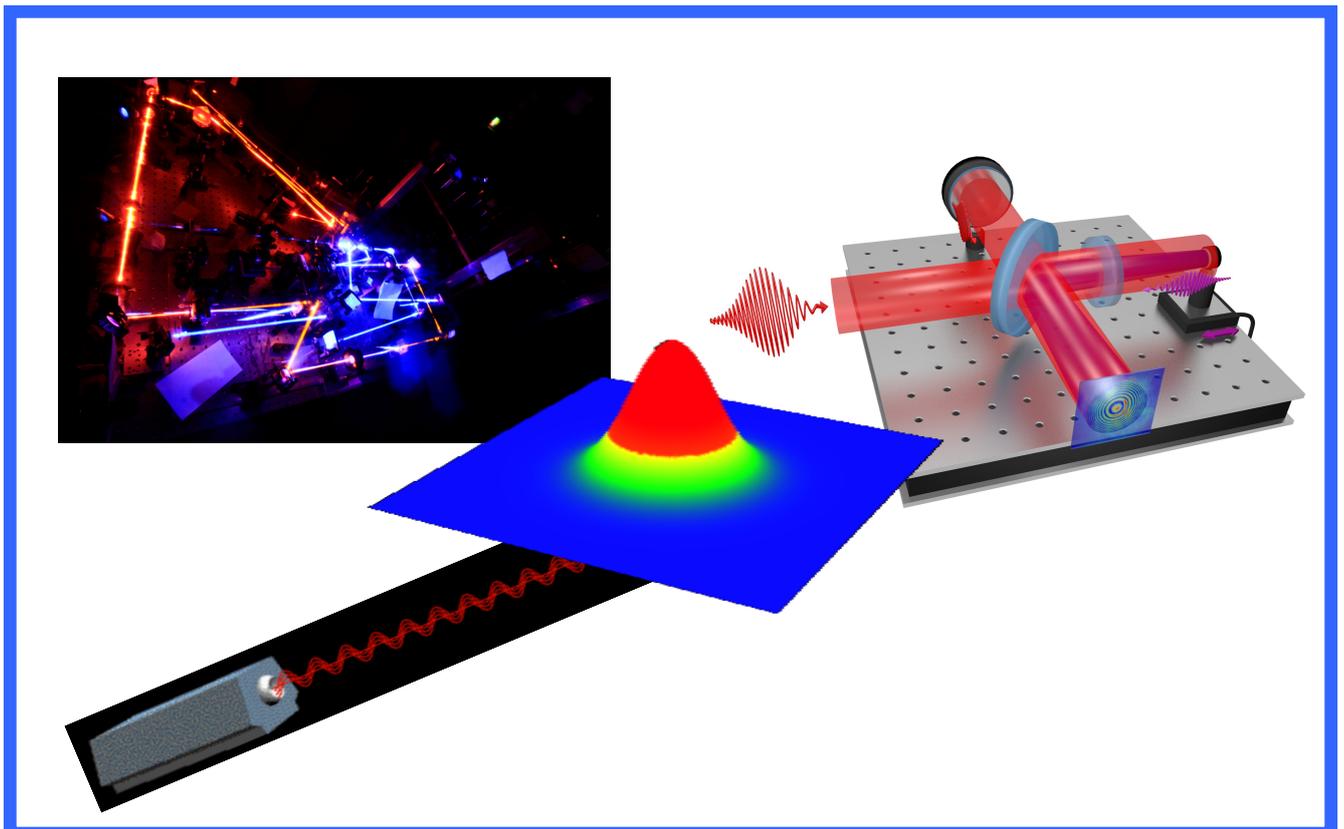


# PHYSIQUE des LASERS - COURS -

S. Boyé-Péronne

severine.boyé-peronne@universite-paris-saclay.fr



MASTER 1 de PHYSIQUE FONDAMENTALE  
MAGISTÈRE de PHYSIQUE FONDAMENTALE



## Table des matières

<b>1</b>	<b>LA PHYSIQUE DES LASERS-INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
1.1	Historique . . . . .	4
1.2	Originalité de la lumière laser . . . . .	5
1.3	Principe général d'un laser . . . . .	5
1.4	Quelques exemples d'applications . . . . .	6
<b>2</b>	<b>ETUDE DES CAVITES LASERS (RESONATEURS OPTIQUES)</b>	<b>9</b>
2.1	Les différents types de cavités lasers . . . . .	10
2.1.1	Cavité à deux miroirs . . . . .	10
2.1.2	Cavités plus complexes . . . . .	10
2.2	Formalisme matriciel pour l'étude des cavités . . . . .	11
2.2.1	Equivalence miroir sphérique-lentille mince dans l'approximation de Gauss . . . . .	11
2.2.2	Séquence périodique de lentilles équivalentes . . . . .	12
2.2.3	Matrices de transfert . . . . .	13
2.3	Stabilité d'une cavité . . . . .	17
2.3.1	Critère de stabilité d'une cavité laser . . . . .	17
2.3.2	Application à la stabilité d'une cavité simple à deux miroirs . . . . .	17
2.3.3	Cavités instables . . . . .	19
2.3.4	Annexe : démonstration du critère de stabilité d'une cavité . . . . .	19
<b>3</b>	<b>FAISCEAUX GAUSSIENS</b>	<b>21</b>
3.1	Généralités sur les faisceaux gaussiens . . . . .	22
3.1.1	Amplitude complexe et intensité d'une onde . . . . .	22
3.1.2	Amplitude complexe et intensité d'un faisceau gaussien . . . . .	22
3.1.3	Extension latérale du faisceau gaussien . . . . .	23
3.1.4	Profil longitudinal et divergence du faisceau gaussien . . . . .	24
3.2	Propriétés du faisceau gaussien . . . . .	25
3.2.1	Rayon de courbure complexe . . . . .	25
3.2.2	Rayon de courbure de la phase et extension latérale du faisceau . . . . .	25
3.2.3	Relations utiles . . . . .	26
3.2.4	Propagation du rayon de courbure complexe : loi 'ABCD' . . . . .	26
3.2.5	Application : formule de conjugaison des 'waists' pour un faisceau gaussien . . . . .	27
3.3	Mode fondamental gaussien d'une cavité stable . . . . .	28
3.3.1	Principe . . . . .	28
3.3.2	Cas particuliers simples . . . . .	29
3.3.3	Détermination du mode fondamental gaussien dans le cas général . . . . .	30
3.4	Modes spectraux d'une cavité laser (modes longitudinaux) . . . . .	31
3.5	Modes spatiaux (modes transverses) . . . . .	32
3.6	Annexes . . . . .	33
3.6.1	Faisceau gaussien - Onde sphérique - Onde plane . . . . .	33
3.6.2	Démonstration de la loi 'ABCD' . . . . .	34
3.6.3	Démonstration de la règle d'accord des rayons de courbure dans le cas d'une cavité à 2 miroirs . . . . .	35
<b>4</b>	<b>PRINCIPES DE BASE DES AMPLIFICATEURS LASERS</b>	<b>37</b>
4.1	Interaction matière-rayonnement . . . . .	38
4.1.1	Caractérisation de la matière : le modèle du système à deux niveaux . . . . .	38
4.1.2	Caractérisation du rayonnement . . . . .	39
4.1.3	Émission spontanée . . . . .	39
4.1.4	Absorption et émission induite . . . . .	40
4.1.5	Équations d'évolution temporelle des populations . . . . .	41
4.1.6	Profil spectral - Coefficients d'Einstein . . . . .	43
4.1.7	Largeur naturelle et élargissement spectral . . . . .	45

4.1.8	Section efficace . . . . .	48
4.2	Amplification d'une onde par un milieu à élargissement spectral homogène . . . . .	49
4.2.1	Bilan d'énergie . . . . .	49
4.2.2	Coefficient d'amplification en régime stationnaire. Inversion de population . . . . .	51
4.2.3	Saturation de l'amplification . . . . .	52
4.2.4	Intensité de saturation . . . . .	54
4.2.5	Gain total du milieu amplificateur . . . . .	54
4.3	Annexe . . . . .	56
<b>5</b>	<b>INTRODUCTION À LA THÉORIE DU LASER</b>	<b>59</b>
5.1	Transition laser et pompage . . . . .	60
5.2	Pertes de la cavité . . . . .	61
5.2.1	Analyse physique de l'origine des pertes . . . . .	61
5.2.2	Caractérisation quantitative des pertes de la cavité . . . . .	63
5.2.3	Durée de vie des photons dans la cavité . . . . .	65
5.2.4	Sélectivité d'une cavité . . . . .	66
5.3	Laser fonctionnant en régime stationnaire . . . . .	67
5.3.1	Cas d'un amplificateur placé dans une cavité en anneau . . . . .	67
5.3.2	Régime pertes faibles-gain faible . . . . .	69
5.3.3	Optimisation du couplage de sortie . . . . .	70
5.3.4	Seuil de fonctionnement en régime stationnaire . . . . .	71
5.3.5	Cas d'un amplificateur placé dans une cavité linéaire . . . . .	72
5.3.6	Conditions de fonctionnement laser . . . . .	73
5.3.7	Fonctionnement continu monomode ou multimodes . . . . .	73
5.4	Lasers produisant des impulsions . . . . .	76
5.4.1	Laser en fonctionnement 'modes bloqués' . . . . .	76
5.4.2	Système laser en régime transitoire : équations couplées . . . . .	79
5.4.3	Laser en fonctionnement 'déclenché' ('Q switching') . . . . .	81
5.5	Annexes . . . . .	84
5.5.1	Principe d'un isolateur optique . . . . .	84
5.5.2	Laser à colorant accordable. . . . .	85
<b>6</b>	<b>PRINCIPALES APPLICATIONS DES DIFFÉRENTS TYPES DE LASERS</b>	<b>87</b>
6.1	Les lasers à milieux amplificateurs gazeux . . . . .	88
6.2	Les lasers à milieux amplificateurs liquides . . . . .	88
6.3	Les lasers à milieux amplificateurs solides . . . . .	89

## Chapitre 1

# LA PHYSIQUE DES LASERS-INTRODUCTION

## 1.1 Historique

La lumière joue un rôle considérable dans un très grand nombre de phénomènes physiques, chimiques ou biologiques. En **1958**, deux physiciens théoriciens du Bell Labs aux USA, Charles Townes et Arthur Schawlow, publient un article<sup>1</sup> qui expose la théorie relative à la production d'une nouvelle forme de lumière : le rayonnement **LASER**. En **1960**, un autre chercheur américain, Théodore Maiman<sup>2</sup>, met en évidence pour la première fois expérimentalement l'observation d'un faisceau laser dans un cristal de Rubis à 694,3 nm. Un an plus tard, Ali Javan met au point un laser au gaz (hélium et néon) puis en 1966, Peter Sorokin construit le premier laser à liquide.

Le terme **LASER** est un acronyme qui signifie **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation. Dans les premiers temps, les lasers sont restés des objets d'étude scientifiques passionnants mais sans applications concrètes. On parlait de 'solution sans problématique' ou de 'd'invention banale'. Mais, depuis la fin des années 70, les sources laser se sont énormément diversifiées pour trouver de plus en plus d'applications dans le monde scientifique, technique ou industriel, qu'elles ont ainsi révolutionné.

Cet outil remarquable a ouvert la voie à de **nouveaux domaines de la physique** que sont l'**optique non-linéaire** et l'**interaction laser-matière** (spectroscopie). La recherche dans ces domaines a été couronnée de plusieurs Prix Nobel. Pour en citer quelques-uns :

- en 1964, Prix Nobel de Physique, Charles Townes pour sa contribution à l'invention des lasers,
- en 1971, Prix Nobel de Physique, Dennis Gabor pour l'invention de l'holographie,
- en 1981, Prix Nobel de Physique, Arthur Schawlow pour le développement de la spectroscopie laser,
- en 1997, Prix Nobel de Physique, Claude Cohen-Tannoudji, pour le développement des méthodes pour refroidir et piéger des atomes par laser,
- en 1999, Prix Nobel de Chimie, Ahmed Zewail, pour l'étude des états de transition dans les réactions chimiques par spectroscopie laser (femtochimie),
- en 2005, Prix Nobel de Physique, John Hall et Theodor Hänsch, pour le développement de la spectroscopie laser de précision par peignes de fréquence femtosecondes,
- en 2018, Prix Nobel de Physique, Gérard Mourou, Donna Strickland et Arthur Ashkin pour leur méthode de production d'impulsions lasers ultra-brèves de forte intensité (technique 'Chirped-pulsed amplification') et pour l'invention des pinces optiques utilisées pour manipuler des systèmes biologiques.

L'exemple le plus spectaculaire d'impact du laser sur notre vie quotidienne est la contribution incontestable des diodes lasers à la révolution des techniques optiques de transfert et de stockage de l'information. En 2019, elles représentaient ainsi 41 % des ventes de lasers commerciaux<sup>3</sup>.

---

1. A.L. Schawlow and C.H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **112**, p 1940-1949 (1958)

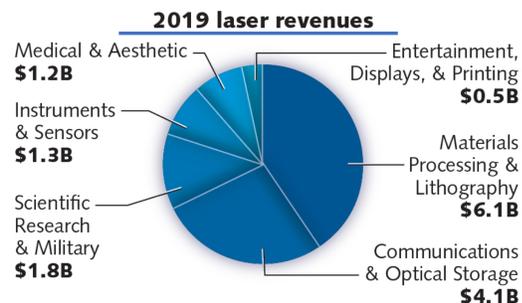
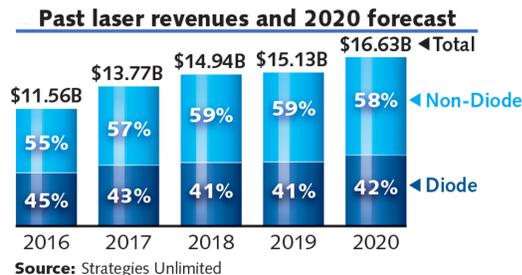
2. T.H. Maiman, *Nature* **187**, p 493-494 (1960)

3. voir le site <https://www.laserfocusworld.com/lasers-sources/article/14073907/laser-markets-navigate-turbulent-times>

Répartition des ventes de lasers en 2019 par secteur d'activité (volume total de ventes = 15,138 milliards de dollars).

Pour rappel, 1 B\$ = 1 milliard de \$.

Source : Laser Focus World



## 1.2 Originalité de la lumière laser

Le caractère spécifique de la lumière laser réside dans sa cohérence.

- La **cohérence spatiale** permet de produire des faisceaux avec un parallélisme très poussé, ou inversement des faisceaux focalisés à la limite de ce que permet la mécanique quantique. La lumière laser est alors particulièrement 'concentrée' sur une direction de propagation (faisceau parallèle), ou sur un point de l'espace. Ceci permet d'atteindre sur une très petite surface une intensité lumineuse énorme (typiquement  $\text{MW}/\text{cm}^2$ ). Pour comparaison, la puissance lumineuse reçue du Soleil par la Terre est d'environ  $1000 \text{ W}/\text{m}^2$  soit  $0,1 \text{ W}/\text{cm}^2$ .
- La **cohérence temporelle** signifie que l'onde laser peut être particulièrement stable au cours du temps, ce qui est équivalent à dire que la fréquence (et donc la longueur d'onde) du rayonnement peut être extrêmement bien définie. La lumière laser est alors très 'concentrée' sur une fréquence bien précise. A l'inverse, c'est aussi la cohérence temporelle qui permet de fabriquer des impulsions laser ultracourtes (quelques  $10^{-15}$  secondes). Dans ce cas, la lumière laser est extrêmement 'concentrée' dans le temps. On peut atteindre des puissances lumineuses crêtes de l'ordre du térawatt c'est à dire  $10^{12} \text{ W}$  (exemples : laser femtoseconde TéraMobile qui permet de faire des expériences de contrôle/canalisation de décharges hautes tensions pour pouvoir à terme canaliser la foudre, technique LIDAR pour la télédétection de polluants dans l'atmosphère). Récemment, le laser PETAL du CEA du Barp près de Bordeaux a même franchi la barre du Pétawatt, *i.e.*  $10^{15} \text{ W}$ .

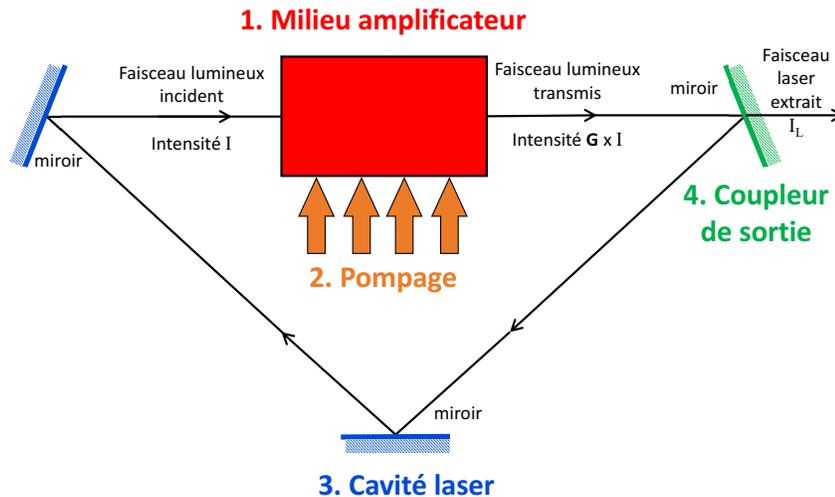
## 1.3 Principe général d'un laser

Les lasers sont des dispositifs qui produisent ou amplifient la lumière pour des longueurs d'onde situées dans le domaine infrarouge, visible ou ultraviolet.

Ils emploient une grande variété de matériaux et de systèmes d'amplification, pour des dimensions allant de quelques micromètres (diode laser) à quelques dizaines de mètres (lasers très haute énergie, par exemple le laser MégaJoule LMJ de Bordeaux<sup>4</sup>).

Malgré cette diversité, on peut définir les quatre éléments fondamentaux qui constituent tout laser et qui sont schématisés sur le dessin ci-dessous :

4. <http://www-lmj.cea.fr>



### 1. Le milieu amplificateur

Il est constitué d'atomes, molécules, ions ou électrons qui peuvent être dans des états physique différents (gaz, plasma, liquide, solide). Son rôle est d'accroître l'intensité de l'onde laser au cours de sa propagation. Il est caractérisé par son gain  $G$ , qui doit être supérieur à 1.

### 2. Le système de pompage (ou excitation)

Il prépare le milieu amplificateur dans un état quantique tel que le gain soit assez grand. Il apporte au milieu amplificateur l'énergie que celui-ci pourra ensuite communiquer au faisceau lumineux. Cette énergie peut être fournie par une décharge électrique, par un courant électrique, par une réaction chimique, par une source de lumière (lampes flash) ou par un autre laser.

### 3. La cavité laser (ou résonateur optique)

Un système optique relie la sortie de l'amplificateur à son entrée. Les rayons lumineux suivent dans la cavité un parcours qui les ramène sur eux-mêmes. La lumière peut alors parcourir la cavité et traverser l'amplificateur un grand nombre de fois : si le gain de l'amplificateur est assez fort, il apparaît la lumière laser. La cavité laser peut être constituée de miroirs ou d'autres éléments optiques plus compliqués (sélectifs en longueur d'onde par exemple).

### 4. Le coupleur de sortie

Un miroir à transmission non nulle, une lame de prélèvement ou un réseau utilisé dans un ordre de diffraction choisi permettent de faire sortir une partie de la lumière laser établie dans la cavité à chaque tour. Le faisceau extrait constitue le faisceau laser.

## 1.4 Quelques exemples d'applications

Depuis son invention, le laser a connu un développement exponentiel des systèmes et de leurs utilisations. On peut citer les applications principales suivantes :

- Traitement des matériaux (autres que diodes lasers principalement) pour découpe, soudage, trempe, traitement de surface, micro-usinage, fabrication de semi-conducteurs et de micro-électroniques
- Télécommunications optiques (diodes lasers principalement)
- Stockage optique de l'information (CD, DVD, ROM optique). Les diodes lasers produites à très grande échelle pour ces applications reviennent approximativement à 1 dollar pièce.
- Domaine médical (imagerie, ophtalmologie, dermatologie, chirurgie esthétique, chirurgie, dentisterie)
- Pompage de lasers solides (diodes lasers principalement)
- Recherche fondamentale

- Instrumentation, mesure, contrôle ou divers (télémétrie laser, mesure depuis les satellites, alignement, lecture de codes-barres)
- Enregistrement d'images (imprimantes, scanners laser, télécopieurs)
- Divertissement et visualisation (hologrammes, pointeurs laser, vidéoprojecteur laser)
- Autres applications, surtout dans le domaine de l'aérospatial et du militaire (aviation : gyroscope laser, armes laser, détection, etc...)

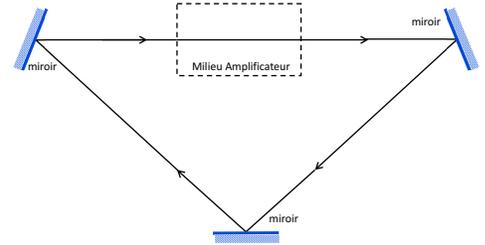


## Chapitre 2

# **ETUDE DES CAVITES LASERS (RESONATEURS OPTIQUES)**

Dans un laser, le rôle de la cavité optique est de **réinjecter** la lumière sortant de l'amplificateur vers l'entrée de celui-ci, par exemple par une série de miroirs. Ce chapitre se propose d'étudier les contraintes géométriques que doivent respecter les éléments de la cavité pour que le couplage sortie-entrée soit efficace ; c'est la notion de **stabilité d'une cavité**.

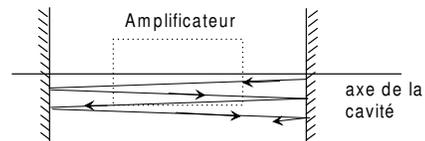
On montrera également que ce couplage est efficace uniquement pour certaines fréquences et certaines formes de l'onde se propageant dans la cavité, appelées **modes de la cavité**.



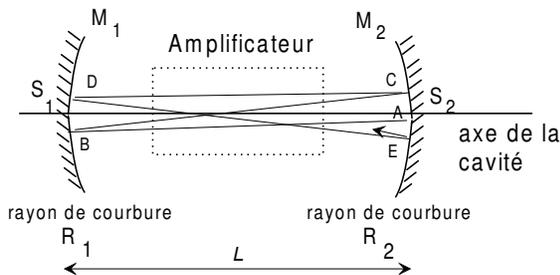
## 2.1 Les différents types de cavités lasers

### 2.1.1 Cavité à deux miroirs

La cavité la plus simple serait constituée de deux miroirs plans de part et d'autre de l'amplificateur. Cette cavité est utilisée dans certains cas, mais elle présente un inconvénient : un rayon non parfaitement parallèle à l'axe s'en éloigne de plus en plus à chaque réflexion et sort de la cavité sans avoir traversé l'amplificateur un très grand nombre de fois.



Pour éviter cette difficulté, il faut utiliser une cavité dont l'un des miroirs au moins est concave avec une géométrie telle qu'un rayon au voisinage de l'axe ne s'en éloigne pas définitivement après plusieurs réflexions.

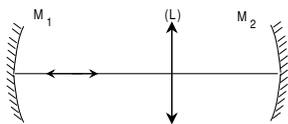


La cavité est caractérisée par les rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  des deux miroirs et la distance  $L$  qui les sépare. On va montrer qu'un choix judicieux de ces paramètres permet de **confiner les rayons lumineux au voisinage de l'axe**. Un rayon lumineux peut alors faire un grand nombre d'aller-retours dans la cavité et être amplifié à chaque passage dans l'amplificateur. Dans ce cas, la cavité est dite '**stable**'.

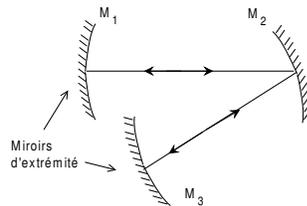
### 2.1.2 Cavités plus complexes

\* Cavités linéaires (cavité à ondes stationnaires)

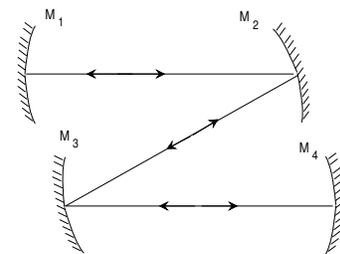
Une cavité est dite **linéaire** lorsque les rayons **reviennent sur eux-même au niveau des miroirs d'extrémité**.



