pi n}{b\xi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{vmatrix} H_0 \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7.40)$$

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{i\omega\mu\pi n}{b\xi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{-i\omega\mu\pi m}{a\xi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ 0 \end{vmatrix} H_0 \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7.41)$$

5.3 Relation de dispersion des modes TE

Les relations (7.26), (7.27), (7.35) et (7.37), conduisent à : $(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 = \xi^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2$ soit

$$\beta = \beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)} \quad (7.42)$$

L'équation (7.42) est la relation de dispersion des modes TE dans le guide d'onde. On peut réécrire (7.42) sous la forme suivante :

$$\beta^2 = k_{\text{mat}}^2 - k_c^2 \quad (7.43)$$

où

- $k_{\text{mat}} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$ est le nombre d'onde que l'onde aurait dans un matériau massif (ε, μ) en l'absence de guidage de l'onde. Si ce matériau est de l'air, alors $k_{\text{mat}} \simeq k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \omega/c$.

- $k_c = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}$ est le nombre d'onde de coupure imposé par le guidage de l'onde.

5.4 Fréquence de coupure des modes

La relation de dispersion (7.42) n'est exploitable que si l'on se donne un couple d'entiers (m, n). Autrement dit, tout couple d'entier (m, n) définit un mode de propagation dont le nombre d'onde β_{mn} est donné par (7.42). Cette relation montre que le mode (m, n) ne peut se propager que si $\beta_{mn}^2 > 0$; ce qui n'est possible que si $\omega > \omega_{cmn}$ où

$$\omega_{cmn} = 2\pi \nu_{cmn} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \quad (7.44)$$

est la **pulsation de coupure** du mode (m, n).

Un mode est dit évanescent, ou coupé, si $\omega < \omega_{cmn}$.

Le **guide d'onde rectangulaire** se comporte comme un **filtre passe-haut**.

On définit le **mode fondamental** (ou mode prépondérant) comme le mode ayant la plus petite fréquence de coupure.

Dans le guide considéré, où $a > b$, le mode fondamental est le mode TE₁₀.

Plusieurs modes peuvent se propager dans un guide, mais les fréquences d'utilisation et les dimensions du guide peuvent être choisies de telle manière à ne faire propager que le **mode fondamental**.

Exemple

Soit un guide d'onde rectangulaire rempli d'air tel que : $a = 2,286$ cm et $b = 1,016$ cm. Les fréquences de coupure des modes TE_{mn} pour tous les couples d'indice (m,n) tels que, $0 \leq m \leq 3$ et $0 \leq n \leq 3$, sont obtenues à partir de la relation (7.44) et sont consignées dans le tableau 7.1.

Tableau 7.1 – Table des fréquences de coupure ν_{mn} (en GHz) des modes TE_{mn} .

$m \backslash n$	0	1	2	3
0	–	14,76	29,53	44,29
1	6,56	16,15	30,2	44,77
2	13,12	19,75	32,31	46,19
3	19,68	24,60	35,49	48,47

Le mode ayant la plus petite fréquence de coupure (mode fondamental) est le mode TE_{10} . Sa fréquence de coupure est de 6,56 GHz. C'est lorsque la fréquence atteint 13,12 GHz que le mode TE_{20} est à son tour excité. La propagation devient alors multimodale. De manière générale, le nombre de modes augmentent à mesure que la fréquence augmente.

Les paramètres m et n caractérisent la périodicité du champ électrique suivant Ox et suivant Oy .

- $m = 0$ signifie qu'il n'y a pas d'extremum de champ E suivant Ox
- $n = 1$ signifie qu'il y a un extremum de champ E suivant Oy

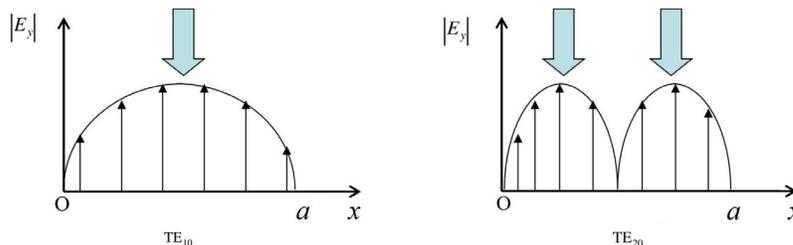


Figure 7.6 – Les modes TE_{10} et TE_{20} .

De manière générale, dans le mode TE_{mn} , on trouve m extrema de champ E dans la direction Ox et n extrema suivant Oy .

6 Modes TM

La méthodologie d'étude des modes TM est en tout point similaire à celle que nous avons adoptée pour les modes TE. Nous aboutissons à l'expression des composantes des champs qui suit :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{-i\beta\pi m}{a\xi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{-i\beta\pi n}{b\xi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{pmatrix} E_0 \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7.45)$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{i\omega\varepsilon\pi n}{b\xi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{-i\omega\varepsilon\pi m}{a\xi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ 0 \end{pmatrix} E_0 \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7.46)$$

Par ailleurs, on aboutit à la même relation de dispersion que celle trouvée pour les modes TE.

- 1 Lorsqu'elles se propagent librement, les ondes électromagnétiques peuvent s'éparpiller, être déviées ou détruites par des obstacles matériels ou des perturbations d'origine atmosphérique.
- 2 Les guides d'ondes sont des dispositifs qui permettent de canaliser et de sécuriser la propagation des ondes. Ils sont constitués de parois métalliques ou de dioptrés (interface entre deux diélectriques), qui servent à confiner les ondes à l'intérieur du guide.
- 3 Les ondes ne peuvent se propager dans les guides d'ondes que si elles satisfont aux équations de Maxwell en tout point du guide, c'est-à-dire, à l'intérieur du guide et sur les parois métalliques ou diélectriques du guide.
- 4 Sur les parois (métalliques ou diélectriques) du guide d'onde, les équations de Maxwell conduisent aux conditions limites à satisfaire :
 - (i) Continuité de la composante tangentielle du champ électrique, si l'onde en est dotée.
 - (ii) Continuité de la composante normale du champ magnétique, si l'onde en est dotée. L'application de ces conditions limites est indispensable pour obtenir la relation de dispersion du guide d'ondes.
- 5 Dans le cas d'une paroi diélectrique, deux conditions limites supplémentaires s'appliquent, à savoir, la continuité de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique H (si l'onde en est dotée), et la continuité de la composante normale du champ d'induction électrique D (si l'onde en est dotée).
- 6 Pour se propager dans un guide d'ondes, la lumière adopte certaines formes particulières de répartition de l'intensité lumineuse de la section transverse du guide, qui dépendent de la fréquence du champ électromagnétique. On les appelle modes de propagation.
- 7 Chaque mode se propage à une vitesse et une longueur d'onde qui lui sont propres. À basse fréquence, un seul mode est (ou même aucun mode n'est) capable de se propager dans le guide d'ondes. À mesure que la fréquence augmente, le nombre de modes autorisés à se propager augmente.

Testez-vous



- 7.1** Un guide d'onde sert à canaliser la marche d'une onde électromagnétique à l'aide de surfaces diélectriques ou métalliques. La détermination de la relation de dispersion passe par l'application des équations de Maxwell à l'intérieur du guide, et l'application des **conditions aux limites** sur les surfaces limitrophes du guide. Identifier ci après ces conditions :
- a. continuité de la composante normale du champ électrique
 - b. continuité de la composante normale du champ magnétique
 - c. continuité de la composante tangentielle du champ électrique
 - d. continuité de la composante tangentielle du champ magnétique
- 7.2** Préciser les conditions de continuité à l'interface entre deux diélectriques parfaits, non magnétiques :
- a. continuité de la composante normale du champ \vec{D}
 - b. continuité de la composante normale du champ \vec{H}
 - c. continuité de la composante tangentielle du champ \vec{D}
 - d. continuité de la composante tangentielle du champ \vec{H}
- 7.3** Dans un câble coaxial, on peut faire propager une onde électromagnétique dont le champ électrique est en tout point normal aux surfaces métalliques du guide, tandis que le champ magnétique est en tout point tangentiel à ces surfaces. Dans ce cas aussi, la détermination de la relation de dispersion nécessite d'appliquer des **conditions aux limites** sur les surfaces du guide :
- a. vrai
 - b. faux
- 7.4** Quelle que soit sa fréquence, une onde électromagnétique peut se propager dans un guide d'ondes :
- a. vrai
 - b. faux
- 7.5** Les ondes aptes à se propager dans une fibre sont appelées **modes de propagation**. On désigne par ce terme :
- a. des ondes qui se propagent à la même fréquence, avec des longueurs d'onde différentes
 - b. des ondes qui se propagent avec la même longueur d'onde, et des fréquences différentes



Entraînez-vous

7.1 On rappelle que la relation de dispersion des modes de type TE (transverse électrique) dans un guide d'onde rectangulaire rempli d'air, est donnée par :

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)},$$

où a et b désignent les dimensions intérieures du guide (dans sa section transverse), β est la constante de propagation, ω est la pulsation de l'onde, (ϵ_0, μ_0) sont les constantes électrique et magnétique de l'air (assimilable au vide). À tout couple d'indice (m, n) on peut alors associer un mode TE_{mn} , et une constante de propagation β_{mn} .

1. Sachant qu'un mode TE_{mn} ne peut se propager que si $\beta_{mn}^2 > 0$, donner l'expression de la pulsation minimale au-delà de laquelle on déclenche la propagation du mode TE_{mn} . Cette pulsation sera notée ω_{cmn} . La fréquence correspondante, ν_{cmn} , est la fréquence de coupure du mode TE_{mn} .

2. Dresser le tableau des fréquences de coupures pour un guide de dimensions : $a = 0,284$ cm, $b = 0,568$ cm, pour tous les couples d'indice (m, n) tels que, $0 \leq m \leq 3$ et $0 \leq n \leq 3$.

3. Identifier le couple d'indice (n_0, m_0) correspondant au mode fondamental de propagation, $TE_{m_0 n_0}$. Quelle est sa fréquence de coupure ? Est-il possible de faire propager ce mode tout seul ? Si oui, dans quelle plage de fréquence ?

4. Est-il possible de faire propager le mode TE_{10} tout seul ?

7.2 Un milieu diélectrique non conducteur, de constante électrique ϵ et constante magnétique μ , occupe un espace limité par deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan yOz , en $x = 0$ et $x = d$, comme illustré dans la figure 7.7. Une onde progressive sinusoïdale se propage suivant l'axe Oz , dans le sens positif. On désigne par β la constante de propagation.

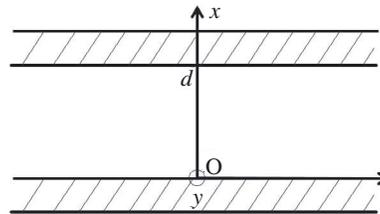


Figure 7.7 – Schéma du guide d'onde.

1. Établir l'équation de propagation de la composante longitudinale du champ d'excitation magnétique H_z .

2. Montrer que pour les modes transverse électrique (TE), les composantes transversales du champ électromagnétique s'expriment toutes en fonction des dérivées de la composante longitudinale du champ d'excitation magnétique H_z .

3. Donner l'expression de toutes les composantes du champ électromagnétique pour les modes transverse électrique (TE), et la relation de dispersion de ces modes.

Solutions ●

- 7.1 Réponses b, c ; 7.2 Réponses a, b, d ; 7.3 Réponse b ; 7.4 Réponse b ; 7.5 Réponse a.

- 7.1 1. La relation de dispersion montre que le mode TE_{mn} ne peut se propager que si $\beta_{mn}^2 > 0$; ce qui n'est possible que si $\omega > \omega_{cmn}$ où

$$\omega_{cmn} = 2\pi\nu_{cmn} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$$

2.

Tableau 7.2 – Table des fréquences de coupure ν_{cmn} (en GHz) des modes TE_{mn} .

$m \backslash n$	0	1	2	3
0	–	26,40	52,82	79,22
1	52,82	59,05	74,69	95,22
2	105,6	108,9	118,1	132
3	158,4	160,6	167	177,1

3. Le mode fondamental de propagation est celui qui a la fréquence de coupure la plus basse. D'après le tableau des fréquences de coupure, il s'agit du mode TE_{01} . Sa fréquence de coupure est $\nu_{c01} = 26,40$ GHz.

Donc pour $\nu > \nu_{c01}$ le mode TE_{01} se propage. La fréquence de coupure la plus proche de 26,40 GHz est 52,82 GHz, qui correspond aux modes TE_{10} et TE_{02} .

Il est possible de faire propager le mode fondamental (TE_{01}) tout seul, à condition de couper tous les autres modes ; ce qui automatiquement réalisé en coupant les modes TE_{10} et TE_{02} . Pour cela on doit choisir une fréquence ν telle que $26,40 \text{ GHz} < \nu < 52,82 \text{ GHz}$

4. Il n'est pas possible de faire propager le mode TE_{10} tout seul. En effet, dès que la fréquence excède 52,82 GHz, les modes TE_{01} , TE_{10} , et TE_{02} , se propagent.

7.2 1. Équations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{D} = 0 \\ \overline{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (7.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (7.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \overline{\text{rot}}(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (7.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{rot}}(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (7.50)$$

Relations constitutives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right. \quad (7.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right. \quad (7.52)$$

Équation de propagation

On applique la **formule du double rotationnel** au champ \vec{H} , puis les équations (7.49), (7.52), (7.50), (7.51), et (7.48) :

$$\overline{\text{rot}} \left[\overline{\text{rot}} \left(\vec{H} \right) \right] = \overline{\text{grad}} \left[\text{div} \left(\vec{H} \right) \right] - \Delta \vec{H} \Rightarrow$$

$$-\Delta \vec{H} = \overline{\text{rot}} \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \frac{\varepsilon \partial \overline{\text{rot}} \left(\vec{E} \right)}{\partial t} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

La projection suivant l'axe Oz conduit à : $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_z - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0.$

- Comme l'onde progressive sinusoïdale se propage suivant l'axe Oz, dans le sens positif, il possède nécessairement un terme de propagation de type $F_0 = e^{i(\omega t - \beta z)}$; ce qui implique que : $\frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -i\beta$ et $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$.

- Les plans métalliques s'étendant indéfiniment dans la direction Oy, les composantes du champ électromagnétique ne dépendent pas de y : $\frac{\partial}{\partial y} \leftrightarrow 0$.

On a donc finalement :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -(\mu \varepsilon \omega^2 - \beta^2) H_z = -\xi^2 H_z = (i\xi)^2 H_z$$

$$\xi^2 = \mu \varepsilon \omega^2 - \beta^2 \quad (7.53)$$

où H_z est de la forme $H_z = H_0(x)F_0 = H_0(x)e^{i(\omega t - \beta z)}$.

$$2. \overline{\text{rot}} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ soit } \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega \varepsilon E_x \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega \varepsilon E_y \quad (7.55)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega \varepsilon E_z \quad (7.56)$$

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \text{ soit } \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega \mu H_x \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega \mu H_y \quad (7.58)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega \mu H_z \quad (7.59)$$

- Comme l'onde progressive sinusoïdale se propage suivant l'axe Oz, dans le sens positif, il possède nécessairement un terme de propagation de type $F_0 = e^{i(\omega t - \beta z)}$; ce qui implique que : $\frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -i\beta$ et $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$.

- L'onde considérée étant transverse électrique, on a $E_z = 0$.

En éliminant H_x dans (7.55) et (7.57) on obtient $E_y = \frac{i\mu\omega}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$

En éliminant E_y dans (7.55) et (7.57) on obtient $H_x = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$

En éliminant H_y dans (7.54) et (7.58) on obtient $E_x = \frac{-i\mu\omega}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$

En éliminant E_x dans (7.54) et (7.58) on obtient $H_y = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$

où $\xi^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2$.

3. En tenant compte de la question 2., on a :

$$E_x = \frac{-i\mu\omega}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, H_y = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, H_x = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, E_y = \frac{i\mu\omega}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

La condition de continuité de la composante tangentielle du champ électrique, E_y , impose que le champ E_y s'annule sur les surfaces du conducteur en $x = 0$ et $x = d$. Cela n'est possible que si l'amplitude des composantes du champ électromagnétique sont des fonctions sinusoïdales de x . En d'autres termes, il faut que la solution de l'équation (7.53) soit une oscillation sinusoïdale. Cela n'est possible que si $\xi^2 > 0$. On a alors :

$$H_0(x) = \alpha^+ \exp(i\xi x) + \alpha^- \exp(-i\xi x) \quad (7.60)$$

$$E_y = \frac{-\mu\omega}{\xi} [\alpha^+ \exp(i\xi x) - \alpha^- \exp(-i\xi x)] \quad (7.61)$$

- Condition de continuité de E_y aux interfaces $x = 0$ et $x = d$.

$$\begin{cases} E_y(0) = 0 \\ E_y(d) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha^+ = \alpha^- \\ \alpha^+ \exp(i\xi d) - \alpha^- \exp(-i\xi d) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \exp(2i\xi d) = 1 \rightarrow 2\xi d = 2m\pi$$

$$\xi = \frac{m\pi}{d} \quad (7.62)$$

On en déduit :

$$H_0(x) = A_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{d}\right), H_z = H_0(x)F_0 = H_0(x)e^{i(\omega t - \beta z)}$$

où $A_0 = 2\alpha^+$.

$$H_x = iA_0\beta \frac{d}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}, E_y = -i\mu\omega A_0 \frac{d}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}.$$

La relation de dispersion de ces modes est donnée par $\xi^2 = \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$

$$\beta = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}$$

La fibre optique

Introduction

La fibre optique est un fil de verre capable de guider la lumière sur de très grandes distances sans trop l'atténuer. Elle constitue actuellement le support physique d'Internet, le réseau mondial des télécoms. Son diamètre, à peine de la taille d'un cheveu, en fait un outil très apprécié dans des domaines aussi variés que le médical (pour l'observation de l'intérieur du corps humain et pour certains traitements), l'aéronautique (inspection des soudures dans des réacteurs d'avion), l'électronique et l'optoélectronique (câblage et connectique), les capteurs, etc.

