

Cours de relativité restreinte
Université Paris-Saclay
L3 et Mag1 de physique fondamentale

Tenseurs . Notions élémentaires

Électromagnétisme relativiste cours I

section III.3 du polycopié
version du 20 mars 2020

pour un quadri-vecteur contravariant $X^\mu = (X^0, \vec{X})$

$$X'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} X^{\mu} \quad (1)$$

pour un quadri-vecteur contravariant $X^\mu = (X^0, \vec{X})$

$$X'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} X^{\mu} \quad (1)$$

pour un quadri-vecteur covariant $X_{\mu} = (X_0, -\vec{X})$ avec $X_0 = X^0$, on a démontré en cours (cf. section I.6.c du poly) que

$$X'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} X_{\mu} \quad (2)$$

où $\Lambda_{\alpha}^{\mu} = g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Lambda^{\beta}_{\nu}$.

pour un quadri-vecteur contravariant $X^\mu = (X^0, \vec{X})$

$$X'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} X^{\mu} \quad (1)$$

pour un quadri-vecteur covariant $X_\mu = (X_0, -\vec{X})$ avec $X_0 = X^0$, on a démontré en cours (cf. section I.6.c du poly) que

$$X'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} X_{\mu} \quad (2)$$

où $\Lambda_{\alpha}^{\mu} = g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Lambda^{\beta}_{\nu}$.

Un tenseur est un objet à n indices dont certains sont covariants, d'autres contravariants et qui se transforme comme suit:

$$T'^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\sigma} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\gamma}_{\sigma} T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\sigma} \quad (3)$$

$T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\sigma}$ est la forme deux fois contravariante et une fois covariante du tenseur T , de rang 3 (rang=nombre d'indices).

pour un quadri-vecteur contravariant $X^\mu = (X^0, \vec{X})$

$$X'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} X^{\mu} \quad (1)$$

pour un quadri-vecteur covariant $X_\mu = (X_0, -\vec{X})$ avec $X_0 = X^0$, on a démontré en cours (cf. section I.6.c du poly) que

$$X'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} X_{\mu} \quad (2)$$

où $\Lambda_{\alpha}^{\mu} = g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Lambda^{\beta}_{\nu}$.

Un tenseur est un objet à n indices dont certains sont covariants, d'autres contravariants et qui se transforme comme suit:

$$T'^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\sigma} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda_{\beta}{}^{\nu} \Lambda^{\gamma}{}_{\sigma} T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\sigma} \quad (3)$$

$T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\sigma}$ est la forme deux fois contravariante et une fois covariante du tenseur T , de rang 3 (rang=nombre d'indices).

Bien-sûr $T^{\mu\lambda\sigma} = g^{\lambda\nu} T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\sigma}$ est la forme trois fois contravariante et se transforme avec les matrices de Lorentz appropriées (cela se démontre, à faire en exercice en se rapportant à la section I.6.c du poly).

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1
- On a les propriétés: $T_0^0 = T^0_0 = T^{00} = T_{00}$

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1
- On a les propriétés: $T_0^0 = T^0_0 = T^{00} = T_{00}$
alors que $T_0^1 = T^{01} = -T^0_1 = -T_{01}$

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1
- On a les propriétés: $T_0^0 = T^0_0 = T^{00} = T_{00}$
alors que $T_0^1 = T^{01} = -T^0_1 = -T_{01}$ et que $T_3^1 = -T^{31} = T^3_1 = -T_{31}$.

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1
- On a les propriétés: $T_0^0 = T^0_0 = T^{00} = T_{00}$
alors que $T_0^1 = T^{01} = -T^0_1 = -T_{01}$ et que $T_3^1 = -T^{31} = T^3_1 = -T_{31}$.

la règle est simple:

Changer un indice 0 d'altitude ne change pas le signe; changer un indice i ($i \in \{1, 2, 3\}$) d'altitude change le signe.

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1
- On a les propriétés: $T_0^0 = T^0_0 = T^{00} = T_{00}$
alors que $T_0^1 = T^{01} = -T^0_1 = -T_{01}$ et que $T_3^1 = -T^{31} = T^3_1 = -T_{31}$.

la règle est simple:

Changer un indice 0 d'altitude ne change pas le signe; changer un indice i ($i \in \{1, 2, 3\}$) d'altitude change le signe.

Cela se démontre en utilisant le tenseur métrique g pour changer l'altitude des indices. Attention, on peut changer l'altitude des indices, pas leur ordre.

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1
- On a les propriétés: $T_0^0 = T^0_0 = T^{00} = T_{00}$
alors que $T_0^1 = T^{01} = -T^0_1 = -T_{01}$ et que $T_3^1 = -T^{31} = T^3_1 = -T_{31}$.

la règle est simple:

Changer un indice 0 d'altitude ne change pas le signe; changer un indice i ($i \in \{1, 2, 3\}$) d'altitude change le signe.

Cela se démontre en utilisant le tenseur métrique g pour changer l'altitude des indices. Attention, on peut changer l'altitude des indices, pas leur ordre.

- On dit qu'un tenseur est symétrique dans deux de ses indices (ici, les 2 premiers) si $T^{\alpha\beta\gamma} = T^{\beta\alpha\gamma}$. Il est antisymétrique si $T^{\alpha\beta\gamma} = -T^{\beta\alpha\gamma}$.

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1
- On a les propriétés: $T_0^0 = T_0^0 = T^{00} = T_{00}$
alors que $T_0^1 = T^{01} = -T_1^0 = -T_{01}$ et que $T_3^1 = -T^{31} = T_1^3 = -T_{31}$.

la règle est simple:

Changer un indice 0 d'altitude ne change pas le signe; changer un indice i ($i \in \{1, 2, 3\}$) d'altitude change le signe.