Cavité à deux miroirs avec lentille intra-cavité

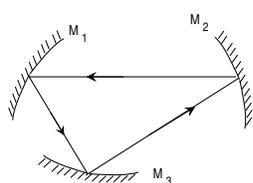


Cavité linéaire à trois miroirs avec miroir de repliement  $M_3$

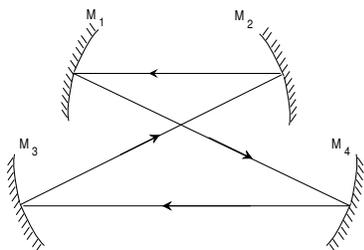


Cavité linéaire à quatre miroirs en 'Z'

\* Cavités en anneau (cavité à ondes progressives)



Cavité en anneau à trois miroirs



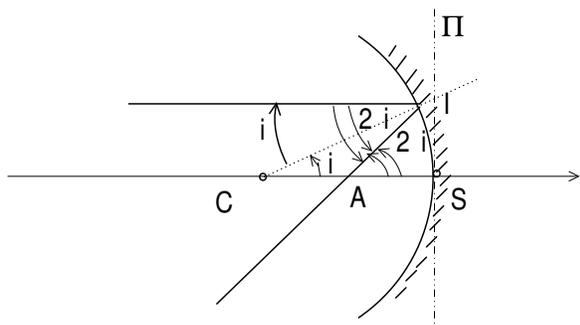
Cavité en anneau à quatre miroirs de type 'papillon'

## 2.2 Formalisme matriciel pour l'étude des cavités

### 2.2.1 Equivalence miroir sphérique-lentille mince dans l'approximation de Gauss

Soit un miroir sphérique concave de sommet S et de centre de courbure C. On construit géométriquement la réflexion d'un rayon incident parallèle à l'axe optique (CS) et arrivant sur le miroir au point I. On note  $\pi$  le plan passant par S et perpendiculaire à l'axe optique.

Soit A l'intersection du rayon réfléchi avec (CS). Le rayon incident forme avec la normale (CI) l'angle  $i$ , il en est de même pour le rayon réfléchi qui forme donc avec le rayon incident l'angle  $2i$ .



Pour des rayons incidents proches de l'axe (conditions de Gauss), la surface du miroir sphérique est quasi-confondue avec son plan tangent en S, le plan  $\pi$ . Le point I est donc très proche de  $\pi$ . On a dans ce cas

$$SI = \overline{CS} \tan i = \overline{AS} \tan(2i)$$

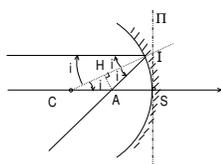
Pour les petits angles d'incidence,  $\tan i \simeq i$  et  $\tan 2i \simeq 2i$  d'où le résultat :

$$\overline{AS} = \frac{\overline{CS}}{2}$$

Ce résultat est indépendant de  $i$ .

Autre méthode :

Le rayon réfléchi forme l'angle  $i$  avec la normale. Le triangle CAI est isocèle. La projection H de A sur sa base vérifie  $CH = \frac{CI}{2} = \frac{R}{2}$ . On a alors  $CA = \frac{R}{2 \cos i}$ , indépendant de  $i$  pour les petits angles.

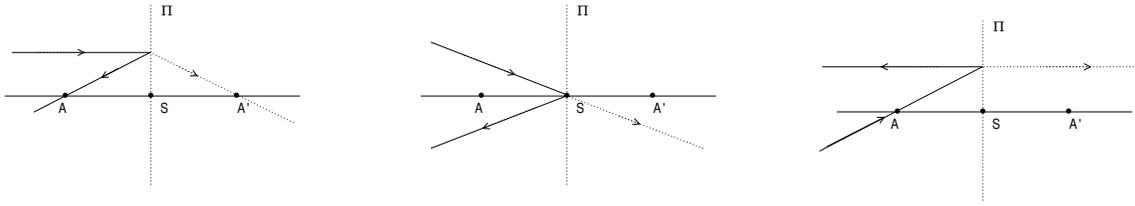


On définit pour le miroir un rayon de courbure algébrique  $R = \overline{CS}$  en considérant comme convention le sens de la lumière incidente sur le miroir.  $R$  est donc positif pour un miroir concave et négatif pour un miroir convexe.

Il apparaît sur le graphe précédent que :

- un rayon incident parallèle à l'axe ressort du système optique en passant par le point  $A \equiv F'$  (où  $F'$  est le foyer image du miroir), avec  $\overline{AS} = \overline{F'S} = \frac{\overline{CS}}{2} = \frac{R}{2}$ .
- un rayon incident passant par A ressort parallèlement à l'axe optique.
- un rayon arrivant sur S ressort symétriquement par rapport à l'axe optique ; le symétrique de ce rayon par rapport au plan  $\pi$  est situé dans le prolongement du rayon incident.

En introduisant pour le rayon réfléchi une symétrie par rapport au plan  $\pi$ , on retrouve des propriétés directement analogues à celles des rayons passant par les foyers ou le centre optique d'une lentille.

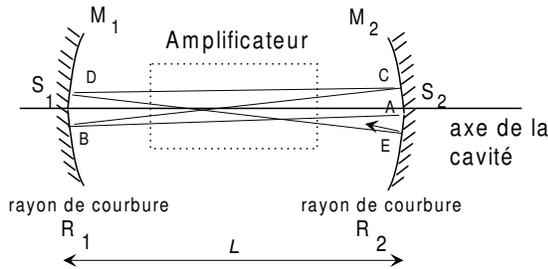


Dans les conditions de Gauss, l'analogie est complète entre la **réflexion sur un miroir sphérique de sommet S et de centre de courbure C**, et la **transmission par une lentille mince de centre optique S et de distance focale  $f$  telle que  $f = \frac{CS}{2} = \frac{R}{2}$** .

Un miroir **concave** a ainsi des propriétés analogues à celles d'une lentille mince **convergente** ( $R > 0 \Rightarrow f > 0$ ), un miroir **convexe** correspond à une lentille mince **divergente** ( $R < 0 \Rightarrow f < 0$ ).

Les **propriétés de formation d'une image ou de conjugaison objet-image** sont identiques pour un miroir sphérique ou une lentille, si l'on introduit pour le rayon réfléchi la symétrie par rapport au plan passant par S et perpendiculaire à (CS).

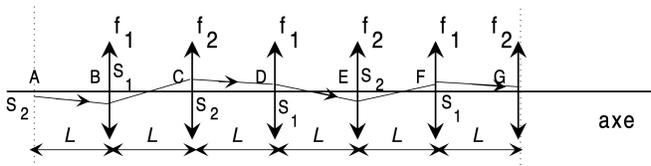
### 2.2.2 Séquence périodique de lentilles équivalentes



L'objectif est d'évaluer la trajectoire d'un rayon lumineux après plusieurs réflexions sur les miroirs. On utilise pour cela l'équivalence (à une symétrie près) entre la **réflexion d'un rayon sur un miroir de rayon de courbure  $R$**  et la **transmission d'un rayon par une lentille mince de distance focale  $f = R/2$** . On étudie le cas particulier d'une cavité linéaire à 2 miroirs sphériques.

Grâce à cette équivalence, on **'déplie'** la **trajectoire** du rayon dans la cavité par symétrie par rapport aux plans tangents aux miroirs en  $S_1$  et  $S_2$  et on représente le rayon traversant une séquence de lentilles. Cette séquence est **périodique**. Sa période spatiale correspond à un **parcours complet de la cavité**, c'est à dire une réflexion sur tous les miroirs (aller-retour pour une cavité linéaire, tour complet pour une cavité en anneau). On appelle cette représentation dépliée de la cavité la **séquence périodique de lentilles équivalentes**.

\* Exemple de la cavité linéaire simple à 2 miroirs :

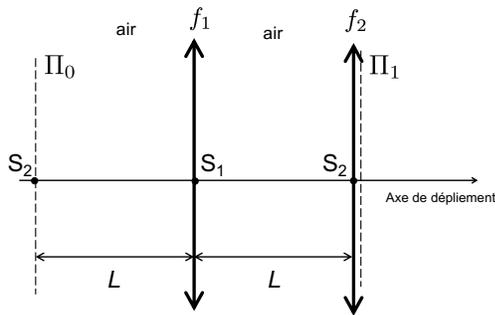


Séquence périodique de lentilles équivalentes pour une cavité à deux miroirs.

$$f_1 = R_1/2$$

$$f_2 = R_2/2$$

Pour la cavité à deux miroirs, le **motif de base** contient deux lentilles de distances focales  $f_1 = R_1/2$  et  $f_2 = R_2/2$  séparées par la distance  $L$ , on le représente ci-dessous :



On note  $\pi_0$  et  $\pi_1$  les plans perpendiculaires à l'axe marquant le début et la fin du motif de base de la séquence périodique de lentilles équivalentes. Le choix de  $\pi_0$  est arbitraire. Sur cet exemple, on l'a choisi en  $S_2$  après la réflexion sur  $M_2$ .

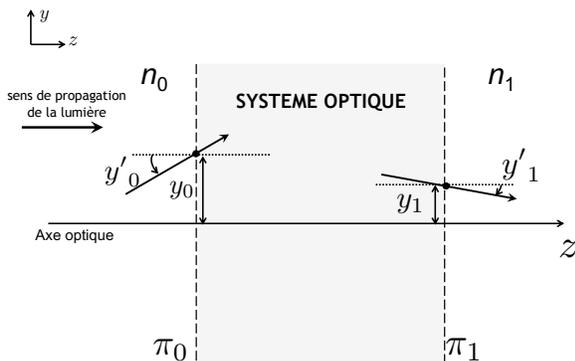
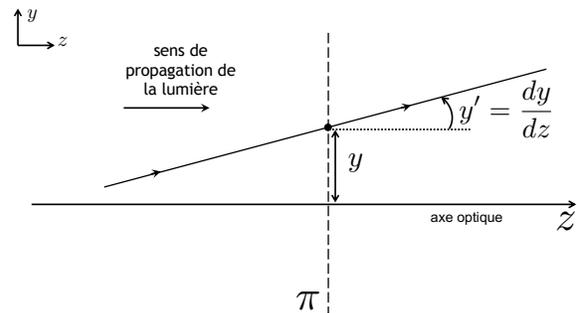
Le principe présenté ici sur l'exemple de la cavité linéaire à deux miroirs est **généralisable à tous les types de cavités**.

Une fois qu'on a déplié ainsi la cavité avec la séquence périodique de lentilles équivalentes, on peut utiliser le formalisme de l'optique matricielle pour étudier la trajectoire des rayons lumineux. Ce formalisme, valable tant qu'on travaille dans les conditions de Gauss, est basé sur l'utilisation de la matrice de transfert, qui va être définie dans le paragraphe suivant.

### 2.2.3 Matrices de transfert

Par la suite on ne considère que des systèmes optiques à symétrie de révolution autour de l'axe optique ( $Oz$ ). Soient un rayon dans le plan ( $yOz$ ) et un plan  $\pi$  perpendiculaire à ( $Oz$ ).

Au niveau de ce plan, le rayon est complètement défini par la **position**  $y$  de son point d'intersection avec  $\pi$  et par la **pen**te  $y'$  de la droite qui porte ce rayon.



Deux plans  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont situés de part et d'autre d'un système optique, ils sont perpendiculaires à l'axe optique.

Soit un rayon incident sur le système optique dans les conditions de Gauss (près du centre optique et formant un petit angle avec l'axe) et caractérisé au niveau de  $\pi_0$  par le couple  $(y_0, y'_0)$ . Après la traversée du système optique, ce rayon est caractérisé au niveau de  $\pi_1$  par le couple  $(y_1, y'_1)$ . On peut montrer qu'il existe les relations :

$$\begin{cases} y_1 = A y_0 + B y'_0 \\ y'_1 = C y_0 + D y'_0 \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

La matrice carrée  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  caractérise complètement l'action du système optique sur n'importe quel rayon lumineux, c'est la **matrice de transfert** ou la **matrice de passage** du plan  $\pi_0$  au plan  $\pi_1$ .

Les coefficients  $A$  et  $D$  sont sans dimension,  $B$  est une longueur,  $C$  est l'inverse d'une longueur.

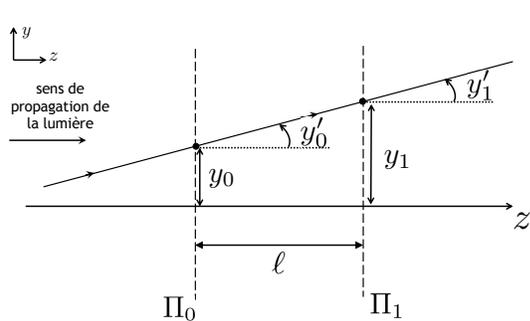
On peut montrer que si  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont dans un milieu d'indice  $n_0$  et  $n_1$  respectivement, le déterminant de la matrice de transfert vaut :  $\det(T) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = \frac{n_0}{n_1}$

Le plus souvent,  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont dans l'air donc ce déterminant vaut 1. On dit alors que  $T$  est unitaire.

On donne dans la suite de ce paragraphe quelques exemples importants de matrices de transfert élémentaires.

**a) Propagation rectiligne sur une distance  $\ell$  dans un milieu homogène d'indice  $n$  (pas de système optique entre  $\pi_0$  et  $\pi_1$ )**

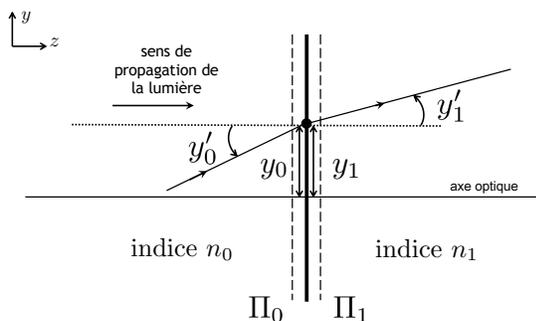
Les plans  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont situés dans un même milieu homogène d'indice  $n$ .



$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \ell y'_0 \\ y'_1 = y'_0 \end{cases} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**b) Traversée d'une interface plane  $n_0$  vers  $n_1$**

L'interface est le plan perpendiculaire en  $O$  à l'axe optique.  $\pi_0$  est choisi en  $O^-$ ,  $\pi_1$  en  $O^+$ .



$$\begin{cases} y_1 = y_0 \\ n_1 y'_1 = n_0 y'_0 \end{cases} \text{ (loi de la réfraction, approx. petits angles)}$$

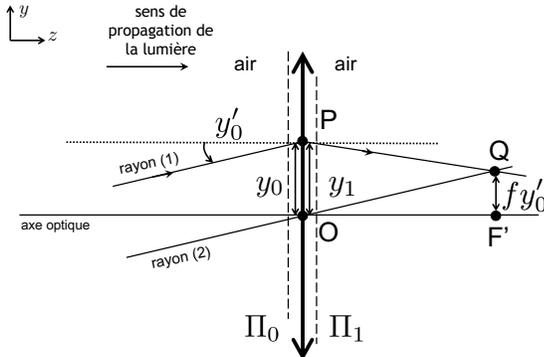
$$\begin{cases} y_1 = y_0 \\ y'_1 = \frac{n_0}{n_1} y'_0 \end{cases} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_0}{n_1} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le déterminant de  $T$  vaut  $\frac{n_0}{n_1}$ , différent de 1.

c) Traversée d'une lentille mince de distance focale  $f$  et de centre optique  $O$  plongée dans l'air

On considère une lentille plongée dans l'air.  $\pi_0$  est choisi en  $O^-$ , juste avant la lentille mince.  $\pi_1$  est situé en  $O^+$ . La lentille est supposée très mince donc le rayon entrant en  $y_0$  (rayon (1) sur le schéma ci-dessous) ressort en  $y_1 = y_0$  (point P, coordonnées  $(y_0, 0)$  dans le référentiel  $(Oyz)$ ). Les deux rayons parallèles schématisés (rayons (1) et (2)) viennent d'un même point source à l'infini et donc se coupent au point image de cette source, dans le plan focal image à la distance  $fy_0'$  de  $F'$  (point Q, coordonnées  $(fy_0', f)$  dans le référentiel  $(Oyz)$ ).

La pente du rayon transmis correspond à celle de la droite (PQ) qui vaut  $y_1' = \frac{y_Q - y_P}{z_Q - z_P} = \frac{fy_0' - y_0}{f}$ .



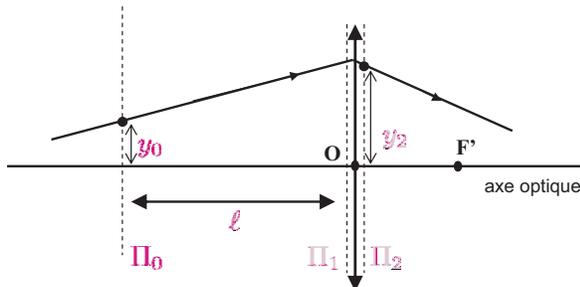
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 \\ y_1' &= \frac{fy_0' - y_0}{f} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 \\ y_1' = -\frac{1}{f}y_0 + y_0' \end{cases} \Rightarrow$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

d) Combinaison des deux cas précédents : propagation dans l'air sur la distance  $\ell$  puis traversée d'une lentille mince de distance focale  $f$

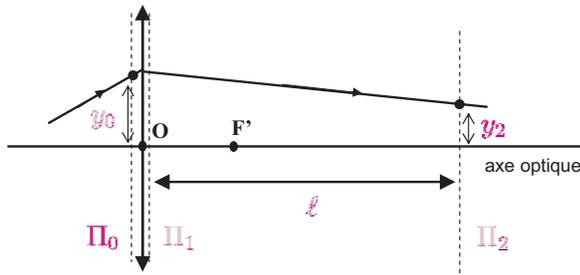
On multiplie  $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$  d'abord par la matrice décrivant la propagation sur une distance  $\ell$  (première action) puis par celle traduisant la traversée de la lentille (seconde action).



$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix} \\ T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{\ell}{f} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Attention à l'ordre des matrices, le produit matriciel n'est en général pas commutatif, comme illustré par l'exemple suivant.

\* Traversée d'une lentille mince de distance focale  $f$  puis propagation dans l'air sur la distance  $\ell$ .

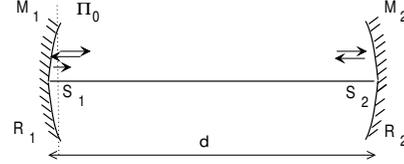


$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix} \\ T &= \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\ell}{f} & \ell \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### e) Matrice de transfert d'une cavité à 2 miroirs pour un aller-retour

Pour illustrer ce paragraphe, on considère une cavité à 2 miroirs sphériques concaves plongés dans l'air, et qui comporte un milieu amplificateur dilué pour lequel on pourra donc considérer que l'indice optique est très proche de celui de l'air ( $n_{MA} = 1$ ).<sup>1</sup>

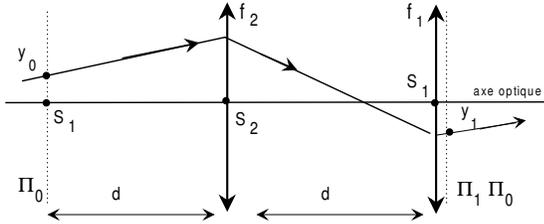
On veut écrire la matrice de transfert **après un parcours complet de la cavité**, c'est à dire un aller retour, du plan  $\pi_0$  au plan  $\pi_1$  confondu avec  $\pi_0$ . Les plans de départ et d'arrivée étant dans le même milieu, le déterminant de cette matrice vaudra 1.



Attention, les valeurs des coefficients de la matrice de transfert dépendront du choix du plan  $\pi_0$  et du sens du rayon en  $\pi_0$ . Les valeurs données ici correspondent à  $\pi_0$  en  $S_1$  juste après la réflexion sur  $M_1$ .

Le parcours complet de la cavité se décompose alors en : partant de  $\pi_0$  au niveau de  $S_1$ , propagation sur la longueur  $d$ ; réflexion sur  $M_2$ ; propagation sur la longueur  $d$ ; réflexion sur  $M_1$  pour arriver sur  $\pi_1$  confondu avec  $\pi_0$  après un parcours complet de la cavité.

On simplifie le calcul en utilisant l'analogie entre la réflexion sur un miroir de rayon de courbure  $R$  et la transmission par une lentille de distance focale  $f = R/2$ . On commence donc par développer la cavité pour faire apparaître sa **séquence périodique de lentilles équivalentes**.



Les plans  $\pi_0$  et  $\pi_1$  définissent le début et la fin du **motif de base** de la séquence périodique de lentilles équivalentes. L'aller-retour dans la cavité fait alors intervenir deux séquences déjà vues dans le paragraphe précédent :

- \* propagation sur une distance  $d$  puis transmission par une lentille de focale  $f_2$
- \* propagation sur une distance  $d$  puis transmission par une lentille de focale  $f_1$ .

$$T = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec

$$A = 1 - \frac{d}{f_2}$$

$$B = 2d - \frac{d^2}{f_2}$$

$$C = -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$D = -\frac{d}{f_1} + \left(1 - \frac{d}{f_1}\right)\left(1 - \frac{d}{f_2}\right)$$

En remplaçant  $f_1$  par  $R_1/2$  et  $f_2$  par  $R_2/2$ , il vient

$$A = 1 - \frac{2d}{R_2}$$

$$B = 2d\left(1 - \frac{d}{R_2}\right)$$

$$C = -\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{4d}{R_1 R_2}$$

$$D = -\frac{2d}{R_1} + \left(1 - \frac{2d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{2d}{R_2}\right)$$

Remarque : le raisonnement a été tenu pour un rayon dans le plan  $(yOz)$ . On peut tenir le même pour un rayon formant avec  $(Oz)$  le même angle dans le plan  $(xOz)$ . Le système optique est à symétrie de révolution

1. Dans ce cas, la longueur optique  $d$  pour un aller s'identifie donc à la distance géométrique  $L$  entre les 2 miroirs.

autour de (Oz) donc les trajets dans leur plan seront les mêmes pour ces deux rayons, d'où des matrices de transfert analogues. Cette symétrie pour les rayons des plans (yOz) et (xOz) permet d'utiliser la matrice de transfert pour des rayons incidents de directions quelconques. Pour des systèmes optiques ne possédant pas la symétrie de révolution, il faudra définir une matrice de transfert pour la projection du rayon incident dans le plan (yOz) et une autre pour la projection du rayon dans le plan (xOz).

## 2.3 Stabilité d'une cavité

### 2.3.1 Critère de stabilité d'une cavité laser

La trajectoire des rayons lumineux est décrite de manière équivalente dans la cavité réelle ou sur la séquence périodique de lentilles équivalentes. Lorsque cette dernière tend à maintenir les rayons autour de l'axe de la cavité, la cavité est dite stable. Si les rayons s'éloignent de plus en plus de l'axe, la cavité est dite instable.



Soit  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  la **matrice de transfert pour un parcours complet** d'une cavité laser à partir du plan  $\pi_0$ . On peut montrer que<sup>2</sup>

$$\text{la cavité est stable si et seulement si } -1 < \frac{A+D}{2} < 1$$

Remarques importantes :

- Ce résultat est **indépendant** du choix du plan  $\pi_0$  de départ pour évaluer la matrice de transfert pour un parcours complet.
- Les bornes de l'intervalle de stabilité sont parfois considérées pour certaines cavités. Dans ce cas, la cavité fonctionne en limite de stabilité.

### 2.3.2 Application à la stabilité d'une cavité simple à deux miroirs

#### a) Condition de stabilité

Pour la cavité à deux miroirs, on a calculé au paragraphe 2.2.3 :  $A = 1 - \frac{2d}{R_2}$  et  $D = -\frac{2d}{R_1} + (1 - \frac{2d}{R_1})(1 - \frac{2d}{R_2})$ . La condition de stabilité peut se transformer et se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & -1 < \frac{A+D}{2} < 1 \\ \Leftrightarrow & -1 < 1 - \frac{2d}{R_1} - \frac{2d}{R_2} + \frac{2d^2}{R_1 R_2} < 1 \\ \Leftrightarrow & 0 < 2 - \frac{2d}{R_1} - \frac{2d}{R_2} + \frac{2d^2}{R_1 R_2} < 2 \\ \Leftrightarrow & 0 < 2 \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 2 \\ \Leftrightarrow & 0 < \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 1 \end{aligned}$$

En introduisant les facteurs géométriques définis par

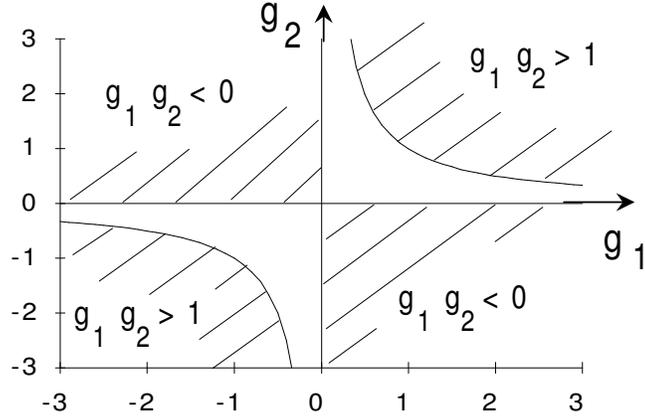
$$g_1 = 1 - \frac{d}{R_1} \qquad g_2 = 1 - \frac{d}{R_2}$$

<sup>2</sup>. voir démonstration en annexe

la condition de stabilité générale devient la suivante pour une cavité à deux miroirs<sup>3</sup> :

$$0 < g_1 g_2 < 1$$

Ce critère est illustré sur le **diagramme de stabilité de la cavité à deux miroirs**, qui porte  $g_1$  en abscisse et  $g_2$  en ordonnées. La courbe en traits pleins est l'hyperbole  $g_2 = \frac{1}{g_1}$ . Un point de composantes  $(g_1, g_2)$  figurant dans la zone non hachurée du graphe correspond à une cavité stable.