Objectifs

Connaître les lois qui gouvernent la propagation de la lumière dans une fibre optique à saut d'indice.

Expliquer le contenu physique de ces lois, en partant des équations de Maxwell jusqu'aux modes de propagation.

Plan

- 1 Description physique de la fibre à saut d'indice
- 2 Équations de propagation
- 3 Expressions des champs en coordonnées cylindriques
- 4 Solutions de l'équation de propagation
- 5 Paramètre de fréquence normalisée V
- 6 Relation de dispersion
- 7 Classification générale des modes de propagation
- 8 Modes de propagation dans les fibres à faible guidage

Une **fibre optique** est un fil en verre ou en plastique très fin, qui a la propriété d'être un excellent guide de la lumière. Inventée dans les années 1960, ce guide d'ondes a d'abord été exploité dans le domaine médical pour réaliser des diagnostics *in vivo* (dans le corps du malade), et pour le traitement de certaines pathologies par effet thermique, tels que : pulvériser un calcul rénal, découper une tumeur ou réparer une rétine. Au fil des ans, les applications de la fibre optique se sont rapidement développées, et se sont étendues à des domaines très divers, tels que les capteurs, le câblage et la connectique en électronique et optoélectronique, la décoration, ou le transport d'informations. À l'heure actuelle, le secteur d'activité où l'utilisation des fibres optiques est quantitativement la plus importante est de loin celui du transport de l'information. La fibre optique constitue

d'ailleurs l'un des éléments clés de la révolution des télécommunications, du fait de ses multiples avantages par rapport aux autres supports de communication, à savoir : sa très faible atténuation sur une grande plage de fréquence, son faible coût de fabrication, son faible encombrement, l'excellente stabilité de propagation qu'elle procure, son insensibilité aux perturbations électromagnétiques, et surtout, sa très grande bande passante (~ 30 THz). Elle peut transporter jusqu'à 100 000 fois plus d'informations qu'un câble de cuivre.

C'est une dizaine d'années après son invention que la fibre optique a commencé à servir comme support physique pour le transport de l'information. La fibre optique fut alors d'abord utilisée en téléphonie avant de révolutionner l'ensemble du domaine des communications, allant des réseaux LAN (réseaux d'équipements informatiques connectés entre eux et partageant des données et programmes communs, très utilisés dans les établissements scolaires, les bureaux, les sociétés, les usines, etc.) jusqu'au réseau Internet. En dépit de tous les progrès accomplis grâce à la technologie des fibres optiques, les besoins liés à ces nouveaux outils de communication, tant au niveau des débits de transmission qu'au niveau du déploiement de la fibre dans des territoires éloignés des centres urbains, restent immenses et encore très loin d'être assouvis. La technologie des fibres optiques, de même que son déploiement, continuent à se développer avec le soutien des pouvoirs publics et des organisations non gouvernementales telles que le **FTTH Council Europe** (FTTH : *Fibre To The Home*, qui signifie « fibre jusqu'au foyer ») qui œuvrent dans le but de favoriser l'accès d'un plus grand nombre d'utilisateurs (particuliers ou entreprises) aux réseaux de communication à ultra-haut débit par fibre optique.

Ces dernières années, de nouveaux types de fibre optique ont été mis au point, telles que les fibres à cristaux photoniques, permettant des gains significatifs de performances dans le domaine du traitement optique de l'information par des techniques non linéaires, dans l'amplification optique ou encore dans la génération de sources lumineuses appelées super-continuum utilisables par exemple pour le diagnostic médical.

Ce chapitre examine les conditions de propagation de la lumière dans une fibre optique standard, c'est-à-dire, une fibre constituée de deux matériaux diélectriques agencés sous la forme de cylindres concentriques. Elle est composée, dans sa partie centrale, d'un premier diélectrique de forme cylindrique et de faible rayon (de l'ordre de quelques μm), appelé **cœur** de la fibre. Ce cœur est entouré d'un second matériau diélectrique appelé **gaine optique**. L'ensemble est entouré d'une troisième couche de protection en plastique ou en polymère. Les deux matériaux diélectriques sont conçus de telle sorte que l'indice de réfraction du cœur (n_1) soit supérieur à l'indice de la gaine (n_2); ce qui permet de confiner et guider la lumière sur de grandes distances. La fibre optique standard est largement utilisée dans le domaine télécom, où elle se décline sous différentes versions selon la distance de communication à couvrir et le débit de transmission des informations qu'elle doit supporter.

La version la plus répandue est la **fibre à saut d'indice**, dans laquelle l'indice de réfraction reste constant dans le cœur et varie de manière abrupte lorsqu'on passe du cœur à la gaine.

Les fibres à saut d'indice se divisent elles-mêmes en deux catégories : les **fibres à saut d'indice multi-modes** (utilisées principalement pour des transmissions à courtes distances, de l'ordre de quelques mètres jusqu'à une centaine de kilomètres) et les **fibres à saut d'indice monomodes** (que l'on utilise pour les communications à longue distance, de l'ordre d'une centaine de kilomètres jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres). L'autre

version de fibre standard très répandue est la **fibre à gradient d'indice**, qui est une fibre dans laquelle l'indice décroît graduellement dans la direction transversale de la fibre, du centre du cœur vers la gaine, jusqu'à atteindre la valeur de l'indice de réfraction n_2 de la gaine. Les fibres à gradient d'indice sont principalement utilisées pour des transmissions à moyenne portée, correspondant à une situation intermédiaire entre les domaines respectifs d'utilisation de la fibre à saut d'indice multi-mode et de la fibre à saut d'indice monomode. La figure 8.1 illustre ces différents types de fibre.

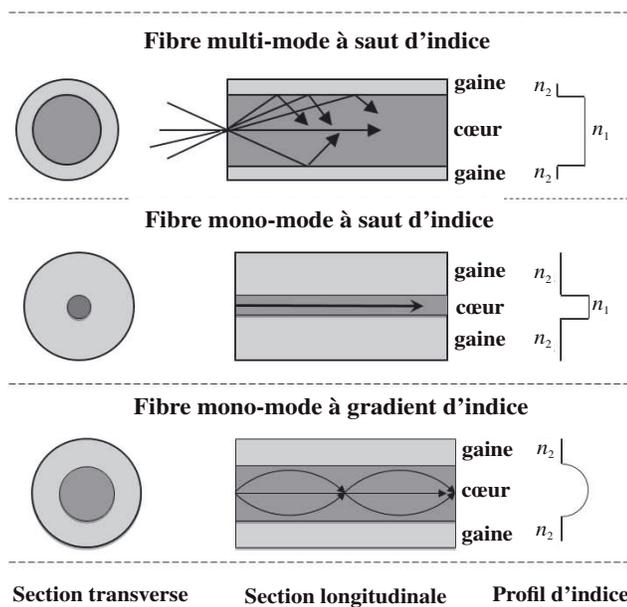


Figure 8.1– Schéma de fibres télécoms.

Encart 8.1 Les communications par fibre optique

Le principe du transport de la lumière le long de fines fibres de verre remonte à la première moitié du xx^e siècle. Cependant, les dispositifs conçus à cette époque étaient plutôt rudimentaires. La première application très élaborée de la fibre optique fut le fibroscope flexible inventée au début des années 1950 par Abraham van Heel et Harold Hopkins. Cet appareil permettait la transmission d'une image le long

1 Description physique de la fibre à saut d'indice

de fibres en verre. Il fut particulièrement utilisé en endoscopie, pour observer l'intérieur du corps humain et pour inspecter des soudures dans des réacteurs d'avion. Les premières fibres fabriquées présentaient alors un inconvénient majeur : un facteur d'atténuation très élevé limitant sévèrement les distances de propagation. Il fallut attendre l'invention du laser dans les années 1960 et l'amélioration des processus de fabrication permettant une baisse considérable du facteur d'atténuation, pour qu'émerge l'idée d'utiliser la fibre optique pour les communications à grande distance. Cette idée fut mise en pratique par l'ingénieur américano-britannique **Charles K. Kao**, qui réalisa en 1966 les premières expériences de transmissions par fibre optique (pour lesquelles il reçut le prix Nobel de physique en 2009). En France, le premier système de transmission par fibre optique fut installé en 1980, à Paris, entre les centraux téléphoniques des Tuileries et Philippe-Auguste. On estime que depuis 2005 plus de 80 % des communications à longue distance sont transportées le long de plus de 25 millions de kilomètres de câbles à fibre optique partout dans le monde. Ce sont ces câbles qui constituent actuellement le support physique d'Internet.

1 Description physique de la fibre à saut d'indice

Dans la suite de ce chapitre, nous nous focaliserons sur la fibre optique à saut d'indice à symétrie cylindrique, pouvant être monomode ou multi-mode (figure 8.2).

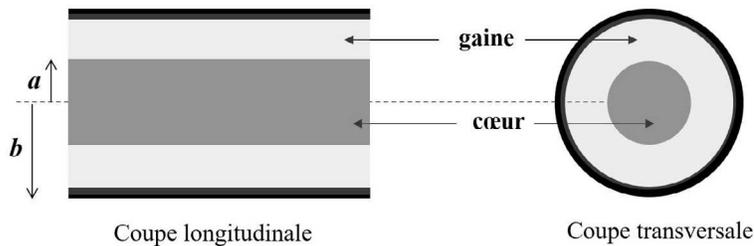


Figure 8.2 – Fibre à saut d'indice.

Le constituant de base des fibres à saut d'indice est la silice amorphe (SiO_2). C'est lors de la fabrication de ces fibres que des dopants sont incorporés dans la silice afin de modifier l'indice de réfraction et pour sculpter le profil d'indice de la fibre. Le cœur de la fibre est constitué d'un matériau de silice amorphe légèrement dopé, d'indice n_1 . Il est entouré d'une gaine optique en silice légèrement dopée de manière à ce que son indice n_2 soit très légèrement inférieur à celui du cœur. Le germanium, l'aluminium ou le phosphore, sont généralement utilisés pour augmenter l'indice du cœur n_1 . À l'inverse, le bore ou le fluor font diminuer l'indice de la gaine n_2 . Ce type

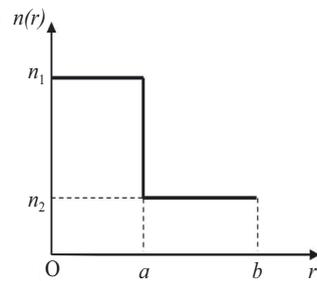


Figure 8.3 – Profil d'indice.

de fibre possède des dimensions de l'ordre de la centaine de micromètre. La différence d'indice entre le cœur et la gaine est relativement faible, de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} ; ce qui conduit à une différence relative d'indice, Δ , relativement très faible :

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \ll 1.$$

Le diamètre de la gaine, $2b$, est en général de $125 \mu\text{m}$, mais peut aussi être de $140 \mu\text{m}$ (cas de certaines fibres multi-modes). Le rayon du cœur, a , se situe entre 1 et $100 \mu\text{m}$.

Tout point M à l'intérieur de la fibre est facilement repérable dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , comme représenté dans la figure 8.4. Le point O , origine du repère, est fixé à l'entrée de la fibre. On désigne par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ les vecteurs unitaires du repère orthonormé associé à la fibre. Dans la suite de ce chapitre, on recherche les conditions de propagation d'une onde le long de l'axe Oz , qui est commun au cœur et à la gaine.

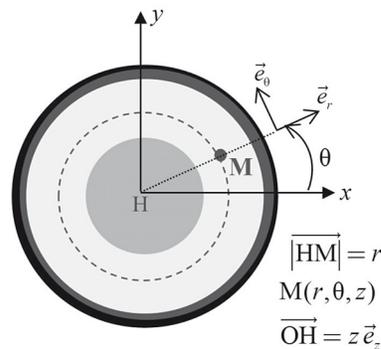


Figure 8.4 – Repère associé à la fibre.

2 Équations de propagation

2.1 Équations de Maxwell

La fibre est constituée de matériaux diélectriques (cœur et gaine) non conducteurs, dépourvus de charges libres et de courants libres : $\rho_{\text{libre}} = 0$ et $\vec{j}_{\text{libre}} = 0$. En tout point situé au sein de la fibre les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme suivante :

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}} = 0 \quad (8.1)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (8.2)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8.3)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (8.4)$$

2.2 Relations constitutives

Lorsqu'elle est soumise à de faibles intensités lumineuses, une fibre se comporte comme un milieu linéaire homogène et isotrope. Les relations constitutives s'écrivent alors :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (8.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.6)$$

où ε est la permittivité diélectrique du milieu, qui vaut $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 n_1^2$ dans le cœur et $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 n_2^2$ dans la gaine. Par ailleurs, les milieux constituant la fibre n'ont aucune propriété magnétique particulière. La perméabilité magnétique μ est donc assimilable à celle du vide : $\mu \simeq \mu_0$ aussi bien dans le cœur que dans la gaine.

2.3 Équations de propagation

Pour obtenir l'équation de propagation du champ électromagnétique, on applique la formule du double rotationnel ($\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$) aux champs électrique et magnétique :

$$\text{rot rot} \vec{E} = \text{grad div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

(8.4) $\Rightarrow \text{rot rot} \vec{E} = -\mu_0 \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{H}) = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, compte tenu de (8.3) et (8.5).

Par ailleurs $\text{grad div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$, compte tenu de (8.1) et (8.5).

On en déduit l'équation de propagation du champ électrique. La même procédure conduit à l'équation de propagation du champ magnétique. Les deux équations s'écrivent :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (8.7a)$$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (8.7b)$$

Les équations (8.7a) et (8.7b) sont les **équations d'Helmholtz**.

3 Expressions des champs en coordonnées cylindriques

Compte tenu de la symétrie du milieu, il convient d'exprimer les champs dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_z \vec{e}_z + E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = \vec{E}_0(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (8.8a)$$

$$\vec{H}(r, \theta, z) = H_z \vec{e}_z + H_r \vec{e}_r + H_\theta \vec{e}_\theta = \vec{H}_0(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (8.8b)$$

où β est la **constante de propagation**, c'est-à-dire la composante vecteur d'onde sur l'axe Oz.

3.1 Relations entre champs transverses et champs longitudinaux

Nous allons montrer qu'il est possible d'exprimer toutes les composantes transverses des champs \vec{E} et \vec{H} à l'aide des composantes longitudinales E_z et H_z . En coordonnées cylindriques, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_r & (8.9a) \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i\omega\mu_0 H_\theta & (8.9b) \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -i\omega\mu_0 H_z & (8.9c) \end{cases}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_r & (8.10a) \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = i\omega\varepsilon E_\theta & (8.10b) \\ \frac{\partial H_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = i\omega\varepsilon E_z & (8.10c) \end{cases}$$

$$\text{où } \frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -i\beta \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega.$$

Notons que, si on considère les composantes E_z et H_z comme des quantités connues, alors les équations (8.9a) et (8.10b) deviennent un système de deux équations à deux inconnues : E_θ et H_r . On peut donc (par des opérations d'addition ou de soustraction membre à membre) exprimer facilement chacune de ces inconnues en fonction de E_z et H_z . De la même manière, on remarque que les équations (8.9b) et (8.10a) forment un système de deux équations à deux inconnues (E_r et H_θ), permettant d'exprimer E_r et H_θ en fonction de E_z et H_z . On obtient facilement :

$$(8.9b) \text{ et } (8.10a) \Rightarrow E_r = \frac{-i}{\xi^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\mu_0 \omega}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right) \quad (8.11a)$$

$$H_\theta = \frac{-i}{\xi^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \varepsilon \omega \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (8.11b)$$

$$(8.9a) \text{ et } (8.10b) \Rightarrow E_\theta = \frac{-i}{\xi^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \mu_0 \omega \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (8.11c)$$

$$H_r = \frac{-i}{\xi^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\varepsilon \omega}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) \quad (8.11d)$$

où

$$\xi^2 = k_0^2 n^2 - \beta^2, \quad k_0 = \omega/c. \quad (8.11e)$$

Les équations (8.11a), (8.11b), (8.11c), et (8.11d), permettent de trouver toutes les composantes transversales dès que l'on connaît les deux composantes longitudinales E_z et H_z . On peut donc se contenter de résoudre l'équation de propagation uniquement pour les composantes longitudinales E_z et H_z .

