

Cours de relativité restreinte
Université Paris-Saclay
L3 et Mag1 de physique fondamentale

quadri-potentiel et couplage minimal

Électromagnétisme relativiste cours 0

sections III.1 et III.2 du polycopié
version du 23 mars 2020

l'opérateur

$$\partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z \right) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right) \quad (1)$$

est un quadri-vecteur contravariant, c'est à dire que son expression dans \mathcal{R}' est reliée à son expression dans \mathcal{R} par $\partial'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu$.

Cette propriété est démontrée dans l'annexe III.6.a du poly.

l'opérateur

$$\partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z \right) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right) \quad (1)$$

est un quadri-vecteur contravariant, c'est à dire que son expression dans \mathcal{R}' est reliée à son expression dans \mathcal{R} par $\partial'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu$.

Cette propriété est démontrée dans l'annexe III.6.a du poly.

Sa version covariante est

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = g_{\mu\nu} \partial^\nu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right) \quad (2)$$

l'opérateur

$$\partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z \right) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right) \quad (1)$$

est un quadri-vecteur contravariant, c'est à dire que son expression dans \mathcal{R}' est reliée à son expression dans \mathcal{R} par $\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$.

Cette propriété est démontrée dans l'annexe III.6.a du poly.

Sa version covariante est

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = g_{\mu\nu} \partial^\nu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right) \quad (2)$$

exercice

Que valent les pseudo-produits scalaires $\partial_\mu X^\mu$ et $\partial_\mu J^\mu$?

l'opérateur

$$\partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z \right) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right) \quad (1)$$

est un quadri-vecteur contravariant, c'est à dire que son expression dans \mathcal{R}' est reliée à son expression dans \mathcal{R} par $\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$.

Cette propriété est démontrée dans l'annexe III.6.a du poly.

Sa version covariante est

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = g_{\mu\nu} \partial^\nu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right) \quad (2)$$

exercice

Que valent les pseudo-produits scalaires $\partial_\mu X^\mu$ et $\partial_\mu J^\mu$?

réponse: 4 et 0

l'opérateur

$$\partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z \right) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right) \quad (1)$$

est un quadri-vecteur contravariant, c'est à dire que son expression dans \mathcal{R}' est reliée à son expression dans \mathcal{R} par $\partial'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu$.

Cette propriété est démontrée dans l'annexe III.6.a du poly.

Sa version covariante est

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = g_{\mu\nu} \partial^\nu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right) \quad (2)$$

exercice

Que valent les pseudo-produits scalaires $\partial_\mu X^\mu$ et $\partial_\mu J^\mu$?

réponse: 4 et 0

L'opérateur d'Alembertien $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = \square$ est invariant de Lorentz, c'est à dire qu'il a la même expression dans tous les référentiels

Les équations Maxwell pour les champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en présence de charges et de courants décrits par $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{J}(\vec{r}, t)$ sont:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maxwell - flux} & \text{Maxwell - Faraday} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maxwell - Gauss} & \text{Maxwell - Ampère} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}
 \end{array}$$

(3)

Les équations Maxwell pour les champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en présence de charges et de courants décrits par $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{J}(\vec{r}, t)$ sont:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maxwell - flux} & \text{Maxwell - Faraday} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\
 \hline
 \text{Maxwell - Gauss} & \text{Maxwell - Ampère} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}
 \end{array} \tag{3}$$

les deux premières montrent qu'il existe un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et un potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ tels que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \partial_t \vec{A} \tag{4}$$

Les équations Maxwell pour les champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en présence de charges et de courants décrits par $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{J}(\vec{r}, t)$ sont:

$$\begin{array}{ll} \text{Maxwell - flux} & \text{Maxwell - Faraday} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{ll} \text{Maxwell - Gauss} & \text{Maxwell - Ampère} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \end{array}$$

les deux premières montrent qu'il existe un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et un potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ tels que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \partial_t \vec{A} \quad (4)$$

Les potentiels ne sont pas définis de manière unique. Soit un champ scalaire $G(\vec{r}, t)$, les quantités

$$\vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla} G \quad \text{et} \quad \phi^* = \phi - \partial_t G \quad (5)$$

conduisent, via (4), aux mêmes champs \vec{E} et \vec{B} que \vec{A} et ϕ .
On parle **d'invariance de jauge**

Il y a plusieurs manières de lever l'ambiguïté sur les potentiels. L'une d'elles consiste à travailler en jauge de Lorentz en imposant $\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Il est démontré dans l'annexe III.6.b du poly que dans cete jauge on a

$$\square \phi = \rho / \epsilon_0 \quad \text{et} \quad \square \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (6)$$

Il y a plusieurs manières de lever l'ambiguïté sur les potentiels. L'une d'elles consiste à travailler en jauge de Lorentz en imposant $\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Il est démontré dans l'annexe III.6.b du poly que dans cete jauge on a

$$\square \phi = \rho / \epsilon_0 \quad \text{et} \quad \square \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (6)$$

Cela se met sous la forme

$$\square \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = \mu_0 (c \rho, \vec{J}) = \mu_0 \underline{J} \quad (7)$$

Il y a plusieurs manières de lever l'ambiguïté sur les potentiels. L'une d'elles consiste à travailler en jauge de Lorentz en imposant $\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Il est démontré dans l'annexe III.6.b du poly que dans cette jauge on a

$$\square \phi = \rho / \epsilon_0 \quad \text{et} \quad \square \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (6)$$

Cela se met sous la forme

$$\square \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = \mu_0 (c \rho, \vec{J}) = \mu_0 \underline{J} \quad (7)$$

Tous les membres de l'équation (7) ont un "status quadri-vectorel" bien défini.