**b) Exemples d'utilisation**

Une cavité est formée par deux miroirs de rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  distants de  $d$ . On cherche pour quelles valeurs de  $d$  cette cavité est stable.

On doit avoir  $g_1 g_2 > 0$  et  $g_1 g_2 < 1$ , avec  $g_1 g_2 = (1 - \frac{d}{R_1})(1 - \frac{d}{R_2})$ . Pour représenter graphiquement  $g_1 g_2$  en fonction de  $d$ , on cherche les valeurs de  $d$  pour lesquelles  $g_1 g_2 = 0$  ou 1 ainsi que les limites pour  $d$  infini.

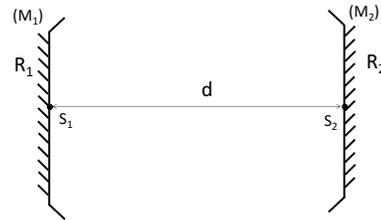
\*  $g_1 g_2 = 0$  pour  $d = R_1$  ou  $d = R_2$ .

\*  $g_1 g_2 - 1 = d [ -(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) + \frac{1}{R_1 R_2} d ]$  donc  $g_1 g_2 = 1$  pour  $d = 0$  et  $d = (R_1 R_2)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) = R_1 + R_2$

\* asymptotes : on a  $g_1 g_2 = 1 - (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})d + \frac{1}{R_1 R_2} d^2$ . Cette courbe est une parabole qui pour  $d$  tendant vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  tend vers  $-\infty$  si  $(R_1 R_2) < 0$  et tend vers  $+\infty$  si  $(R_1 R_2) > 0$ .

**Cas 1 :  $M_1$  et  $M_2$  sont des miroirs concaves**

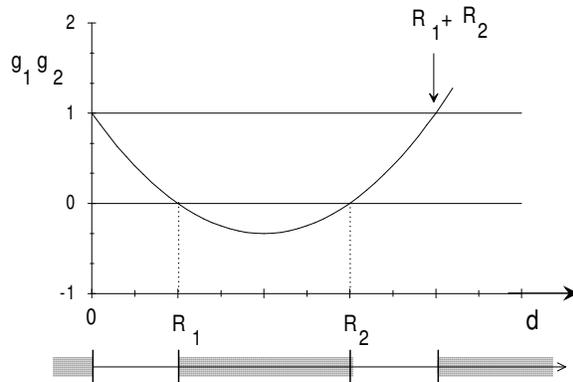
$R_1 > 0, R_2 > 0$  avec  $R_2 > R_1$ .



Pour  $d$  tendant vers l'infini,  $g_1 g_2$  tend vers  $+\infty$ .

Les valeurs particulières calculées ci-dessus sont par ordre croissant 0,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_1 + R_2$ .

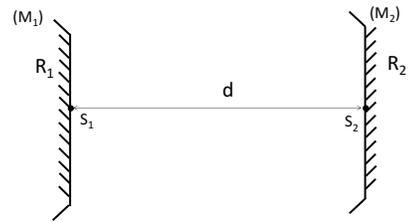
La parabole est représentée ci-contre. La cavité est stable ( $0 < g_1 g_2 < 1$ ) si et seulement si  $d \in ]0, R_1[$  ou  $d \in ]R_2, R_1 + R_2[$



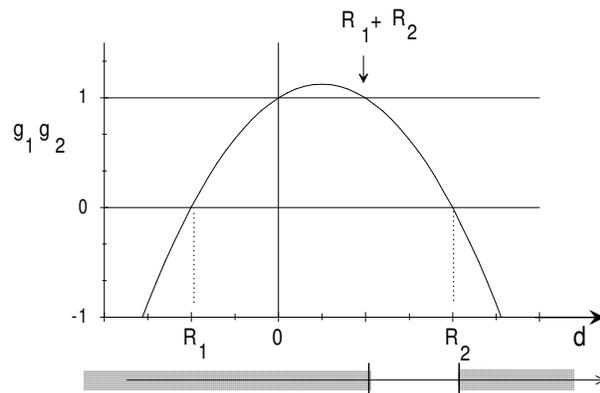
3. Attention, cette relation n'est valable que dans le cas d'une cavité à 2 miroirs.

**Cas 2 :  $M_1$  est un miroir convexe et  $M_2$  un miroir concave**

$R_1 < 0, R_2 > 0$  avec  $R_1 + R_2 > 0$ .



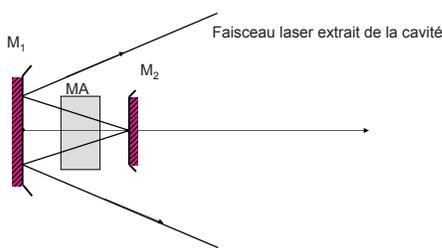
Pour  $d$  tendant vers l'infini,  $g_1 g_2$  tend vers  $-\infty$ .  
 Les valeurs particulières calculées ci-dessus sont par ordre croissant  $R_1, 0, R_1 + R_2, R_2$ .  
 Le graphe montre que la cavité est stable ( $0 < g_1 g_2 < 1$ ) si et seulement si  $d \in ]R_1 + R_2, R_2[$ .  
 Seules les valeurs positives de  $d$  ont un sens physique.



### 2.3.3 Cavités instables

Ces cavités sont utilisables si le faisceau laser est constitué par les rayons optiques perdus géométriquement par la cavité.

Exemple de cavité instable



\* Avantages des cavités instables : le volume du milieu amplificateur peut être très grand contrairement au cas des cavités stables où seul le volume au voisinage de l'axe est utilisé.

\* Inconvénients : la structure transverse du faisceau présente un trou au centre (faisceau annulaire).

Un autre exemple de cavité instable est celui d'une cavité plan-plan dont l'un des miroirs est partiellement réfléchissant. Le faisceau laser est alors celui sortant sur l'axe. Comme ces cavités présentent généralement beaucoup de pertes, elles sont utilisées avec des milieux amplificateurs qui ont un fort gain  $G$  (ex : laser à  $CO_2$ ).

### 2.3.4 Annexe : démonstration du critère de stabilité d'une cavité

Soit  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  la matrice de transfert pour un parcours complet de la cavité à partir du plan  $\pi_0$ .

On caractérise un rayon incident sur  $\pi_0$  par le vecteur  $\vec{t}_0$  de composantes  $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$ . Pour un rayon incident proche de l'axe et formant un petit angle avec celui-ci (cas des conditions de Gauss), le module  $\|\vec{t}_0\|$  doit être 'petit'.

Après  $n$  parcours complets de la cavité, le rayon au niveau de  $\pi_0$  est caractérisé par le vecteur  $\vec{t}_n \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \end{pmatrix}$ , avec

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

L'objectif de ce calcul est de prévoir si le rayon lumineux reste confiné au voisinage de l'axe optique de la cavité (cavité stable) ou s'il s'en éloigne de plus en plus (cavité instable). Pour un rayon restant près de l'axe,  $y_n$  et  $y_n'$  restent 'petits' donc le module du vecteur  $\vec{t}_n$  correspondant est 'petit'. Pour un rayon s'éloignant de l'axe, ce module devient 'grand'. On va donc calculer  $\|\vec{t}_n\|$  pour vérifier dans quelles conditions il 'reste petit' ou il 'devient grand'.

On effectue un changement de base pour se placer dans la base des vecteurs propres de  $T$ , base dans laquelle cette matrice s'écrit  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . On note  $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_0' \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_n' \end{pmatrix}$  les composantes des vecteurs  $\vec{t}_0$  et  $\vec{t}_n$  dans cette base. Le module d'un vecteur se conserve dans le changement de base donc  $|\alpha_0|^2 + |\alpha_0'|^2 = |y_0|^2 + |y_0'|^2$ . Les composantes de  $\vec{t}_n$  sont calculées par la relation

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_0' \end{pmatrix}$$

qui donne  $\alpha_n = (\lambda_1)^n \alpha_0$  et  $\alpha_n' = (\lambda_2)^n \alpha_0'$  donc  $\|\vec{t}_n\| = \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\alpha_n'|^2} = \sqrt{|\lambda_1|^{2n} |\alpha_0|^2 + |\lambda_2|^{2n} |\alpha_0'|^2}$ .

Les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de la matrice  $T$  c'est à dire les deux solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(A + D) + AD - BC = 0$$

qui devient, en utilisant la propriété  $\det(T) = 1 \Leftrightarrow AD - BC = 1$

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = 0$$

On utilise les propriétés générales des racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  d'un polynôme du second degré :

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = A + D \end{cases}$$

Le discriminant de ce polynôme vaut  $\Delta = (A + D)^2 - 4$ , on discute le résultat selon que  $\Delta$  soit positif ou négatif.

\*  $\Delta$  est positif pour  $|\frac{A+D}{2}| > 1$ . Les deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles, on choisit pour  $\lambda_1$  celle de valeur absolue supérieure à 1, d'où  $|\lambda_2| = 1/|\lambda_1| < 1$ . Dans ce cas,  $\alpha_n' = (\lambda_2)^n \alpha_0'$  tend vers 0 pour  $n$  grand et le vecteur  $\vec{t}_n$  tend vers celui de composantes  $\begin{pmatrix} (\lambda_1)^n \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  dont le module augmente exponentiellement avec

$n$  puisque  $|\lambda_1| > 1$ . Le rayon lumineux caractérisé par  $\vec{t}_n \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \end{pmatrix}$  s'éloigne donc de l'axe optique, *la cavité est instable*.

\*  $\Delta$  est négatif pour  $|\frac{A+D}{2}| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{A+D}{2} < 1$ . Les deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes mais conjuguées puisque leur somme  $\lambda_1 + \lambda_2 = A + D$  est réelle. La condition  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  avec  $\lambda_2 = \lambda_1^*$  impose de plus que leurs modules valent 1 ( $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ). Dans ce cas, on peut montrer que  $\|\vec{t}_n\| = \|\vec{t}_0\|$  quel que soit  $n$ . Cela signifie que le rayon lumineux caractérisé par  $\vec{t}_n$  reste au voisinage de l'axe optique même après  $n$  parcours de cavité, *la cavité est stable*<sup>4</sup>.

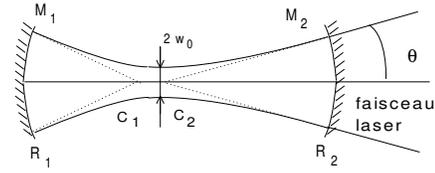
La cavité est stable si et seulement si  $-1 < \frac{A + D}{2} < 1$

4. Avec cette démonstration, on peut en principe inclure les bornes dans l'inégalité (cas où  $|\frac{A+D}{2}| = 1$ ). En pratique, les cavités correspondant à cette situation se trouvent en limite de stabilité et sont souvent beaucoup plus difficiles à régler. Elles ne permettent pas l'établissement d'un mode fondamental gaussien (voir justification au chapitre suivant).

## **Chapitre 3**

# **FAISCEAUX GAUSSIENS**

Pour décrire plus précisément le comportement de la lumière dans une cavité, la notion de rayons lumineux ne suffit plus et il faut introduire celle d'onde lumineuse. Une des ondes particulièrement importante dans les lasers est celle du '**faisceau gaussien**', appelée ainsi car sa répartition d'énergie perpendiculairement à l'axe de propagation adopte la forme d'une gaussienne. Cette structure de faisceau est très courante car elle correspond au mode possible le plus simple pour les cavités laser. Dans ce chapitre, on va voir **quels sont les paramètres qui caractérisent un faisceau gaussien** et comment ils sont **reliés à la géométrie de la cavité laser** choisie.



### 3.1 Généralités sur les faisceaux gaussiens

#### 3.1.1 Amplitude complexe et intensité d'une onde

Une onde électromagnétique est l'association d'un champ électrique et d'un champ magnétique oscillant au cours du temps. En un point  $O(0, 0, 0)$ , choisi comme origine du référentiel spatial, le champ électrique d'une onde monochromatique de pulsation  $\omega$  s'écrit :

$$E(0, 0, 0, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$E_0$  est l'**amplitude** de l'onde,  $\varphi$  est appelée la **phase à l'origine**.

Cette onde se propage dans l'espace et atteint le point  $M(x, y, z)$  après une durée de propagation  $\Delta t_{OM}$ . Le champ électrique en  $M$  à l'instant  $t$  reproduit celui en  $O$  à l'instant  $t - \Delta t_{OM}$  avec éventuellement une atténuation d'un facteur  $\alpha$ . Il s'écrit :

$$E(x, y, z, t) = \alpha E_0 \cos[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \varphi]$$

Le terme  $[\omega(t - \Delta t_{OM})]$  représente la phase de l'onde à l'instant  $t$ . L'ensemble des points  $M$  pour lesquels la phase est identique à un instant  $t$  donné constitue **une surface d'onde**.

De façon équivalente, on peut écrire :

$$E(x, y, z, t) = \frac{\alpha E_0 \exp i[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \varphi] + \alpha E_0 \exp -i[\omega(t - \Delta t_{OM}) + \varphi]}{2}$$

Par définition et par convention dans tout ce cours, la quantité  $\mathcal{A}(x, y, z) = \alpha E_0 \exp -i(\omega \Delta t_{OM} - \varphi)$  est l'**amplitude complexe** de l'onde au point  $M$  et  $\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t$  en constitue la **représentation complexe**.

Ceci correspond à l'écriture :

$$\begin{aligned} E(x, y, z, t) &= \frac{\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t + \mathcal{A}^*(x, y, z) \exp -i\omega t}{2} \\ &= \Re [\mathcal{A}(x, y, z) \exp i\omega t] \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, on travaillera avec l'**amplitude complexe des ondes**. On définira alors l'**intensité lumineuse** de l'onde par la relation :

$$I(x, y, z) = \frac{\mathcal{A}(x, y, z) \mathcal{A}^*(x, y, z)}{2\mu_0 c}$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide et  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

#### 3.1.2 Amplitude complexe et intensité d'un faisceau gaussien

Les ondes pouvant s'établir dans une cavité laser sont celles dont le champ électrique est solution de l'équation de propagation de Helmholtz et vérifie les conditions aux limites imposées par la présence des éléments optiques de cavité. Une solution particulièrement intéressante pour les lasers est l'**onde (sphérique) gaussienne**, dont la forme, on le vérifiera, est parfaitement adaptée pour respecter les conditions aux limites

imposées par une cavité laser.

Pour une onde gaussienne **se propageant suivant (Oz)** avec des rayons paraxiaux, l'amplitude complexe s'écrit<sup>1, 2</sup> :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = A_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -\frac{k}{z_R - iz} \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= A_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -k \frac{z_R + iz}{z_R^2 + z^2} \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &= A_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} \frac{x^2 + y^2}{2} \exp -ik \frac{z}{z_R^2 + z^2} \frac{x^2 + y^2}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$k$  est relié à la longueur d'onde par  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , avec  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$ .  $k$  s'exprime en  $m^{-1}$ .

Le paramètre  $z_R$ , appelé '**paramètre de Rayleigh**', est une **quantité toujours positive**, associée à une longueur dont on donnera l'interprétation physique plus tard.

L'intensité de l'onde au point M est calculée par la relation  $I(x, y, z) = \mathcal{A}(x, y, z)\mathcal{A}^*(x, y, z)/2\mu_0 c$ . A partir de la forme (3.2), on obtient ainsi :

$$I(x, y, z) = \underbrace{\frac{|A_0|^2}{2\mu_0 c} \frac{z_R^2}{z_R^2 + z^2}}_{I(0,0,z)} \exp -k \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} (x^2 + y^2) \quad \text{avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.3)$$

### 3.1.3 Extension latérale du faisceau gaussien

L'intensité d'un faisceau gaussien se propageant suivant (Oz) est à **symétrie de révolution** autour de l'axe (Oz). Afin de décrire le profil latéral de l'intensité du faisceau, on représente l'intensité  $I(x, 0, z)$  suivant l'axe  $x$ , à  $z$  fixé. C'est une gaussienne dont on caractérise la largeur en cherchant les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  de  $x$  pour lesquelles<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} I(x, 0, z) &= \frac{I(0, 0, z)}{e^2} = I(0, 0, z) \exp(-2) \\ &\simeq 0,135 I(0, 0, z) \end{aligned}$$

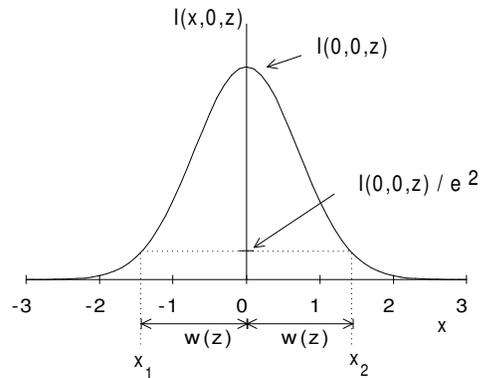
<sup>a</sup>. Cette définition de la largeur d'un faisceau, dont l'intensité est caractérisée par une fonction mathématique d'extension infinie, est arbitraire. On pourrait tout aussi bien considérer par exemple les valeurs de  $x$  pour lesquelles l'intensité maximale a été divisée par un facteur 2. Ce choix permet juste d'avoir une forme plus 'simple' pour l'expression de la largeur  $\omega(z)$  du faisceau.

En reprenant l'équation (3.3) pour  $x = x_1$  ou  $x_2$  et  $y = 0$ , il vient

$$\begin{aligned} \exp -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{z_R}{(z_R^2 + z^2)} x^2 &= \exp -2 \\ x_1 &= -\sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad x_2 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \end{aligned}$$

La largeur totale sur laquelle  $I(x, 0, z) > I(0, 0, z)e^{-2}$  vaut  $x_2 - x_1 = 2\sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ . On définit la **demi-largeur à  $1/e^2$  à la position  $z$  du faisceau** par  $\omega(z) = \frac{x_2 - x_1}{2}$ , soit

$$\omega(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$



1. A. Yariv, Optical Electronics in Modern Communications, Oxford University Press, 5th edition, p 50-53

2. On verra que cette solution correspond au cas où le plan du waist (qui sera défini plus tard dans le paragraphe 3.1.4. de ce chapitre) est situé en  $z = 0$ .

$\omega(z)$  représente aussi le rayon du faisceau défini comme celui pour lequel l'intensité est égale à  $e^{-2}$  fois l'intensité au centre. Par abus de langage, on parlera souvent plus simplement de 'la largeur  $\omega(z)$  du faisceau'. La fonction  $\omega(z)$  dépend de la position  $z$  sur l'axe, elle est minimale pour  $z = 0$  dans le cas donné ici. Le rayon minimum du faisceau vaut alors  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$ . Cette grandeur est appelée le '**rayon de ceinture**' ou 'le rayon de taille' du faisceau (**le rayon du 'waist' en anglais**). Par abus de langage, on parlera du waist d'un faisceau.

Le rayon du faisceau gaussien à la position  $z$  par rapport au plan du 'waist' ( $z = 0$ ) s'écrit donc

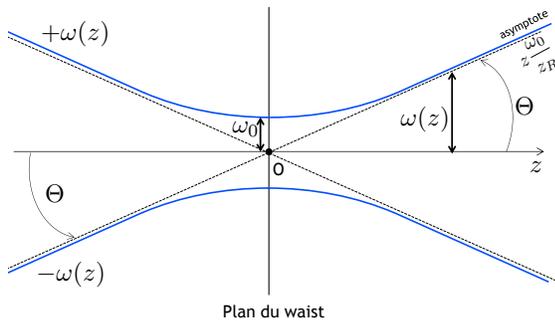
$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

Remarque : pour  $x^2 + y^2 = \omega^2(z)$ , on a par construction  $I(x, y, z) = I(0, 0, z) \exp -2$ . On peut donc écrire

$$I(x, y, z) = I(0, 0, z) \exp -2 \frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}$$

### 3.1.4 Profil longitudinal et divergence du faisceau gaussien

Un diaphragme de rayon  $r = \omega(z)$  positionné sur le trajet d'un faisceau gaussien transmet 86 % de la puissance du faisceau (voir Exercice 4 du TD2). Les courbes  $\omega(z)$  et  $-\omega(z)$  donnent donc une bonne représentation du profil longitudinal selon l'axe (Oz) du faisceau gaussien.



- a) Pour  $z = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0$  (largeur minimale au 'waist').  
 b) Pour  $z = \pm z_R$ ,  $\omega(z_R) = \sqrt{2} \times \omega_0$ . Le '**paramètre de Rayleigh**',  $z_R$ , est donc une longueur **caractéristique de la divergence** du faisceau.

c) Pour  $z \gg z_R$ , la fonction  $\omega(z)$  tend vers une asymptote formant avec l'axe (Oz) l'angle  $\theta$  tel que :

$$\tan \theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\omega(z)}{z} = \frac{\omega_0}{z_R} = \frac{\omega_0}{\pi \omega_0^2 / \lambda} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0}$$

Loin du 'waist', le faisceau gaussien est donc un cône de lumière de demi-angle au sommet  $\theta$  avec  $\tan \theta = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \approx \theta$  si  $\theta \ll 1$

L'angle  $\theta$  correspond à la **divergence du faisceau**. Dans la pratique, ces angles sont toujours très faibles<sup>3</sup> et  $\tan \theta \simeq \theta$ . L'angle calculé par cette formule est en radians.

Il apparaît qu'un rayon étroit pour le 'waist' est associé à  $z_R$  petit puisque  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$ , et donc à une grande divergence du faisceau. Un faisceau gaussien ne peut donc pas être à la fois extrêmement étroit et très peu divergent.

Pour conclure, la forme du faisceau gaussien est donc complètement déterminée par la **position du 'waist'** et le **paramètre de Rayleigh**  $z_R$  (ou, c'est équivalent, le rayon du 'waist'  $\omega_0$ ). On retiendra

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \quad \Leftrightarrow \quad z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \quad \tan \theta = \frac{\omega_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_R}}$$

3. excepté pour les diodes lasers

## 3.2 Propriétés du faisceau gaussien

### 3.2.1 Rayon de courbure complexe

On reprend l'expression (3.1) pour écrire le terme  $\exp -\frac{k}{(z_R - iz)} \frac{x^2 + y^2}{2}$  sous la forme  $\exp -i \frac{k}{q(z)} \frac{x^2 + y^2}{2}$ . On a :

$$\frac{i}{q(z)} = \frac{1}{z_R - iz} \quad \Leftrightarrow \quad q(z) = z + i z_R$$

La quantité  $q(z)$  est appelée **rayon de courbure complexe**  $q(z)$  de l'onde gaussienne.

Par la suite, on verra comment calculer  $q$  en un point H quelconque de l'axe d'une cavité repéré par  $\overline{OH} = z$ . L'écriture  $q(H) = \overline{OH} + i z_R$  montre que la partie imaginaire de  $q(H)$  est égale au paramètre de Rayleigh  $z_R$  du faisceau gaussien.

Sa partie réelle donne la position du point H par rapport à celle du 'waist' O du faisceau, elle est nulle si H est au niveau du waist. Par conséquent, le rayon de courbure complexe est un **nombre imaginaire pur dans le plan du waist** :  $q(O) = i z_R$ .

### 3.2.2 Rayon de courbure de la phase et extension latérale du faisceau

On modifie l'équation de définition de  $q(z)$  :

$$\begin{aligned} \frac{i}{q(z)} &= \frac{1}{z_R - iz} \\ &= \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} + i \frac{z}{z_R^2 + z^2} \\ \text{avec } \frac{z_R}{z_R^2 + z^2} &= \frac{z_R}{z_R^2 [1 + (\frac{z}{z_R})^2]} = \frac{1}{z_R [1 + (\frac{z}{z_R})^2]} \\ \text{et } \frac{z}{z_R^2 + z^2} &= \frac{z}{z^2 [(\frac{z_R}{z})^2 + 1]} = \frac{1}{z [(\frac{z_R}{z})^2 + 1]} \end{aligned}$$

Le premier terme est relié au rayon  $\omega(z)$  du faisceau gaussien à la position  $z$  qui a été défini au paragraphe 3.1.3 par  $\omega(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ . On écrit

$$\frac{\pi}{\lambda} \omega^2(z) = z_R \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2 \right]$$

Dans le second terme, on note :

$$R(z) = z \left[ \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 + 1 \right] = \frac{z_R^2}{z} + z$$

Cette quantité est appelée **rayon de courbure de la phase**, dénomination qui sera commentée plus loin. On déduit l'écriture

$$\frac{i}{q(z)} = \frac{1}{z_R - iz} = \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} + \frac{i}{R(z)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)}$$

\* Application : si un calcul évalue le rayon de courbure complexe  $q$  en un point H de l'axe d'une cavité laser, la partie réelle de  $\frac{1}{q(H)}$  donne le **rayon de courbure**  $R(z)$  **de la phase** pour le faisceau gaussien au niveau de

H. La partie imaginaire de  $\frac{1}{q}$  est reliée elle à **la largeur  $\omega(z)$  du faisceau gaussien** dans le plan de H.