4 Solutions de l'équation de propagation

Considérons la fonction scalaire $\psi = \psi(r, \theta, z)$ qui représente indifféremment une des composantes E_z ou H_z . La projection de l'équation de propagation (8.7) dans la direction Oz donne :

$$\Delta\psi - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (8.12)$$

où l'expression du laplacien en coordonnées cylindrique est donnée par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Pour résoudre l'équation (8.12) on utilise la **méthode de séparation des variables**. On écrit :

$$\begin{cases} \psi = \varphi(r, \theta) e^{-i(\beta z - \omega t)} \\ \varphi \equiv \psi_1(r) \psi_2(\theta) \end{cases} \quad (8.13)$$

La substitution de (8.13) dans (8.12) conduit à :

$$\left[\psi_2 \left(\frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \psi_1 \frac{d^2 \psi_2}{d\theta^2} - \beta^2 \psi_1 \psi_2 + \varepsilon\mu_0 \omega^2 \psi_1 \psi_2 \right] e^{i\varphi} = 0.$$

En divisant par $\psi_1 \psi_2$, on obtient :

$$\frac{1}{\psi_1} \left(\frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2 \psi_2}{d\theta^2} - \beta^2 + \varepsilon\mu_0 \omega^2 = 0$$

En multipliant par r^2 , on obtient :

$$\frac{r^2}{\psi_1} \left(\frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} \right) + (\varepsilon\mu_0 \omega^2 - \beta^2) r^2 = -\frac{1}{\psi_2} \frac{d^2 \psi_2}{d\theta^2} \quad (8.14)$$

On peut clairement remarquer que le premier membre de l'équation (8.14) ne dépend que de r , tandis que le second membre ne dépend que de θ . On peut donc mettre cette équation sous la forme suivante : $g(r) = f(\theta)$; ce qui n'est possible que si les fonctions g et f sont égales à une même constante. En écrivant $g(r) = f(\theta) = \text{constante} = \kappa$, on

obtient :

$$\frac{d^2\psi_2}{d\theta^2} + \kappa\psi_2 = 0, \quad (8.15)$$

$$\frac{r^2}{\psi_1} \left(\frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} \right) + (\varepsilon\mu_0\omega^2 - \beta^2) r^2 = \kappa. \quad (8.16)$$

En écrivant $\kappa = v^2$ avec v réel, la solution de l'équation (8.15) s'écrit :

$$\psi_2(\theta) = c_0 \exp(iv\theta) \quad (8.17)$$

où c_0 est une constante. Compte tenu de la symétrie cylindrique de la fibre, ψ_2 doit être périodique de période 2π

$$\psi_2(\theta + 2\pi) = \psi_2(\theta) \text{ soit } c_0 \exp [iv(\theta + 2\pi)] = c_0 \exp(iv\theta) \Rightarrow \exp(2i\pi v) = 1.$$

L'équation $\exp(2i\pi v) = 1$ n'a de solution que si v est un nombre entier. Nous écrivons par la suite :

$$v = m, \quad \text{avec } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pour chaque valeur de $m > 0$, l'expression (8.17) correspond à deux solutions réelles pour ψ_2 ;

$$\psi_2(\theta) = \begin{cases} c_0 \cos(m\theta) \\ c_0 \sin(m\theta) \end{cases} \quad (8.18)$$

où le nombre entier m définit la périodicité azimutale du champ électromagnétique dans la fibre. Les deux solutions définies dans la relation (8.18) peuvent être stockées dans les parties réelle et imaginaire de la fonction complexe définie par :

$$\tilde{\psi}_2(\theta) = c_0 \exp(im\theta) \quad (8.19)$$

En substituant $\kappa = v^2 = m^2$ dans l'équation (8.16), on obtient :

$$\frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} + \left(\varepsilon\mu_0\omega^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_1 = 0.$$

En posant : $\varepsilon\mu_0\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 = k_0^2 n^2$, où $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde dans le vide et λ_0 est la longueur d'onde dans le vide, et sachant que l'indice de réfraction n diffère selon qu'on se trouve dans le cœur ou dans la gaine, l'équation radiale des champs s'écrit finalement :

$$\frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} + \left(k_0^2 n_i^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_1 = 0 \quad (8.20)$$

où $n_i = n_1$ pour $0 \leq r < a$ (dans cœur), et $n_i = n_2$ pour $a < r < b$ (dans la gaine).

Nous montrerons dans la prochaine section, que l'onde n'est guidée que si sa constante de propagation β est telle que :

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1 \quad (8.21)$$

En écrivant :

$$u = a(k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (8.22a)$$

$$w = a(\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \quad (8.22b)$$

l'équation radiale des champs se met sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 \psi_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1(r)}{dr} + \left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_1(r) = 0 \quad \text{pour } r < a \text{ (cœur)} \quad (8.23a)$$

$$\frac{d^2 \psi_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1(r)}{dr} - \left(\frac{w^2}{a^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_1(r) = 0 \quad \text{pour } r > a \text{ (gaine)} \quad (8.23b)$$

Les équations (8.23) sont les **équations de Bessel**. Les solutions physiquement acceptables de cette équation s'expriment sous la forme de fonctions de Bessel :

$$\psi_1(r) = \begin{cases} J_m \left(u \frac{r}{a} \right) & \text{pour } r < a \\ K_m \left(w \frac{r}{a} \right) & \text{pour } r > a \end{cases} \quad (8.24)$$

où J_m est la **fonction de Bessel** (de première espèce) d'ordre m . K_m est la **fonction de Bessel modifiée** (de deuxième espèce), appelée aussi **fonction de Hankel modifiée**.

Finalement, les formules (8.18) et (8.24) permettent d'exprimer l'amplitude des composantes longitudinales des champs $\varphi(r, \theta) = \psi_1(r)\psi_2(\theta)$, de la manière suivante :

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} \begin{bmatrix} c_0^I \cos(m\theta) \\ c_0^I \sin(m\theta) \end{bmatrix} J_m \left(\frac{u}{a} r \right) & \text{pour } r < a \\ \begin{bmatrix} c_0^{II} \cos(m\theta) \\ c_0^{II} \sin(m\theta) \end{bmatrix} K_m \left(\frac{w}{a} r \right) & \text{pour } r > a \end{cases} \quad (8.25)$$

Il est à noter dans les formules (8.25) qu'à chaque valeur de m , correspondent deux solutions dont l'une est proportionnelle à $\cos(m\theta)$ et l'autre à $\sin(m\theta)$. Par souci de simplicité, on peut regrouper les deux solutions en les traitant respectivement comme les parties réelle et imaginaire de l'amplitude complexe du champ $\tilde{\varphi}$ défini par :

$$\tilde{\varphi}(r, \theta) = e^{im\theta} \left\{ \begin{array}{l} c_0^I J_m(\eta r) \\ c_0^{II} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \quad \text{pour } \begin{cases} r < a \\ r > a \end{cases}. \quad (8.26)$$

avec

$$\eta = \frac{u}{a} = \sqrt{(k_0^2 n_1^2 - \beta^2)} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{w}{a} = \sqrt{(\beta^2 - k_0^2 n_2^2)} \quad (8.27)$$

La figure 8.5 illustre les variations des fonctions de Bessel $J_m(x)$ et $K_m(x)$ en fonction de la variable x , pour $m = 0, 1$, et 2 . Dans l'expression (8.26) les paramètres η et ζ déterminent la vitesse de variation de $J_m(\eta r)$ et $K_m(\zeta r)$ dans le cœur et dans la gaine, respectivement. Le champ $J_m(\eta r)$ oscille d'autant plus rapidement (dans le cœur) que

η est grand. La fonction $K_m(\zeta r)$ exécute une décroissance d'autant plus rapide que ζ est grand.

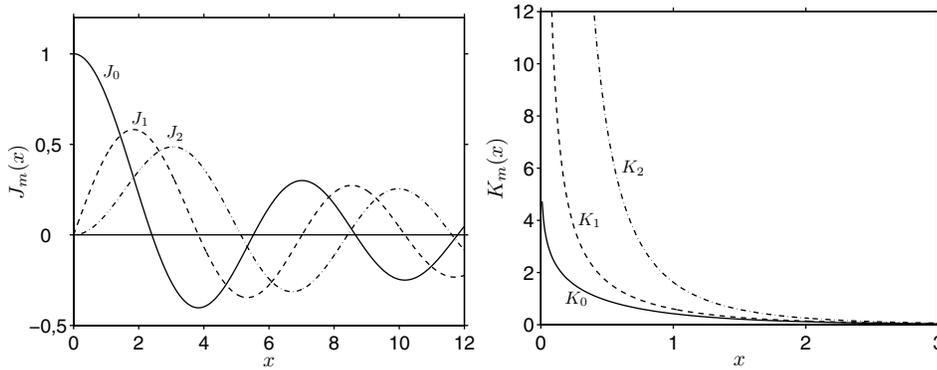


Figure 8.5 – Fonctions de Bessel $J_m(x)$ et $K_m(x)$ pour $m = 0, 1, 2$.

5 Paramètre de fréquence normalisée V

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'onde n'est guidée que si la constante de propagation β obéit à la relation (8.21); ce qui implique que $k_0^2 n_1^2 - \beta^2 > 0$ et $\beta^2 - k_0^2 n_2^2 > 0$. On peut avoir un meilleur aperçu de la condition de guidage en examinant attentivement les paramètres u et w définis dans les relations (8.22), qui imposent à u et w d'être des grandeurs réelles positives. Il est important de noter que u et w dépendent chacun de la constante de propagation β , mais que la somme de leur carré est indépendante de β . On peut donc introduire, à partir des relations (8.22), une grandeur appelée **paramètre de fréquence normalisée** V , défini par :

$$V = (u^2 + w^2)^{1/2} = ak_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = a \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ON} \quad (8.28a)$$

avec

$$\text{ON} = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}. \quad (8.28b)$$

Lorsqu'on les exprime en fonction des paramètres normalisés définis par (8.27), les relations (8.22) s'identifient à des relations de Pythagore reliant les longueurs des côtés dans un triangle rectangle, $k_1^2 = \beta^2 + \eta^2$ et $\beta^2 = k_2^2 + \zeta^2$ (figure 8.6) avec $k_1 = k_0 n_1$ et $k_2 = k_0 n_2$. On voit alors que le vecteur $\vec{\eta}$ est assimilable à la composante transversale du vecteur d'onde. Autrement dit, ce vecteur (dirigé vers la gaine) symbolise la pénétration du champ dans la gaine. Le champ pénètre d'autant plus loin dans la gaine que le module de $\vec{\eta}$ est grand. La limite est atteinte lorsque u est à son maximum, qui se trouve être le paramètre V défini par relation (8.28). Pour $u = V$ on a $w = 0$ car u et w varient en sens inverse (relation (8.28a) et figure 8.6).

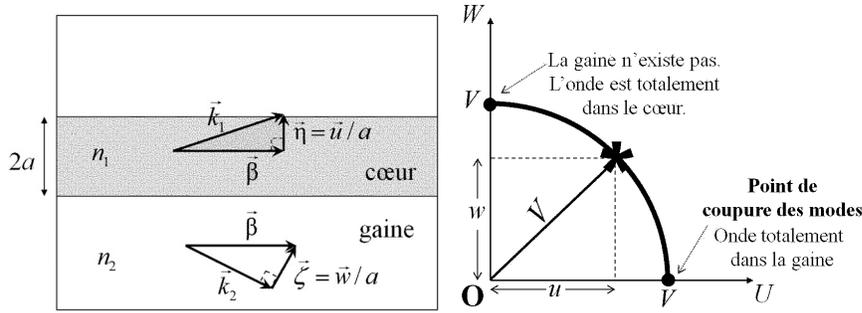


Figure 8.6 – Interprétation géométrique des paramètres u , w , et V .

L'onde se retrouve alors totalement dans la gaine ; ce qui revient à dire que l'onde n'est plus guidée. On dit aussi que l'onde est coupée. La fréquence pour laquelle $u = V$, qui est équivalent à $w = 0$, est appelée **fréquence de coupure**. D'autre part, on peut remarquer dans la figure 8.6, qu'à l'inverse du vecteur $\vec{\eta}$ qui symbolise la « fuite » du champ vers la gaine, le vecteur $\vec{\zeta}$ (dirigé vers le cœur) symbolise le « confinement » du champ. Autrement dit, le champ est d'autant plus confiné dans le cœur que ζ est grand (et donc que η petit). Cependant la limite où $w = V$ (et donc $u = 0$) est une situation anormale dans une fibre optique, car cette limite n'est atteinte que lorsque l'onde ne ressent plus la présence de la gaine. Les ondes guidées par une fibre optique doivent ressentir à la fois la présence du cœur et de la gaine. De ce fait, pour ces ondes, le paramètre u doit se situer dans l'intervalle suivant :

$$0 < u < V \tag{8.29}$$

La détermination de u passe par la relation de dispersion.

6 Relation de dispersion

Pour obtenir cette relation, il est nécessaire d'appliquer les conditions de continuité de certaines composantes du champ électromagnétique à l'interface entre le cœur et la gaine. À cette fin, il convient préalablement d'explicitier les composantes du champ électromagnétique. Ici, nous allons utiliser la notation simplifiée de la composante ortho-radiale, $e^{im\theta}$, définie dans l'expression $\tilde{\varphi}$ donnée par (8.26). Autrement dit, nous utiliserons la notation des composantes de champ avec un « tilde » pour regrouper deux solutions, dont l'une est proportionnelle à $\cos(m\theta)$ et l'autre à $\sin(m\theta)$.

6.1 Composantes longitudinales des champs

Les expressions des composantes longitudinales du champ électromagnétique se déduisent des expressions (8.13) et (8.26) :

$$\tilde{E}_z = \left\{ \begin{array}{l} A^I J_m(\eta r) \\ A^{II} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \mathcal{F} \tag{8.30a}$$

$$\tilde{H}_z = \left\{ \begin{array}{l} B^I J_m(\eta r) \\ B^{II} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \mathcal{F} \quad (8.30b)$$

avec

$$\mathcal{F} = e^{im\theta} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (8.31)$$

A^I et B^I désignent respectivement les amplitudes des champs électrique et magnétique dans le cœur de la fibre, tandis que A^{II} et B^{II} désignent respectivement les amplitudes des champs dans la gaine. Rappelons que η et ζ sont donnés par (8.27).

6.2 Composantes transversales des champs

Elles s'obtiennent à partir des expressions de \tilde{E}_z et \tilde{H}_z données par (8.30) et (8.31), et des expressions des champs transverses définies par les relations (8.11) où on doit poser $\xi^2 = \eta^2$ lorsqu'on est dans le cœur, et $\xi^2 = -\zeta^2$ dans la gaine. On obtient :

- Pour $0 < r < a$ (cœur), $\varepsilon = \varepsilon_0 n_1^2$, et

$$\tilde{E}_r = \left[\frac{-i\beta}{\eta} A^I J'_m(\eta r) + \frac{\mu_0 \omega m}{\eta^2 r} B^I J_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.32a)$$

$$\tilde{E}_\theta = \left[\frac{\beta m}{\eta^2 r} A^I J_m(\eta r) + \frac{i\mu_0 \omega}{\eta} B^I J'_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.32b)$$

$$\tilde{H}_r = \left[\frac{-\omega \varepsilon_1 m}{\eta^2 r} A^I J_m(\eta r) - \frac{i\beta}{\eta} B^I J'_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.32c)$$

$$\tilde{H}_\theta = \left[\frac{-i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J'_m(\eta r) + \frac{\beta m}{\eta^2 r} B^I J_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.32d)$$

- Pour $r > a$ (gaine), $\varepsilon = \varepsilon_0 n_2^2$ et on a :

$$\tilde{E}_r = \left[\frac{i\beta}{\zeta} A^{II} K'_m(\zeta r) - \frac{\mu_0 \omega m}{\zeta^2 r} B^{II} K_m(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.33a)$$

$$\tilde{E}_\theta = \left[\frac{-\beta m}{\zeta^2 r} A^{II} K_m(\zeta r) - \frac{i\mu_0 \omega}{\zeta} B^{II} K'_m(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.33b)$$

$$\tilde{H}_r = \left[\frac{\omega \varepsilon_2 m}{\zeta^2 r} A^{II} K_m(\zeta r) + \frac{i\beta}{\zeta} B^{II} K'_m(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.33c)$$

$$\tilde{H}_\theta = \left[\frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} A^{II} K'_m(\zeta r) - \frac{\beta m}{\zeta^2 r} B^{II} K_m(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.33d)$$

$$\text{Ici } J'_m = \frac{dJ_m(x)}{dx}, \text{ et } K'_m = \frac{dK_m(x)}{dx}.$$

6.3 Conditions de continuité des champs

Certaines composantes des champs \vec{E} et \vec{H} doivent satisfaire les conditions de continuité à l'interface entre le cœur et la gaine, en $r = a$.

Remarque Ces conditions sont automatiquement satisfaites en $r = b$. En effet, $b \gg a$ et $K_m(\zeta r)$ décroît exponentiellement à mesure que r tend vers b : $E_z(r = b) \rightarrow 0$; ce qui assure la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} (à l'extérieur de la gaine, où le champ est supposé nul).

Relations de continuité en $r = a$.

- Continuité de la composante de \vec{E} tangentielle à l'interface cœur/gaine ;

$$\tilde{E}_z(a^-) = \tilde{E}_z(a^+) \quad (8.34a)$$

- Continuité de la composante tangentielle de \vec{H} (car $\vec{j}_{\text{libre}} = 0$) ;

$$H_z(a^-) = H_z(a^+) \quad (8.34b)$$

- Continuité de la composante normale de \vec{H} ($\vec{B}_{\text{normal}} = \mu_0 \vec{H}_r$) ;

$$H_r(a^-) = H_r(a^+) \quad (8.34c)$$

- Continuité de la composante normale de \vec{D} (car $\sigma_{\text{libre}} = 0$) ;

$$\epsilon_0 n_1^2 E_r(a^-) = \epsilon_0 n_2^2 E_r(a^+) \quad (8.34d)$$

Les conditions (8.34) conduisent à :

$$A^{II} = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \quad (8.35a)$$

$$B^{II} = B^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \quad (8.35b)$$

$$\frac{-\omega \epsilon_0 n_1^2 m}{u^2} A^I J_m(u) - i \frac{1}{u} \beta B^I J'_m(u) = \frac{\omega \epsilon_0 n_2^2 m}{w^2} A^{II} K_m(w) + \frac{i \beta}{w} B^{II} K'_m(w) \quad (8.35c)$$

$$\frac{-i n_1^2 \beta A^I}{u} J'_m(u) + \frac{\omega \mu_0 n_1^2 m}{u^2} B^I J_m(u) = \frac{i n_2^2 \beta}{w} A^{II} K'_m(w) - \frac{\omega n_2^2 \mu_0 m}{w^2} B^{II} K_m(w) \quad (8.35d)$$

En substituant les expressions de A^{II} et B^{II} données par (8.35a) et (8.35b), dans les relations (8.35c) et (8.35d), on obtient le système d'équations suivant :

$$\beta B^I \left(\frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} \right) = i \omega \epsilon_0 m A^I \left(\frac{n_1^2}{u^2} + \frac{n_2^2}{w^2} \right) \quad (8.36a)$$

$$i \beta A^I \left(\frac{n_1^2}{u} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{n_2^2}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right) = \omega \mu_0 m B^I \left(\frac{n_1^2}{u^2} + \frac{n_2^2}{w^2} \right). \quad (8.36b)$$

À partir des relations (8.27), on montre facilement que $\frac{n_1^2}{u^2} + \frac{n_2^2}{w^2} = \frac{\beta^2}{k_0^2} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)$.

