

1.3 Axiomes de la M.Q.

→ "Résultats de l'École de Copenhague"

[Niels Bohr, Werner Heisenberg, Max Born, Pascual Jordan ...]
~ 1930

Cadre d'interprétation de la M.Q. → (positivisme
= Auguste Comte)

1] Axiome 1

Tout système physique $(\mathcal{S})$ est décrit (à chaque instant t)
par un vecteur $|\psi_t\rangle$ appartenant à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$
normalisé $|\psi_t\rangle$ est appelé "état du système"
Rq normalisé $\Leftrightarrow \langle \psi_t | \psi_t \rangle = 1$.

2] Axiome 2

Toute grandeur physique $\mathcal{A}$ de $(\mathcal{S})$ est décrite par
un opérateur $\hat{A}$ auto-adjoint sur $\mathcal{H}$.
On appelle $\hat{A}$ une "observable".

Rq $\hat{A}$ auto-adjoint $\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}^\dagger$

3] Axiome 3

Une mesure de l'observable $\hat{A}$ du système $\mathcal{S}$ ne peut donner comme valeur qu'une des valeurs propres a_n de $\hat{A}$.

Rq $\hat{A} = \hat{A}^\dagger \Rightarrow$ les valeurs propres a_n sont réelles

4] Axiome 4 (règle de Born)

Si le système ($\mathcal{S}$) est dans l'état $|\psi\rangle$ et si l'on mesure l'observable $\hat{A}$ qui possède les valeurs propres $\{a_n\}_{n \in N}$ avec $\hat{A} |e_n^i\rangle = a_n |e_n^i\rangle$ avec $i=1, \dots, N_n$.

plusieurs vecteurs
possibles pour 1
seul a_n

alors la probabilité de mesurer la valeur a_n est :

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{N_n} |\langle e_n^i | \psi \rangle|^2$$

Rq 1 N_n s'appelle "la dégénérescence de la valeur a_n ".

Rq 2 : les $|e_n^i\rangle$ forment une base $\perp$:

$$\sum_{n \in N} \sum_{i=1}^{N_n} |e_n^i\rangle \langle e_n^i| = \text{Id}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \psi | \psi \rangle &= 1 = \sum_n \langle \psi | \sum_{i=1}^{N_n} |e_n^i\rangle \langle e_n^i| | \psi \rangle \\ &\quad \uparrow_{\text{normal.}} \\ &= \sum_n P(a_n) \end{aligned}$$

5] Axiome 5 :

(41)

Rq3 Cas pratique : pas de dégénérescence.

$\exists$ un unique vecteur $|e_n\rangle$ / $A|e_n\rangle = a_n|e_n\rangle$

$$\Rightarrow P(a_n) = |\langle e_n | \psi \rangle|^2$$

5] Axiome 5 : "Reduction du paquet d'onde"

Supposons que le système soit dans l'état $|\psi\rangle$, que l'on mesure l'observable $\hat{A} = \sum_n a_n \left(\sum_{i=1}^{N_{g,n}} |e_n^i\rangle \langle e_n^i| \right)$ et que la mesure donne la valeur a_n .

Alors après la mesure le système est décrit par l'état

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{P(a_n)}} \sum_{i=1}^{N_{g,n}} |e_n^i\rangle \langle e_n^i | \psi \rangle$$

Rq1 Par construction $\langle \psi' | \psi' \rangle = 1$

Rq2 Par construction $\hat{A}|\psi'\rangle = a_n |\psi'\rangle$

Rq3 Cas pratique : pas de dégénérescence :

$$\hat{A}|e_n\rangle = a_n|e_n\rangle \quad (|e_n\rangle \text{ unique})$$

$$\Rightarrow |\psi'\rangle = |e_n\rangle$$

6] Axiome 6 : Evolution

Tout système ($\mathcal{S}$) possède une observable appelée "Hamiltonien", notée $\hat{H}$. L'évolution de l'état $|\psi\rangle$ du système est donnée par l'équation de "Schrodinger":

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

II.4 Conséquences des axiomes

1] Calcul de valeurs moyennes et écart-type.

1) Si A est une observable du système ($\mathcal{S}$) dans l'état $|\psi\rangle$ la valeur moyenne des mesures de $\hat{A}$ est donnée par:

$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Preuve :

Supposons $\hat{A} = \sum_n a_n |e_n\rangle \langle e_n|$ (pas de dégen pour simplifier)

$$P(a_n) = |\langle e_n | \psi \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n a_n |\langle e_n | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

* formule générale de proba.

b) L'écart-type des mesures de $\hat{A}$ est donné par :

$$\Delta A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} = [\langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2]$$

Preuve :

D'après les probas classiques :

$$\Delta A^2 = \sum_n a_n^2 P(a_n) - \left(\sum_n a_n P(a_n) \right)^2$$

$$\sum_n a_n P(a_n) = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \hat{A} \rangle$$

$$\text{Si } \hat{A} = \sum_n a_n |e_n\rangle \langle e_n| \quad \hat{A}^2 = \sum_n a_n \underbrace{A |e_n\rangle \langle e_n|}_{a_n |e_n\rangle} = \sum_n a_n^2 |e_n\rangle \langle e_n|$$

$$\Rightarrow \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle = \sum_n a_n^2 P(a_n)$$

$$\Delta A = \left[\langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - 2 \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2 \right]^{1/2}$$