\* Interprétation physique : au voisinage du point H(0,0,z), on peut montrer (cf annexe) que la phase de l'onde gaussienne et les rayons lumineux associés correspondent à ceux d'une onde sphérique de centre C avec

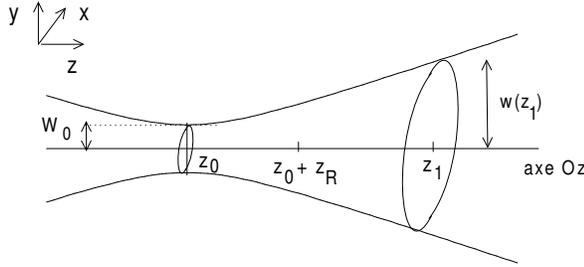
$$\overline{CH} = R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \Leftrightarrow \overline{OC} = \overline{OH} + \overline{HC} = z - z - \frac{z_R^2}{z} = -\frac{z_R^2}{z}$$

Pour  $z \gg z_R$ , C tend vers O. Le faisceau gaussien correspond à un cône de lumière de centre O.

Pour  $z \ll z_R$ ,  $\overline{OC}$  tend vers  $-\infty$ . Le faisceau gaussien possède dans cette zone la forme d'un faisceau parallèle à (Oz). Ces deux cas limites apparaissent sur le tracé du profil longitudinal du faisceau gaussien au §3.1.4

\* Remarque importante : bien que la dénomination soit proche, il ne faut pas confondre le rayon du faisceau  $\omega(z)$ , le rayon de courbure complexe  $q(z)$  et le rayon de courbure de la phase  $R(z)$ .

### 3.2.3 Relations utiles



On généralise les relations vues précédemment en considérant un faisceau gaussien d'axe (Oz) dont le 'waist' n'est plus situé en  $z = 0$  mais dans un plan  $z = z_0$  avec le rayon de waist  $\omega_0$  et le paramètre de Rayleigh  $z_R$ . On détermine les caractéristiques de ce faisceau dans le plan  $z = z_1$  lorsque le faisceau gaussien n'est pas déformé entre  $z_0$  et  $z_1$  c'est à dire **lorsqu'il n'existe aucun système optique** entre ces deux points. :

Pour cela, on reprend les relations établies au point  $z$  pour un faisceau gaussien dont le 'waist' est situé en  $z = 0$  pour y remplacer  $z$  par  $(z_1 - z_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rayon de courbure complexe} \quad q(z_1) = (z_1 - z_0) + i z_R \\ \text{rayon du faisceau} \quad \omega(z_1) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_1 - z_0}{z_R}\right)^2} \\ \text{rayon de courbure de la phase} \quad R(z_1) = (z_1 - z_0) \left[ \left(\frac{z_R}{z_1 - z_0}\right)^2 + 1 \right] = \frac{z_R^2 + (z_1 - z_0)^2}{z_1 - z_0} \end{array} \right.$$

avec au niveau du 'waist'

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rayon de courbure complexe} \quad q(z_0) = i z_R \\ \text{rayon du faisceau} \quad \omega(z_0) = \omega_0 \\ \text{rayon de courbure de la phase} \quad R(z_0) \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

### 3.2.4 Propagation du rayon de courbure complexe : loi 'ABCD'

On considère deux plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$  d'équations  $z = z_1$  et  $z = z_2$ . Les rayons de courbure complexes correspondants sont notés  $q_1$  et  $q_2$ .

S'il est placé entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$  un système optique de matrice de transfert  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , on peut montrer<sup>4</sup> que la relation entre  $q_1$  et  $q_2$  s'écrit :

4. voir démonstration en annexe

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Cette loi très générale est appelée 'loi ABCD'.

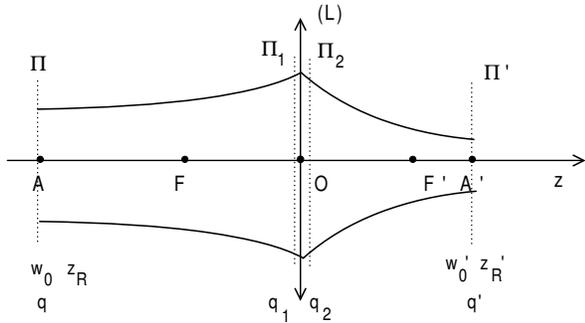
S'il n'y a aucun système optique entre ces deux plans, la propagation rectiligne d'un rayon correspond à la matrice de transfert  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et la 'loi ABCD' entraîne  $q_2 = q_1 + z_2 - z_1$ .

### 3.2.5 Application : formule de conjugaison des 'waists' pour un faisceau gaussien

On considère un faisceau gaussien d'axe (Oz), caractérisé par  $z_R$  et de 'waist' situé en A. Ce faisceau est modifié par la traversée d'une lentille de distance focale  $f$ , centre optique O, axe (Oz). L'expérience montre que le faisceau transmis est gaussien de 'waist' situé en A' et de paramètre de Rayleigh  $z'_R$ , on va déterminer ses caractéristiques en fonction de celles du faisceau incident et de  $f$ .

Les points A et A' sont repérés par rapport respectivement au foyer objet F et au foyer image F' de la lentille, en posant  $\ell = \overline{FA}$  et  $\ell' = \overline{F'A'}$ , soit

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OF} + \overline{FA} = -f + \ell \\ \overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = f + \ell' \end{cases}$$



On note  $\pi, \pi_1, \pi_2$  et  $\pi'$ , les plans situés en A, juste avant la lentille, juste après la lentille et en A'. Les rayons de courbure complexes correspondants sont  $q, q_1, q_2$  et  $q'$ .

Dans les plans des 'waists', ils valent  $q = iz_R$  et  $q' = iz'_R$ . Le schéma est fait ici pour une lentille convergente ( $f > 0$ ).

On utilise la propagation des rayons de courbure complexes entre  $\pi$  et  $\pi_1$  ( $\pi'$  et  $\pi_2$  respectivement) pour écrire

$$\begin{cases} q_1 = q + \overline{AO} = q + (f - \ell) = (f - \ell) + iz_R \\ q_2 = q' + \overline{A'O} = q' - (f + \ell') = -f - \ell' + iz'_R \end{cases}$$

A la traversée de la lentille, la loi 'ABCD' entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$  donne la relation

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1} \\ q_2 &= f \frac{q_1}{-q_1 + f} \\ q_2 &= f \frac{(f - \ell) + iz_R}{-f + \ell - iz_R + f} \end{aligned}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par  $(\ell - iz_R)^* = \ell + iz_R$ .

$$\begin{aligned} q_2 &= f \frac{[(f - \ell) + iz_R][\ell + iz_R]}{\ell^2 + z_R^2} \\ q_2 &= \frac{f(f\ell - \ell^2 - z_R^2)}{\ell^2 + z_R^2} + i \frac{z_R f^2}{\ell^2 + z_R^2} \\ q_2 &= \left[ \frac{f^2 \ell}{\ell^2 + z_R^2} - f \right] + i \left[ \frac{z_R f^2}{\ell^2 + z_R^2} \right] \end{aligned}$$

On identifie cette expression de  $q_2$  à celle obtenue par propagation de l'onde entre  $\pi'$  et  $\pi_2$ ,  $q_2 = -f - \ell' + iz'_R$ , pour obtenir

$$\begin{cases} \ell' &= -\ell \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2} \\ z'_R &= z_R \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2} \\ \omega_0'^2 &= \omega_0^2 \frac{f^2}{\ell^2 + z_R^2} \end{cases}$$

Ce sont les **formules de conjugaison des 'waists'**. On peut ainsi utiliser une lentille pour modifier et adapter la dimension d'un faisceau, par exemple pour faire en sorte que son rayon corresponde à celui d'un diaphragme, d'un mesureur de puissance, ou d'un système optique particulier (cristal amplificateur, cristal non linéaire, etc.)

Remarques :

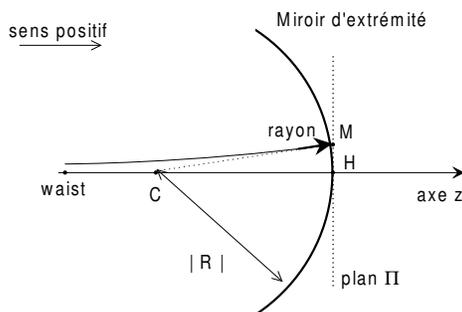
- \* Les formules établies ici l'ont été pour une lentille convergente ( $f > 0$ ). Elles gardent la même forme pour une lentille divergente ( $f < 0$ ).
- \* On a décrit une situation où le waist du faisceau incident est situé en A, avant la lentille. Il s'agit d'un waist objet réel. Les formules obtenues resteraient valables si ce waist était situé après la lentille (waist objet virtuel). Le waist image est lui aussi réel ou virtuel selon sa situation après ou avant la lentille.
- \* Attention : On ne peut pas appliquer la formule de conjugaison de Gauss aux faisceaux gaussiens car ils font intervenir la nature ondulatoire de la lumière, qui n'est pas prise en compte dans les lois de l'Optique Géométrique.

### 3.3 Mode fondamental gaussien d'une cavité stable

#### 3.3.1 Principe

On s'intéresse au faisceau gaussien s'établissant dans une cavité avec l'amplitude donnée par l'équation (3.1) : ce faisceau est appelé le **mode fondamental gaussien de la cavité**. Il est caractérisé par la position de son 'waist' et son paramètre de Rayleigh, qui permettent d'assurer que le principe suivant soit vérifié.

Une onde peut s'établir de manière stable dans une cavité si et seulement si elle se retrouve identique à elle-même après un parcours complet de la cavité, donc avec le même rayon de courbure complexe. Cette condition est valable aussi bien pour une cavité linéaire que pour une cavité en anneau.



\* Conséquence pour le cas de la **cavité linéaire** :

Rappel : si en M le rayon de courbure de la phase du faisceau gaussien vaut  $R$ , alors les rayons lumineux en M sont analogues à ceux d'une onde sphérique de centre C. Ils sont portés par la direction (CM) où le point C de l'axe vérifie  $\overline{CH} = R$ .

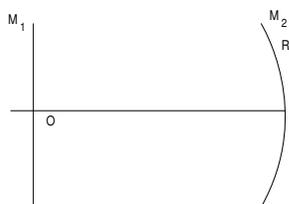
Dans une cavité **linéaire**, l'onde se réfléchissant sur un miroir d'extrémité revient identique à elle-même si les rayons lumineux associés arrivent en incidence normale sur ce miroir. Ceci est possible seulement si le rayon de courbure de la phase de l'onde gaussienne au niveau du miroir est égal en valeur absolue au rayon de courbure géométrique du miroir :  $|R(S)| = |R_{\text{miroir}}|$ . Cette règle constitue la **condition d'accord des rayons de courbure** et assure que le faisceau gaussien soit parfaitement adapté à la géométrie de la cavité.

Cette condition, appliquée aux deux miroirs situés seulement aux **extrémités** de n'importe quelle cavité **linéaire**, définit de manière unique l'onde pouvant s'établir dans cette cavité linéaire. Elle sera justifiée en annexe dans le cas d'une cavité à 2 miroirs.

### 3.3.2 Cas particuliers simples

On présente des exemples simples de cavité pour lesquels la position du 'waist' ou le calcul du paramètre de Rayleigh du faisceau gaussien qui peut s'y établir de manière durable sont immédiats.

\* Cavité linéaire dont une extrémité est un miroir plan (cf exercice 2 du TD2).



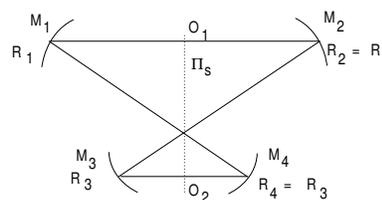
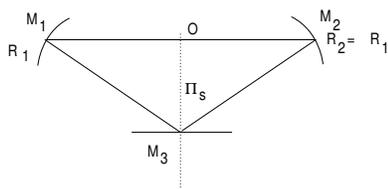
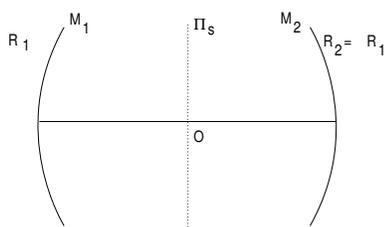
Un **miroir plan** a un **rayon de courbure infini**, tout comme le rayon de courbure de la phase d'un faisceau gaussien au niveau du plan du 'waist'. La condition d'accord des rayons de courbure appliquée à l'extrémité de la cavité au niveau de  $M_1$  fait qu'un 'waist' existe nécessairement au niveau du miroir plan.

S'il s'agit d'une cavité à deux miroirs et de longueur  $L$ , le rayon de courbure de la phase de l'onde correspond en valeur absolue au rayon de courbure  $R$  du miroir sphérique si et seulement si (résultats du paragraphe 3.2.3)

$$R = \frac{z_R^2 + L^2}{L} = L \left[ \left( \frac{z_R}{L} \right)^2 + 1 \right]$$

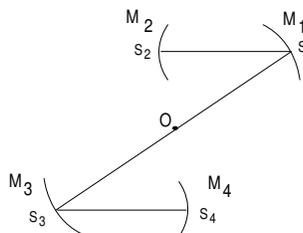
d'où l'on déduit  $z_R$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $L$ .

\* Cavités symétriques.



Pour une cavité possédant un plan de symétrie  $\pi_s$ , la structure du faisceau gaussien doit elle aussi être symétrique par rapport à  $\pi_s$ . Un faisceau **d'axe perpendiculaire à ce plan** est son propre symétrique par rapport à  $\pi_s$  uniquement si le 'waist' du faisceau est situé sur le plan de symétrie de la cavité (il peut y avoir plusieurs 'waists').

Le raisonnement précédent s'applique également au cas où la cavité est symétrique par rapport à un point (voir exemple ci-contre). Il existe alors nécessairement un waist confondu avec le centre de symétrie  $O$ .

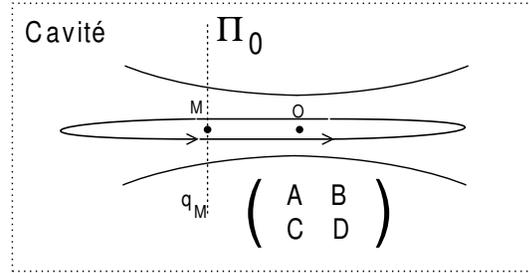


### 3.3.3 Détermination du mode fondamental gaussien dans le cas général

On décrit maintenant une méthode permettant de déterminer les caractéristiques du mode fondamental gaussien pouvant s'établir sur un tronçon d'une **cavité quelconque**.

Soit M un point de l'axe de cette cavité et soit  $\pi$  le plan passant par M et perpendiculaire à cet axe.

La cavité est complètement caractérisée par la matrice de transfert  $T_{\pi \rightarrow \pi} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  décrivant son parcours complet à partir de  $\pi$ .



On cherche le rayon de courbure complexe  $q_M$  au niveau de  $\pi$ . Après un parcours complet de cavité supplémentaire,  $q_M$  devient  $Q = \frac{Aq_M + B}{Cq_M + D}$  d'après la loi 'ABCD'. Or une onde établie de manière stable dans la cavité doit vérifier  $Q = q_M$ , d'où la relation

$$q_M = \frac{Aq_M + B}{Cq_M + D}$$

$$\Leftrightarrow Cq_M^2 + (D - A)q_M - B = 0$$

Cette équation fait apparaître un polynôme du second degré dont le discriminant vaut  $\Delta = (D - A)^2 + 4BC$ . En utilisant la propriété générale des matrices de transfert pour le déterminant  $AD - BC = 1$ , il devient

$$\begin{aligned} \Delta &= (D - A)^2 + 4(AD - 1) \\ &= D^2 + A^2 - 2AD + 4AD - 4 \\ &= (D + A)^2 - 4 \end{aligned}$$

Or on a défini le rayon de courbure complexe sous la forme  $q = \Re(q) + iz_R$  avec  $z_R > 0$

$\Rightarrow q_M$  est donc la racine **complexe** du polynôme. Sa partie imaginaire est non nulle si  $\Delta < 0$ , c'est-à-dire si  $(\frac{A+D}{2})^2 < 1$  soit

$$-1 < \frac{A + D}{2} < 1$$

Cette inégalité est analogue à la condition de stabilité géométrique d'une cavité énoncée au chapitre précédent.

$\Rightarrow$  la partie imaginaire de  $q_M$  doit être strictement positive puisque  $\Im(q_M) = z_R > 0$ , ce qui conduit à ne garder qu'une des deux racines complexes solution du polynôme.

On trouve finalement en M le rayon de courbure complexe :

$$q_M = -\frac{D-A}{2C} + i \left| \frac{1}{2C} \sqrt{-\Delta} \right| = \frac{A-D}{2C} + i \frac{1}{2|C|} \sqrt{4 - (D+A)^2}$$

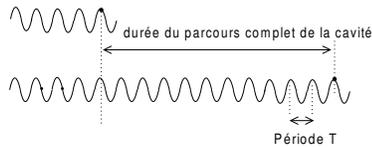
La partie imaginaire de  $q_M$  est le paramètre de Rayleigh du faisceau gaussien établi au niveau de  $\pi$ . On identifie donc  $\Im(q_M) = z_R = \left| \frac{1}{2C} \sqrt{-\Delta} \right| = \frac{1}{2|C|} \sqrt{4 - (D+A)^2}$

De plus, **s'il n'existe aucun système optique déformant le faisceau gaussien entre M et la position O du waist**, c'est à dire aucun miroir ou lentille, la partie réelle de  $q_M$  peut s'identifier à  $\Re(q_M) = OM$  ce qui permet de déduire la position du waist par rapport à  $\pi$  avec  $\overline{OM} = -\frac{D-A}{2C}$

Connaissant  $q_M$  au niveau du point M, on peut déduire la valeur du rayon de courbure complexe en tout point de la cavité en appliquant la loi 'ABCD', ainsi que les valeurs de la largeur  $\omega$  ou du rayon de courbure de la phase  $R$  associées.

### 3.4 Modes spectraux d'une cavité laser (modes longitudinaux)

Soit  $\nu$  la fréquence de l'onde,  $\omega = 2\pi\nu$  sa pulsation et  $T = \frac{1}{\nu}$  sa période. On note  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide.



On peut montrer qu'une onde peut s'établir de manière stable dans la cavité si et seulement si elle se retrouve **en phase avec elle-même** après un **parcours complet** de la cavité. Cette condition est réalisée **si le temps  $\Delta t$  d'un parcours complet de la cavité est égal à un nombre entier de fois la période  $T$  de l'onde**. Elle assure qu'il existe des interférences constructives dans la cavité entre l'onde se propageant dans un sens et celle se propageant au retour dans l'autre sens (système d'ondes stationnaires pour une cavité linéaire).

$$\Delta t = (p + 1) T \quad \text{avec } p \text{ entier positif ou nul}$$

On suppose que la cavité se décompose en une série de parcours rectilignes de longueur  $\ell_i$  dans des milieux d'indice  $n_i$  (donc avec la vitesse  $c_0/n_i$ ). On a

$$\Delta t = \sum_i \frac{\ell_i}{c_0/n_i} = \frac{\sum_i n_i \ell_i}{c_0} = \frac{\Delta L}{c_0}$$

en définissant par  $\Delta L = \sum_i n_i \ell_i$  la **longueur optique de la cavité pour un parcours complet** (appelée aussi chemin optique).

La relation  $\Delta t = (p + 1) T$  devient

$$\frac{\Delta L}{c_0} = (p + 1)T = \frac{(p + 1)}{\nu} \Leftrightarrow \nu = (p + 1) \frac{c_0}{\Delta L}$$

Une valeur donnée de  $p$  définit un **mode spectral**  $\nu_p$  de la cavité.

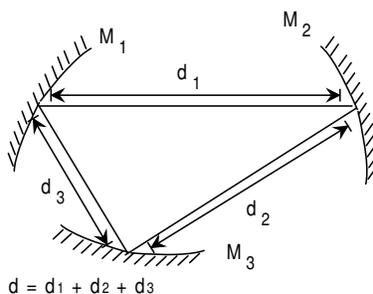
Les seules ondes pouvant s'établir dans la cavité sont celles dont la fréquence correspond à un mode spectral  $\nu_p$  de la cavité.

Pour  $\Delta L = 40 \text{ cm}$  et  $\lambda \simeq 0,4 \mu\text{m}$ ,  $p \simeq \frac{\nu_p \Delta L}{c_0} = \frac{\Delta L}{\lambda}$  est de l'ordre de  $10^6$ .

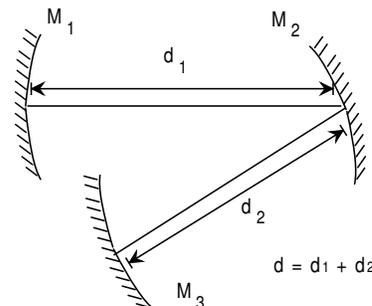
Suivant le type de laser, on peut avoir plusieurs modes spectraux dans le rayonnement, qui n'est alors pas tout à fait monochromatique. Les caractéristiques du milieu amplificateur choisi peuvent permettre de privilégier un petit nombre de modes qui seront effectivement amplifiés dans la cavité. Un rayonnement où n'existe qu'un seul mode est dit **monomode** spectral, il est considéré comme monochromatique. Un rayonnement où existent plusieurs modes est qualifié de **multimode** spectral.

Dans la pratique, le fonctionnement spectral du laser est donc défini par le couple (cavité+milieu amplificateur) choisi.

L'usage veut qu'on note  $d$  la **longueur optique totale d'une cavité en anneau** ( $d = \Delta L$ ), et  $d$  la **longueur optique pour un aller d'un miroir d'extrémité à l'autre pour une cavité linéaire** ( $\Delta L = 2d$ ).



cavité en anneau :  $d = d_1 + d_2 + d_3$ ,  $\Delta L = d$



cavité linéaire :  $d = d_1 + d_2$ ,  $\Delta L = 2d$

Avec cette notation, l'écart de fréquence entre deux modes spectraux consécutifs de la cavité s'écrit

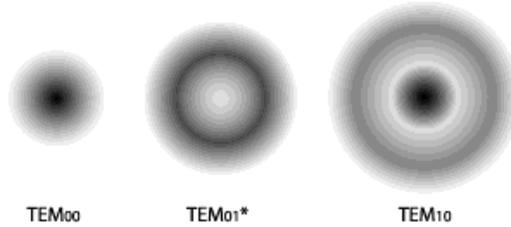
$$\delta\nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c_0}{d} \text{ (cavité en anneau)}$$

$$\delta\nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c_0}{2d} \text{ (cavité linéaire)}$$

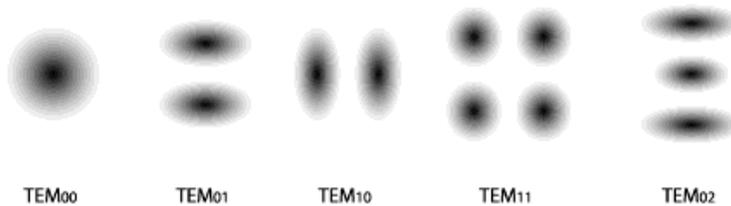
### 3.5 Modes spatiaux (modes transverses)

Le mode fondamental gaussien possède une répartition de l'intensité à symétrie de révolution autour de (Oz) et décroissance gaussienne dans le plan (Oxy). Il existe d'autres ondes solutions des équations de Maxwell, **possédant la même structure de phase** que le mode fondamental gaussien, mais avec d'autres formes pour la répartition de l'intensité dans les plans perpendiculaires à l'axe. On les appelle '**modes transverses**' ou **modes spatiaux**.

Deux séries de ces modes sont schématisées ci-dessous. Dans la pratique, un faisceau laser réel est une combinaison linéaire de ces modes transverses.



