

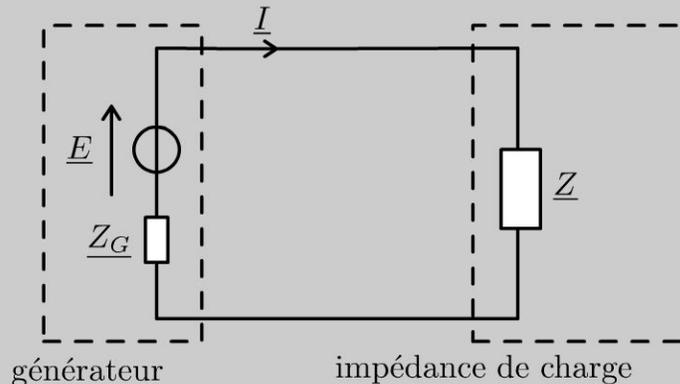
D'où

$$I' = \frac{P}{U \cos \phi'} = 23 \text{ A}$$

Pour une même puissance consommée et une même tension, le courant fourni par la centrale (par exemple EDF) est plus faible ($I' = 23 \text{ A}$ et $I = 30 \text{ A}$). On a donc des pertes par effet Joule moins importantes sur les lignes. L'utilisateur paye uniquement ce qu'il consomme, les pertes par effet Joule sur les lignes sont à la charge d'EDF qui impose aux utilisateurs d'avoir un facteur de puissance supérieur à 0,9.

Exercice 16.3 : Transfert maximal de puissance d'un générateur vers une impédance

On considère le circuit suivant où un générateur modélisé par le théorème de Thévenin alimente une impédance de charge. On pose $\underline{Z}_G = R_G + jX_G$ et $\underline{Z} = R + jX$.



1. Quelle la condition sur l'impédance de charge pour que cette impédance reçoive le maximum de puissance du générateur ?
2. Déterminer la puissance moyenne reçue par l'impédance de charge lorsqu'elle est adaptée en puissance.

Analyse du problème

L'utilisation de l'impédance complexe permet de calculer facilement la puissance moyenne consommée par un dipôle. Une bobine et un condensateur ne consomment pas de puissance moyenne en régime sinusoïdal forcé.



1. La puissance moyenne reçue par l'impédance de charge est :

$$P_{\text{moy}} = \text{Re}(\underline{Z}) I^2 = RI^2$$

Pour calculer I , il faut utiliser l'amplitude complexe :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_G + \underline{Z}}$$

En prenant le module au carré et en divisant par 2 pour avoir le carré de la valeur efficace de l'intensité, on obtient :

$$I^2 = \frac{E_m^2}{2} \frac{1}{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2]}$$

On obtient :

$$P_{\text{moy}} = \frac{E_m^2}{2} \frac{R}{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2]}$$

On cherche la condition sur R et X pour que P_{moy} soit maximale. Il faut que les dérivées partielles de P_{moy} par rapport à R et X soient simultanément nulles :

$$\left(\frac{\partial P_{\text{moy}}}{\partial R} \right)_X = \frac{E_m^2}{2} \frac{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2] - [2R(R_G + R)]}{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2]^2} = 0$$

et

$$\left(\frac{\partial P_{\text{moy}}}{\partial X} \right)_R = \frac{E_m^2}{2} \frac{R(-2(X_G + X))}{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2]^2} = 0$$

Pour vérifier la deuxième équation, il faut que :

$$X = -X_G$$

En remplaçant X par $(-X_G)$ dans la première dérivée partielle puisque les deux relations doivent être vérifiées simultanément, on a :

$$\left(\frac{\partial P_{\text{moy}}}{\partial R} \right)_X = \frac{E_m^2}{2} \frac{[(R_G + R)^2] - [2R(R_G + R)]}{(R_G + R)^4}$$

soit :

$$\left(\frac{\partial P_{\text{moy}}}{\partial R} \right)_X = \frac{E_m^2}{2} \frac{(R_G + R)(R_G + R - 2R)}{(X_G + X)^4} = 0$$

On doit donc avoir :

$$R = R_G$$

La charge est adaptée en puissance si les deux conditions sont vérifiées :

$$R = R_G \text{ et } X = -X_G$$

Soit :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_G^*$$

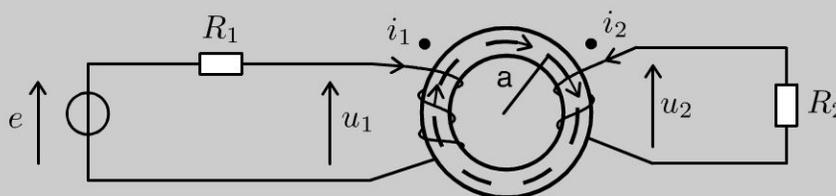
2. Lorsque l'impédance de charge est adaptée en puissance, la puissance moyenne reçue est :

$$P_{\text{moy}} = \frac{E_m^2}{8R_G}$$

Transformateur

Exercice 17.1 : Transformateur torique

Sur un tore magnétique, on dispose deux enroulements. Le primaire est constitué de N_1 spires, et relié à un générateur de force électromotrice $e(t)$ par l'intermédiaire d'une résistance R_1 . Le secondaire comprend N_2 spires, il est branché sur une résistance R_2 . Les résistances des enroulements sont nulles. Le tore est constitué d'un matériau de perméabilité $\mu = \mu_0\mu_r$ (μ_r très grand devant l'unité). Sa section est notée S . Son rayon a est grand devant le rayon b de la section S . On néglige les variations du champ magnétique à l'intérieur du tore. On le prend de la forme : $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$.