En substituant cette relation dans le second membre de (8.36a), et en multipliant les équations (8.36a) et (8.36b) membre à membre, on obtient la relation suivante :

$$\boxed{\left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] \left[\frac{k_0^2 n_1^2 J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{k_0^2 n_2^2 K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] = \beta^2 m^2 \left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]^2} \quad (8.37)$$

C'est la **relation de dispersion** de la fibre à saut d'indice. Pour une fréquence donnée (c'est-à-dire k_0 donné), et une valeur de m donnée, elle permet de déterminer la constante de propagation β . La relation (8.37) est aussi appelée « **équation caractéristique** » des modes de propagation. En effet, pour chaque valeur de m , cette équation admet un nombre fini de solutions satisfaisant à la condition de guidage (8.21) [qui équivaut aussi à (8.29)]. Cette multiplicité de solutions résulte du caractère oscillatoire des fonctions de Bessel J_m . Ainsi, on peut caractériser chaque solution de (8.37) par deux indices : (m, ν) , où m caractérise la dépendance azimutale du champ électromagnétique et ν correspond à la ν -ième solution de (8.37) associée à la valeur m .

Remarque Le point le plus important à noter ici, est que pour une fibre donnée, le nombre total de modes susceptibles de se propager dépend de la fréquence de l'onde incidente dans la fibre. En règle générale, le nombre de modes augmente avec la fréquence. Ce point sera détaillé plus loin.

Notons enfin qu'on peut réécrire les relations (8.36a) et (8.35b) de la manière suivante :

$$B^I = \frac{i\beta}{\mu_0\omega} P A^I \quad (8.38a)$$

$$B^{II} = \frac{i\beta}{\mu_0\omega} P \frac{J_m(u)}{K_m(w)} A^I \quad (8.38b)$$

avec

$$P = \frac{m \left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]}{\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)}} \quad (8.39)$$

Les relations (8.35a), (8.38a) et (8.38b), montrent que toutes les amplitudes des champs peuvent s'exprimer en fonction d'une seule amplitude A^I (ou B^I).

7 Classification générale des modes de propagation

Le premier indice permettant de classer les modes guidés dans la fibre est l'indice m du paramètre de variation azimutale du champ. La valeur de m est une donnée du problème théorique, en ce sens qu'il est nécessaire de spécifier sa valeur afin de pouvoir résoudre l'équation caractéristique. À chaque valeur de m , correspondent plusieurs solutions de l'équation caractéristique, que l'on distingue par l'indice ν . De manière générale, la solution générale de l'équation de Maxwell, donnée par (8.30), (8.32) et (8.33) est caractérisée par six composantes du champ électromagnétique, à l'exception du cas particulier $m = 0$, dont la solution est composée des modes transverses, avec $E_z = 0$ (mode transverse électrique), ou $H_z = 0$ (mode transverse magnétique).

7.1 Modes transverses ($m = 0$)

Lorsque le nombre azimutal m est égal à 0, la relation de dispersion (8.37) se scinde en deux :

$$\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0 \quad (8.40a)$$

$$\frac{n_1^2 J'_0(u)}{uJ_0(u)} + \frac{n_2^2 K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0 \quad (8.40b)$$

Dans ce cas, les équations de continuité (8.35) deviennent :

$$A^I J_0(u) = A^{II} K_0(w) \quad (8.41a)$$

$$B^I J_0(u) = B^{II} K_0(w) \quad (8.41b)$$

$$\frac{-B^I J'_0(u)}{u} = B^{II} \frac{K'_0(w)}{w} \quad (8.41c)$$

$$-n_1^2 A^I \frac{J'_0(u)}{u} = n_2^2 A^{II} \frac{K'_0(w)}{w} \quad (8.41d)$$

- Si $A^I = A^{II} = 0$ (et donc $E_z = 0$), alors il faut que B^I et B^{II} soient non nuls.

$$\frac{(8.41c)}{(8.41b)} \longrightarrow \frac{J'_0}{uJ_0} + \frac{K'_0}{wK_0} = 0 \text{ qui n'est rien d'autre que la relation (8.40a).}$$

C'est donc la relation de dispersion des modes transverses électriques, que l'on note TE_{0n} , où n désigne la n -ième racine de l'équation (8.40a). Pour ces modes on a : $E_r = H_\theta = 0$. Le tableau 8.1 récapitule les expressions des composantes du champ électromagnétique associé à ce mode.

Tableau 8.1 – Modes transverses électriques TE_{0n}.

Relation de dispersion	$\frac{J_0'(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K_0'(w)}{wK_0(w)} = 0$	
	$0 \leq r \leq a$ (cœur)	$r > a$ (gaine)
Champ électrique	$E_z = 0$ $E_r = 0$ $E_\theta = i\omega \frac{\mu_0}{u} a B^I J_0' \left(\frac{ur}{a} \right) e^{i(\omega t - \beta z)}$	$E_z = 0$ $E_r = 0$ $E_\theta = -i\omega \mu_0 \frac{a}{w} \frac{J_0(u)}{K_0(w)} B^I K_0' \left(\frac{rw}{a} \right) e^{i(\omega t - \beta z)}$
Champ magnétique	$H_z = B^I J_0 \left(r \frac{u}{a} \right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $H_r = -i\beta \frac{B^I a}{u} J_0' \left(\frac{ur}{a} \right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $H_\theta = 0$	$H_z = \frac{J_0(u)}{K_0(w)} B^I K_0 \left(r \frac{w}{a} \right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $H_r = i\beta \frac{J_0(u)}{K_0(w)} B^I \frac{a}{w} K_0' \left(\frac{rw}{a} \right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $H_\theta = 0$

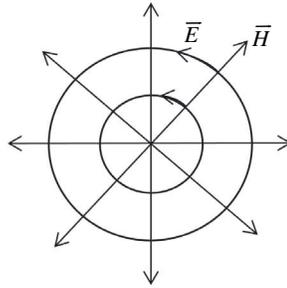


Figure 8.7 – Lignes de champ du mode TE₀₁ dans une section transverse de la fibre.

- Si $B^I = B^{II} = 0$ (et donc $H_z = 0$), alors il faut que A^I et A^{II} soient non nuls

$$\frac{(8.41d)}{(8.41a)} \longrightarrow \frac{n_1^2 J_0'}{u J_0} + \frac{n_2^2 K_0'}{w K_0} = 0 : \text{c'est la relation (8.40b).}$$

C'est donc la relation de dispersion des modes transverses magnétiques, que l'on note TM_{0n}, où n désigne la n -ième racine de l'équation (8.40b). Pour ces modes, on a : $E_\theta = H_r = 0$ (tableau 8.2).

7.2 Modes hybrides

Lorsque le paramètre azimutal est non nul ($m \neq 0$), les constantes A^I, B^I, A^{II} et B^{II} sont non nulles. Le champ électromagnétique est dit **hybride** car il possède à la fois une composante axiale pour le champ \vec{E} et pour le champ \vec{H} . Les relations (8.30), (8.31), (8.32) et (8.33), donnent les expressions générales des composantes des champs, qu'il convient d'exprimer à nouveau en tenant compte des relations entre les constantes A^I, B^I, A^{II} et B^{II} , données par (8.35a), (8.38a) et (8.38b). Les champs longitudinaux se mettent alors sous la forme suivante :

$$\tilde{E}_z = A^I \left\{ \begin{array}{l} J_m(\eta r) \\ \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \mathcal{F}. \quad (8.42)$$

Tableau 8.2 – Modes transverse magnétiques TM_{0n} .

Relation de dispersion	$\frac{n_1^2 J_0'(u)}{u J_0(u)} + \frac{n_2^2 K_0'(w)}{w K_0(w)} = 0$	
	$0 \leq r \leq a$ (cœur)	$r > a$ (gaine)
Champ électrique	$E_z = A^I J_0\left(\frac{r}{a}u\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $E_r = -i\beta A^I \frac{a}{u} J_0'\left(\frac{r}{a}u\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $E_\theta = 0$	$E_z = A^I \frac{J_0(u)}{K_0(w)} K_0\left(\frac{r}{a}w\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $E_r = i\beta \frac{J_0(u)}{K_0(w)} \frac{a}{w} A^I K_0'\left(\frac{r}{a}w\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $E_\theta = 0$
Champ magnétique	$H_z = 0$ $H_r = 0$ $H_\theta = -i\omega \varepsilon_1 \frac{a}{u} A^I J_0'\left(\frac{r}{a}u\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$	$H_z = 0$ $H_r = 0$ $H_\theta = i\omega \varepsilon_2 \frac{a}{w} A^I \frac{J_0(u)}{K_0(w)} K_0'\left(\frac{r}{a}w\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$

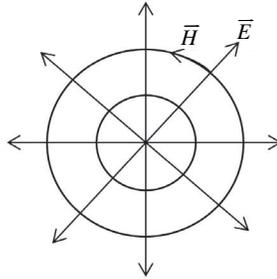


Figure 8.8 – Lignes de champ du mode TM_{01} dans une section transverse de la fibre.

$$\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} P A^I \left\{ \begin{array}{l} J_m(\eta r) \\ \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \mathcal{F}. \quad (8.43)$$

Les composantes transverse du champ électromagnétique données par (8.32) et (8.33), font intervenir des dérivées de fonctions de Bessel. Il est possible d'éliminer ces dérivées en utilisant les formules de récurrence des fonctions de Bessel :

$$J_m'(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) = -\frac{m}{x} J_m(x) + J_{m-1}(x) \quad (8.44)$$

$$K_m'(x) = \frac{m}{x} K_m(x) - K_{m+1}(x) = -\frac{m}{x} K_m(x) - K_{m-1}(x) \quad (8.45)$$

D'autre part, d'après les relations (8.42) et (8.43), le rapport des amplitudes des composantes longitudinales du champ électromagnétique s'écrit

$$\frac{H_Z}{E_Z} = \frac{P\beta}{\mu_0 \omega} = P \frac{n_1}{Z_0} \frac{\beta}{k_1} = P \frac{n_2}{Z_0} \frac{\beta}{k_2}, \text{ avec } Z_0 = \mu_0 c.$$

Par convention, si $H_Z/E_Z > 1$ le champ hybride est noté EH, alors que pour $H_Z/E_Z < 1$ le champ hybride est noté HE. Cependant, les composantes transverse

des modes EH et HE ont exactement la même expression analytique donnée par les relations (8.32) et (8.33), tant que P n'est pas quantitativement connu. Mais, par commodité et pour des raisons qui deviendront évidentes lorsque nous construirons les **modes linéairement polarisés**, nous allons d'abord exprimer ces deux groupes de modes sous des formes qui sont (en apparence) différentes.

• **Modes $\text{EH}_{m\nu}$**

Sachant que $J'_m(\eta r) = \frac{m}{\eta r} J_m(\eta r) - J_{m+1}(\eta r)$ et $K'_m(\zeta r) = \frac{m}{\zeta r} K_m(\zeta r) - K_{m+1}(\zeta r)$, nous pouvons exprimer les champs pour les modes hybrides $\text{EH}_{m\nu}$ comme suit :

Dans le **cœur** ($\varepsilon = \varepsilon_0 n_1^2$) on a :

$$\tilde{E}_r = \frac{i\beta}{\eta} A^I \left[J_{m+1}(\eta r) - \frac{m}{\eta r} (1-P) J_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.46a)$$

$$\tilde{E}_\theta = \frac{\beta}{\eta} A^I \left[\frac{m}{\eta r} (1-P) J_m(\eta r) + P J_{m+1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.46b)$$

$$\tilde{H}_r = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I \left[\frac{m}{\eta r} \left(1 - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P \right) J_m(\eta r) + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P J_{m+1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.46c)$$

$$\tilde{H}_\theta = \frac{-i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I \left[\frac{m}{\eta r} \left(1 - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P \right) J_m(\eta r) - J_{m+1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.46d)$$

Dans la **gaine** ($\varepsilon = \varepsilon_0 n_2^2$) on a :

$$\tilde{E}_r = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \frac{i\beta}{\zeta} \left[\frac{m}{\zeta r} (1-P) K_m(\zeta r) - K_{m+1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.47a)$$

$$\tilde{E}_\theta = -A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[\frac{m}{\zeta r} (1-P) K_m(\zeta r) + P K_{m+1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.47b)$$

$$\tilde{H}_r = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \left[\frac{m}{\zeta r} \left(1 - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P \right) K_m(\zeta r) + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P K_{m+1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.47c)$$

$$\tilde{H}_\theta = A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[\frac{m}{\zeta r} \left(1 - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P \right) K_m(\zeta r) - K_{m+1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.47d)$$

• **Modes $\text{HE}_{m\nu}$**

En posant $J'_m(\eta r) = -\frac{m}{\eta r} J_m(\eta r) + J_{m-1}(\eta r)$ et $K'_m(\zeta r) = -\frac{m}{\zeta r} K_m(\zeta r) - K_{m-1}(\zeta r)$,

nous pouvons exprimer les expressions des champs pour les modes hybrides $\text{HE}_{m\nu}$ comme suit :

Dans le **cœur** ($\varepsilon = \varepsilon_0 n_1^2$) on a :

$$\tilde{E}_r = \frac{-i\beta}{\eta} A^I \left[J_{m-1}(\eta r) - \frac{m}{\eta r} (1+P) J_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.48a)$$

$$\tilde{E}_\theta = \frac{\beta}{\eta} A^I \left[\frac{m}{\eta r} (1+P) J_m(\eta r) - P J_{m-1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.48b)$$

$$\tilde{H}_r = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I \left[\frac{m}{\eta r} \left(1 + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P \right) J_m(\eta r) - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P J_{m-1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.48c)$$

$$\tilde{H}_\theta = \frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I \left[\frac{m}{\eta r} \left(1 + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P \right) J_m(\eta r) - J_{m-1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.48d)$$

Dans la **gaine** ($\varepsilon = \varepsilon_0 n_2^2$) on a :

$$\tilde{E}_r = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[\frac{m}{\zeta r} (1+P) K_m(\zeta r) + K_{m-1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.49a)$$

$$\tilde{E}_\theta = -A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[\frac{m}{\zeta r} (1+P) K_m(\zeta r) + P K_{m-1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.49b)$$

$$\tilde{H}_r = A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[\frac{m}{\zeta r} \left(1 + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P \right) K_m(\zeta r) + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P K_{m-1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.49c)$$

$$\tilde{H}_\theta = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[\frac{m}{\zeta r} \left(1 + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P \right) K_m(\zeta r) + K_{m-1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.49d)$$

8 Modes de propagation dans les fibres à faible guidage

8.1 Relation de dispersion

En pratique, l'écart d'indice entre le cœur et la gaine est très faible, de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} ; ce qui conduit à poser, en première approximation, que :

$$n_1 \simeq n_2 \Rightarrow \beta \simeq k_0 n_1 \simeq k_0 n_2, \quad (8.50)$$

compte tenu de la condition de guidage, $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$. Sous cette approximation, la

relation de dispersion (8.37) s'écrit : $\left(\frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} \right)^2 = m^2 \left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]^2$, que

l'on peut scinder en deux relations :

$$\frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} = m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (8.51a)$$

$$\frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} = -m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (8.51b)$$

Ces deux relations de dispersion correspondent respectivement aux modes EH et HE.

Dans l'approximation du faible guidage, si on tient compte de (8.51a) et de (8.51b), l'expression de P donnée par (8.39) conduit à :

$$P = \pm 1 \quad (8.52)$$

En éliminant les fonctions dérivées J'_m et K'_m de la relation (8.51a), en utilisant les premier et second membres des relations (8.44) et (8.45), on obtient :

$$\frac{uJ_m(u)}{J_{m+1}(u)} + \frac{wK_m(w)}{K_{m+1}(w)} = 0 \quad (8.53a)$$

L'expression (8.53a) est l'équation caractéristique des modes hybrides $\text{EH}_{m\nu}$. Rappelons que l'indice ν désigne la ν -ième racine de l'équation (8.53a), et que cette équation est associée à $P = 1$.

De manière similaire, on peut éliminer les fonctions dérivées J'_m et K'_m de la relation (8.51b) en utilisant les premier et troisième membres des relations (8.44) et (8.45). La relation (8.51b) devient alors :

$$\frac{uJ_m(u)}{J_{m-1}(u)} - \frac{wK_m(w)}{K_{m-1}(w)} = 0 \quad (8.53b)$$

La relation (8.53b) est l'expression la plus commode pour l'équation caractéristique des modes hybrides $\text{HE}_{m\nu}$, et cette équation est associée à $P = -1$.

8.2 Dégénérescence des modes

Les deuxième et troisième membres des relations (8.44) et (8.45) permettent de récrire les relations de récurrence des fonctions de Bessel sous la forme suivante :

$$J_{m+1}(u) + J_{m-1}(u) = \frac{2m}{u} J_m(u) \quad (8.54a)$$

$$K_{m+1}(w) - K_{m-1}(w) = \frac{2m}{w} K_m(w) \quad (8.54b)$$

La relation de dispersion des modes $\text{HE}_{m+1\nu}$, qui se déduit directement de (8.53b), s'écrit :

$$\frac{uJ_{m+1}(u)}{J_m(u)} - \frac{wK_{m+1}(w)}{K_m(w)} = 0 \quad (8.55)$$

En substituant dans cette relation les expressions de $J_{m+1}(u)$ et $K_{m+1}(w)$ données par (8.54), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{u}{J_m(u)} \left(-J_{m-1}(u) + \frac{2m}{u} J_m(u) \right) - \frac{w}{K_m(w)} \left(K_{m-1}(w) + \frac{2m}{w} K_m(w) \right) &= 0 \\ \longrightarrow \frac{uJ_{m-1}(u)}{J_m(u)} + \frac{wK_{m-1}(w)}{K_m(w)} &= 0 \end{aligned} \quad (8.56)$$

Cette dernière relation est exactement la même que (8.53a) des modes EH, mais avec l'indice « $m - 1$ » en lieu et place de « m ». En d'autres termes, la relation de dispersion des modes $HE_{m+1\nu}$ est identique à celle des modes $EH_{m-1\nu}$. Cela signifie que ces deux groupes de modes ont exactement la même constante de propagation β . On dit qu'il y a dégénérescence des modes $HE_{m+1\nu}$ et $EH_{m-1\nu}$. On remarque donc qu'en augmentant de deux la valeur de l'indice de variation azimutale d'un mode EH, on obtient l'indice du mode HE dégénéré associé à ce mode EH. On peut alors regrouper les équations de tous les groupes de modes hybrides dans une seule relation de dispersion sous la forme suivante :

$$\boxed{\frac{uJ_{l-1}(u)}{J_l(u)} + \frac{wK_{l-1}(w)}{K_l(w)} = 0} \quad (8.57)$$

En effet,

- pour $l = m + 1$, on retrouve directement l'équation (8.53a) des modes $EH_{m\nu}$.
- pour $l = m - 1$, on retrouve les modes $HE_{m\nu}$ car l'équation (8.57) s'écrit :

$$\frac{uJ_{m-2}(u)}{J_{m-1}(u)} + \frac{wK_{m-2}(w)}{K_{m-1}(w)} = 0 \text{ (EH}_{m-2\nu}) \Leftrightarrow \frac{uJ_m(u)}{J_{m-1}(u)} - \frac{wK_m(w)}{K_{m-1}(w)} = 0 \Leftrightarrow (8.53b)$$

Ici, nous avons retrouvé le mode $HE_{m\nu}$ sans aucun calcul, en remarquant simplement que le passage du mode $EH_{m-1\nu}$ [relation (8.56)] au mode $HE_{m+1\nu}$ [relation (8.55)] s'effectue en incrémentant de deux unités l'indice des fonctions « J » et « K » au numérateur de la relation (8.56) et en inversant le signe de « w ».