La quantité $(\phi/c, \vec{A})$ est donc un quadri-vecteur: **le quadri-potentiel** $\underline{A}(\vec{r}, t)$ attention, il faut travailler en jauge de Lorentz.

Dans cette jauge, \underline{A} est relié aux charges et aux courants par $\square A^\mu = \mu_0 J^\mu$.

Il y a plusieurs manières de lever l'ambiguïté sur les potentiels. L'une d'elles consiste à travailler en jauge de Lorentz en imposant $\frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Il est démontré dans l'annexe III.6.b du poly que dans cete jauge on a

$$\square \phi = \rho / \epsilon_0 \quad \text{et} \quad \square \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (6)$$

Cela se met sous la forme

$$\square \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = \mu_0 (c \rho, \vec{J}) = \mu_0 \underline{J} \quad (7)$$

Tous les membres de l'équation (7) ont un "status quadri-vectorel" bien défini.

La quantité $(\phi/c, \vec{A})$ est donc un quadri-vecteur: **le quadri-potentiel** $\underline{A}(\vec{r}, t)$ attention, il faut travailler en jauge de Lorentz.

Dans cette jauge, \underline{A} est relié aux charges et aux courants par $\square A^\mu = \mu_0 J^\mu$.

Noter que la condition de jauge de Lorentz se mets sous la forme $\partial_\mu A^\mu = 0$. Elle est donc invariante de Lorentz.

L'action associée à la dynamique d'une particule (masse m , charge q) en présence de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ est $S = S_0 + S_{\text{int}}$.

$$S_0 = -mc \int ds = \int L_0 dt \quad \text{avec} \quad L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \quad (8)$$

est l'action de la particule libre.

L'action associée à la dynamique d'une particule (masse m , charge q) en présence de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ est $S = S_0 + S_{\text{int}}$.

$$S_0 = -mc \int ds = \int L_0 dt \quad \text{avec} \quad L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \quad (8)$$

est l'action de la particule libre.

S_{int} décrit l'interaction entre la particule et le champ. La manière la plus simple pour obtenir une quantité invariante de Lorentz consiste à prendre $S_{\text{int}} \propto \int A^\mu dX_\mu$, soit plus précisément

L'action associée à la dynamique d'une particule (masse m , charge q) en présence de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ est $S = S_0 + S_{\text{int}}$.

$$S_0 = -mc \int ds = \int L_0 dt \quad \text{avec} \quad L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \quad (8)$$

est l'action de la particule libre.

S_{int} décrit l'interaction entre la particule et le champ. La manière la plus simple pour obtenir une quantité invariante de Lorentz consiste à prendre $S_{\text{int}} \propto \int A^\mu dX_\mu$, soit plus précisément

$$S_{\text{int}} = -q \int A^\mu dX_\mu = \int L_{\text{int}} dt \quad \text{avec} \quad L_{\text{int}} = -q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (9)$$

cela se voit directement à partir de l'expression de gauche en écrivant $dX_\mu = (cdt, -d\vec{r} = -\vec{v}dt)$ et $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$.

Équation du mouvement

Le lagrangien est $L = L_0 + L_{\text{int}}$. Le moment conjugué de la position est $\vec{\pi}$ avec $\pi_x = \partial L / \partial \dot{x}$ (idem pour y et z). On obtient donc

$$\vec{\pi} = \vec{p} + q\vec{A} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \quad (10)$$

La quantité \vec{p} vient de la contribution de L_0 : c'est l'impulsion de la particule libre. La contribution $q\vec{A}$ vient de la contribution de L_{int} .

Le lagrangien est $L = L_0 + L_{\text{int}}$. Le moment conjugué de la position est $\vec{\pi}$ avec $\pi_x = \partial L / \partial \dot{x}$ (idem pour y et z). On obtient donc

$$\vec{\pi} = \vec{p} + q\vec{A} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \quad (10)$$

La quantité \vec{p} vient de la contribution de L_0 : c'est l'impulsion de la particule libre. La contribution $q\vec{A}$ vient de la contribution de L_{int} .
L'équation d'Euler-Lagrange $d\vec{\pi}/dt = \vec{\nabla}L$ s'écrit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + q\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\nabla}L = \vec{\nabla}L_{\text{int}} \quad (11)$$

Le lagrangien est $L = L_0 + L_{\text{int}}$. Le moment conjugué de la position est $\vec{\pi}$ avec $\pi_x = \partial L / \partial \dot{x}$ (idem pour y et z). On obtient donc

$$\vec{\pi} = \vec{p} + q\vec{A} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \quad (10)$$

La quantité \vec{p} vient de la contribution de L_0 : c'est l'impulsion de la particule libre. La contribution $q\vec{A}$ vient de la contribution de L_{int} .
L'équation d'Euler-Lagrange $d\vec{\pi}/dt = \vec{\nabla}L$ s'écrit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + q\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\nabla}L = \vec{\nabla}L_{\text{int}} \quad (11)$$

Si l'on compare aux expressions équivalentes obtenues dans le cours de mécanique analytique non-relativite, on voit que seule l'expression de L_0 et donc de \vec{p} change. Il est donc logique que l'on obtienne formellement la même équation qu'en mécanique non-relativite (cf. la démonstration complète section III.6.d du poly)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (12)$$

où la seule différence par rapport à l'expression classique réside dans l'expression de \vec{p} qui, pour nous, est l'impulsion relativiste rappelée en bleu dans (10).