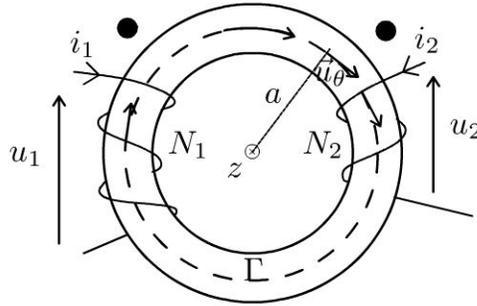
1. Déterminer le champ magnétique dans le tore. Définir les bornes homologues.
2. Établir les expressions des flux Φ_1 et Φ_2 , traversant respectivement le primaire et le secondaire.
3. Déterminer le coefficient de mutuelle inductance M existant entre les deux circuits, ainsi que leurs inductances propres respectives L_1 et L_2 , en fonction de $L_0 = \frac{\mu_0\mu_r S}{2\pi a}$. Quelle relation existe entre M , L_1 et L_2 ?
4. On étudie le cas où $e(t)$ est un échelon défini par : $e(t) = 0$ pour $t < 0$; $e(t) = E$ pour $t > 0$. Établir les équations différentielles liant i_2 et e d'une part, i_1 et e d'autre part.
5. Pour $t < 0$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont nuls. Quelles grandeurs physiques restent continues en $t = 0$? En déduire une relation entre $i_1(0^+)$ et $i_2(0^+)$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'un transformateur torique. Il faut faire attention aux signes lors de l'application du théorème d'Ampère. C'est un problème d'induction puisqu'on a une variation du flux magnétique. Il faut donc rajouter les fem d'induction en convention générateur dans le circuit électrique équivalent.



1. On utilise les coordonnées cylindriques.



Orientation du circuit magnétique

On applique le théorème d'Ampère au contour d'Ampère Γ (cercle orienté dans le sens horaire) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu I_{\text{enlacé}} = \mu (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$



Attention aux signes pour la circulation du champ magnétique. On applique la règle de la main droite pour déterminer le signe du courant enlacé.



On a donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu}{2\pi r} (N_1 i_1 + N_2 i_2) \vec{u}_\theta \approx \frac{\mu}{2\pi a} (N_1 i_1 + N_2 i_2) \vec{u}_\theta$$

Définition des bornes homologues : Des courants entrant par les bornes homologues créent des champs magnétiques de même sens dans le circuit. Les bornes homologues sont représentées sur le schéma ci-dessus.

2. Le flux à travers une spire orientée est :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS$$

puisque le champ magnétique ne dépend pas de r .

Le flux qui traverse les N_1 spires orientées est :

$$\Phi_1 = N_1 (BS)$$

Le flux qui traverse les N_2 spires orientées est :

$$\Phi_2 = N_2 (BS)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{2\pi a} i_1 + \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi a} i_2 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi a} i_1 + \frac{\mu N_2^2 S}{2\pi a} i_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

3. On pose $L_0 = \frac{\mu S}{2\pi a}$. On a alors :

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_0 N_1^2 i_1 + L_0 N_1 N_2 i_2 \\ \Phi_2 = L_0 N_1 N_2 i_1 + L_0 N_2^2 i_2 \end{cases}$$

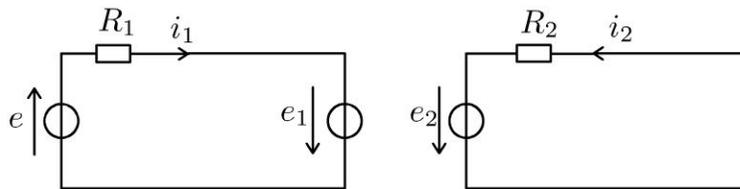
On a donc : $L_1 = L_0 N_1^2$ et $L_2 = L_0 N_2^2$.

On vérifie que $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Le couplage magnétique entre le primaire et le secondaire est parfait, toutes les lignes du champ magnétique créé par l'un des deux circuits traversent l'autre circuit :

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = L_0 N_1 N_2$$

4.



Il faut bien orienter les fem d'induction en convention générateur.



La loi des mailles permet d'écrire :

$$\begin{cases} e + e_1 = R_1 i_1 \\ e_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & \text{équation (1)} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & \text{équation (2)} \end{cases}$$

a) Pour lever le couplage, on dérive l'équation (1) et on utilise l'équation (2) pour éliminer i_1 .