Remarque Les modes $EH_{m-1\nu}$ et $HE_{m+1\nu}$ ont la même constante de propagation β , mais chacun de ces deux groupes de mode est caractérisé par sa propre dépendance azimutale définie par les indices « $m - 1$ » (pour $EH_{m-1\nu}$) et « $m + 1$ » (pour $HE_{m+1\nu}$).

8.3 Expression des composantes des champs

a) Expression des champs dans le système de coordonnées cylindriques

Dans les fibres à faible guidage, on peut appliquer l'approximation définie par (8.50) et (8.52). Les expressions des champs (8.46), (8.47), (8.48) et (8.49), se mettent alors sous la forme donnée par les tableaux 8.3 et 8.4.

Tableau 8.3 – Modes hybrides EH_{mν}.

$r < a$ (cœur)	$r > a$ (gaine)
$\tilde{E}_z = A^I J_m(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{E}_z = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{E}_r = \frac{i\beta}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{E}_r = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{E}_\theta = \frac{\beta}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{E}_\theta = -A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} A^I J_m(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{H}_r = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{H}_r = A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{H}_\theta = \frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{H}_\theta = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) \mathcal{F}$
$\eta = u/a, \quad \mathcal{F} = e^{im\theta} e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad P = 1, \quad \zeta = w/a$	
Relation de dispersion : $\frac{u J_m(u)}{J_{m+1}(u)} + \frac{w K_m(w)}{K_{m+1}(w)} = 0$	

Tableau 8.4 – Modes hybrides HE_{mν}.

$r < a$ (cœur)	$r > a$ (gaine)
$\tilde{E}_z = A^I J_m(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{E}_z = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{E}_r = \frac{-i\beta}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{E}_r = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{E}_\theta = \frac{\beta}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{E}_\theta = A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{H}_z = \frac{-i\beta}{\mu_0 \omega} A^I J_m(\eta r)$	$\tilde{H}_z = \frac{-i\beta}{\mu_0 \omega} A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{H}_r = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{H}_r = -A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) \mathcal{F}$
$\tilde{H}_\theta = -\frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) \mathcal{F}$	$\tilde{H}_\theta = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) \mathcal{F}$
$\eta = u/a, \quad \mathcal{F} = e^{im\theta} e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad P = -1, \quad \zeta = w/a$	
Relation de dispersion : $\frac{u J_m(u)}{J_{m-1}(u)} - \frac{w K_m(w)}{K_{m-1}(w)} = 0$	

b) Expression des champs dans le système de coordonnées cartésiennes

La projection des champs sur les axes du repère cartésien (défini dans la figure 8.4) s'écrit :

$$\begin{cases} E_x = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta = \frac{1}{2} E_r (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - \frac{1}{2i} E_\theta (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ E_y = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta = \frac{1}{2i} E_r (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{1}{2} E_\theta (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{2} (E_r + iE_\theta) e^{i\theta} + \frac{1}{2} (E_r - iE_\theta) e^{-i\theta} \\ E_y = \frac{1}{2} (E_\theta - iE_r) e^{i\theta} + \frac{1}{2} (E_\theta + iE_r) e^{-i\theta} \end{cases} \quad (8.58)$$

On a une relation analogue à (8.58) pour les composantes du champ \vec{H} . On obtient donc les expressions données dans les tableaux 8.5 et 8.6.

Tableau 8.5 – Modes hybrides $\text{EH}_{m\nu}$ en coordonnées cartésiennes.

$r < a$ (cœur)	$r > a$ (gaine)
$\tilde{E}_z = A^I J_m(\eta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{E}_z = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{E}_x = \frac{i\beta}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{E}_x = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{E}_y = \frac{\beta}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{E}_y = -A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} A^I J_m(\eta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{H}_x = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{H}_x = A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{H}_y = \frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{H}_y = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$
$\eta = u/a, \quad \mathcal{F}_0 = e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad \zeta = w/a$	
Relation de dispersion : $\frac{u J_m(u)}{J_{m+1}(u)} + \frac{w K_m(w)}{K_{m+1}(w)} = 0$	

Remarque Il est très important de noter que lorsque deux (ou plusieurs) modes sont dégénérés, il est impossible de faire propager de manière sélective un seul de ces modes. En d'autres termes, les deux modes se propagent en même temps et à la même vitesse. Ils interfèrent entre eux de sorte qu'en sortie de fibre, la lumière qu'on observe résulte de la superposition des amplitudes de tous les modes dégénérés ayant la même constante de propagation. Ainsi, la lumière en sortie de fibre est obtenue par une construction basée sur la superposition des amplitudes des modes dégénérés. Lorsqu'on fait cette

Tableau 8.6 – Modes hybrides $HE_{m\nu}$ en coordonnées cartésiennes.

$r < a$ (cœur)	$r > a$ (gaine)
$\tilde{E}_z = A^I J_m(\eta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{E}_z = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{E}_x = \frac{-i\beta}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{E}_x = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{E}_y = \frac{\beta}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{E}_y = A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{H}_z = \frac{-i\beta}{\mu_0 \omega} A^I J_m(\eta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{H}_z = \frac{-i\beta}{\mu_0 \omega} A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{H}_x = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{H}_x = -A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$
$\tilde{H}_y = -\frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$	$\tilde{H}_y = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$
$\eta = u/a, \quad \mathcal{F}_0 = e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad \zeta = w/a$	
Relation de dispersion : $\frac{u J_m(u)}{J_{m-1}(u)} - \frac{w K_m(w)}{K_{m-1}(w)} = 0$	

construction, on aboutit à des modes linéairement polarisés dans le repère cartésien, comme nous le verrons dans ce qui suit. Il est aussi important de noter que dans une fibre à faible guidage, les champs sont quasi-transverses, car l'amplitude des composantes longitudinales est très faible comparée à celles des composantes transverses. Autrement dit, la lumière obtenue en sortie de ces fibres provient essentiellement des composantes transverses des champs.

8.4 Construction des modes linéairement polarisés (LP_{mn})

a) Expression des champs des modes LP_{mn} en notation \tilde{E} et \tilde{H}

Les expressions des champs présentées dans la section précédente montrent que dans les conditions de faible guidage, la projection des composantes transverses des modes $EH_{m-1\nu}$ et $HE_{m+1\nu}$ sur les axes du repère Oxy ne change pas la dépendance radiale des champs. Comme ces deux groupes de modes sont dégénérés (même constante de propagation) et ont la même distribution radiale, un mode guidé peut être représenté par une superposition d'un mode $EH_{m-1\nu}$ et d'un mode $HE_{m+1\nu}$, où chacun des deux modes est caractérisé individuellement par sa propre dépendance azimutale, d'indices $m - 1$ (pour le mode EH) et $m + 1$ (pour le mode HE). On peut considérer que la superposition de ces deux modes dans le repère cartésien se traduit par une dépendance azimutale définie par le facteur m . Dans ce qui suit, nous allons voir que l'addition de l'amplitude de ces modes conduit à un **mode linéairement polarisé** selon l'axe Ox ou Oy , qui est noté LP_{mn} . $E_{x,y,z}(EH_{m-1\nu}) + E_{x,y,z}(HE_{m+1\nu})$ conduit aux expressions ci-après.

Dans le cœur, le champ électrique du mode LP_{mn} s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (2\beta/\eta)J_m(\eta r)e^{im\theta} \\ J_{m-1}(\eta r)e^{i(m-1)\theta} + J_{m+1}(\eta r)e^{i(m+1)\theta} \end{bmatrix} A^I \mathcal{F}_0. \quad (8.59)$$

Dans la gaine

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= -A^I \frac{i\beta}{\zeta} K_m(\zeta r) \left[\frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(u)} + \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(u)} \right] e^{im\theta} \mathcal{F}_0 \\ \tilde{E}_y &= A^I \frac{\beta}{\zeta} \left[\frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(u)} - \frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(u)} \right] K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0 \\ \tilde{E}_z &= \left[\frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(u)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} + \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(u)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \right] A^I \mathcal{F}_0 \end{aligned}$$

Remarque On démontre (à partir des relations caractéristiques des fonctions de Bessel) que la relation de dispersion des modes EH_{mν} (8.53a) est équivalente à :

$$\frac{J_{m+2}(u)}{J_m(u)} + \frac{K_{m+2}(w)}{K_m(w)} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} = -\frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(w)} (\text{EH}_{m-1\nu}) \quad (8.60a)$$

De la même manière, on démontre que la relation (8.53b) des modes HE_{mν} est équivalente à :

$$\frac{J_{m-2}(u)}{J_m(u)} + \frac{K_{m-2}(w)}{K_m(w)} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(w)} = -\frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} (\text{HE}_{m+1\nu}) \quad (8.60b)$$

En tenant compte des relations (8.60), dans la gaine, le champ électrique du mode LP_{mn} s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\beta/\zeta)K_m(\zeta r)e^{im\theta} \\ K_{m+1}(\zeta r)e^{i(m+1)\theta} - K_{m-1}(\zeta r)e^{i(m-1)\theta} \end{bmatrix} A^I \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \mathcal{F}_0. \quad (8.61)$$

La construction du champ magnétique s'effectue de manière similaire.

$$H_{x,y,z}(\text{EH}_{m-1\nu}) + H_{x,y,z}(\text{HE}_{m+1\nu})$$

Dans le cœur

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \\ \tilde{H}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2\omega\varepsilon_1/\eta)J_m(\eta r)e^{im\theta} \\ 0 \\ (i\beta/\mu_0\omega) [J_{m-1}(\eta r)e^{i(m-1)\theta} - J_{m+1}(\eta r)e^{i(m+1)\theta}] \end{bmatrix} A^I \mathcal{F}_0 \quad (8.62)$$

Dans la gaine

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \\ \tilde{H}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{\omega\varepsilon_2}{\zeta} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \\ 0 \\ -\frac{i\beta}{\mu_0\omega} [K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} + K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta}] \end{bmatrix} A^I \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \mathcal{F}_0. \quad (8.63)$$

Ainsi, l'addition des modes : $(EH_{m-1\nu}) + (HE_{m+1\nu})$, conduit à un mode linéairement polarisé LP_{mn} selon l'axe Oy , décrit par les relations (8.59), (8.61), (8.62), et (8.63), c'est-à-dire où $E_x = 0$.

Remarque Lorsqu'on fait la soustraction, $(EH_{m-1\nu}) - (HE_{m+1\nu})$ on aboutit à un mode linéaire polarisé selon l'axe Ox (où $E_y = 0$). En fait les modes $(EH_{m-1\nu}) + (HE_{m+1\nu})$ et $(EH_{m-1\nu}) - (HE_{m+1\nu})$ sont identiques dans le sens où le passage de l'un à l'autre s'effectue en interchangeant simplement les rôles des axes Ox et Oy .

b) Expression des champs des modes LP_{mn} en notation réelle

La notation avec un tilde (\tilde{E} et \tilde{H}) a été utilisée tout au long de ce chapitre pour stocker les deux composantes dégénérées de chaque mode, sachant que le retour à l'expression des champs en notation réelle s'effectue simplement en prenant l'une des ses composantes, c'est-à-dire, la partie réelle ou la partie imaginaire des \tilde{E} et \tilde{H} , sans tenir compte du terme de propagation \mathcal{F}_0 commun à \tilde{E} et \tilde{H} . D'autre part, dans ce qui suit, nous donnerons l'expression de l'amplitude des champs sans faire figurer explicitement le terme \mathcal{F}_0 , mais où l'unique constante A^I présente dans les expressions (8.59), (8.61), (8.62) et (8.63), sera renommée simplement A . Ainsi, la récupération des parties réelles de \tilde{E} et \tilde{H} nous donne les expressions suivantes :

Amplitude du champ électrique des modes LP_{mn} .

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ (2\beta/\eta)J_m(\eta r) \cos(m\theta) \\ J_{m+1}(\eta r) \cos[(m+1)\theta] + J_{m-1}(\eta r) \cos[(m-1)\theta] \end{bmatrix}_{r < a} \quad (8.64)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = A \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\beta/\zeta)K_m(\zeta r) \cos(m\theta) \\ K_{m+1}(\zeta r) \cos[(m+1)\theta] - K_{m-1}(\zeta r) \cos[(m-1)\theta] \end{bmatrix}_{r \geq a} \quad (8.65)$$

Amplitude du champ magnétique des modes LP_{mn} .

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -(2\omega\varepsilon_0 n_1^2/\eta)J_m(\eta r) \cos(m\theta) \\ 0 \\ \frac{\beta}{\mu_0\omega} \{J_{m+1}(\eta r) \sin[(m+1)\theta] - J_{m-1}(\eta r) \sin[(m-1)\theta]\} \end{bmatrix}_{r < a} \quad (8.66)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{bmatrix} = A \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \begin{bmatrix} -2(\omega\varepsilon_0 n_2^2/\zeta)K_m(\zeta r) \cos(m\theta) \\ 0 \\ \frac{\beta}{\mu_0\omega} \{K_{m+1}(\zeta r) \sin[(m+1)\theta] + K_{m-1}(\zeta r) \sin[(m-1)\theta]\} \end{bmatrix}_{r \geq a} \quad (8.67)$$

Rappelons que $\eta = u/a$ et $\zeta = w/a$.

Relation de dispersion des modes LP_{mn}.

$$\frac{uJ_{m-1}(u)}{J_m(u)} + \frac{wK_{m-1}(w)}{K_m(w)} = 0 \tag{8.68}$$

Les expressions (8.64), (8.65), (8.66) et (8.67), indiquent que la distribution d'intensité dans le plan transverse est proportionnelle à $[J_m(\eta r) \cos(m\theta)]^2$ dans le cœur, et $[K_m(\zeta r) \cos(m\theta)]^2$ dans la gaine. Si nous avons pris les parties imaginaires des champs \tilde{E} et \tilde{H} nous aurions eu une distribution d'intensité proportionnelle à $[J_m(\eta r) \sin(m\theta)]^2$ dans le cœur et $[K_m(\zeta r) \sin(m\theta)]^2$ dans la gaine. Dans les deux cas, on aboutit à une dépendance azimutale périodique de l'intensité lumineuse, de période π/m . Autrement dit, pour un mode LP_{mn}, si on fait une rotation de π à rayon constant dans un plan transverse, on passera obligatoirement par m points (ou zones) d'extinction de lumière (en partant d'un point de départ éclairé). Ces zones d'obscurité sont aussi appelées « nœuds de champs ». Elles résultent de l'interférence de ces modes dégénérés. Le cas $m = 0$ correspond aux modes où l'intensité lumineuse ne subit aucune variation lors d'une rotation à rayon constant. D'autre part, le comportement oscillatoire de la fonction de Bessel $J_m(\eta r)$ dans le cœur de la fibre provoque aussi des extinctions de lumière lors d'un déplacement radial (à θ constant), de sorte que l'indice « n » dans la notation LP_{mn} renseigne sur le nombre de nœuds de champ que l'on trouve lors d'un déplacement radial. Par conséquent, n est forcément au moins égal à 1, car il est certain que la lumière finit par s'éteindre lorsqu'on va du cœur vers la gaine. Avec cette description, le mode LP₀₁ correspond à une mode où la lumière ne varie pas lorsqu'on tourne à rayon constant et décroît de manière monotone pour s'éteindre dans la gaine. C'est le mode fondamental de propagation de la lumière dans une fibre optique à saut d'indice.