Cela se démontre en utilisant le tenseur métrique g pour changer l'altitude des indices. Attention, on peut changer l'altitude des indices, pas leur ordre.

- On dit qu'un tenseur est symétrique dans deux de ses indices (ici, les 2 premiers) si $T^{\alpha\beta\gamma} = T^{\beta\alpha\gamma}$. Il est antisymétrique si $T^{\alpha\beta\gamma} = -T^{\beta\alpha\gamma}$.

Attention, il faut que les indices soient tous les deux à la même altitude pour que la propriété ait un sens.

- Un quadri-vecteur est un tenseur de rang 1
- On a les propriétés: $T_0^0 = T_0^0 = T^{00} = T_{00}$
alors que $T_0^1 = T^{01} = -T_1^0 = -T_{01}$ et que $T_3^1 = -T^{31} = T_1^3 = -T_{31}$.

la règle est simple:

Changer un indice 0 d'altitude ne change pas le signe; changer un indice i ($i \in \{1, 2, 3\}$) d'altitude change le signe.

Cela se démontre en utilisant le tenseur métrique g pour changer l'altitude des indices. Attention, on peut changer l'altitude des indices, pas leur ordre.

- On dit qu'un tenseur est symétrique dans deux de ses indices (ici, les 2 premiers) si $T^{\alpha\beta\gamma} = T^{\beta\alpha\gamma}$. Il est antisymétrique si $T^{\alpha\beta\gamma} = -T^{\beta\alpha\gamma}$.

Attention, il faut que les indices soient tous les deux à la même altitude pour que la propriété ait un sens.

Cette propriété est robuste sous l'effet d'une transformation de Lorentz, et reste également vraie pour la forme deux fois covariante $T_{\alpha\beta}{}^\gamma$.

La “contraction” d'un tenseur est par exemple la quantité $T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}$ qui correspond à prendre la trace (c.a.d. à sommer) sur deux indices, l'un covariant, l'autre contravariant (ici μ).

La “contraction” d'un tenseur est par exemple la quantité $T^{\mu}_{\mu}{}^{\sigma}$ qui correspond à prendre la trace (c.a.d. à sommer) sur deux indices, l'un covariant, l'autre contravariant (ici μ).

Si le tenseur est de rang n , l'objet obtenu en contractant deux de ses indices est un tenseur de rang $n - 2$.

La "contraction" d'un tenseur est par exemple la quantité $T^{\mu \sigma}_{\mu}$ qui correspond à prendre la trace (c.a.d. à sommer) sur deux indices, l'un covariant, l'autre contravariant (ici μ).

Si le tenseur est de rang n , l'objet obtenu en contractant deux de ses indices est un tenseur de rang $n - 2$.

C'est démontré dans la section III.6.c du poly. Mais, si nous sommes convaincus que nos notations sont cohérentes, la démonstration est inutile: dans l'exemple ci-dessus l'objet $T^{\mu \sigma}_{\mu}$ n'a qu'un indice, c'est donc un quadri-vecteur (contravariant) qui se transforme comme

$$T^{\mu \sigma}_{\mu} = \Lambda^{\sigma}_{\alpha} T^{\nu \alpha}_{\nu} \quad (4)$$

La "contraction" d'un tenseur est par exemple la quantité $T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}$ qui correspond à prendre la trace (c.a.d. à sommer) sur deux indices, l'un covariant, l'autre contravariant (ici μ).

Si le tenseur est de rang n , l'objet obtenu en contractant deux de ses indices est un tenseur de rang $n - 2$.

C'est démontré dans la section III.6.c du poly. Mais, si nous sommes convaincus que nos notations sont cohérentes, la démonstration est inutile: dans l'exemple ci-dessus l'objet $T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}$ n'a qu'un indice, c'est donc un quadri-vecteur (contravariant) qui se transforme comme

$$T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma} = \Lambda^{\sigma}{}_{\alpha} T^{\nu}{}_{\nu}{}^{\alpha} \quad (4)$$

Pour un tenseur à deux indices, $T^{\mu}{}_{\mu}$ est un invariant de Lorentz, ce n'est plus vraiment un tenseur, on parle de "scalaire de Lorentz" (exemple: le pseudo-produit scalaire de 2 quadri-vecteurs: $X_{\alpha} Y^{\alpha}$).

La "contraction" d'un tenseur est par exemple la quantité $T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}$ qui correspond à prendre la trace (c.a.d. à sommer) sur deux indices, l'un covariant, l'autre contravariant (ici μ).

Si le tenseur est de rang n , l'objet obtenu en contractant deux de ses indices est un tenseur de rang $n - 2$.

C'est démontré dans la section III.6.c du poly. Mais, si nous sommes convaincus que nos notations sont cohérentes, la démonstration est inutile: dans l'exemple ci-dessus l'objet $T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}$ n'a qu'un indice, c'est donc un quadri-vecteur (contravariant) qui se transforme comme

$$T^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma} = \Lambda^{\sigma}{}_{\alpha} T^{\nu}{}_{\nu}{}^{\alpha} \quad (4)$$

Pour un tenseur à deux indices, $T^{\mu}{}_{\mu}$ est un invariant de Lorentz, ce n'est plus vraiment un tenseur, on parle de "scalaire de Lorentz" (exemple: le pseudo-produit scalaire de 2 quadri-vecteurs: $X_{\alpha} Y^{\alpha}$).

Exercice:

Soit $A^{\alpha\beta}$ un tenseur antisymétrique et $S^{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique. Que vaut le scalaire $A^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$?