Modes de Laguerre-Gauss



Modes de Hermite-Gauss

Le mode le plus important est le mode TEM<sub>00</sub> pour lequel l'intensité lumineuse est en une seule tache, à symétrie de révolution autour de (Oz), et décroissant de manière gaussienne en fonction de  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . C'est le mode fondamental gaussien, qui a été décrit dans ce chapitre.

Les autres modes sont appelés *modes d'ordres supérieurs*. Ils ont une **extension latérale plus grande que celle du mode fondamental gaussien** mais la **même structure de phase**. En ajustant la dimension latérale de la cavité ou en plaçant des diaphragmes, il est possible de conserver la quasi-totalité du mode fondamental gaussien tout en atténuant suffisamment les autres pour imposer que l'effet laser se fasse sur le mode fondamental gaussien et rendre le laser monomode transverse si nécessaire.

## 3.6 Annexes

### 3.6.1 Faisceau gaussien - Onde sphérique - Onde plane

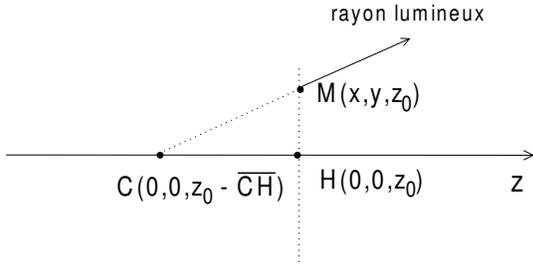
Pour un faisceau gaussien, le rayon de courbure complexe vérifie  $q(z) = z + i z_R$  et

$$\frac{i}{q(z)} = \frac{1}{z_R - iz} = \frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)} + \frac{i}{R(z)} \Leftrightarrow \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

On part de l'amplitude complexe de l'onde gaussienne (3.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{z_R}{z_R - iz} \exp -ikz \exp -\frac{k}{z_R - iz} \frac{x^2 + y^2}{2} \\ \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{iz_R}{q} \exp -ikz \exp -\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2} \\ \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{iz_R}{q} \exp -ikz \exp -\frac{2\pi \lambda}{\lambda \pi} \frac{x^2 + y^2}{2\omega^2(z)} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 R(z)} \\ \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{iz_R}{q} \exp -ikz \exp -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 R(z)} \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, on revient sur la notion d'onde sphérique pour déterminer l'amplitude complexe associée.



Soit un cône de lumière de centre  $C(0, 0, z_0 - \overline{CH})$  dans un milieu d'indice optique  $n = 1$ . Le rayon lumineux passant par  $M(x, y, z_0)$  pointe la direction de  $C$ . On suppose que le rayon se dirige de  $C$  vers  $M$  avec ici  $\overline{CH} > 0$

Le temps de propagation de cette onde de  $C$  à  $M$  vaut  $\Delta t_{CM} = \frac{CM}{c_0} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + \overline{CH}^2}}{c_0}$ . Lorsque  $M(x, y, z_0)$  est proche de  $H(0, 0, z_0)$ , on a  $|x|, |y| \ll |\overline{CH}|$  et

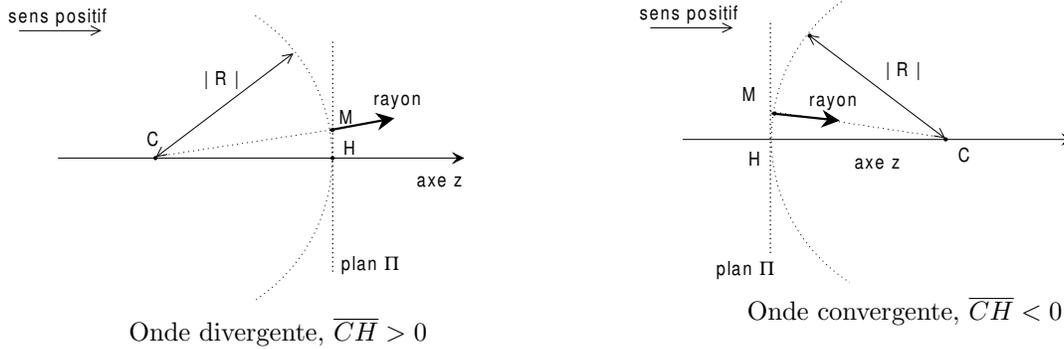
$$\begin{aligned} CM &= \overline{CH} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{\overline{CH}^2} \right)^{1/2} \text{ avec ici } \overline{CH} > 0 \\ &\simeq \overline{CH} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}^2} \right) \\ &= \overline{CH} + \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}} \end{aligned}$$

L'amplitude complexe de cette onde au point  $M$  a été écrite au §3.1.1 sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M) &= \alpha \mathcal{A}(C) \exp(-i \omega \Delta t_{CM}) \\ &= \alpha \mathcal{A}(C) \exp -i \omega \frac{\overline{CH}}{c_0} \exp -i \frac{\omega}{c_0} \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}} \\ &= \alpha \mathcal{A}(C) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \overline{CH} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}} \\ &= \mathcal{A}(H) \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}} \end{aligned}$$

L'onde décrite ici est un cône de lumière de sommet  $C$ . On inverse le raisonnement pour identifier une onde où la variation en  $x, y$  dans le terme de phase est de la forme  $\exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 \overline{CH}}$  dans le plan perpendiculaire en

H à (Oz) à un cône de lumière de centre C. Pour M au voisinage de H, les rayons lumineux sont orthogonaux à une sphère de rayon CH. La quantité  $\overline{CH}$  est appelée 'rayon de courbure de la phase'. Cette propriété peut être montrée pour  $\overline{CH} > 0$  (cône de lumière divergent) mais aussi pour  $\overline{CH} < 0$  (cône de lumière convergent).



Pour un faisceau gaussien, on a écrit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x, y, z) &= A_0 \frac{iz_R}{q} \exp -ikz \exp - \frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 R(z)} \\
 &= \underbrace{\mathcal{A}(0, 0, z) \exp - \frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}}_{\text{terme d'amplitude, réel}} \underbrace{\exp -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2 R(z)}}_{\text{terme de phase}}
 \end{aligned}$$

avec  $R(z) = z \left[ \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 + 1 \right]$ . En notant H le point de coordonnées (0, 0, z), on déduit de l'étude précédente sur la forme **de la phase** que l'onde gaussienne correspond au voisinage de H à un cône de lumière de centre C avec

$$\overline{CH} = R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \Leftrightarrow \overline{OC} = \overline{OH} + \overline{HC} = z - z - \frac{z_R^2}{z} = -\frac{z_R^2}{z}$$

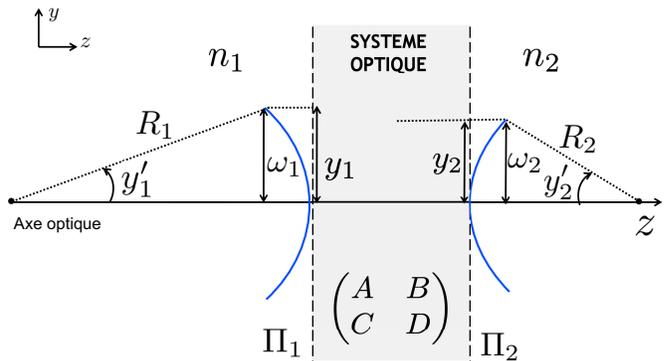
Pour  $z \gg z_R$ , C tend vers O. Le faisceau gaussien correspond à un cône de lumière de centre O.  
 Pour  $z \ll z_R$ ,  $\overline{OC}$  tend vers  $-\infty$ . Le faisceau gaussien correspond alors à un faisceau parallèle.

### 3.6.2 Démonstration de la loi 'ABCD'

On considère un système optique délimité par les plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  et pour lequel on connaît la matrice de transfert  $T_{\Pi_1 \rightarrow \Pi_2} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ .

La démonstration de la loi 'ABCD' se fait **dans le cadre de l'approximation scalaire** de la lumière, pour laquelle on considère que  $\lambda \ll \omega(z)$ . On s'appuie sur le schéma ci-contre qui fait apparaître les limites du faisceau incident sur le système optique correspondant à la demi-largeur  $\omega_1$  (définie pour l'intensité valant  $I(0, 0, z)/e^2$ ). On fait la correspondance entre les quantités  $y$  et  $y'$  introduites dans le chapitre II pour l'étude des cavités, et les grandeurs  $\omega$  et  $R$  (rayon de courbure de la phase) définies pour le faisceau gaussien, au niveau des plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ .

On a  $\begin{cases} \omega_1 = y_1 \\ R_1 = \frac{y_1}{y'_1} \end{cases}$  et  $\begin{cases} \omega_2 = y_2 \\ R_2 = \frac{y_2}{y'_2} \end{cases}$



D'après la définition de la matrice de transfert, on a :  $\begin{cases} y_2 = Ay_1 + By'_1 \\ y'_2 = Cy_1 + Dy'_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = \frac{y_2 - Ay_1}{B} \\ y'_2 = Cy_1 + Dy'_1 \end{cases}$  (1)

Par ailleurs  $\det(T_{\Pi_1 \rightarrow \Pi_2}) = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}$  (3)

On définit également les longueurs d'onde dans le milieu d'indice  $n_1$ ,  $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}$  et dans le milieu d'indice  $n_2$ ,  $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}$ , où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde de la lumière dans le vide.

Pour établir la loi 'ABCD', il est plus simple de raisonner avec l'inverse du rayon de courbure complexe  $\frac{1}{q_2}$

et de montrer que  $\frac{1}{q_2} = \frac{Cq_1 + D}{Aq_1 + B} = \frac{C + \frac{D}{q_1}}{A + \frac{B}{q_1}}$  (4)

Pour cela, on part de la définition de  $\frac{1}{q_2}$  :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi \omega_2^2} = \frac{y'_2}{y_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2} = \frac{Cy_1 + Dy'_1}{Ay_1 + By'_1} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2}$$

En utilisant la relation (1) pour remplacer  $y'_1$  :  $\frac{1}{q_2} = \frac{Cy_1 + \frac{D}{B}y_2 - \frac{AD}{B}y_1}{Ay_1 + y_2 - Ay_1} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2} = \frac{(BC - AD)y_1 + Dy_2}{By_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2}$

Compte-tenu de la relation (3), on doit donc avoir :  $\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{n_1}{n_2}y_1 + Dy_2}{By_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2}$  (5)

On va montrer qu'on retrouve l'expression (5) à partir de l'expression (4) :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + \frac{D}{q_1}}{A + \frac{B}{q_1}} = \frac{C + D(\frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda_1}{\pi \omega_1^2})}{A + B(\frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda_1}{\pi \omega_1^2})} = \frac{C + D(\frac{y'_1}{y_1} - i \frac{\lambda_1}{\pi y_1^2})}{A + B(\frac{y'_1}{y_1} - i \frac{\lambda_1}{\pi y_1^2})} = \frac{C + D\frac{y'_1}{y_1} - i \frac{\lambda_1 D}{\pi y_1^2}}{A + B\frac{y'_1}{y_1} - i \frac{\lambda_1 B}{\pi y_1^2}}$$

En utilisant la relation (1) :  $\frac{1}{q_2} = \frac{C + \frac{D}{B}\frac{y_2}{y_1} - \frac{AD}{B} - i \frac{\lambda_1 D}{\pi y_1^2}}{A + \frac{y_2}{y_1} - A - i \frac{\lambda_1 B}{\pi y_1^2}} = \frac{1}{B} \frac{BC - AD + D\frac{y_2}{y_1} - i \frac{\lambda_1 BD}{\pi y_1^2}}{\frac{y_2}{y_1} - i \frac{\lambda_1 B}{\pi y_1^2}} = \frac{-\frac{n_1}{n_2} + D\frac{y_2}{y_1} - i \frac{\lambda_1 BD}{\pi y_1^2}}{B\frac{y_2}{y_1} - i \frac{\lambda_1 B^2}{\pi y_1^2}}$

En multipliant au numérateur et au dénominateur par  $B\frac{y_2}{y_1} + i \frac{\lambda_1 B^2}{\pi y_1^2}$  puis par  $y_1^2$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_2} &= \frac{-\frac{n_1}{n_2}B\frac{y_2}{y_1} + BD(\frac{y_2}{y_1})^2 + \frac{\lambda_1^2 B^3 D}{\pi^2 y_1^4}}{B^2(\frac{y_2}{y_1})^2 + \frac{\lambda_1^2 B^4}{\pi^2 y_1^4}} - i \frac{\frac{n_1}{n_2}\frac{\lambda_1 B^2}{\pi y_1^2} + B^2 D \frac{\lambda_1 y_2}{\pi y_1^3} - \frac{\lambda_1 B^2 D y_2}{\pi y_1^3}}{B^2(\frac{y_2}{y_1})^2 + \frac{\lambda_1^2 B^4}{\pi^2 y_1^4}} \\ &= \frac{-\frac{n_1}{n_2}B y_2 y_1 + BD\left(y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2}\right)}{B^2 y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^4}{\pi^2 y_1^2}} - i \frac{\frac{n_1}{n_2}\frac{\lambda_1 B^2}{\pi}}{B^2 y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^4}{\pi^2 y_1^2}} \\ &= \frac{-\frac{n_1}{n_2}B y_2 y_1 + BD\left(y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2}\right)}{B^2\left(y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2}\right)} - i \frac{\frac{n_1}{n_2}\frac{\lambda_1 B^2}{\pi}}{B^2\left(y_2^2 + \frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2}\right)} \end{aligned}$$

On remarque que  $\frac{n_1}{n_2}\lambda_1 = \lambda_2$ . Par ailleurs,  $B$  représente typiquement la longueur effective du système optique traversé et prend des valeurs entre quelques mm et quelques mètres. Dans l'approximation scalaire, on a  $\lambda_i \ll y_i$  avec des valeurs typiques de moins de  $1\mu\text{m}$  pour  $\lambda_i$  et de plus de  $100\mu\text{m}$  pour  $y_i$ . Par conséquent le terme  $\frac{\lambda_1^2 B^2}{\pi^2 y_1^2}$  est toujours très inférieur au terme  $y_2^2$  et on le négligera dans l'expression trouvée ci-dessus.

Cette simplification conduit alors à :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{n_1}{n_2}B y_2 y_1 + BD y_2^2}{B^2 y_2^2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2} = \frac{-\frac{n_1}{n_2}y_1 + D y_2}{B y_2} - i \frac{\lambda_2}{\pi y_2^2} \text{ qui est l'expression (5) attendue.}$$

### 3.6.3 Démonstration de la règle d'accord des rayons de courbure dans le cas d'une cavité à 2 miroirs

Pour vérifier directement que le rayon de courbure de l'onde au niveau d'un miroir d'extrémité de cavité correspond bien au rayon de courbure du miroir, on reprend le raisonnement du §3.3.3 en écrivant le polynôme en fonction de  $\frac{1}{q}$ .

$$C + (D - A)\left(\frac{1}{q}\right) - B\left(\frac{1}{q}\right)^2 = 0$$

$\frac{1}{q}$  possède une partie imaginaire négative, c'est la racine du polynôme dont la partie imaginaire est négative :

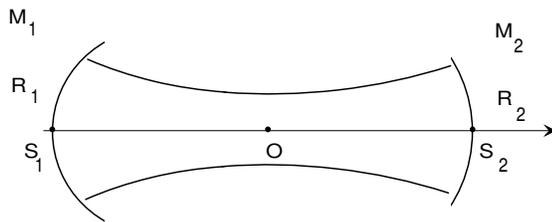
$$\frac{1}{q} = \frac{D-A}{2B} - i \frac{1}{2B} \sqrt{-\Delta}$$

qui, par identification des parties réelles et imaginaires avec l'expression  $\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)}$ , détermine les quantités  $R(z)$  et  $\omega(z)$  du faisceau dans le plan  $\pi$ .

Dans le cas d'une cavité à 2 miroirs, les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont donnés au §2.2.2.3.e) pour une onde se propageant à partir du plan  $\pi$  accolé à  $M_1$ . On peut vérifier que

$$\frac{1}{R} = \frac{D-A}{2B} = -\frac{1}{R_1}$$

Le rayon de courbure de la phase en  $\pi$  correspond bien en valeur absolue au rayon de courbure du miroir  $M_1$ . Ce résultat justifié ici pour une cavité à deux miroirs se démontre d'une manière analogue pour une cavité linéaire quelconque.



Remarque importante : Pour une cavité linéaire dont les deux miroirs d'extrémité sont concaves, on a  $R_1 > 0$  et  $R_2 > 0$ . Pour le faisceau gaussien, le rayon de courbure de la phase est positif après le waist mais négatif avant. La figure montre que les rayons lumineux associés à l'onde arrivent en incidence normale sur  $M_1$  et  $M_2$  si on a  $R(S_2) = R_2$  et  $|R(S_1)| = R_1$  avec  $|R(S_1)| = -R(S_1)$ .

## Chapitre 4

# PRINCIPES DE BASE DES AMPLIFICATEURS LASERS

L'effet laser est possible s'il existe un système capable d'amplifier l'intensité d'une onde lumineuse. Dans ce chapitre, on va étudier les mécanismes physiques d'interaction lumière-matière permettant de réaliser une telle amplification.

## 4.1 Interaction matière-rayonnement

### 4.1.1 Caractérisation de la matière : le modèle du système à deux niveaux

Le milieu amplificateur peut être constitué d'atomes, de molécules ou d'ions, sous forme gazeuse, liquide ou solide. On fera référence dans la suite à un milieu atomique, les résultats décrits se généralisant aux autres types de milieux amplificateurs.

La structure d'un atome est quantifiée. Cela signifie que l'énergie interne d'un état stable ne peut prendre que certaines valeurs  $E_i$  bien définies (**niveaux d'énergie 'discrets'** par opposition à 'continus'). L'atome est dans un état quantique d'énergie  $E_i$ . Les différents états quantiques de même énergie constituent le **niveau d'énergie**  $E_i$ . Le nombre d'états quantiques formant un niveau d'énergie s'appelle la **dégénérescence quantique** de ce niveau.

Le nombre de niveaux d'énergie d'un atome ou d'une molécule est très important mais, en général, la prise en compte de 2, 3 ou 4 de ces niveaux est suffisante pour décrire le fonctionnement d'un amplificateur. On considérera pour la suite de ce paragraphe un ensemble d'objets quantiques quasi identiques, appelé 'le milieu' et modélisé par un **système à deux niveaux d'énergie** avec les caractéristiques suivantes :



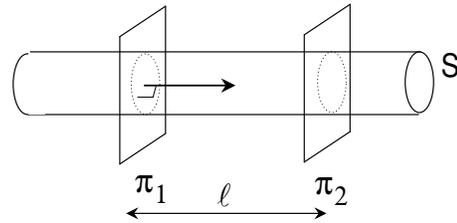
1. Les atomes sur le niveau 1 (2) possèdent l'énergie interne  $E_1$  ( $E_2$ ) avec par convention  $E_2 > E_1$ . On note  $h\nu_0 = E_2 - E_1$  la différence d'énergie entre ces deux niveaux.
2. On définit la **population** du niveau  $i$  : c'est le nombre d'atomes **par unité de volume** dans le milieu et sur le niveau  $i$ . Elle est notée  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ) et s'exprime en atomes par  $\text{m}^3$  ( $[N_i] = \text{m}^{-3}$ ).
3. La dégénérescence quantique du niveau  $i$  est notée  $g_i$ <sup>1</sup>.
4. Un atome peut passer du niveau 2 au niveau 1 **en émettant un photon** d'énergie  $h\nu_0 = E_2 - E_1$ . La pulsation du photon est  $\omega = 2\pi\nu_0$ , sa longueur d'onde mesurée dans le vide est  $\lambda_0 = \frac{c_0}{\nu_0}$  ( $[\omega] = \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $[\nu_0] = \text{Hz}$ ,  $[\lambda_0] = \text{m}$ )<sup>2</sup>
5. Un atome peut passer du niveau 1 au niveau 2 **en absorbant un photon** d'énergie  $h\nu_0 = E_2 - E_1$ ,

1. Attention à ne pas confondre la dégénérescence quantique d'un niveau d'énergie, et les facteurs géométriques  $g_1$  et  $g_2$  qu'on a définis pour une cavité linéaire à deux miroirs.

2. Attention, on confond ici dimension et unité, ce qui est pratique mais pas rigoureusement correct.

### 4.1.2 Caractérisation du rayonnement

Le rayonnement (l'onde) est un faisceau lumineux homogène et parallèle de section  $S$  (c'est à peu près le cas pour un faisceau gaussien au voisinage de son waist et près de l'axe optique). Cette onde est monochromatique de fréquence  $\nu$ . Soient les plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , distants de  $\ell$ . La portion du faisceau comprise entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$  a pour volume  $S\ell$  et contient  $N$  photons.



On rappelle les définitions et relations utiles :

- l'énergie  $E$  contenue par le faisceau entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$  :

$$E = N h\nu \quad (J) \tag{J}$$

- l'énergie par unité de volume  $u$  dans le faisceau (ou densité volumique d'énergie) :

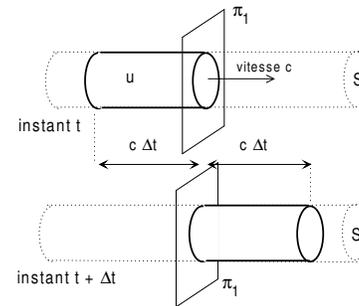
$$u = \frac{dE}{d\tau} = \frac{E}{S\ell} \quad (J \cdot m^{-3}) \tag{J \cdot m^{-3}}$$

- la puissance lumineuse  $\mathcal{P}$  au niveau de  $\pi_1$  est définie comme l'énergie lumineuse traversant  $\pi_1$  par unité de temps.

Les photons traversant  $\pi_1$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  sont ceux contenus dans un cylindre de section  $S$  et de longueur  $c \Delta t$ , où  $c = \frac{c_0}{n}$  est la vitesse de la lumière dans le milieu d'indice  $n$ . Ces photons correspondent à l'énergie  $u S c \Delta t$ .

L'énergie lumineuse traversant  $\pi_1$  par unité de temps s'obtient en divisant le résultat précédent par  $\Delta t$ , d'où pour la puissance

$$\mathcal{P} = \frac{u S c \Delta t}{\Delta t} = u S c \quad (J \cdot s^{-1}) \text{ ou } (W) \tag{J \cdot s^{-1}) \text{ ou } (W)}$$

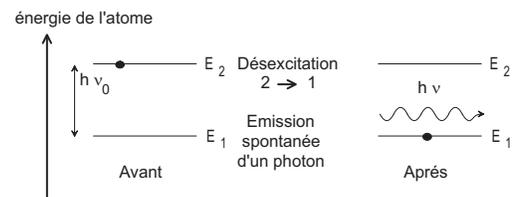


- l'intensité lumineuse est la puissance au niveau d'un plan  $\pi_1$  perpendiculaire à la direction de propagation, par unité de surface, soit

$$I = \frac{d\mathcal{P}}{dS} = u c \quad (J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}) \text{ ou } (W \cdot m^{-2}) \tag{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}) \text{ ou } (W \cdot m^{-2})}$$

### 4.1.3 Émission spontanée

Soit un milieu amplificateur modélisé par un système à deux niveaux d'énergie ('le milieu'). Un atome sur le niveau 2 peut se désexciter spontanément vers le niveau 1 avec l'émission d'un photon d'énergie  $h\nu_0 = E_2 - E_1$ . C'est le processus d'émission spontanée. Les photons produits par émission spontanée sont émis de manière isotrope dans toutes les directions de l'espace.



Soit  $dn_{es}$  le nombre de photons produits par émission spontanée pendant un intervalle de temps  $dt$  et par unité de volume. Ce nombre, exprimé en  $m^{-3}$ , est proportionnel à  $dt$  et à la population du niveau 2 :

$$dn_{es} = A_{21} N_2 dt$$

Le coefficient  $A_{21}$  correspond donc à la probabilité d'émission spontanée par seconde et par atome, on l'appelle coefficient d'Einstein pour l'émission spontanée. On parlera aussi de 'probabilité par unité de temps' pour l'émission spontanée.

Lorsque l'émission spontanée est la seule cause de variation du nombre d'atomes sur le niveau 2, la variation de la population pendant  $dt$  vaut :

$$dN_2 = -dn_{es} = -A_{21} N_2 dt$$

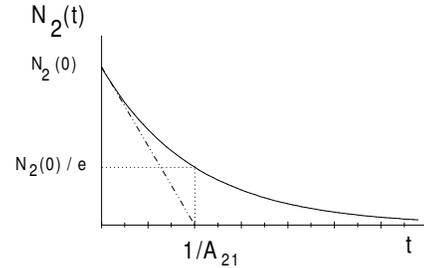
ou bien

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21} N_2$$

La quantité  $\frac{dN_2}{dt}$  est le **taux de désexcitation**, ou le taux de relaxation du niveau 2. L'intégration de cette équation différentielle donne

$$N_2(t) = N_2(0) \exp -A_{21}t$$

La population  $N_2$  décroît exponentiellement au cours du temps avec  $N_2(t) = N_2(0)/e = 0,37 N_2(0)$  pour  $t = 1/A_{21}$ .