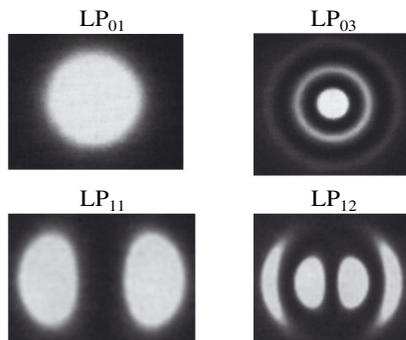


Figure 8.9 – Répartition de l'intensité lumineuse dans le plan transverse pour quelques modes LP_{mn}.

c) Expression des champs dans le mode LP_{01}

Le concept de superposition des champs tel qu'il a été décrit de manière générale pour les modes LP_{mn} ne peut s'appliquer au cas où $m = 0$. En effet le mode HE_{1v} ne peut s'associer au mode EH_{-1v} , avec un indice négatif qui n'a aucun sens physique. En effet, la dépendance azimutale du champ dans le plan transverse est indépendante du sens de rotation autour de l'axe Oz. Les composantes du mode LP_{01} s'obtiennent directement à partir de celles du mode HE_{11} (où il faut veiller à bien revenir en notation réelle, avant de poser $m = 1$), qui est en fait déjà linéairement polarisé :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ (\beta/\eta)J_0(\eta r) \\ J_1(\eta r) \cos \theta \end{bmatrix}_{r < a} \quad (8.69)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = A \frac{J_1(u)}{K_1(w)} \begin{bmatrix} 0 \\ (\beta/\zeta)K_0(\zeta r) \\ K_1(\zeta r) \cos \theta \end{bmatrix}_{r \geq a} \quad (8.70)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -(\omega \varepsilon_0 n_1^2 / \eta) J_0(\eta r) \\ 0 \\ (\beta / \mu_0 \omega) J_1(\eta r) \sin \theta \end{bmatrix}_{r < a} \quad (8.71)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{bmatrix} = A \frac{J_1(u)}{K_1(w)} \begin{bmatrix} -(\omega \varepsilon_0 n_2^2 / \zeta) K_0(\zeta r) \\ 0 \\ (\beta / \mu_0 \omega) K_1(\zeta r) \sin \theta \end{bmatrix}_{r \geq a} \quad (8.72)$$

Sa relation de dispersion est celle du groupe des modes LP_{0n}

$$\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} - \frac{wK_1(w)}{K_0(w)} = 0 \quad (8.73)$$

d) Fréquences de coupure des modes et régime de propagation monomode

Nous avons vu que pour que la propagation soit guidée il faut que $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$, et que les champs pénètrent d'autant plus loin dans la gaine que w est petit. Dans la limite où $w = 0$, il n'y a plus de guidage. Pour un mode LP_{mn} la fréquence pour laquelle $w = w_{mn} = 0$ ($u = u_{mn} = V$) est la fréquence de coupure du mode.

À titre d'exemple, considérons l'équation caractéristique du groupe de modes LP_{0n} donnée par (8.73). Elle peut être résolue graphiquement en déterminant les points d'intersection des fonctions suivantes :

$$f(u) = \frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} \quad \text{et} \quad g(u, V) = \frac{wK_1(w)}{K_0(w)}, \quad \text{avec} \quad w = (V^2 - u^2)^{1/2}$$

La figure 8.10 donne cette résolution graphique pour $V = 10$. Pour tracer la courbe $f(u)$ on commence par tracer ses asymptotes, qui sont données par les zéros de la fonction $J_0(u)$ et qui sont représentées par les droites verticales en pointillés de la figure 8.10. Ensuite, on trace les branches de $f(u)$ entre les asymptotes. La fonction $g(u, V)$ est constituée d'une seule branche située dans la partie positive du quadrant de l'axe des ordonnées, qui décroît de façon monotone et s'annule pour $u = V$. Une des branches de $f(u)$ ne peut intercepter la fonction $g(u, V)$ que si, sur la plage $0 < u < V$, cette branche se trouve dans la partie positive du quadrant. On peut clairement remarquer que la première branche de $f(u)$ est entièrement située dans le quadrant positif. Elle intercepte donc la fonction g quelle que soit la valeur de V non nulle. La valeur de u au point d'interception (que nous noterons u_{01}) correspond au seul mode de propagation qui est toujours présent quel que soit le paramètre V (non nul). Comme sa fréquence de coupure est nulle (c'est-à-dire, la plus petite de toutes les fréquences de coupure), ce mode LP_{01} est le **mode fondamental de propagation** dans une fibre à saut d'indice. D'après le graphique, $u_{01} \simeq 2,18$. D'autre part, on peut remarquer que la deuxième branche de $f(u)$ ne peut intercepter la fonction $g(u, V)$ que si la fréquence normalisée V est située au-delà du point d'interception de cette branche avec l'axe des abscisses, notée u_{02c} ; autrement dit, si $V > u_{02c}$. La valeur de u_{02c} correspond donc à la fréquence de coupure du mode LP_{02} , c'est-à-dire, la fréquence en dessous de laquelle on coupe le mode LP_{02} . De manière générale, les points d'intersection de $f(u)$ avec l'axe des abscisses, u_{0nc} , $n = 1, 2, \dots$, correspondent respectivement aux fréquences de coupure des modes LP_{0n} . Leurs valeurs sont données par les zéros de la fonction $J_1(u)$, en plus de la valeur $u_{01c} = 0$. D'après le graphique, sur la plage $0 < u < V = 10$, on trouve au total trois zéros de $f(u)$: $u_{01c} = 0$, $u_{02c} = 3,83$, et $u_{03c} = 7,01$. Conséquemment, les modes de type LP_{0n} qui peuvent se propager pour $V = 10$ sont au nombre de trois : LP_{01} ,

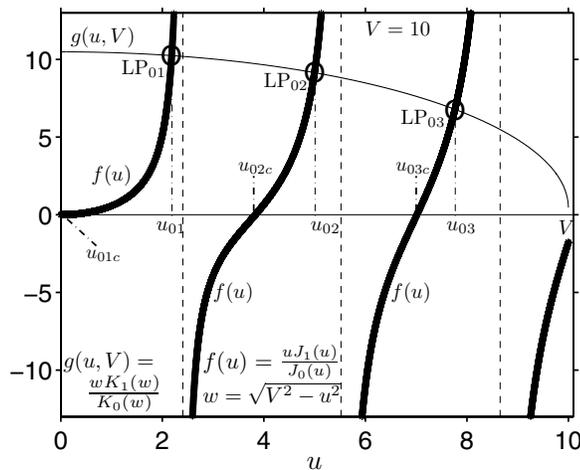


Figure 8.10 – Résolution graphique de l'équation caractéristique du groupe de modes LP_{0n} pour $V = 10$.

LP₀₂, et LP₀₃. Les valeurs correspondantes de u sont situées aux points d'intersection des trois premières branches de $f(u)$ avec $g(u, V)$, et sont données respectivement par $u_{01} \simeq 2,18$, $u_{02} \simeq 5,00$, et $u_{03} = 7,76$. Les constantes de propagation de ces modes se déduisent aisément de ces valeurs de u_{0n} .

Une étude graphique des conditions de propagation des modes de type LP_{1n} peut être faite de manière analogue à celle des LP_{0n}. Sa relation de dispersion s'obtient à partir de l'expression (8.68) en posant $m = 1$:

$$\frac{uJ_0(u)}{J_1(u)} + \frac{wK_0(w)}{K_1(w)} = 0$$

Pour la résolution graphique, on peut prendre $f(u) = \frac{uJ_0(u)}{J_1(u)}$, et $g(u, V) = -\frac{wK_0(w)}{K_1(w)}$.

Le résultat est visible dans la figure 8.11, où on peut remarquer qu'ici aussi, les fréquences de coupure des modes LP_{1n} sont les zéros de $f(u)$. Ici, elles coïncident avec les zéros de $J_0(u)$ et sont au nombre de trois sur la plage $0 < u < V = 10$: $u_{11c} = 2,40$, $u_{12c} = 5,52$, et $u_{13c} = 8,65$. De ce fait, les modes de type LP_{1n} qui peuvent se propager pour $V = 10$ sont au nombre de trois : LP₁₁, LP₁₂, et LP₁₃. Ici, les points d'intersection des branches de $f(u)$ avec $g(u, V)$ se situent dans la partie négative de l'axe des ordonnées. Les valeurs correspondantes de u sont données respectivement par $u_{11} \simeq 3,48$, $u_{12} \simeq 6,33$ et $u_{13} = 9,05$.

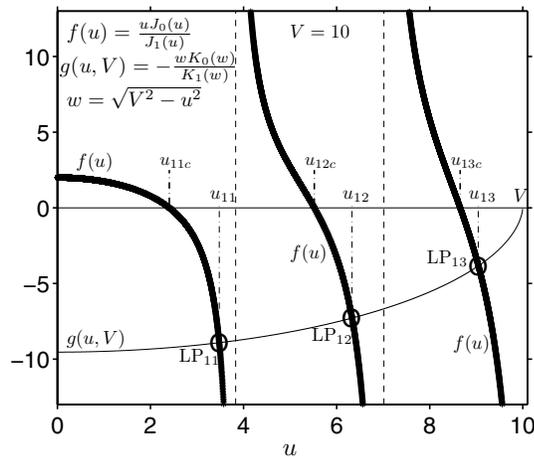


Figure 8.11 – Résolution graphique de l'équation caractéristique du groupe de modes LP_{1n} pour $V = 10$.

De manière plus générale, l'équation pour tous les groupes de modes LP_{mn} est donnée par (8.68), que nous pouvons remettre sous la forme suivante :

$$f(u) = g(u, V) \tag{8.74a}$$

$$f(u) = \frac{uJ_{l-1}(u)}{J_l(u)}, \quad g(u, V) = -\frac{wK_{l-1}(w)}{K_l(w)}, \quad w = (V^2 - u^2)^{1/2} \tag{8.74b}$$

La fonction $f(u)$ étant indépendante de V , les valeurs des fréquences de coupure des modes LP_{mn} , u_{mnc} , sont indépendantes de V . La fonction $g(u, V)$ dépend V et s'étend de plus en plus du côté positif de l'axe des u à mesure que V augmente. Un mode LP_{mn} est guidé si son paramètre u_{mn} est solution de l'équation (8.74) avec

$$u_{mn} < V. \tag{8.75}$$

On peut déterminer rapidement le nombre de modes susceptibles de se propager, sans résoudre l'équation caractéristique (8.74), en remarquant (comme illustré dans les figures 8.10 et 8.11) que ce nombre coïncide avec le nombre de zéros de la fonction $f(u)$ dans l'intervalle $0 < u < V$, c'est-à-dire, le nombre de racines non nulles de $J_{l-1}(u) = 0$, u_{mnc} , telles que $u_{mnc} < V$, à laquelle s'ajoute la racine $u_{01c} = 0$ (associée au mode fondamental LP_{01}).

La racine u_{mnc} correspond à la valeur V_{cmn} du paramètre V qui permet de couper le mode LP_{mn} . Ces racines sont listées dans le tableau 8.7 des zéros des fonctions J_m jusqu'à $m = 5$.

Tableau 8.7 – Racines non nulles des fonctions de Bessel J_m .

zéro	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178

Le tableau 8.8 récapitule les valeurs des paramètres V_{cmn} de coupure des modes pour les groupes de modes LP_{01} et LP_{11} pour $V = 10$. On remarque que la plus petite fréquence de coupure non nulle est $V_{cmn} = u_{11c} = 2,405$, et qu'elle correspond au mode LP_{11} . Cela

Tableau 8.8 – Fréquences de coupure V_{cmn} pour quelques modes LP_{mn} .

V_{cmn}	m	n	Notation LP_{mn}	Composantes dégénérées
0	0	1	LP_{01}	HE_{11}
2,405	1	1	LP_{11}	$TE_{01}, TM_{01}, HE_{21}$
3,832	2	1	LP_{21}	EH_{11}, HE_{31}
3,832	0	2	LP_{02}	HE_{12}
5,136	3	1	LP_{31}	EH_{21}, HE_{41}
5,520	1	2	LP_{12}	$TE_{02}, TM_{02}, HE_{22}$
6,380	4	1	LP_{41}	EH_{31}, HE_{51}
7,016	2	2	LP_{22}	EH_{31}, HE_{52}
7,016	0	3	LP_{03}	HE_{13}

signifie que dès que le paramètre V d'une fibre à saut d'indice est supérieur à 2,405 la fibre devient multi-mode. Inversement, le régime de propagation monomode est obtenu en se plaçant dans les conditions telles que :

$$V = k_0 a \text{ON} = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{ON} < V_{c11} = \frac{2\pi}{\lambda_{c11}} a \text{ON} = 2,405 \quad (8.76)$$

Dans ce cas, seul le mode LP_{01} peut se propager dans la fibre. C'est ce mode qui est utilisé dans les télécoms pour le transport des informations à ultra-haut débit sur de très grandes distances. Les fibres utilisées ont alors un rayon de cœur a suffisamment petit pour que $V < 2,405$ à la longueur d'onde de transmission $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ (qualifiée de « troisième fenêtre télécom »). La figure 8.12 illustre l'évolution de la constante de propagation normalisée en fonction du paramètre V ($V \leq 6$), qui est définie par :

$$b = \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = 1 - \frac{u^2}{V^2} = \frac{w^2}{V^2} \quad (8.77)$$

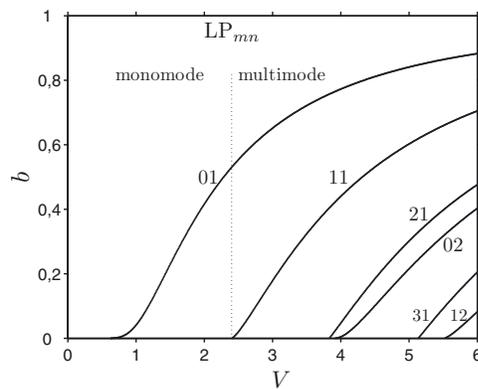


Figure 8.12 – Courbes de dispersion des modes LP_{mn} pour $V \leq 6$.

e) Approximation gaussienne du mode LP_{01}

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, la distribution radiale des modes est décrite rigoureusement par des fonctions de Bessel. Cependant les opérations algébriques sur ces fonctions ne sont pas toujours très confortables. Marcuse a démontré qu'on peut approcher de façon satisfaisante la distribution radiale du mode LP_{01} par une fonction gaussienne comme suit :

$$\psi(r) = \psi_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{W_0} \right)^2 \right] \quad (8.78)$$

où la valeur de W_0 caractérise la dimension du mode. La formule empirique de Marcuse donne l'expression analytique du paramètre W_0 de la distribution gaussienne qui approche le mieux le champ réel, en fonction du rayon a du cœur de la fibre et du paramètre

de fréquence normalisée V :

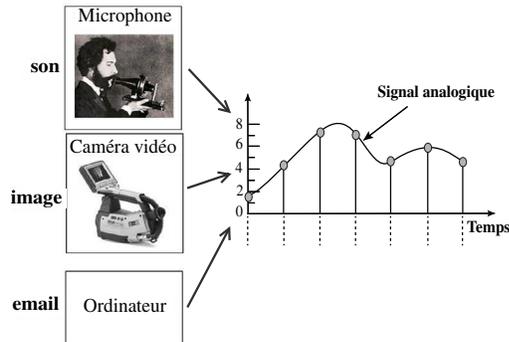
$$\frac{2W_0}{2a} \approx 0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6} \quad (8.79)$$

Cette expression donne une valeur de W_0 précise à mieux que 1 % près dans la gamme

$$0,8 < V < 2,5.$$

Encart 8.2 Principe des communications optiques

Tout système de transmission d'information est constitué de trois éléments : un émetteur, un canal de transmission et un récepteur. Pour une communication optique, le canal de transmission est une fibre optique (ou une concaténation de fibres).



L'information à transmettre peut être un son, une image, les mots d'un texte ou des données. Pour être véhiculées à distance, les informations doivent être mises sous une forme adéquate, c'est-à-dire qu'elles doivent préalablement être codées. Faisons l'analogie avec un automobiliste sur la route.

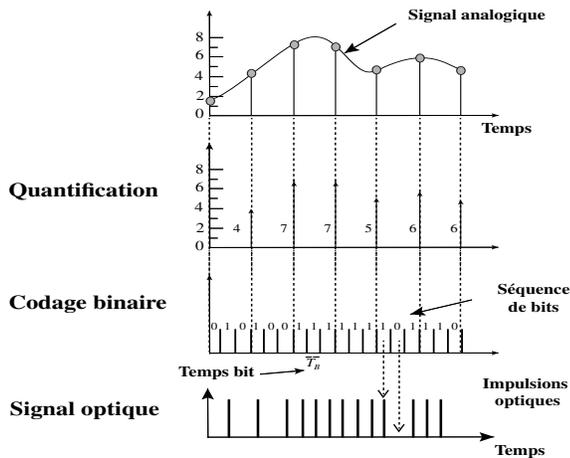


Figure 8.13 – Codage d'une information analogique sous forme numérique puis optique.

Le fait d'actionner son clignotant droit lui permet de transmettre un message précis aux autres automobilistes sans avoir besoin de baisser sa vitre et transmettre cette information de vive voix. Les autres automobilistes connaissent le code de la route et savent interpréter correctement les messages transmis de cette manière.

Les communications par fibres optiques utilisent aussi la transmission par codes. L'information est donc fabriquée à destination par le poste radio (s'il s'agit d'un message audio), le poste de télévision (messages audio et vidéo) ou l'ordinateur (s'il le message est un email), à l'aide des codes reçus. De ce fait, le codage de l'information constitue une opération majeure dans un processus de transmission d'information, et fait aujourd'hui encore l'objet de nombreuses recherches.

Le **codage analogique** consiste à transformer l'information en un **signal analogique** (tension ou courant électrique) dont les variations dans le temps sont proportionnelles aux variations de la grandeur physique associée à l'information. Par exemple une caméra vidéo transforme point par point et ligne par ligne les variations d'intensité lumineuse d'une image en un signal électrique analogique ; ce dernier est par exemple nul pour les points noirs et maximum pour les points blancs et il prend toutes les valeurs intermédiaires pour les points gris. De manière générale, dans un système de communication, l'émetteur est doté d'un appareil spécifique qui transforme l'information (à transmettre) en un signal électrique analogique.

Le signal analogique doit ensuite être converti sous forme numérique. Le processus de conversion commence par un échantillonnage du signal analogique à intervalle de temps régulier. À chaque instant, on enregistre un nombre correspondant à l'amplitude du signal analogique. Ce nombre est ensuite traduit sous forme binaire, c'est-à-dire sous forme d'une suite constituée uniquement de 1 et de 0.

Une fois l'information codée sous forme numérique, il faut l'inscrire sur une onde électromagnétique, à laquelle on fait référence comme étant la **porteuse**. L'émetteur est donc doté d'un générateur d'ondes électromagnétiques (qui est soit une diode laser ou une diode électroluminescente). Le champ électrique de l'onde peut se mettre sous la forme générale qui suit : $\vec{y}(t) = A \sin(\omega t + \phi) \vec{u}$, où A est l'**amplitude** de l'onde, $\omega/2\pi$ est sa **fréquence**, ϕ est sa **constante de phase** et \vec{u} un vecteur unitaire indiquant sa direction de **polarisation**.