L'équation (1) devient : $\frac{de}{dt} = R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$.

L'équation (2) s'écrit : $\frac{di_1}{dt} = \frac{-\left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}\right)}{M}$.

On réinjecte dans (1) :

$$\frac{de}{dt} = -R_1 \frac{\left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}\right)}{M} + L_1 \frac{-\left(R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2}\right)}{M} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

D'où

$$\frac{de}{dt} = \frac{-R_1 R_2}{M} i_2 - \frac{R_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2 L_1}{M} \frac{di_2}{dt} - \frac{L_1 L_2}{M} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

Or $M^2 = L_1 L_2$. On a donc :

On en déduit :

$$-\frac{de}{dt} = \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{di_2}{dt} \frac{1}{M} (R_1 L_2 + R_2 L_1) \quad \text{équation (1')}$$

b) On dérive l'équation (2) et on utilise l'équation (1) pour éliminer i_2 .

L'équation (2) devient : $0 = R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2}$

L'équation (1) s'écrit : $\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{M} \left(e - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right)$

On réinjecte dans (2) :

$$0 = \frac{R_2}{M} \left(e - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right) + \frac{L_2}{M} \left(\frac{de}{dt} - R_1 \frac{di_1}{dt} - L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} \right) + M \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

D'où :

$$\frac{R_2}{M} e + \frac{L_2}{M} \frac{de}{dt} = \frac{R_1 R_2}{M} i_1 + \frac{R_2 L_1 + R_1 L_2}{M} \frac{di_1}{dt} \quad \text{équation (2')}$$

car $M^2 = L_1 L_2$.

On a vu que $L_1 = L_0 N_1^2$; $L_2 = L_0 N_2^2$ et $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Si $e(t) = E$, l'équation (1') s'écrit :

$$0 = \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{di_2}{dt} \frac{L_0}{M} (R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2), \text{ soit :}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau} = 0$$

avec $\tau = L_0 \frac{R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2}{R_1 R_2}$.

L'équation (2') s'écrit alors : $\frac{R_2}{M} E = \frac{R_1 R_2}{M} i_1 + L_0 \frac{R_2 N_1^2 + R_1 N_2^2}{M} \frac{di_1}{dt}$, soit :

$$\tau \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{E}{R_1}$$

5. On a rajouté une fem d'induction $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$ dans le circuit n° 1 et une fem d'induction $e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ dans le circuit n° 2. Φ_1 et Φ_2 ne peuvent pas varier de façon discontinue, sinon on aurait des fem e_1 et e_2 infinies.



Il est faux ici de dire que $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$. Il faut raisonner sur le flux et non pas sur les courants.



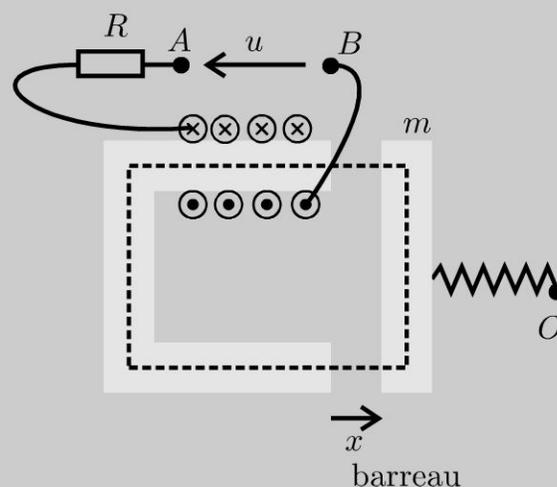
$\Phi_1(0^+) = \Phi_1(0^-) = 0$, donc $B(0) = 0$ et d'après le théorème d'Ampère :
 $N_1 i_1(0^+) + N_2 i_2(0^+) = 0$

Conversion électro-magnéto-mécanique

Exercice 18.1 : Contacteur électromagnétique en translation

On considère un noyau de fer doux immobile, en forme de U, de perméabilité $\mu_r \gg 1$. On dispose d'un enroulement de N spires relié à un générateur de force électromotrice u par l'intermédiaire d'une résistance R . Un ressort est fixé à un barreau de fer doux de perméabilité relative μ_r de masse m pouvant se déplacer sans frottement sur un axe horizontal. On définit S la section commune du noyau en U et du barreau. La forme des lignes de champ magnétique est représentée sur le schéma. On suppose le champ magnétique uniforme en tout point d'une section orthogonale aux lignes de champ.

On appelle ℓ_1 (respectivement ℓ_2) la longueur de la ligne de champ dans le noyau de fer doux (respectivement dans le barreau). On pose $\ell = \ell_1 + \ell_2$. On appelle x la distance entre le noyau de fer doux et le barreau. On suppose qu'il n'y a pas de flux de fuite.



1. Énoncer le théorème d'Ampère avec le vecteur excitation magnétique. Déterminer le champ magnétique le long de la ligne de champ. En déduire l'inductance propre en fonction de μ_0 , μ_r , N , S et x .
2. Déterminer l'énergie magnétique du système U_{em} .