La quantité  $\tau_{es} = \frac{1}{A_{21}}$  est par définition le **durée de vie radiative** du niveau 2.

Remarques :

\* L'émission spontanée est le mécanisme de base de la 'luminescence' de la matière. Selon le contexte, on la désigne par différents termes :

- 'fluorescence', pour des gaz monoatomiques ou moléculaires. Les durées de vie radiative peuvent aller de la picoseconde ( $10^{-12}$  s) à la milliseconde ( $10^{-3}$  s). Dans le domaine biologique, citons la luminescence d'un vers luisant<sup>3</sup>.

- 'phosphorescence' lorsque dans certains solides la durée de vie radiative peut dépasser la seconde.

\* Expérimentalement, la quantité mesurée est l'énergie lumineuse  $\Delta P_{es}$  émise par unité de temps par l'émission spontanée des atomes contenus dans un volume  $\Delta V$ . Cette puissance s'analyse physiquement comme :

$$\begin{aligned} \Delta P_{es} &= (\text{énergie d'un photon}) \times (\text{proba. d'émission spontanée par atome et par seconde}) \\ &\quad \times (\text{nombre d'atomes sur le niveau 2 par unité de volume}) \times (\text{volume}) \\ \text{soit } \Delta P_{es} &= h\nu_0 A_{21} N_2 \Delta V \end{aligned}$$

\* La population du niveau 2 à  $t = 0$  est notée  $N_2(0)$ . On veut évaluer le nombre d'atomes du volume  $V$  se désexcitant entre  $t$  et  $t + dt$  sachant que certains se sont désexcités entre 0 et  $t$ . La population du niveau 2 à l'instant  $t$  vaut  $N_2(t) = N_2(0) \exp -A_{21}t$ . Pour chaque atome excité, la probabilité de se désexciter pendant  $dt$  vaut  $A_{21} dt$ . Avec  $N_2(t) \times V$  atomes sur 2 à l'instant  $t$ , le nombre de désexcitations entre  $t$  et  $t + dt$  vaut alors  $A_{21} dt N_2(t) V = A_{21} dt N_2(0) V \exp(-A_{21}t)$ .

#### 4.1.4 Absorption et émission induite

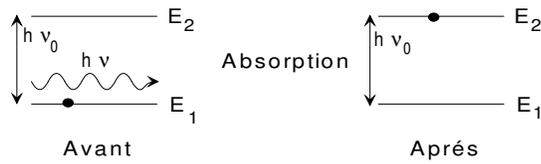
On considère un milieu modélisé par un système à deux niveaux ( $h\nu_0 = E_2 - E_1$ ) en présence d'un rayonnement de fréquence  $\nu$ .

Lorsque  $\nu$  est très différent de  $\nu_0$ , il n'y a aucune interaction possible entre le milieu amplificateur et le rayonnement.

Lorsque  $\nu$  est très proche de  $\nu_0$  (voir discussion plus loin qui précisera cette condition), l'interaction entre le rayonnement et un atome sur le niveau 1 peut **induire** la transition de cet atome du niveau 1 vers le niveau 2<sup>4</sup>. C'est le **processus d'absorption**.

3. L'oxydation d'une molécule complexe, la luciférine, par une enzyme appelée luciférase, forme un produit excité émettant par bioluminescence une lumière jaune-verte.

4. L'accord entre l'énergie du photon et la différence de niveaux d'énergie n'est pas la seule condition nécessaire à l'émission/absorption. Il existe en effet en mécanique quantique des règles de sélection pour le passage d'un niveau à un autre, ce qui fait que toutes les transitions ne sont pas forcément autorisées.



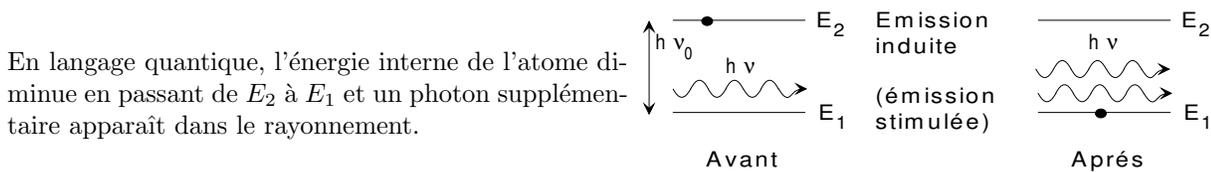
En langage quantique, un photon du rayonnement disparaît au cours du processus d'absorption et son énergie est transférée à l'atome sous forme d'énergie interne (transition 1→2). Un atome passe du niveau 1 au niveau 2.

Le nombre de photons **absorbés** pendant un intervalle de temps  $dt$  et par unité de volume est proportionnel à la population **du niveau 1** et à  $dt$  :

$$dn_a = W_{12} N_1 dt$$

où  $W_{12}$  est la **probabilité d'absorption** par seconde et par atome, en  $s^{-1}$ .

De manière totalement symétrique, l'interaction entre le rayonnement et un atome **sur le niveau 2** peut **induire la transition de l'atome du niveau 2 vers le niveau 1**. C'est le processus **d'émission induite** appelé aussi **émission stimulée**.



En langage quantique, l'énergie interne de l'atome diminue en passant de  $E_2$  à  $E_1$  et un photon supplémentaire apparaît dans le rayonnement.

Le nombre de photons produits par émission induite pendant un intervalle de temps  $dt$  et par unité de volume est proportionnel à la population **du niveau 2** et à  $dt$  :

$$dn_{ei} = W_{21} N_2 dt$$

où  $W_{21}$  est la **probabilité d'émission induite** par seconde et par atome.

Propriété importante : le photon 'créé' par émission induite **a les mêmes caractéristiques que le rayonnement inducteur** (fréquence, phase, polarisation, direction et sens de propagation). Ce processus est le mécanisme de base du laser et lui a donné son nom (LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

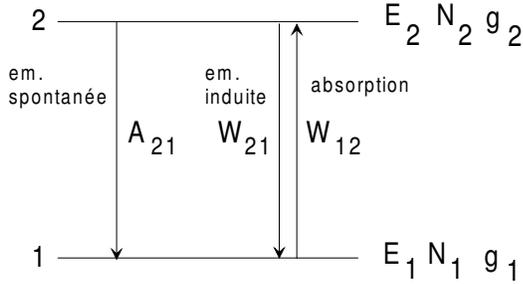
Pour un laser idéal, un photon initial crée lors de passages successifs dans le milieu amplificateur un grand nombre de photons identiques dont une partie est extraite hors de la cavité pour constituer le faisceau laser monochromatique et monodirectionnel. Ce processus est à l'origine de la **cohérence** du rayonnement laser.

#### 4.1.5 Équations d'évolution temporelle des populations

\* a) Exemple 1 : **système fermé à 2 niveaux**

On considère un système à deux niveaux pour lequel les atomes sont soit sur le niveau 1, soit sur le niveau 2 à l'exclusion de tout autre niveau (système fermé).<sup>5</sup>

<sup>5</sup>. L'exemple présenté ici est uniquement intéressant d'un point de vue pédagogique. En effet, on verra dans le TD n°4 qu'on ne peut jamais réaliser de laser avec un système fermé à 2 niveaux !



La probabilité d'émission spontanée par seconde et par atome vaut  $A_{21}$ , ce système est en présence d'un rayonnement de fréquence  $\nu$  pour lequel les probabilités par seconde et par atome pour l'absorption et l'émission induite sont  $W_{12}$  et  $W_{21}$ . On a donc :

$$dn_{es} = A_{21} N_2 dt$$

$$dn_a = W_{12} N_1 dt$$

$$dn_{ei} = W_{21} N_2 dt$$

Les **équations d'évolution temporelle** des populations  $N_1$  et  $N_2$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= -\frac{dn_{es}}{dt} - \frac{dn_{ei}}{dt} + \frac{dn_a}{dt} = -(A_{21} + W_{21}) N_2 + W_{12} N_1 \\ \frac{dN_1}{dt} &= \frac{dn_{es}}{dt} + \frac{dn_{ei}}{dt} - \frac{dn_a}{dt} = +(A_{21} + W_{21}) N_2 - W_{12} N_1 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un **système fermé**, par définition la somme  $N_1 + N_2$  reste **constante** donc doit vérifier  $\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} = 0$

\* b) Exemple 2 : système **ouvert**

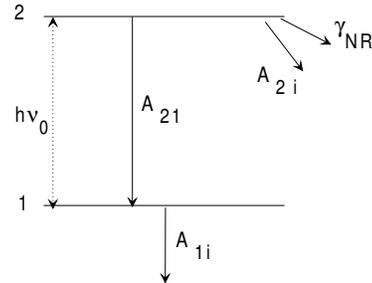
Un atome sur le niveau d'énergie  $E_1$  peut se désexciter par émission spontanée vers d'autres niveaux (non représentés sur la figure ci-dessous) avec la probabilité par seconde  $A_{1i}$ .

Un atome sur le niveau 2 peut se désexciter par émission spontanée vers 1 avec une probabilité par seconde notée  $A_{21}$ , mais aussi par émission spontanée vers d'autres niveaux non précisés (probabilités par seconde  $A_{2i}$ ) et par désexcitation non radiative (probabilités par seconde  $\gamma_{NR}$ ). Ce système à deux niveaux est de type 'ouvert'.

Une désexcitation non radiative signifie une perte d'énergie par l'atome autrement que par émission d'un photon (collision avec un autre atome, conversion entre excitation électronique et excitation vibrationnelle pour une molécule ou un solide).

S'il n'existe dans ce milieu **aucun photon susceptible d'être absorbé ou d'induire de l'émission**, les équations d'évolution des populations s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= -(A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR}) N_2 \\ \frac{dN_1}{dt} &= +A_{21} N_2 - A_{1i} N_1 \end{aligned}$$



On constate que  $\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt}$  est non nul donc la somme  $N_1 + N_2$  varie au cours du temps : des atomes peuvent passer sur des niveaux d'énergie autres que 1 ou 2, c'est ce qu'on appelle un système ouvert.

Pour un ensemble d'atomes  $N_2(0)$  portés sur le niveau 2 à  $t = 0$ , l'intégration conduit à

$$N_2(t) = N_2(0) \exp[-(A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR}) t]$$

$N_2(t)$  décroît exponentiellement avec le temps caractéristique  $\tau_2$  tel que

$$\frac{1}{\tau_2} = A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR}$$

Ce temps  $\tau_2$  est appelé **la durée de vie du niveau 2**. On a  $\frac{dN_2}{dt} = -\frac{t}{\tau_2}$  d'où  $N_2(t) = N_2(0) \exp(-t/\tau_2)$  et  $N_2(\tau_2) = N_2(0)/e \simeq 0,37N_2(0)$ .

$\frac{1}{\tau_2}$  est la somme des probabilités par seconde de quitter le niveau 2 par des processus spontanés (à l'exclusion donc de l'émission induite ou de l'absorption vers des niveaux d'énergie supérieure).

Remarque : pour ce système, la durée de vie radiative  $\tau_{es}$  vérifie  $\frac{1}{\tau_{es}} = A_{21} + A_{2i}$  et on a :

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_{es}} + \gamma_{NR}$$

\* c) Généralisation

De façon générale, pour écrire les équations d'évolution temporelle des populations dans un milieu amplificateur à plusieurs niveaux d'énergie  $i$  :

- On commencera par dessiner le schéma des niveaux impliqués. On y représentera tous les processus qui peuvent peupler ou dépeupler ces niveaux en les indiquant par des flèches et en reportant les probabilités de transition par seconde associées (probabilité d'absorption, de désexcitation non radiative, d'émission spontanée, d'émission induite).

- On écrira l'équation relative à une population  $N_i$  en faisant le bilan des processus impliquant le niveau  $i$  : on comptera positivement les contributions qui peuplent  $i$  (flèches qui arrivent sur le niveau  $i$ ) et négativement celles qui le dépeuplent (flèches qui partent du niveau  $i$ ).

- Si le système est fermé, on vérifiera que  $\sum_i \frac{dN_i}{dt} = 0$ .

#### 4.1.6 Profil spectral - Coefficients d'Einstein

Dans l'étude des lasers, on a presque toujours affaire à l'interaction d'un milieu avec un rayonnement quasi-monochromatique. On précise les expressions de  $W_{12}$  et  $W_{21}$  dans ce cas.

Un rayonnement monochromatique de fréquence  $\nu$  interagit avec un système à deux niveaux ( $E_2 - E_1 = h\nu_0$ ) par absorption ou émission induite avec les probabilités par seconde et par atome  $W_{12}$  et  $W_{21}$  respectivement. Pour ces processus induits, les probabilités sont proportionnelles au nombre de photons présents dans l'onde, donc à la densité volumique d'énergie  $u$  du rayonnement monochromatique (puisque  $u = \frac{N h \nu}{S \ell}$ ).

Lorsque  $\nu = \nu_0$ , on dit que l'interaction est **résonante** et les probabilités  $W_{12}$  et  $W_{21}$  sont alors maximales. L'expérience montre que lorsque  $\nu$  s'écarte légèrement de  $\nu_0$ , l'interaction devient moins efficace pour devenir totalement inefficace quand  $\nu$  est un peu plus différent de  $\nu_0$ .

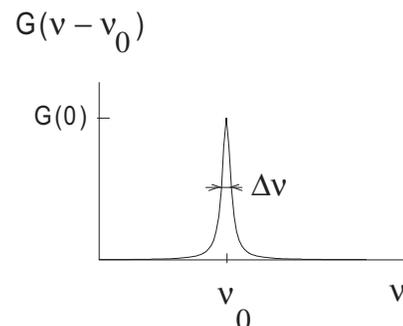
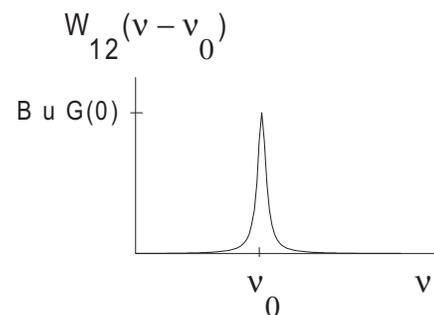
Par définition, on écrit

$$\begin{aligned} W_{12}(\nu - \nu_0) &= B_{12} u g(\nu - \nu_0) \\ W_{21}(\nu - \nu_0) &= B_{21} u g(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$

où  $g(\nu - \nu_0)$  est une fonction de  $\nu$  appelée **profil spectral de la transition**, maximale pour  $\nu = \nu_0$ , tendant vers zéro quand  $\nu$  s'éloigne de  $\nu_0$  et vérifiant par construction  $\int g(\nu - \nu_0) d\nu = 1$  (profil normé).

La **largeur totale à mi-hauteur** du profil  $g(\nu - \nu_0)$  est notée  $\Delta\nu$ , c'est par définition la **largeur spectrale** de la transition.

Pour  $|\nu - \nu_0| \ll \Delta\nu$ , l'interaction est quasi-résonante, son efficacité est maximum. Pour  $|\nu - \nu_0| \gg \Delta\nu$ , le rayonnement n'induit ni absorption ni émission induite pour ces atomes.



$B_{12}$  et  $B_{21}$  sont les **coefficients d'Einstein** pour l'absorption et l'émission induite (ou stimulée). On a les dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} [A_{21}] = [W_{21}] = [W_{12}] &= \text{s}^{-1} \\ [u] &= \text{J} \cdot \text{m}^{-3} \\ [g(\nu - \nu_0)] &= \text{Hz}^{-1} \equiv \text{s} \quad \text{puisque } \int g(\nu - \nu_0) d\nu = 1 \\ [B_{21}] = [B_{12}] &= \text{J}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

Des calculs semi-classiques ou quantiques déterminent entre les coefficients d'Einstein et les dégénérescences quantiques les relations suivantes :

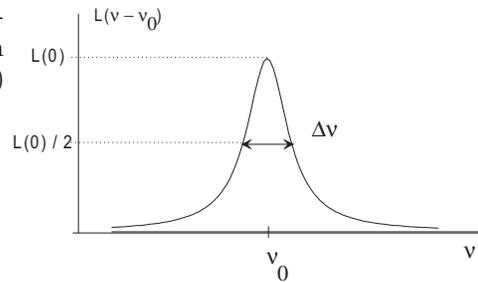
$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu_0^3}{c^3} \quad \text{avec } \nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h} \text{ et } c = c_0/n. \quad (4.1)$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \Leftrightarrow g_1 W_{12} = g_2 W_{21} \quad (4.2)$$

Dans la pratique, le coefficient  $A_{21}$  est accessible expérimentalement par la mesure de la durée de vie radiative des atomes sur le niveau 2. Les coefficients  $B_{21}$  et  $B_{12}$  en sont déduits par les relations (4.1) et (4.2).

Le profil spectral  $g(\nu - \nu_0)$  est en général centré sur la fréquence de résonance notée  $\nu_0$ . Son expression analytique dépend des propriétés de l'atome et de son interaction avec son environnement. Un type de profil très courant est le **profil lorentzien**, noté  $L(\nu - \nu_0)$  dont l'expression est la suivante :

$$L(\nu - \nu_0) = \frac{2}{\pi \Delta\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2}\right)^2}$$

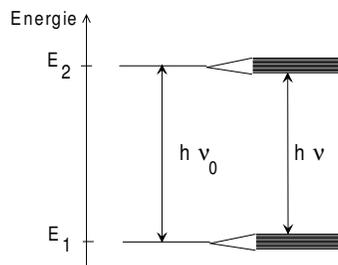


Pour  $\nu = \nu_0 \pm \frac{\Delta\nu}{2}$ , on a bien  $L(\nu - \nu_0) = L(0)/2$  donc  $\Delta\nu$  correspond bien à la largeur totale à mi-hauteur de  $L(\nu - \nu_0)$ .

La hauteur  $L(0) = \frac{2}{\pi \Delta\nu}$  pour  $\nu = \nu_0$  permet de vérifier  $\int L(\nu - \nu_0) d\nu = 1$ .

Il existe aussi des profils spectraux de type gaussien, ou de type Voigt (convolution gaussien/lorentzien).

Au niveau quantique, l'absorption d'un photon de fréquence  $\nu$  légèrement différente de  $\nu_0$  reste possible tout en respectant la conservation de l'énergie parce que les niveaux 1 et 2 ont en réalité **une largeur en énergie non nulle**. L'énergie de résonance  $h\nu_0$  représente l'écart entre les centres des niveaux 1 et 2. L'absorption d'un photon d'énergie légèrement inférieure à  $\nu_0$  peut correspondre par exemple à une transition entre le haut du niveau 1 et le bas du niveau 2. La mécanique quantique prévoit que cette situation est d'autant moins probable que  $\nu$  s'éloigne de  $\nu_0$ .



### 4.1.7 Largeur naturelle et élargissement spectral

Le profil spectral  $g(\nu - \nu_0)$  caractérise l'efficacité de l'interaction entre une onde et un milieu. Le but de ce paragraphe est de préciser sa forme pour un milieu amplificateur donné et d'étudier comment elle peut dépendre des propriétés physiques de ce milieu (température, concentration des molécules actives, ...)

#### a) Largeur naturelle

\* Profil spectral d'une transition atomique

La mécanique quantique fait apparaître un parallèle entre l'émission induite et l'émission spontanée : pour un atome à deux niveaux  $E_2 - E_1 = h\nu_0$  avec la probabilité d'émission spontanée par seconde  $A_{21}$ , on peut montrer que la probabilité par seconde d'émettre un photon **dont la fréquence est comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$**  s'écrit

$$A_{21} g(\nu - \nu_0) d\nu$$

où  $g(\nu - \nu_0)$  est le profil spectral de la transition. Cette fonction est celle qui a été introduite dans la relation  $W_{21} = B_{21}g(\nu - \nu_0)$ .

Le terme  $g(\nu - \nu_0) d\nu$  correspond à la probabilité pour qu'un photon émis par un atome le soit avec une fréquence dans l'intervalle  $[\nu, \nu + d\nu]$ .

\* Spectre des fréquences du rayonnement émis par un ensemble d'atomes

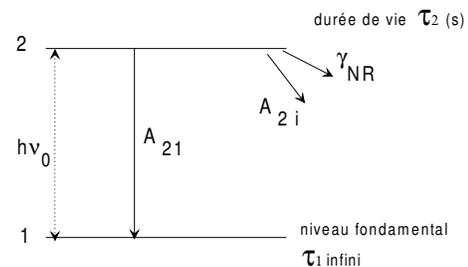
Considérons maintenant un grand nombre de ces atomes, et l'intensité  $I$  produite par l'émission spontanée de ce milieu. Si  $J(\nu)$  est le spectre des fréquences de ce rayonnement, alors  $J(\nu)d\nu$  est la probabilité pour qu'un photon du rayonnement possède une fréquence dans l'intervalle  $[\nu, \nu + d\nu]$ . Dans le cas où les atomes possèdent tous exactement le même profil spectral, on peut identifier le profil spectral d'un atome et le spectre des fréquences du rayonnement pour écrire

$$g(\nu - \nu_0) = J(\nu)$$

\* Exemple d'une transition vers le niveau fondamental

On considère le système décrit ci-contre avec des atomes excités sur le niveau 2 à  $t = 0$ . L'intensité produite par émission spontanée  $2 \rightarrow 1$  est proportionnelle à  $N_2(t)$  et s'écrit  $I(t) = I(0) \exp -\frac{t}{\tau_2}$  où  $\tau_2$  est la durée de vie du niveau 2.

$$\frac{1}{\tau_2} = A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR}$$



Les lois générales de l'optique font que le spectre  $J(\nu)$  des fréquences de ce rayonnement se calcule à partir de la transformée de Fourier de  $I(t)$  et vaut ici :<sup>6</sup>

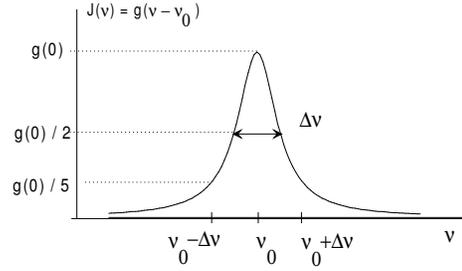
$$J(\nu) = \frac{2}{\pi \Delta\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \Delta\nu = \frac{1}{2\pi \tau_2}$$

Cette fonction vérifie  $\int J(\nu) d\nu = 1$ . De l'identification  $g(\nu - \nu_0) = J(\nu)$ , on déduit la propriété suivante : pour une transition entre un niveau excité de durée de vie  $\tau_2$  et le niveau fondamental et pour un système où tous les atomes possèdent exactement les mêmes propriétés physiques, le profil spectral de la transition s'écrit :

$$g(\nu - \nu_0) = L(\nu - \nu_0) = \frac{2}{\pi \Delta\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \Delta\nu = \frac{1}{2\pi \tau_2}$$

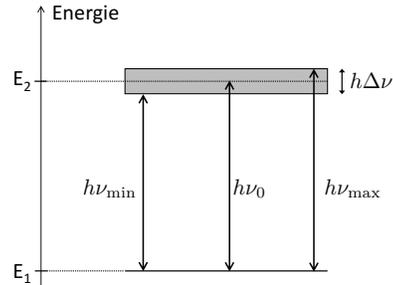
6. Le principe du calcul du spectre des fréquences serait le même pour des ondes acoustiques ou un signal analogique quelconque en électronique.

La fonction  $L(\nu - \nu_0)$  est une courbe lorentzienne centrée sur  $\nu_0$  et de hauteur  $L(0) = \frac{2}{\pi \Delta \nu}$  pour  $\nu = \nu_0$ . La grandeur  $\Delta \nu$  a la dimension d'une fréquence (Hz) et vérifie  $L((\nu_0 \pm \frac{\Delta \nu}{2}) - \nu_0) = 1/2$ , c'est la largeur totale à mi-hauteur notée également **largeur spectrale de la transition**.



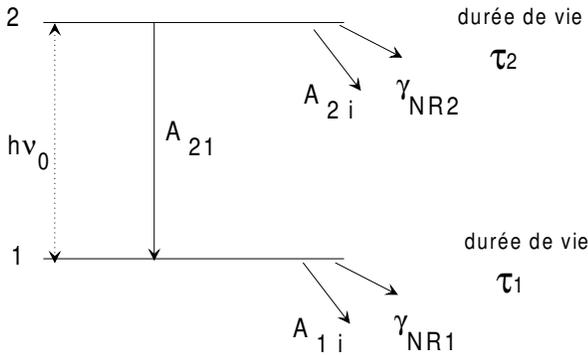
Interprétation physique :

Les photons émis lors de la transition  $2 \rightarrow 1$  ont des énergies réparties qualitativement sur l'intervalle  $[h\nu_0 - \frac{h\Delta\nu}{2}, h\nu_0 + \frac{h\Delta\nu}{2}]$  de largeur  $h\Delta\nu$ . Ce résultat s'interprète comme si le niveau 2 avait une largeur en énergie  $h\Delta\nu$ . La mécanique quantique (incertitude de Heisenberg) prévoit qu'un niveau de durée de vie  $\tau_2$  possède une largeur en énergie de  $\frac{h}{2\pi \tau_2}$ .