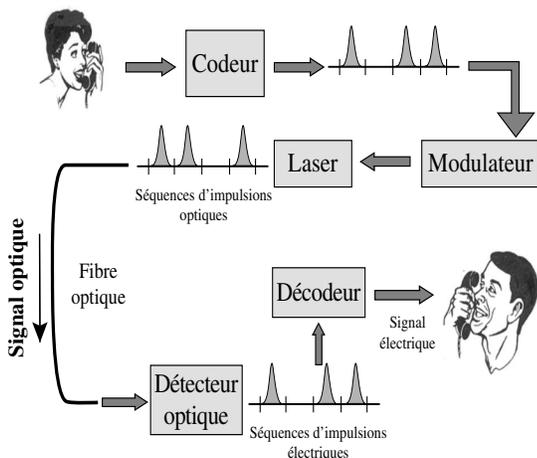


Figure 8.14 – Principe des télécommunications par fibres optiques.

Dans une **porteuse non modulée** les quatre paramètres (A , $\omega/2\pi$, ϕ , \vec{u}) sont constants au cours du temps. La modulation de la porteuse consiste à faire varier l'un (ou plusieurs) de ces paramètres au rythme de variation du signal d'information. Cette opération génère au sein de l'émetteur une **porteuse modulée** (c'est-à-dire une onde porteuse d'information), qui est ensuite injectée dans la fibre optique. Le procédé de modulation le plus simple est la **modulation d'amplitude**, qui fait varier l'amplitude A en maintenant tous les autres paramètres constants. Cela revient à faire varier l'intensité lumineuse en fonction de l'alternance de série de 1 et de 0 qui forment le message codé. Lorsque le symbole « 1 » se présente, le modulateur s'ouvre et injecte dans la fibre un signal très bref (appelé impulsion lumineuse). Lorsque le symbole « 0 » se présente, le modulateur reste fermé (aucune impulsion n'est émise).

Chaque 1 ou 0 est appelé bit d'information, l'intervalle de temps séparant deux bits consécutifs correspond au temps bit. Le débit d'information est alors défini par le nombre de bits par seconde. Il s'exprime en général en Gbit.s^{-1} ou en Tbit.s^{-1} ($1 \text{ Gbit.s}^{-1} = 1$ milliard de bits par seconde, $1 \text{ Tbit.s}^{-1} = 1\,000$ milliards de bits par seconde). En pratique, un bit 1 correspond à la présence d'une impulsion lumineuse durant un temps bit, alors qu'un bit 0 correspond à l'absence de lumière durant un temps bit.

Après une longue propagation dans la fibre optique, la séquence d'impulsions optiques est finalement reconvertie en séquence d'impulsions électriques à l'aide d'un détecteur et d'un décodeur. À la sortie de la ligne de transmission optique, le détecteur est relié à un système qui compare le signal transmis au signal initial et mesure ainsi le nombre d'erreurs (une erreur revient à détecter un 1 au lieu d'un 0 ou réciproquement). Divers phénomènes de propagation déforment fortement les impulsions et peuvent entraîner un chevauchement des impulsions voisines et par conséquent quelques erreurs de détection voire un brouillage total de l'information. En pratique, les opérateurs tolèrent une seule erreur de bit pour un milliard de bits transmis.

- 1 La fibre optique standard est un fil de verre très fin de forme cylindrique, constitué d'une région centrale, le cœur, d'environ 10 microns de diamètre, entouré d'une gaine d'environ 125 microns de diamètre. Le cœur et la gaine sont constitués d'un même verre de silice, mais où des dopants sont incorporés de telle sorte que l'indice de réfraction du cœur soit légèrement supérieur à celui de la gaine. Le tout est finalement protégé par une gaine protectrice en matière plastique.
- 2 La fibre optique est un guide d'onde qui a comme principal avantage, vis-à-vis des autres guides d'ondes, de n'atténuer que très faiblement les ondes électromagnétiques. C'est pour cette raison qu'actuellement, elle est systématiquement utilisée pour transmettre des informations sur de très longues distances.
- 3 Le second avantage majeur de la fibre optique est la très large bande passante : elle peut transmettre simultanément une plus grande quantité d'informations que tout autre système de transmission existant (câble coaxial, ligne bifilaire, etc.).
- 4 Pour se propager dans une fibre optique, la lumière adopte certaines formes particulières de répartition de l'intensité lumineuse de la section transverse de la fibre, qui dépendent de la fréquence du champ électromagnétique. On les appelle modes de propagation.
- 5 À basse fréquence le seul mode qui peut se propager est un mode dont l'intensité lumineuse est maximum au centre du cœur de la fibre et décroît régulièrement jusqu'à s'annuler dans la gaine. C'est le mode fondamental de propagation.
- 6 À partir d'une certaine fréquence, d'autres modes (d'ordre supérieur) peuvent se propager en même temps que le mode fondamental. Dans le cas des modes d'ordre supérieur, la lumière s'éteint et se rallume au moins une fois lorsqu'on se déplace du cœur vers la gaine, ou lorsqu'on tourne autour de l'axe de la fibre.

Testez-vous



- 8.1** Quelle que soit sa fréquence, une onde électromagnétique peut se propager dans une fibre optique :
- a. vrai b. faux
- 8.2** Les ondes qui se propagent dans une fibre sont des **modes de propagation**. La **fréquence de coupure** d'un mode est la fréquence :
- a. au-dessus de laquelle le mode commence à se propager
b. en dessous de laquelle le mode commence à se propager
- 8.3** On désigne par **mode fondamental** le mode qui a :
- a. la fréquence de coupure la plus grande
b. la fréquence de coupure la plus petite
- 8.4** Dans une fibre optique à saut d'indice, la fréquence de coupure du **mode fondamental** est nulle :
- a. vrai b. faux
- 8.5** Dans une fibre optique à saut d'indice, on trouve des **modes dégénérés**. On dit que deux modes sont dégénérés lorsqu'ils se propagent avec :
- a. la même fréquence et des vitesses différentes
b. la même fréquence et la même vitesse
c. la même fréquence et la même longueur d'onde



Entraînez-vous

8.1 Impact de la dispersion intermodale dans une ligne télécom

Cet exercice utilise l'approche de l'optique géométrique (approche des rayons lumineux) pour évaluer l'impact de la dispersion intermodale d'une fibre télécom.

On considère une fibre à saut d'indice constituée d'un cœur d'indice n_1 entouré d'une gaine d'indice n_2 . La figure suivante représente le trajet d'un rayon lumineux quelconque qui arrive sur cette fibre avec un angle d'incidence θ_0 , en provenance d'un milieu d'indice n_0 .

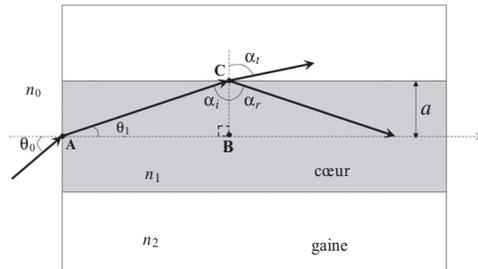


Figure 8.15

1. Écrire la loi de Descartes reliant les angles θ_0 et θ_1 au point d'impact A.
Le rayon réfracté dans le cœur tombe sur le dioptré cœur-gaine au point C avec un angle d'incidence α_i , et donne lieu à un rayon réfléchi avec un angle $\alpha_r = \alpha_i$, et un rayon réfracté avec un angle α_r .
2. Écrire la loi de Descartes reliant les angles α_i et α_r au point d'impact C.
3. Le rayon réfracté dans la gaine (au point C) constitue-t-il un inconvénient dans le cadre des transmissions à grande distance par fibre optique ?
4. Au point C, il existe un angle limite $\alpha_i = \alpha_{il}$ au-delà duquel le rayon réfracté n'existe pas. Donner l'expression de cet angle limite en fonction de n_1 et n_2 .
5. On cherche à déterminer l'angle $\theta_0 = \theta_{0l}$ pour lequel $\alpha_i = \alpha_{il}$. À partir de la relation entre les angles du triangle ABC, donner l'expression de θ_1 en fonction de α_{il} .
6. En tenant compte des questions précédentes, donner l'expression de $\sin \theta_{0l}$ en fonction de n_1 , n_2 et n_0 . Comment appelle-t-on $\sin \theta_{0l}$? Par la suite, on utilisera la notation ON pour désigner $\sin \theta_{0l}$. La fibre considérée est une fibre à faible guidage ($\Delta n = n_1 - n_2 \ll 1$, $n = n_1 \approx n_2$), qui reçoit une lumière provenant de l'air.
7. Montrer que dans ce cas, $ON \approx \sqrt{2n\Delta n}$.
8. Calculer la valeur du saut d'indice Δn pour $ON = 0,13$ et $n = 1,45$.
9. Calculer l'angle que fait le rayon guidé le plus incliné par rapport à l'axe de la fibre (angle θ_{0l}).
10. Le diamètre de cœur valant $2a = 50$ microns calculer le nombre de réflexions totales effectuées par ce rayon guidé le plus incliné, sur une longueur de fibre de 1 km.

11. Calculer l'écart entre les temps de parcours respectifs de cette fibre par le rayon parallèle à l'axe de la fibre, et le rayon le plus incliné par rapport à l'axe de la fibre.

Le fait que des rayons différents mettent des temps différents à parcourir la fibre, est qualifié de **dispersion intermodale**. En effet, chaque information est transportée en « pièces détachées » réparties sur plusieurs rayons (ou modes). Ces différentes pièces arrivent à destination à des instants différents (en rang dispersé), d'où le qualificatif de **dispersion intermodale**.

12. En quoi cette dispersion constitue-t-elle un effet pénalisant pour les systèmes de transmission ultra-longue distance par fibre optique ? Par quel moyen peut-on supprimer cet effet dans ces systèmes ?

8.2 Calcul des paramètres d'une fibre monomode

La formule empirique de Marcuse donne l'expression analytique du rayon de mode, w , de la distribution gaussienne qui approche le mieux le champ réel dans une fibre monomode, en fonction du paramètre V :

$$\frac{2w}{2a} \approx 0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6},$$

où a désigne le rayon de cœur de la fibre. Cette expression donne une valeur de w précise à mieux que 1 % près dans la plage $0,8 < V < 2,5$. On considère une fibre optique télécom monomode à saut d'indice, en verre de silice (d'indice $n \simeq 1,447$), possédant une ouverture numérique de 0,13, un diamètre de gaine de 125 μm , et une longueur d'onde de coupure à 1,2 μm .

1. Calculer le saut d'indice de cette fibre.
2. Calculer le rayon de cœur de la fibre.
3. Calculer le rayon de mode à la longueur d'onde de 1,55 μm .
4. Calculer le facteur de confinement (fraction de la puissance optique se propageant à l'intérieur du cœur de la fibre).

8.3 Détermination graphique des modes LP d'une fibre à saut d'indice

On considère une fibre de silice à saut d'indice ayant les caractéristiques suivantes : indice de cœur $n_1 = 1,454$, indice de gaine $n_2 = 1,450$, rayon de cœur $a = 4,46 \mu\text{m}$. On injecte dans cette fibre un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 630 \text{ nm}$.

1. Calculer l'ouverture numérique de cette fibre.
2. Préciser la couleur du laser injecté dans cette fibre.
3. Calculer le paramètre V pour ce laser.
4. • Déterminer le nombre total de modes LP_{ln} ($n = 1, \dots, M$) susceptibles de se propager, dans les cas $l = 0$ et $l = 1$.
- Déterminer graphiquement les paramètres u pour les modes LP_{01} et en déduire les

constantes de propagation normalisées $b = \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$.

● Solutions

 **8.1** Réponse a ; **8.2** Réponse a ; **8.3** Réponse b ; **8.4** Réponse a ; **8.5** Réponses b, c.

8.1 Impact de la dispersion intermodale dans une ligne télécom

1.
$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 \quad (8.80)$$

2.
$$n_1 \sin \alpha_i = n_2 \sin \alpha_t \quad (8.81)$$

3. Le rayon réfracté au point C est une perte d'énergie, qui va se répéter périodiquement, et entraîner rapidement l'extinction totale de la lumière. C'est donc un inconvénient majeur pour les transmissions à grande distance par fibre optique.

4. Il est possible d'éviter la réfraction dans la gaine, en éclairant la fibre avec un angle d'incidence θ_0 suffisamment petit pour que α_i soit supérieur à l'angle limite α_{il} . En effet, la relation (8.81) indique que $\alpha_i < \alpha_t$, puisque $n_1 > n_2$. Il existe donc un angle $\alpha_i = \alpha_{il}$ tel que $\alpha_t = \pi/2$. Pour cet angle limite, la relation (8.81) s'écrit

$$\sin \alpha_{il} = n_2/n_1 \quad (8.82)$$

5. La somme des angles du triangle ABC étant égal à π , on a :

$$\theta_1 + \alpha_{il} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_{il} \quad (8.83)$$

6. Pour $\theta_0 = \theta_{0l}$ on a $\alpha_i = \alpha_{il}$, et θ_1 est donné par la relation (8.83). La relation (8.80), devient

$$n_0 \sin \theta_{0l} = n_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{il} \right) = n_1 \cos \alpha_{il} = n_1 \sqrt{\cos^2 \alpha_{il}} = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{il}}.$$

En tenant compte de la relation (8.82), on obtient : $\sin \theta_{0l} = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

On définit l'**ouverture numérique** (ON) d'une fibre optique comme étant le sinus de l'angle maximal des rayons guidés ; autrement dit, l'angle maximal que doivent avoir les rayons incidents pour pouvoir se propager dans la fibre par réflexion totale à l'interface cœur-gaine :

$$\text{ON} = \sin \theta_{0l} = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (8.84)$$

7. Le rayon incident provient de l'air, alors $n_0 \simeq 1$, et si on tient compte du fait que $\Delta n = n_1 - n_2 \ll 1$ et $n = n_1 \simeq n_2$, alors la relation (8.84) se met sous la forme suivante :

$$\text{ON} = \sin \theta_{0l} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{2n\Delta n} \quad (8.85)$$

8.
$$\Delta n = \frac{\text{ON}^2}{2n} \quad (8.86)$$

Pour $ON = 0,13$ et $n = 1,45$, on a $\Delta n \simeq 6 \times 10^{-3}$.

9. Le rayon guidé le plus incliné par rapport à l'axe de la fibre correspond à θ_{0l} .

$$ON = \sin \theta_{0l} = 0,13 \text{ soit } \theta_{0l} \simeq 0,13 \text{ rad} = 7,45^\circ$$

10. La première réflexion s'effectue au bout du trajet AC, dont la projection sur l'axe est $AB = AC \cos \theta_1$. Ensuite, les réflexions s'effectuent systématiquement après chaque distance effective $2AC$, dont la projection sur l'axe est $2AB$. L'extrémité de la fibre est atteinte au bout de N réflexions, telles que $N \times 2AB = L$. On a donc

$$N = \frac{L}{2AB} = \frac{L}{2AC \cos \theta_1}$$

Or

$$\sin \theta_1 = \frac{a}{AC} \Rightarrow N = \frac{L \sin \theta_1}{2a \cos \theta_1}$$

D'après (8.80), $\sin \theta_{0l} = n_1 \sin \theta_1 = ON \Rightarrow \sin \theta_1 = ON/n_1 \simeq ON/n$.

Comme $\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \sqrt{1 - (ON/n)^2}$, on a :

$$N = \frac{L \times ON}{2an\sqrt{1 - (ON/n)^2}}$$

Avec $L = 1 \text{ km}$, $a = 25 \text{ }\mu\text{m}$, $n = 1,45$, $ON = 0,13$, on trouve $N \simeq 1,8 \times 10^6$.

11. Le rayon parallèle à l'axe parcourt exactement la distance L . Supposons que $L = m \times AB$, où m est un entier. Alors la distance parcourue par le rayon le plus incliné est $L_{\max} = m \times AC$. Les deux rayons se propagent dans le même milieu d'indice $n_1 \simeq n$, à la vitesse $v = c/n$. L'écart des temps de parcours est donc

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta L}{v} = \frac{n(L_{\max} - L)}{c} = \frac{nL}{c} \left(\frac{L_{\max}}{L} - 1 \right) = \frac{nL}{c} \left(\frac{AC}{AB} - 1 \right) \\ &= \frac{nL}{c} \left(\frac{1}{\cos \theta_1} - 1 \right) \longrightarrow \Delta t = \frac{nL}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{ON}{n}\right)^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{AN : } \Delta t = 1,95 \times 10^{-8} \text{ s} = 19,5 \text{ ns}$$

12. Cette fibre provoque une dispersion intermodale de $19,5 \text{ ns.km}^{-1}$. L'information télécom étant répartie sur plusieurs modes (ou rayons), comme ces rayons n'ont pas le même temps de parcours, les différents constituants de chaque information n'arrivent pas à destination en même temps. L'information arrive étalée dans le temps, avec le risque de chevauchement de deux informations émises à des instants rapprochés. En télécom, lorsque la dispersion intermodale devient très pénalisante, on utilise les fibres monomodes, qui sont caractérisés dans un rayon de cœur suffisamment petit pour que seul le rayon parallèle à l'axe optique puisse se propager.

8.2 Calcul des paramètres d'une fibre monomode

1. On a vu dans l'exercice 8.1 que l'ouverture numérique d'une fibre à faible guidage s'écrit $ON \simeq \sqrt{2n \Delta n}$; ce qui conduit à : $\Delta n = \frac{ON^2}{2n}$.

Pour $ON = 0,13$ et $n = 1,4475$, on trouve : $\Delta n \simeq 6 \times 10^{-3}$

2. D'après la formule (8.76) du cours,

$$V = ak_0 ON = a \frac{2\pi}{\lambda} ON \Rightarrow V_c = a \frac{2\pi}{\lambda_c} ON \simeq 2,4 \Rightarrow a = \frac{2,4\lambda_c}{2\pi ON}$$

Pour $\lambda_c = 1,2 \mu\text{m}$ et $ON = 0,13$, on trouve : $a = 3,52 \mu\text{m}$.

3. Calculons d'abord le paramètre V à $1,55 \mu\text{m}$

$$V = ak_0 ON = a \frac{2\pi}{\lambda} ON = 1,85$$

$$w \approx a \left(0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6} \right) \text{ soit } w = 4,79 \mu\text{m}$$

4. Dans l'approximation de Marcuse, la distribution radiale du champ est donnée par :

$$\psi(r) = \psi_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{w} \right)^2 \right].$$

L'intensité correspondante est $I(r) = |\psi(r)|^2 = I_0 \exp \left[- \frac{2r^2}{w^2} \right]$.

La fraction de puissance dans le cœur est donnée par

$$F = \frac{\int_0^a I(r) ds}{\int_0^b I(r) ds}, \quad (8.87)$$

où $ds = 2\pi r dr$ est la surface élémentaire d'une couronne circulaire de rayon r et épaisseur dr . En faisant le changement de variable $x = r^2 \Rightarrow dx = 2r dr$, on obtient :

$$F = \frac{\int_0^a r \exp \left(- \frac{2r^2}{w^2} \right) dr}{\int_0^b r \exp \left(- \frac{2r^2}{w^2} \right) dr} = \frac{\int_0^{a^2} \exp \left(- \frac{2x}{w^2} \right) dx}{\int_0^{b^2} \exp \left(- \frac{2x}{w^2} \right) dx} = \frac{\left[\exp \left(- \frac{2x}{w^2} \right) \right]_0^{a^2}}{\left[\exp \left(- \frac{2x}{w^2} \right) \right]_0^{b^2}}.$$

$$\text{Finalement } F = \frac{\exp \left(- \frac{2a^2}{w^2} \right) - 1}{\exp \left(- \frac{2b^2}{w^2} \right) - 1}.$$

Avec $a = 3,52 \mu\text{m}$, $b = 62,5 \mu\text{m} (125 \mu\text{m}/2)$, $w = 4,79 \mu\text{m}$, on trouve $F = 66 \%$.

8.3 Détermination graphique des modes LP d'une fibre à saut d'indice

1.
$$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0,108$$

2. Ce laser est de couleur rouge.

3.
$$V = ak_0 ON = a \frac{2\pi}{\lambda} ON = 4,794$$

4) Déterminons le nombre total de modes LP_{0n} et LP_{1n}

• **Modes LP_{0n}**

Ils sont décrits par la relation générale (8.74) avec $l = 0$: $\frac{uJ_{-1}(u)}{J_0(u)} + \frac{wK_{-1}(w)}{K_0(w)} = 0$.

En appliquant les relations de récurrence $J_{-1}(u) = -J_1(u)$ et $K_{-1}(w) = K_1(w)$, cette relation devient :

$$\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} - \frac{wK_1(w)}{K_0(w)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(u) = g(u, V)$$

$$\text{avec } f(u) = \frac{uJ_1(u)}{J_0(u)}, \quad g(u, V) = \frac{wK_1(w)}{K_0(w)}, \quad w = (V^2 - u^2)^{1/2}.$$

Dans l'intervalle $0 < u < V = 4,794$, les racines de cette équation sont les points d'intersection des fonctions $f(u)$ et $g(u, V)$. La fonction f intercepte g autant de fois qu'il coupe/touche l'axe des abscisses. Les racines de f comprises entre 0 et V incluent la racine $u_{01c} = 0$, et les racines non nulles de $J_1(u)$.

D'après le tableau 8.7, on trouve : $u_{02c} = 3,8317$.

Il y a donc au total deux solutions pour l'équation caractéristique des modes LP_{0n} sur l'intervalle $0 < u < V$. La résolution graphique donne $u_{01} \simeq 1,98$ ($b_{01} \simeq 0,83$) et $u_{02} \simeq 4,37$ ($b_{02} \simeq 0,17$).

• **Modes LP_{1n}**

Ils sont décrits par la relation générale (8.74) avec $l = 1$:

$$\frac{uJ_0(u)}{J_1(u)} + \frac{wK_0(w)}{K_1(w)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(u) = g(u, V)$$

$$\text{avec } f(u) = -\frac{uJ_0(u)}{J_1(u)}, \quad g(u, V) = \frac{wK_0(w)}{K_1(w)}.$$

Ici aussi, la fonction f intercepte g autant de fois qu'il coupe l'axe des abscisses. Les racines de f comprises entre 0 et V incluent la racine nulle (déjà associée au mode LP_{01}), et les racines de $J_0(u)$. D'après le tableau 8.7, on ne trouve que : $u_{11c} = 2,4048$.

Il n'y a donc qu'une seule solution pour l'équation caractéristique du groupe de modes LP_{1n} sur l'intervalle $0 < u < V$. La résolution graphique donne $u_{11} \simeq 3,12$ ($b_{02} \simeq 0,57$).

Les états de polarisation de la lumière

Introduction

Pour visualiser un film en trois dimensions, les lunettes utilisées comportent des filtres polariseurs. Sur l'écran, deux images sont projetées : l'une polarisée rectilignement à $+45^\circ$, l'autre à -45° . On cache la première image à l'œil gauche, la seconde à l'œil droit (ou vice versa) à l'aide des lunettes. Chaque œil perçoit ainsi deux images différentes. En photographie, on atténue les reflets venant de surfaces telles que l'eau en plaçant un filtre polariseur correctement orienté devant l'objectif de l'appareil.

Objectifs

- Définir** les états de polarisation d'une onde électromagnétique plane.
- Décrire** des états de polarisation.
- Présenter** des lames à retard utiles pour manipuler la polarisation.

Plan

- 1 Transversalité et nature vectorielle des vibrations lumineuses
- 2 États de polarisation des ondes électromagnétiques planes
- 3 Propagation des états de polarisation dans les dispositifs optiques : formalisme des matrices de Jones

La polarisation de la lumière a été observée pour la première fois par Huygens en 1690 sur les rayons de lumière ayant traversé un cristal de spath d'Islande. Il s'agissait d'un rhomboèdre cristallin de calcite (CaCO_3), matériau uniaxe biréfringent, éclairé sous incidence normale par de la lumière naturelle. Deux faisceaux spatialement séparés sont transmis : un rayon non dévié dit ordinaire car il suit les lois attendues de la réfraction et un rayon dit extraordinaire qui est dévié. Ces deux rayons ont la même intensité lumineuse, ils sont polarisés rectilignement et perpendiculairement l'un par rapport à l'autre. Dans les chapitres dédiés aux milieux anisotropes, nous présenterons le phénomène de double réfraction qui est à la base de cette observation.

En 1890, Malus observe la polarisation par réflexion en recevant sur deux miroirs successifs de la lumière.

L'interprétation des observations précédentes est que la vibration lumineuse ne peut pas être une grandeur scalaire ni un vecteur longitudinal, car il serait impossible de réaliser l'extinction entre un polariseur et un analyseur croisés.

Parmi les applications liées à la polarisation de la lumière, nous pouvons citer l'élaboration des traitements multicouches anti reflets, des polariseurs anisotropes, des cristaux utilisés en optique non-linéaire, des cristaux liquides...

1 Transversalité et nature vectorielle des vibrations lumineuses

Rappelons que, dans un milieu isotrope, le vecteur représentatif de la vibration lumineuse est le champ électrique de l'onde électromagnétique, il est perpendiculaire au rayon lumineux et situé dans le plan d'onde : l'onde est dite **transverse**. De plus, les phénomènes lumineux sont correctement expliqués en utilisant la notion de champ électromagnétique qui par définition est vectoriel. Parmi les différentes raisons qui imposent d'utiliser la nature vectorielle de la lumière, citons :

- la présence de discontinuités dans les propriétés optiques des milieux c'est-à-dire l'existence de dioptres. En effet, les coefficients de réflexion et de transmission (en amplitude et en intensité) sous incidence oblique sont fonctions de la polarisation, même si les milieux sont isotropes : ce sont les lois de Fresnel ;
- le champ électromagnétique est de nature vectorielle (voir les équations de Maxwell) ;
- l'existence des milieux biréfringents dans lesquels la propagation des ondes s'analyse correctement en tenant compte de la polarisation.

DÉFINITION 9.1

Une onde transversale, caractérisée en chaque point M du milieu dans lequel elle se propage par une grandeur $\vec{s}(M, t)$ normale à la direction de propagation est dite polarisée si l'extrémité A du vecteur $\overline{MA} = \vec{s}$ décrit au cours du temps une courbe bien déterminée.

2 États de polarisation des ondes électromagnétiques planes

On s'intéresse par la suite au champ induction électrique $\vec{D}(\vec{r}, t)$ car c'est le champ le plus significatif en optique des milieux matériels puisqu'il est transverse même dans un diélectrique anisotrope. Dans les milieux isotropes, \vec{D} et \vec{E} étant colinéaires, leur direction est identique, ils sont tous deux dans le plan d'onde. Nous verrons au chapitre suivant que la situation diffère pour les milieux anisotropes : le champ électrique n'appartient plus au plan d'onde (sauf cas particuliers), seul \vec{D} est transverse.

2.1 États de polarisation

Dans les milieux infinis, en l'absence de charges libres et pour des ondes planes progressives homogènes, l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div} \vec{D} = 0$ conduit à $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$ où \vec{k} est le vecteur d'onde. Les vecteurs \vec{k} et \vec{D} sont donc orthogonaux : \vec{D} appartient au plan d'onde. Choisissons Oz comme axe de propagation. Alors l'expression en notation complexe de \vec{D} est :

$$\vec{D}(z, t) = \vec{D}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

où ω est la pulsation, \vec{D}_0 est l'amplitude complexe de \vec{D} .

Le milieu dans lequel s'effectue la propagation est supposé être un diélectrique linéaire homogène isotrope, d'indice n : la relation de dispersion est donc $k = n \frac{\omega}{c}$ où c est la célérité de la lumière dans le vide.

Le vecteur \vec{D}_0 étant transverse, il appartient au plan (Oxy) et il peut s'écrire selon : $\vec{D}_0 = A_x e^{i\varphi_x} \vec{u}_x + A_y e^{i\varphi_y} \vec{u}_y$ où A_x et A_y sont des amplitudes réelles (positives) et φ_x , φ_y sont des phases définies à 2π près.

À l'aide de ces quantités, dans un plan d'onde quelconque, le champ $\vec{D}(z, t)$ s'exprime en notation réelle selon :

$$\vec{D}(z, t) \left(\begin{array}{l} D_x(z, t) = A_x \cos(\omega t - kz - \varphi_x) \\ D_y(z, t) = A_y \cos(\omega t - kz - \varphi_y) \end{array} \right). \quad (9.1)$$

Examinons les caractéristiques de l'état de polarisation dans un plan d'onde simple, le plan $z = 0$. Posons $X(t) = D_x(0, t)$ et $Y(t) = D_y(0, t)$. Trouver l'état de polarisation de l'onde revient à répondre à la question : quel est l'ensemble des points décrits par l'extrémité de $\vec{D}(0, t)$ c'est-à-dire par le couple $(X(t), Y(t))$?

D'après l'équation (9.1),

$$\begin{cases} X(t) = A_x \cos(\omega t - \varphi_x) \\ Y(t) = A_y \cos(\omega t - \varphi_y) \end{cases} \quad (9.2)$$

En changeant l'origine des temps et en introduisant $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$:

$$\begin{cases} X(t) = A_x \cos(\omega t) \\ Y(t) = A_y \cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad (9.3)$$

Ces expressions indiquent que la courbe recherchée est inscrite dans un rectangle de côtés $2A_x$ selon Ox et $2A_y$ selon Oy. Nous pouvons également affirmer qu'il s'agit d'une courbe fermée vu que $X(t)$ et $Y(t)$ possèdent la même période.

Le couple $(X(t), Y(t))$ constitue les équations paramétriques de la courbe recherchée. Pour en déduire l'équation cartésienne, il est nécessaire d'éliminer le paramètre temps. Pour cela, nous utilisons la relation

$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1. \quad (9.4)$$

2 États de polarisation des ondes électromagnétiques planes

D'autre part, le système (9.3) donne :

$$\begin{cases} \cos \omega t = \frac{X}{A_x} \\ \sin \omega t = \frac{Y - X \frac{A_y}{A_x} \cos \varphi}{A_y \sin \varphi} \end{cases}$$

qui reporté dans la relation (9.4) permet de trouver l'équation cartésienne de la courbe :

$$\frac{X^2}{A_x^2} + \frac{Y^2}{A_y^2} - 2 \frac{XY}{A_x A_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

Il s'agit donc d'une ellipse : on dit que l'état de polarisation le plus général d'une onde plane progressive monochromatique est un état de polarisation elliptique.

Le terme croisé XY dans l'équation indique que, de manière générale, les axes Ox' et Oy' de l'ellipse sont différents de Ox et Oy (figure 9.1).

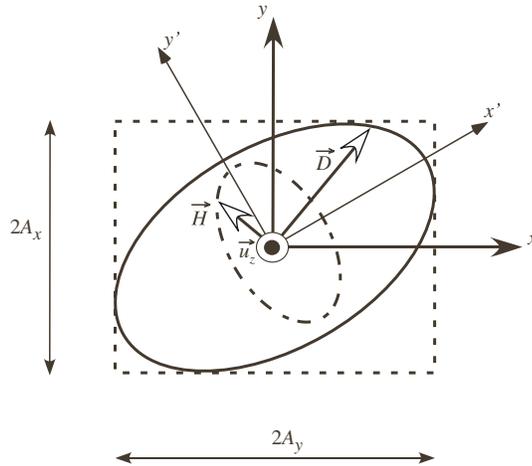


Figure 9.1– Ellipses décrites par les extrémités de \vec{D} et \vec{H} .

Le sens de parcours de l'ellipse se détermine en calculant le vecteur tangent en tout point de l'ellipse :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -A_x \omega \sin \omega t \\ \frac{dY}{dt} = -A_y \omega \sin(\omega t - \varphi) \end{array} \right).$$

Ce sens de parcours ne changeant pas au cours du temps (l'onde est censée se propager sans rencontrer d'obstacle, ni de dioptré), nous choisissons un instant simple pour déterminer le sens du parcours : $t = 0$. À cet instant, le vecteur tangent est :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = 0 \\ \frac{dY}{dt} = A_y \omega \sin \varphi \end{array} \right).$$

Le sens de parcours dépend donc de φ .

La convention de sens utilisée par les opticiens est relative à la direction d'observation c'est-à-dire à l'observateur vers lequel se propage l'onde.

- Si $0 < \varphi < \pi$, alors $\sin \varphi > 0$ soit $\frac{dY}{dt} > 0$: le sens de parcours est le sens direct (sens trigonométrique). L'onde est dite polarisée elliptiquement à gauche, son hélicité est positive.
- Si $-\pi < \varphi < 0$, alors $\sin \varphi < 0$ soit $\frac{dY}{dt} < 0$: le sens de parcours est le sens rétrograde. L'onde est dite polarisée elliptiquement à droite, son hélicité est négative.
- Si $\varphi = 0$ ou π , les équations paramétriques donnent immédiatement $\frac{Y}{X} = \pm \frac{A_y}{A_x}$. L'équation est celle d'une droite, l'onde est dite polarisée rectilignement.
- Si $A_x = A_y$ et $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, l'équation cartésienne est $\frac{X^2}{A_x^2} + \frac{Y^2}{A_x^2} = 1$. L'équation est celle d'un cercle, l'onde est dite polarisée circulairement, à droite si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, à gauche si $\varphi = +\frac{\pi}{2}$.

Les résultats précédents peuvent se représenter selon la figure 9.2.

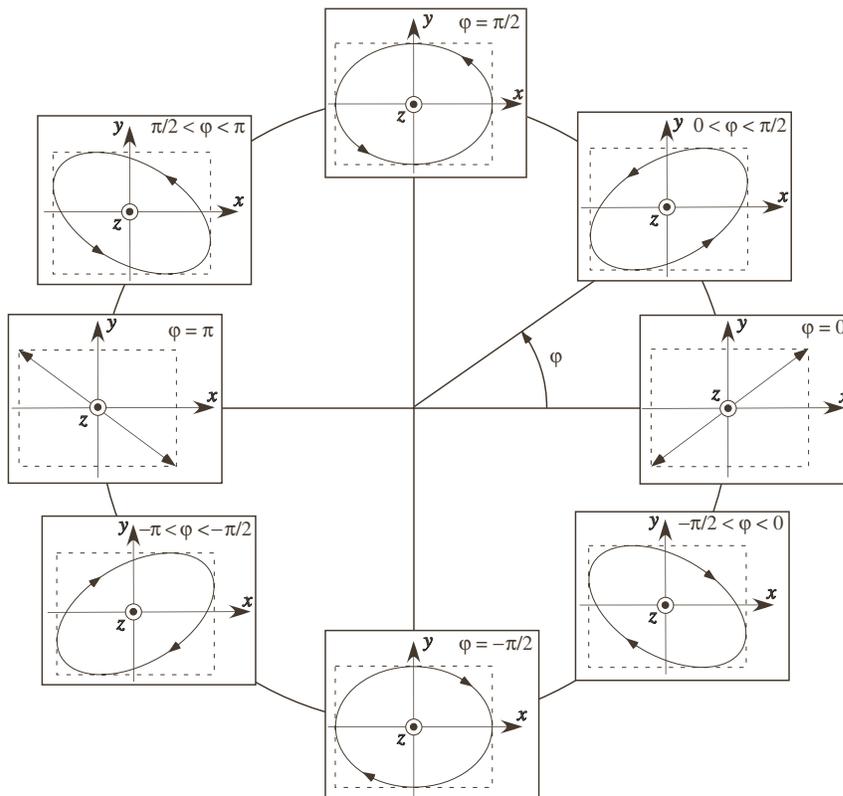


Figure 9.2 – Les différents états de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique selon les valeurs du déphasage φ .