\* Exemple d'un système à deux niveaux quelconque

On généralise le résultat précédent pour une transition se produisant entre deux niveaux 2 et 1 quelconques, l'un et l'autre pouvant se désexciter vers d'autres niveaux avec les probabilités par seconde indiquées sur le schéma



Les différentes causes de désexcitation définissent les durées de vie  $\tau_2$  et  $\tau_1$  des niveaux 2 et 1 par

$$\frac{1}{\tau_2} = A_{21} + A_{2i} + \gamma_{NR2}$$

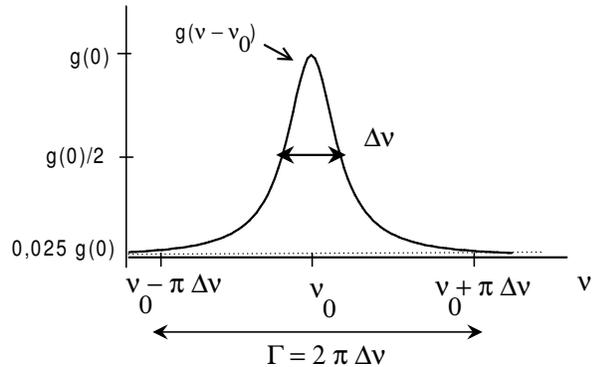
$$\frac{1}{\tau_1} = A_{1i} + \gamma_{NR1}$$

Pour ce système, on peut montrer que le profil spectral de la transition a la même forme analytique

$$L(\nu - \nu_0) = \frac{2}{\pi \Delta \nu} \frac{1}{1 + (\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu / 2})^2}$$

avec maintenant la largeur spectrale

$$\Delta \nu = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)$$



La largeur spectrale  $\Delta \nu$  ainsi obtenue est liée uniquement aux propriétés intrinsèques de l'atome (valeurs des probabilités de transition), on l'appelle **largeur spectrale naturelle** de la transition, on la notera  $\Delta \nu_{naturelle}$ . La grandeur  $\Gamma_{naturelle} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} = 2\pi \Delta \nu$  est par définition **la largeur naturelle de la transition**.

Exemple numérique :

Sodium, transition  $3p(\tau_2 = 16ns) \rightarrow 3s$  (fondamental) à  $\lambda = 589 \text{ nm}$ .  
 $\Gamma = 1/\tau_2 = 6.25 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ .  $\Delta\nu = \frac{\Gamma}{2\pi} \simeq 10 \text{ MHz}$

### b) Notion d'élargissement spectral

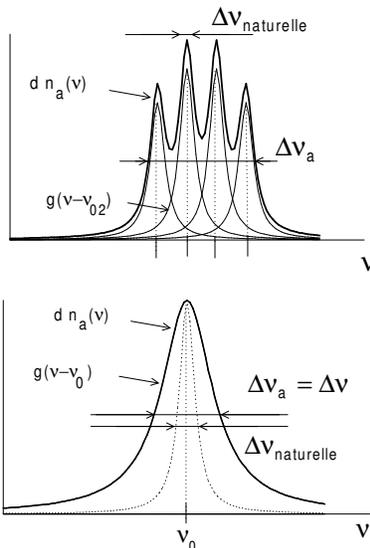
On observe expérimentalement que la largeur du spectre  $J(\nu)$  de la lumière émise par un milieu est généralement supérieure ou très supérieure à la largeur spectrale naturelle. Cet effet, appelé **élargissement spectral**, est dû aux interactions existant entre l'atome émetteur et son environnement (autres atomes, champs extérieurs, etc.), ou bien au comportement de l'atome (vitesse, par exemple). On décrit deux situations physiques opposées :

- tous les atomes émettent avec la même largeur spectrale  $\Delta\nu_{naturelle}$  **autour d'une fréquence d'émission  $\nu_i$  variant légèrement d'un atome à l'autre** autour de la valeur  $\nu_0$ . Ce type de milieu est à **élargissement spectral inhomogène pur**.
- **tous les atomes émettent le même spectre de lumière** centré sur  $\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$  mais avec une même largeur  $\Delta\nu$  supérieure ou égale à  $\Delta\nu_{naturelle}$ . Ce type de milieu est à **élargissement spectral homogène pur**.

En guise d'exemple, on décrit une expérience où l'on envoie sur un milieu ( $E_2 - E_1 = h\nu_0$ ) un faisceau monochromatique de fréquence  $\nu$  pour mesurer en fonction de  $\nu$  le nombre de photons absorbés par les atomes du milieu pendant  $dt$  et par unité de volume :

$$dn_a(\nu) = \sum_{milieu} W_{12}(\nu) N_1 dt = \sum_{milieu} B_{12} u L(\nu) N_1 dt$$

L'absorption par le milieu est la résultante de l'absorption par chacun des atomes. On retrouve les deux cas limites suivants :



#### \* Élargissement spectral inhomogène pur

Pour chaque atome, le nombre de photons absorbés chaque seconde est proportionnel au profil spectral  $L(\nu - \nu_i)$  de largeur spectrale  $\Delta\nu_{naturelle}$  et centré sur la fréquence de résonance  $\nu_i$ . La courbe  $dn_a(\nu)$  mesurée pour l'ensemble des atomes possède une largeur  $\Delta\nu_a$  supérieure à  $\Delta\nu_{naturelle}$ . La mesure de l'absorption pour l'ensemble des atomes ne permet pas de déduire comment serait absorbée la lumière par un seul atome.

#### \* Élargissement spectral homogène pur

Tous les atomes du milieu ont un profil spectral centré sur la même énergie de résonance  $\nu_0$  et possèdent la même largeur spectrale  $\Delta\nu > \Delta\nu_{naturelle}$ . La largeur de la courbe  $dn_a(\nu)$  mesurée sur l'ensemble des atomes vaut  $\Delta\nu_a = \Delta\nu$ . Elle est alors égale à celle du profil spectral d'un seul atome et  $dn_a(\nu)$  donne directement la forme du profil spectral  $g(\nu - \nu_0)$  pour chaque atome.

Dans la réalité, les milieux amplificateurs présentent à la fois un élargissement spectral homogène et inhomogène, avec pour chaque atome un profil spectral de largeur supérieure à  $\Delta\nu_{naturelle}$  et centré sur une énergie de résonance  $\nu_i$  variable ; mais on observe souvent que l'un des effets domine largement l'autre, ce qui doit être étudié au cas par cas.

### c) Exemples de milieux à élargissement spectral inhomogène

\* Atomes actifs dans un verre ou un cristal désordonné.

La fréquence d'émission d'un atome dépend légèrement de son environnement. Pour des atomes actifs noyés dans un verre, l'entourage de chacun est différent donc les fréquences d'émission sont variables d'un point à un autre.

\* Atomes actifs en phase gazeuse à haute température.

7. Vous caractériserez spectralement cette émission lors du TP Laser à colorant où vous mettrez en œuvre une expérience de résonance optique avec une lampe à vapeur de sodium.

Dans ce milieu, la distribution des vitesses des atomes d'un gaz modifie par effet Doppler la distribution des fréquences du rayonnement émis par les atomes et analysé dans le référentiel du laboratoire. Cette distribution a une forme gaussienne.

#### d) Exemples de milieux à élargissement spectral homogène

\* Atomes actifs en phase gazeuse basse température - haute pression.

Il existe dans un gaz un élargissement spectral dû à la pression ou aux collisions. Les collisions contribuent à l'élargissement en dépeuplant un niveau de la transition, ou en interrompant la phase de l'interaction avec la radiation (collisions déphasantes). On observe que l'effet global des collisions est décrit en considérant que le profil spectral de la transition est une lorentzienne de largeur spectrale

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{1}{2\pi}(\Gamma_{naturelle} + \Gamma_{Collisions}) && \text{( formule de Stern-Vollmer)} \\ \text{avec} \quad \Gamma_{Collisions} &= \beta P \end{aligned}$$

$\beta$  est le coefficient d'élargissement par pression,  $P$  est la pression.

\* Atomes actifs dans un cristal ordonné.

L'élargissement spectral du rayonnement émis par les ions dopant une matrice cristalline (laser à rubis :  $Cr^{3+} : Al_2O_3$ ) a une largeur dépendant de la température  $T$ , par couplage des ions actifs avec les vibrations du cristal (phonons).

\* Molécules d'un colorant.

Le milieu amplificateur d'un laser à colorant est constitué de molécules actives diluées dans un solvant liquide. L'interaction entre une molécule et le solvant est à l'origine d'un élargissement spectral identique pour toutes les molécules donc homogène.

\* Atomes actifs en présence d'un champ extérieur.

L'élargissement par effet Stark, en présence d'un champ électrique, ou par effet Zeeman, en présence d'un champ magnétique, est également un élargissement homogène.

Le profil spectral résultant d'un élargissement homogène est le plus souvent lorentzien mais pas toujours.

### 4.1.8 Section efficace

On introduit des grandeurs et des relations qui seront **valables pour des atomes en interaction avec une onde progressive** :

\* Le **flux de photons** est le nombre de photons traversant une surface perpendiculaire à la direction de propagation, par seconde et par unité de surface. Le flux de photons est directement relié à l'intensité (définie comme le flux d'énergie par unité de surface) par

$$\phi = \frac{I}{h\nu} \quad [\phi] = \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

\* La **section efficace d'absorption** d'un rayonnement de fréquence  $\nu$  par un système atomique  $E_2 - E_1 = h\nu_0$  est définie par

$$\sigma_{12}(\nu - \nu_0) = \frac{W_{12}(\nu - \nu_0)}{\phi} \quad [\sigma_{12}] = \text{m}^2$$

\* La **section efficace d'émission induite ou stimulée** d'un rayonnement de fréquence  $\nu$  par un système atomique  $E_2 - E_1 = h\nu_0$  est définie par

$$\sigma_{21}(\nu - \nu_0) = \frac{W_{21}(\nu - \nu_0)}{\phi} \quad [\sigma_{21}] = \text{m}^2$$

$W_{ij}$  et  $\phi$  sont l'un et l'autre proportionnels au nombre de photons donc la section efficace est indépendante de ce nombre. Elle caractérise complètement l'interaction entre le système atomique et l'onde monochromatique

de fréquence  $\nu$ . En combinant les définitions de  $\phi$ ,  $W_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  avec  $i, j = 1$  ou  $2$  et  $i \neq j$ , on déduit :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\nu - \nu_0) &= \frac{W_{ij}}{\phi} = \frac{B_{ij} u g(\nu - \nu_0)}{I/h\nu} \quad \text{avec } I = c u \\ \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) &= \frac{h\nu}{c} B_{ij} g(\nu - \nu_0)\end{aligned}$$

On utilise généralement ces relations pour exprimer  $W_{ij}$  sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\text{en fonction du profil spectral} \quad & W_{ij}(\nu - \nu_0) = B_{ij} u g(\nu - \nu_0) \\ \text{en fonction de la section efficace} \quad & W_{ij}(\nu - \nu_0) = \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}\end{aligned}$$

Ordre de grandeur : les sections efficaces sont généralement comprises entre quelques  $\mu\text{m}^2$  (la dimension de  $\lambda^2$ ) et quelques  $\text{\AA}^2$  (la 'surface' caractéristique d'un atome). On peut faire l'analogie avec les sections efficaces de collisions introduites en physique nucléaire, leurs valeurs se situant quelques ordres de grandeur en dessous.

On fait une synthèse des relations les plus utilisées :

$$\begin{aligned}W_{ij}(\nu - \nu_0) &= B_{ij} u g(\nu - \nu_0) \\ &= \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) \phi = \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu} \\ \sigma_{ij}(\nu - \nu_0) &= \frac{W_{ij}}{\phi} = \frac{B_{ij} u g(\nu - \nu_0)}{I/h\nu} \quad \text{avec } I = c u \text{ pour une onde progressive.} \\ &= \frac{h\nu}{c} B_{ij} g(\nu - \nu_0)\end{aligned}$$

Remarque : ces relations ont été établies pour l'interaction d'un milieu avec une onde progressive d'intensité  $I$ . Celles exprimées en fonction de  $u$  restent valables dans un cadre plus général (onde stationnaire, superposition de plusieurs ondes de fréquences  $\nu_i$  et densités volumiques d'énergie  $u_i$ ).

## 4.2 Amplification d'une onde par un milieu à élargissement spectral homogène

Un milieu matériel est modélisé par un système à deux niveaux  $E_2 - E_1 = h\nu_0$ . Une onde se propage dans ce milieu, gagnant des photons par émission induite et en perdant d'autres par absorption. On va préciser quantitativement l'évolution de son intensité.

Si des conditions permettent d'obtenir plus d'émissions induites que d'absorptions, le nombre de photons augmente et l'onde gagne de l'énergie. Le milieu joue alors le rôle d'amplificateur de lumière.

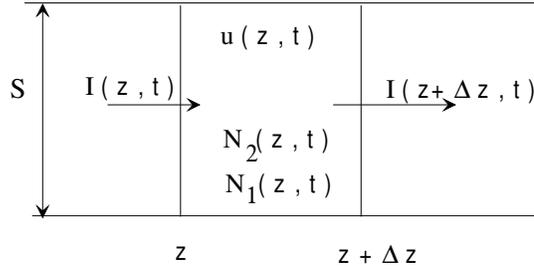
### 4.2.1 Bilan d'énergie

Soit une onde plane monochromatique de fréquence  $\nu$  et d'intensité  $I(z, t)$  se propageant dans le milieu selon la direction  $z$ , vers les  $z$  croissants<sup>8</sup>. La densité volumique d'énergie du rayonnement vaut  $u(z, t) = I(z, t) / c$ , avec  $c = \frac{c_0}{n}$ . Les populations des niveaux **1** et **2** au point  $z$  et à l'instant  $t$  sont notées respectivement  $N_1(z, t)$  et  $N_2(z, t)$ , on a  $E_2 - E_1 = h\nu_0$ .

Le milieu est à élargissement spectral homogène, de largeur spectrale  $\Delta\nu_h$ .<sup>9</sup>

8. L'ensemble de la démonstration présentée ici est valable pour des ondes progressives mais le principe peut être adapté au cas des ondes stationnaires.

9. Cela signifie que l'interaction de ce milieu avec une onde monochromatique  $\nu$  est caractérisée par une section efficace  $\sigma_{ij}(\nu - \nu_0) = \frac{h\nu}{c} B_{ij} g(\nu - \nu_0)$  possédant la même valeur pour tous les atomes.



Il reste à définir le système physique sur lequel portera le bilan d'énergie. Il s'agit de **l'onde** se propageant vers les  $z$  croissants et délimitée par les positions  $z$  et  $z + \Delta z$  à l'intérieur d'un cylindre d'axe  $z$  et de section  $S$  (volume  $V = S \Delta z$ ). L'énergie de ce système à l'instant  $t$  vaut  $u(z, t) S \Delta z$ , elle varie par les photons entrant dans  $V$  en  $z$ , par ceux sortant en  $z + \Delta z$ , par ceux absorbés et par ceux produits par émission induite à l'intérieur de  $V$ . L'émission spontanée est isotrope dans l'espace et la fréquence du photon produit est distribuée sur un intervalle correspondant qualitativement à  $[\nu_0 - \Delta\nu_h, \nu_0 + \Delta\nu_h]$ . Pour ces deux raisons, un photon produit par émission spontanée a une probabilité négligeable d'avoir exactement la fréquence et la direction de l'onde, son énergie n'est pas à additionner à l'énergie du système tel qu'il a été défini.

On écrit le bilan d'énergie du système, entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ .

- énergie du système à l'instant  $t$  :  $u(z, t) S \Delta z$
- énergie du système à l'instant  $t + \Delta t$  :  $u(z, t + \Delta t) S \Delta z$
- énergie s'ajoutant au système entre  $t$  et  $t + \Delta t$  :
  - énergie des photons traversant la section  $z$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  : la variation pour le système est :

$$S I(z, t) \Delta t \quad \text{par définition de l'intensité } I(z, t)$$

- énergie des photons traversant la section  $z + \Delta z$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  : la variation pour le système est :

$$- S I(z + \Delta z, t) \Delta t$$

- énergie absorbée entre  $t$  et  $t + \Delta t$  par les atomes situés sur le niveau **1** à l'intérieur du cylindre :  
(énergie d'un photon)  $\times$  (proba. d'absorption par atome et seconde)  $\times$  (intervalle de temps)  
 $\times$  (nombre d'atomes sur le niveau **1** par unité de volume)  $\times$  (volume)

Cette énergie est perdue par le système, sa contribution au bilan d'énergie s'écrit :

$$- h\nu W_{12} \Delta t N_1(z, t) S \Delta z$$

- énergie fournie à l'onde par l'émission induite des atomes situés sur le niveau **2** à l'intérieur du cylindre :

$$+ h\nu W_{21} \Delta t N_2(z, t) S \Delta z$$

L'énergie du système à l'instant  $t + \Delta t$  est égale à celle à l'instant  $t$  plus les variations entre  $t$  et  $t + \Delta t$  décomposées ci-dessus, soit :

$$u(z, t + \Delta t) S \Delta z = u(z, t) S \Delta z - S [I(z + \Delta z, t) - I(z, t)] \Delta t + h\nu \Delta t [W_{21} N_2(z, t) - W_{12} N_1(z, t)] S \Delta z$$

En utilisant les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(z, t + \Delta t) = u(z, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(z, t) \Delta t \\ I(z + \Delta z, t) = I(z, t) + \frac{\partial I}{\partial z}(z, t) \Delta z \\ W_{12} = \frac{g_2}{g_1} W_{21} \quad (W_{21} \text{ désigne la proba. par sec. et par at. pour l'ém. induite}) \\ W_{21} = \sigma_{21} \frac{I}{h\nu} \quad (\sigma_{21} \text{ désigne la section efficace d'ém. induite}) \end{array} \right.$$

le bilan d'énergie devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial I}{\partial z} + h\nu \left[ N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t) \right] \sigma_{21} \frac{I}{h\nu} \\ \frac{1}{I} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right) &= \sigma_{21} \left[ N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t) \right]\end{aligned}$$

A partir de cette expression, on définit :

— **la différence de population**  $\Delta N(z, t)$  :

$$\Delta N(z, t) = N_2(z, t) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z, t)$$

— **le coefficient d'amplification**  $\alpha$  de l'onde.

$$\alpha = \frac{1}{I} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right) \quad [\alpha] = \text{m}^{-1}$$

ou, en l'écrivant sous la forme d'une équation en  $I(z, t)$  :

$$\alpha = \frac{1}{I} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right)$$

Synthèse :

Pour un milieu à élargissement spectral homogène, l'interaction onde-matière possède une section efficace  $\sigma_{21}(\nu - \nu_0)$  identique pour tous les atomes.

L'onde progressive traversant ce milieu voit son intensité varier suivant **l'équation d'évolution de l'intensité**  $\alpha = \frac{1}{I} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} \right)$ .

Le coefficient d'amplification  $\alpha(z, t)$  d'une onde de fréquence  $\nu$  est proportionnel à la différence de population avec :

$$\alpha(z, t) = \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \Delta N(z, t).$$

Remarque : pour un système à deux niveaux non dégénérés,  $g_1 = g_2$ ,  $\sigma_{21} = \sigma$  et la différence de population s'écrit plus simplement  $\Delta N(z, t) = N_2(z, t) - N_1(z, t)$ .

### 4.2.2 Coefficient d'amplification en régime stationnaire. Inversion de population

Lorsque l'intensité et les populations ne dépendent pas du temps, le système (onde + amplificateur) est en régime stationnaire ( $\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = 0$ ). Ses propriétés ne dépendent plus que de  $z$  et l'équation d'évolution de l'intensité se simplifie en :

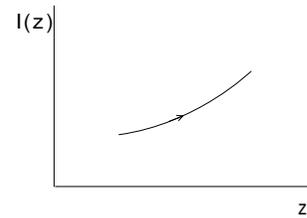
$$\alpha(z) = \frac{1}{I(z)} \frac{dI}{dz}$$

Le coefficient d'amplification s'interprète alors comme une variation relative d'intensité par unité de longueur, appelée aussi gain par unité de longueur. On a la propriété :

$$\alpha(z) = \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \Delta N(z)$$

Lorsque  $\alpha$  est positif,  $\frac{dI}{dz} = \alpha I$  est positif et l'intensité de l'onde augmente au cours de sa propagation : l'onde s'amplifie.

Le milieu est donc amplificateur si et seulement si la différence de population  $\Delta N(z) = N_2(z) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z)$  est positive. Cette situation est appelée **inversion de population**.



\* Interprétation physique.

On revient au bilan d'énergie établi pour le cylindre  $S \Delta z$ . L'énergie transférée **de l'onde vers le milieu** par absorption pendant  $\Delta t$  vaut :

$$\begin{aligned}& h\nu W_{12} N_1 S \Delta z \Delta t \\ &= h\nu W_{21} \frac{g_2}{g_1} N_1 S \Delta z \Delta t\end{aligned}$$

L'énergie transférée **du milieu vers l'onde** par émission induite pendant  $\Delta t$  vaut :

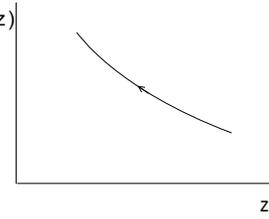
$$h\nu W_{21} N_2 \Delta t S \Delta z$$

En situation d'inversion de population  $\Delta N > 0$  donc  $N_2 > \frac{g_2}{g_1} N_1$ , le transfert d'énergie est plus important dans le sens (milieu  $\rightarrow$  onde) que dans le sens inverse : il y a amplification de l'onde entre les points  $z$  et  $z + \Delta z$ . Il faut noter que cet état d'inversion de population dans le milieu est possible si on lui a communiqué de l'énergie par ailleurs pour porter un nombre suffisant d'atomes sur le niveau **2**, c'est le rôle de ce qu'on appelle le **pompage** du milieu.

\* Remarque : la relation  $\alpha = \sigma_{21} \Delta N = \frac{1}{I} \frac{dI}{dz}$  a été démontrée ici pour une onde se propageant vers les  $z$  croissants. Dans le cas inverse, la démonstration conduit à :

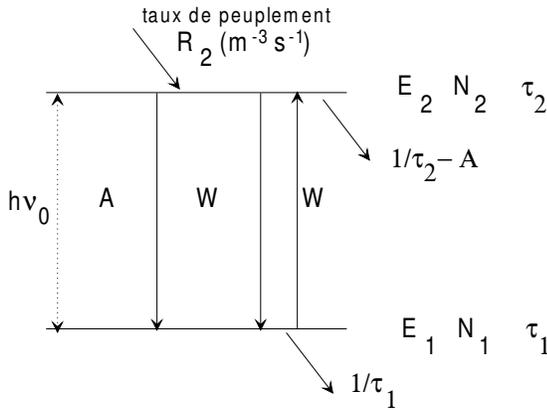
$$\alpha = \frac{1}{I} \left( - \frac{dI}{dz} \right) \text{ avec la propriété } \alpha = \sigma_{21} \Delta N$$

On retrouve que  $\Delta N > 0$  entraîne une augmentation de l'intensité, lors de sa propagation vers les  $z$  négatifs.



### 4.2.3 Saturation de l'amplification

Soit un milieu amplificateur schématisé par un système à deux niveaux, avec les populations  $N_1$  et  $N_2 > N_1$  produites par un pompage constant. Ce milieu est traversé par une onde de fréquence  $\nu$  proche de la résonance  $\nu_0$ . Il y a inversion de population donc plus d'émissions induites  $\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{1}$  que d'absorptions  $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$ . Par conséquent, l'interaction avec l'onde a tendance à réduire  $N_2$  et à augmenter  $N_1$ . On montrera que cela réduit la différence de population  $\Delta N$  et le coefficient d'amplification  $\alpha = \sigma \Delta N$ . L'amplification devient moins efficace, ce phénomène est appelé **saturation de l'amplification**. Elle va être étudiée à partir d'un exemple en régime stationnaire.



Notations et propriétés :

Milieu à élargissement spectral homogène,  $\alpha = \sigma \Delta N$  avec la même valeur pour tous les atomes.

Différence de population  $\Delta N(z) = N_2(z) - \frac{g_2}{g_1} N_1(z)$ . Probabilité par seconde et par atome pour l'émission induite :  $W = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}$ . Celle pour l'absorption s'en déduit et vaut  $W_{12} = \frac{g_2}{g_1} W$ .

$R_2$  : taux de peuplement de **2** (appelé aussi taux de pompage).  $[R_2] = \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$\tau_2$  : durée de vie de **2**, avec  $\frac{1}{\tau_2}$  égal à la somme des probabilités par seconde pour les processus spontanés partant de **2**.

$A$  : probabilité par seconde et par atome pour l'émission spontanée  $\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{1}$

$(1/\tau_2 - A)$  : probabilité par seconde et par atome pour les autres désexcitations spontanées depuis **2**.

Le terme traduisant le bilan entre émission induite et absorption s'écrit  $WN_2 - W_{12}N_1 = W(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1) = W\Delta N$ . On pourra le faire apparaître directement sous cette forme dans les équations d'évolution des populations.

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= R_2 - \frac{N_2}{\tau_2} - WN_2 + W_{12}N_1 \\ &= R_2 - \frac{N_2}{\tau_2} - W\Delta N \\ \frac{dN_1}{dt} &= AN_2 - \frac{N_1}{\tau_1} + W\Delta N \end{aligned}$$

En régime stationnaire,  $\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = 0$ . La discussion se poursuit dans le cas  $g_1 = g_2$  pour lequel  $\Delta N =$

$N_2 - N_1$ . On reporte  $N_1 = N_2 - \Delta N$  dans la seconde équation pour éliminer  $N_1$  et obtenir un système de deux équations aux deux inconnues  $N_2$  et  $\Delta N$ .

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_2} N_2 + W \Delta N = R_2 & (1') \\ (A - \frac{1}{\tau_1}) N_2 + (W + \frac{1}{\tau_1}) \Delta N = 0 & (2') \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{\tau_2} & W \\ (A - \frac{1}{\tau_1}) & (W + \frac{1}{\tau_1}) \end{vmatrix} = W(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} - A) + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} (1 + W(\underbrace{\tau_2 + \tau_1 - A\tau_1 \tau_2}_{\text{noté } \tau})).$$

Pour ce milieu, la différence de population en régime stationnaire s'écrit<sup>10</sup> :

$$\Delta N = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\tau_2} & R_2 \\ (A - \frac{1}{\tau_1}) & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{R_2 \tau_1 \tau_2 (\frac{1}{\tau_1} - A)}{1 + W\tau}$$

On a introduit la notation  $\tau = \tau_1 \tau_2 (\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} - A)$  avec  $\frac{1}{\tau_2} \geq A$  donc  $\tau > 0$ , qu'on appellera temps de récupération du système.

La valeur de  $\Delta N$  obtenue pour  $I = 0$  ( $\Leftrightarrow W = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu} = 0$ ) est notée  $\Delta N^0$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \Delta N^0 &= R_2 \tau_1 \tau_2 (\frac{1}{\tau_1} - A) \\ \text{d'où l'écriture} \quad \Delta N &= \frac{\Delta N^0}{1 + W\tau} \end{aligned}$$

La valeur de l'intensité  $I$  de l'onde donc celle de la probabilité d'interaction  $W$  interviennent dans celle de  $\Delta N$ , qu'on appellera 'différence de population saturée par l'onde'. La quantité  $\Delta N^0$  est indépendante de  $I$ ,  $W$ , donc appelée 'différence de population non saturée'.  $\Delta N^0$  désigne physiquement la valeur de la différence de population lorsque l'onde est trop peu intense pour modifier de manière significative la répartition des atomes entre les niveaux **1** et **2**.

\* Interprétation physique de la condition  $\Delta N > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_1} > A$  pour ce système.

$\Delta N$  est du signe de  $\Delta N^0$ . Il y a inversion de population  $\Delta N > 0$  pour ce système si  $\Delta N^0 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_1} > A$ .

Pour  $W\tau \approx 0$ , on compare le nombre  $\frac{N_1}{\tau_1}$  d'atomes quittant **1** à celui  $AN_2$  des atomes y arrivant. Ils sont égaux en régime stationnaire et la condition  $\frac{1}{\tau_1} > A$  entraîne bien  $N_1 < N_2$  donc  $\Delta N > 0$ .

On précise les conséquences de la saturation de  $\Delta N$  sur le coefficient d'amplification  $\alpha(z) = \frac{1}{I(z)} \frac{dI}{dz}$ . Dans un milieu à élargissement spectral homogène<sup>11</sup>,  $\alpha = \sigma \Delta N$  donc

$$\alpha = \sigma \frac{\Delta N^0}{1 + W\tau} = \frac{\alpha^0}{1 + W\tau} \quad \text{en notant } \alpha^0 = \sigma \Delta N^0.$$

$\alpha^0$  est la valeur du coefficient d'amplification du milieu lorsque l'onde  $I$  est absente ou très faible ( $W\tau \ll 1$ ), on le note **coefficient d'amplification non saturée**.

Pour une onde plus intense,  $W$  augmente donc  $\alpha$  diminue : c'est le phénomène de saturation de l'amplification.  $\alpha$  est appelé "**coefficient d'amplification saturée**". Il tend vers zéro lorsque  $W\tau \gg 1$ .

Interprétation physique : le système étudié est en régime stationnaire. Un taux de pompage  $R_2$  donné porte chaque seconde un certain nombre d'atomes sur **2** ce qui revient à y stocker une certaine quantité d'énergie potentiellement transférable à l'onde par émission induite. Cette quantité d'énergie est apte à produire une augmentation d'intensité, mais qui en valeur relative se rapproche de 0 lorsque  $I$  devient très forte.

L'amplification pourra être efficace si  $I$  est faible, beaucoup moins pour une intensité trop forte.

10. La méthode utilisée ici pour déterminer  $\Delta N$  s'appelle 'méthode du déterminant' ou 'méthode de Kramer'. On peut aussi obtenir le résultat par combinaison linéaire des équations pour éliminer  $N_2$ .

11. où la section efficace  $\sigma$  possède la même valeur pour tous les atomes

#### 4.2.4 Intensité de saturation

On a calculé pour l'exemple précédent  $\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1+W\tau}$ . L'efficacité de l'interaction onde matière est liée à l'intensité de l'onde par les relations  $W = B \frac{I}{c} g(\nu - \nu_0)$  ou  $W = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}$  (Cf §4.1.8). Pour ce milieu à élargissement spectral homogène, l'intensité de saturation  $I_s$  est définie en régime stationnaire par l'écriture :

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

En utilisant la relation  $W = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}$ , on identifie  $\frac{I}{I_s} = W\tau = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu} \tau$  d'où :

$$I_s = \frac{h\nu_0}{\sigma(\nu - \nu_0) \tau}$$

On peut aussi utiliser  $W = B u g(\nu - \nu_0) = B \frac{I}{c} g(\nu - \nu_0)$  pour obtenir :

$$I_s = \frac{c}{B g(\nu - \nu_0) \tau}$$

Le coefficient d'amplification  $\alpha = \sigma \Delta N$  prend alors la forme :

$$\alpha = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}} \text{ qu'on appellera relation de saturation}$$

où les paramètres  $\alpha^0$  et  $I_s$  contiennent toute l'information sur la capacité du milieu à amplifier l'onde. Une onde d'intensité  $I \ll I_s$  voit le coefficient d'amplification  $\alpha^0$ . Par contre, une onde de forte intensité annule le coefficient d'amplification et traverse le milieu sans variation d'intensité.

Interprétation microscopique : une onde d'intensité forte induit beaucoup d'émissions stimulées. L'émission induite domine largement l'émission spontanée qui devient négligeable. Le régime stationnaire se traduit alors par presque autant d'émissions induites que d'absorptions.

$$W_{12}N_1 = W_{21}N_2 \Leftrightarrow W_{21} \frac{g_2}{g_1} N_1 = W_{21}N_2 \Leftrightarrow W_{21} \Delta N = 0$$

et par conséquent  $\Delta N \approx 0$  associé au fait qu'avec autant d'absorption que d'émission induite l'onde traverse le milieu à intensité presque constante.

Important : la relation  $\tau = \tau_1 + \tau_2 - A\tau_1\tau_2$  a été obtenue pour le système à deux niveaux décrit ci-dessus. Pour un système quelconque, il faudra écrire les équations d'évolution, les résoudre pour déterminer la différence de population  $\Delta N$  en régime stationnaire. Il reste à en déduire  $I_s$  par l'identification avec la relation de définition<sup>12</sup>, en régime stationnaire

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

Plusieurs exemples sont traités en Travaux Dirigés. Un cas conduisant à des calculs particulièrement longs (hors programme) est présenté en annexe §4.3.

#### 4.2.5 Gain total du milieu amplificateur

On choisit pour milieu amplificateur un barreau cristallin ou une cellule à gaz, la longueur totale étant  $\ell$  (entrée en  $z = 0$ , sortie en  $z = \ell$ ). Le gain total de l'amplificateur est défini par

$$G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$$

12. Remarque : pour un système à  $p$  niveaux, les  $p$  équations d'évolution en régime stationnaire plus l'équation  $\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1$  constituent un système linéaire de  $p+1$  équations à  $p+1$  inconnues (les  $p$  populations et  $\Delta N$ ) où  $W$  n'apparaît qu'en facteur de  $\Delta N$ . Le déterminant  $D$  est donc une fonction linéaire de  $W$ . La valeur de  $\Delta N$  est le rapport d'un déterminant indépendant de  $W$  et de  $D$ , d'où la généralisation de la forme  $\Delta N = \frac{\Delta N^0}{1+W\tau}$  avec  $\Delta N^0$  indépendant de  $W$ .

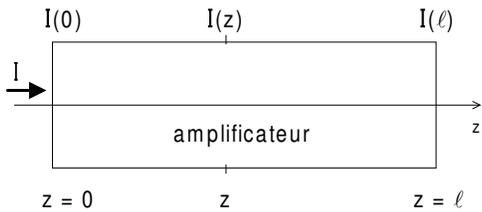
Le gain total est évalué en régime stationnaire pour un milieu amplificateur où le pompage produit un coefficient d'amplification non saturé uniforme  $\alpha^0$ . Ce coefficient est fonction du pompage, supposé assez fort pour avoir  $\alpha^0 \ell \gg 1$ . Les propriétés de l'interaction de l'onde avec le milieu sont contenues dans le paramètre  $I_s$ . La variation d'intensité dans le cristal est régie par l'équation

$$\alpha = \frac{1}{I} \frac{dI}{dz}$$

avec  $\alpha = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$  lorsque  $\sigma_{21}$  est identique pour tous les atomes. On intègre l'équation

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

par la méthode de séparation des variables, entre l'entrée de l'amplificateur ( $z = 0, I = I(0)$ ) et sa sortie ( $z = \ell, I = I(\ell)$ ).



$$\int_{I(0)}^{I(\ell)} \left( \frac{1}{I} + \frac{1}{I_s} \right) dI = \int_0^\ell \alpha^0 dz$$

$$\left[ \ln(I) + \frac{I}{I_s} \right]_{I(0)}^{I(\ell)} = [\alpha^0 z]_0^\ell$$

d'où la relation

$$\ln \left( \frac{I(\ell)}{I(0)} \right) + \frac{I(\ell) - I(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell$$

Le gain total de l'amplificateur  $G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$  est donné par l'équation implicite<sup>13</sup> :

$$\ln G + \frac{I(0)}{I_s} (G - 1) = \alpha^0 \ell$$

L'expression de  $G$  devient explicite dans les cas limites d'une faible ou d'une forte intensité. Pour  $I(0) \ll I_s$ ,  $G = \exp \alpha^0 \ell \gg 1$  alors que pour  $I(0) \gg I_s$ ,  $\ln G \ll \frac{I(0)}{I_s} (G - 1)$  d'où  $G = 1 + \alpha^0 \ell \frac{I_s}{I(0)} \simeq 1$  qui, pour  $I(0)$  assez grand, tend vers 1. Dans ce dernier cas, le milieu a perdu toute propriété d'amplification à cause de la saturation du gain : l'onde impose  $\Delta N = 0$  donc  $\alpha \simeq 0$ ; le milieu devient comme transparent pour l'onde.

Synthèse :

Le passage pour  $I(0)$  d'une valeur faible à forte par rapport à  $I_s$  fait décroître  $G$  de  $\exp \alpha^0 \ell$  à 1, c'est le phénomène de saturation de l'amplification, qui se traduit de deux manières : au niveau local, le coefficient d'amplification  $\alpha$  tend vers 0; au niveau macroscopique, le gain total  $G$  de l'amplificateur tend vers 1.

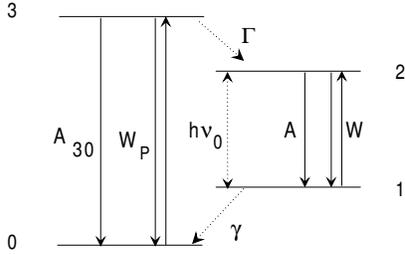
13. Equation implicite signifie qu'on ne peut pas la transformer pour exprimer explicitement  $G$  en fonction de  $\ell$ . Une manière simple d'évaluer  $G$  en fonction de  $\ell$  est de tracer  $\ell$  en fonction de  $G$  puis de mesurer graphiquement  $G$  en fonction de  $\ell$  (ou d'échanger les colonnes d'un tableau de valeurs).

### 4.3 Annexe

#### Etude d'un système amplificateur à 4 niveaux pompé optiquement

On considère un milieu matériel représenté par un système à 4 niveaux d'énergie possédant les caractéristiques suivantes :

- les quatre niveaux sont non dégénérés, la population totale est notée  $N$ .
- le milieu est amplificateur pour la transition  $2 \leftrightarrow 1$ . L'émission spontanée et l'émission induite ont les probabilités par seconde et par atome  $A$  et  $W$ . L'élargissement spectral est purement homogène. Le profil spectral de la transition est  $g(\nu - \nu_0)$ .
- Le pompage est assuré sur la transition radiative  $3 \leftrightarrow 0$  par une onde lumineuse intense d'énergie proche de  $h\nu_{30}$  ('pompage optique'). L'émission spontanée et l'émission induite ont les probabilités par unité de temps et par atome  $A_{30}$  et  $W_P$ . Le pompage est assez puissant pour avoir  $W_P \gg A_{30}$ .
- la transition  $3 \leftrightarrow 2$  est non radiative (désexcitation par collisions dans un gaz, couplage avec les vibrations pour un cristal). Sa probabilité par seconde  $\Gamma$  est très grande de sorte qu'un atome arrivant sur le niveau 3 repart immédiatement vers le niveau 2 seulement ( $(A_{30} + W_P) \ll \Gamma$ ,  $N_3 \ll N_0$ ).
- la transition  $1 \leftrightarrow 0$  est non radiative. Sa probabilité par seconde est notée  $\gamma$ .



En l'absence de pompage ( $W_P=0$ ), tous les atomes sont sur le niveau 0. Le système est fermé,  $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = N$ . La différence de population est notée  $\Delta N = N_2 - N_1$ . L'objectif est de calculer la différence de population **en régime stationnaire**, en fonction du pompage et des paramètres physiques du système.

\* Équations d'évolution des populations

$$\begin{cases} \frac{dN_3}{dt} = +W_P N_0 - W_P N_3 - A_{30} N_3 - \Gamma N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} = +\Gamma N_3 - W \Delta N - A N_2 \\ \frac{dN_1}{dt} = +W \Delta N + A N_2 - \gamma N_1 \\ \frac{dN_0}{dt} = -W_P N_0 + W_P N_3 + A_{30} N_3 + \gamma N_1 \end{cases}$$

Remarque : pour un système fermé,  $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = N$  donc  $\frac{dN_0}{dt} + \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0$ . La présentation 'en tableau' permet de vérifier que tout terme décrivant le départ d'un atome depuis un niveau se retrouve avec le signe opposé sur un autre niveau.

\* Simplifications

On simplifie les équations d'évolution en tenant compte des propriétés physiques du système

$$— (A_{30} + W_P) \ll \Gamma \Rightarrow (W_P + A_{30})N_3 \ll \Gamma N_3 \text{ donc } \frac{dN_3}{dt} = +W_P N_0 - \Gamma N_3$$

$$— A_{30} \ll W_P \Rightarrow A_{30}N_3 \ll W_P N_3 \text{ donc } \frac{dN_0}{dt} = -W_P N_0 - W_P N_3 + \gamma N_1$$

$$\text{De plus, } N_3 \ll N_0 \text{ donc } \frac{dN_0}{dt} = -W_P N_0 + \gamma N_1$$

$$— N_3 \ll N_0 \text{ donc } N_0 + N_1 + N_2 = N$$

\* Synthèse des équations en régime stationnaire, compte tenu des simplifications

$$\begin{cases} 0 = +W_P N_0 - \Gamma N_3 \\ 0 = +\Gamma N_3 - W \Delta N - A N_2 \\ 0 = +W \Delta N + A N_2 - \gamma N_1 \\ 0 = -W_P N_0 + \gamma N_1 \\ N = N_0 + N_1 + N_2 \\ \Delta N = N_2 - N_1 \end{cases}$$

\* Calcul de la différence de population

On veut calculer  $\Delta N = N_2 - N_1$  en fonction du nombre total d'atomes  $N$  du système. Pour cela, on transforme les deux équations issues de  $\frac{dN_2}{dt}$  et  $\frac{dN_1}{dt}$  pour qu'elles constituent un système de deux équations fonctions des deux inconnues  $N_2$  et  $\Delta N$ . Il faut exprimer  $N_3$ ,  $N_1$  et  $N_0$  en fonction de  $N$ ,  $N_2$  et  $\Delta N$ .

— on remplace  $N_1$  par  $(N_2 - \Delta N)$

— on remplace  $N_0$  par  $(N - N_2 - N_1) = (N - N_2 - N_2 + \Delta N) = (N + \Delta N - 2N_2)$

— on remplace  $\Gamma N_3$  par  $W_P N_0 = W_P (N + \Delta N - 2N_2)$

Les équations (2) et (3) du système deviennent

$$\begin{cases} A N_2 + W \Delta N = W_P N_0 = W_P (N + \Delta N - 2N_2) \\ A N_2 + W \Delta N = \gamma N_1 = \gamma (N_2 - \Delta N) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A + 2W_P) N_2 + (W - W_P) \Delta N = W_P N \\ (A - \gamma) N_2 + (W + \gamma) \Delta N = 0 \end{cases}$$

Le déterminant vaut  $D = \begin{vmatrix} (A + 2W_P) & (W - W_P) \\ (A - \gamma) & (W + \gamma) \end{vmatrix} = (A - \gamma) \gamma + W_P \gamma + W_P A + (\gamma + 2W_P) W$

$$\Delta N = \frac{\begin{vmatrix} (A + 2W_P) & W_P N \\ (A - \gamma) & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{(\gamma - A) W_P N}{(\gamma + 2W_P) W + (A - \gamma) \gamma + W_P \gamma + W_P A}$$

$$\Delta N = \frac{(\gamma - A) W_P N}{(A - \gamma) \gamma + W_P \gamma + W_P A} \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma + 2W_P}{A - \gamma + W_P \gamma + W_P A} W\right)}$$

\* Interprétation

Le milieu est amplificateur si pour les photons de fréquence  $\nu \approx \nu_{21}$  il se produit plus d'émissions induites que d'absorptions c'est-à-dire s'il y a inversion de population  $\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 > 0$ . Le rôle du pompage est d'accumuler de l'énergie dans le milieu amplificateur sous forme d'inversion de population pour que celui-ci puisse ensuite transférer une fraction de cette énergie à l'onde laser.

Pour ce système, il y a inversion de population si  $\gamma > A$ , ce qui signifie que le niveau 1 se vide plus rapidement qu'il ne se remplit par émission spontanée depuis 2.

Le système à 4 niveaux permet d'obtenir l'inversion de population sans condition sur le pompage  $W_P$ , contrairement à la plupart des autres systèmes.

\* Différence de population non saturée et intensité de saturation

On exprime les caractéristiques du système en fonction de la puissance du pompage. Par définition, la différence de population non saturée  $\Delta N^0$  est la valeur de  $\Delta N$  pour une intensité  $I$  laser nulle ( $I = 0 \Leftrightarrow W = 0$ ).

$$\Delta N^0 = \frac{(\gamma - A) W_P}{(A - \gamma) \gamma + W_P \gamma + W_P A} N$$

Pour un système à élargissement spectral homogène et en régime stationnaire, l'intensité de saturation  $I_s$  est définie par  $\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}}$ , avec  $W(\nu - \nu_0) = \sigma(\nu - \nu_0) \frac{I}{h\nu}$  ou  $W(\nu - \nu_0) = B u g(\nu - \nu_0)$ . Dans le cas traité ici,

$$\frac{\Delta N}{\Delta N^0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma + 2W_P}{A - \gamma + W_P \gamma + W_P A} W}$$

il vient

$$I_s(\nu - \nu_0) = \frac{h\nu}{\sigma(\nu - \nu_0)} \frac{A - \gamma + W_P \gamma + W_P A}{\gamma + 2W_P} \quad \text{ou} \quad I_s(\nu - \nu_0) = \frac{c}{B g(\nu - \nu_0)} \frac{A - \gamma + W_P \gamma + W_P A}{\gamma + 2W_P}$$

\* Coefficient d'amplification du système

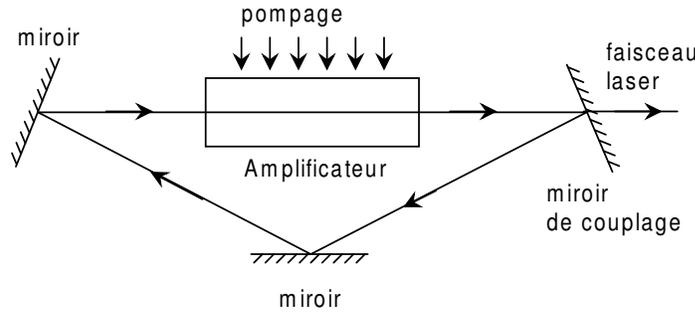
Le coefficient d'amplification non saturée est donné par  $\alpha^0(\nu - \nu_0) = \sigma(\nu - \nu_0) \Delta N^0$ . Le coefficient d'amplification saturée par l'onde d'intensité  $I$  vaut  $\alpha(\nu - \nu_0) = \sigma(\nu - \nu_0) \Delta N$  qui, pour un système à élargissement homogène en régime stationnaire, se met sous la forme

$$\alpha(\nu - \nu_0) = \frac{\alpha^0(\nu - \nu_0)}{1 + \frac{I}{I_s(\nu - \nu_0)}}$$

## **Chapitre 5**

# **INTRODUCTION À LA THÉORIE DU LASER**

Les chapitres précédents ont précisé le fonctionnement d'un amplificateur de lumière, et le principe d'un résonateur optique stable qui permet d'une part de renvoyer la lumière de la sortie vers l'entrée de l'amplificateur afin d'établir une onde cohérente dans la cavité, d'autre part d'extraire le faisceau laser hors de la cavité.

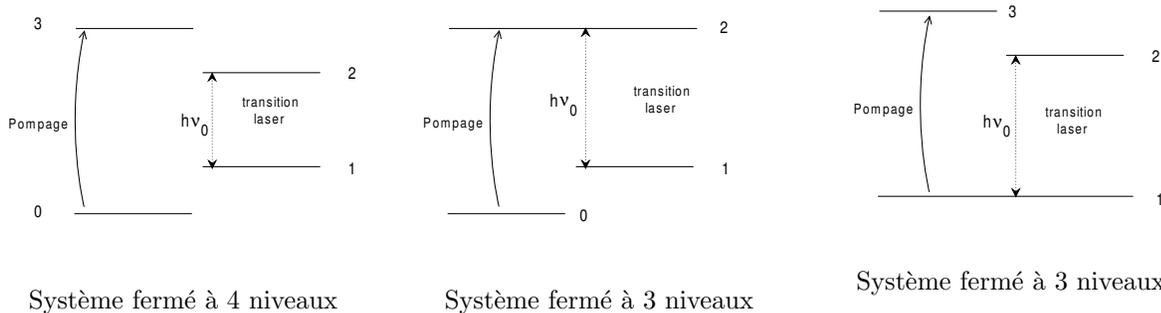


L'amplificateur peut jouer son rôle s'il y a inversion de population donc plus d'émissions induites que d'absorptions. Cette situation est réalisée grâce au 'pompage', qui sera illustré par plusieurs exemples. De plus, l'effet laser est possible si le gain de la lumière dans l'amplificateur est supérieur aux pertes de lumière dans la cavité, qui seront définies. Connaissant ces différents facteurs, on pourra évaluer l'intensité établie dans la cavité ou émise dans le faisceau laser, pour des systèmes fonctionnant en régime stationnaire ou produisant des impulsions.

### 5.1 Transition laser et pompage

\* Systèmes de milieux amplificateurs :

De très nombreux niveaux atomiques interviennent dans le processus d'inversion de population mais une modélisation par un système à 3 ou 4 niveaux est généralement suffisante.

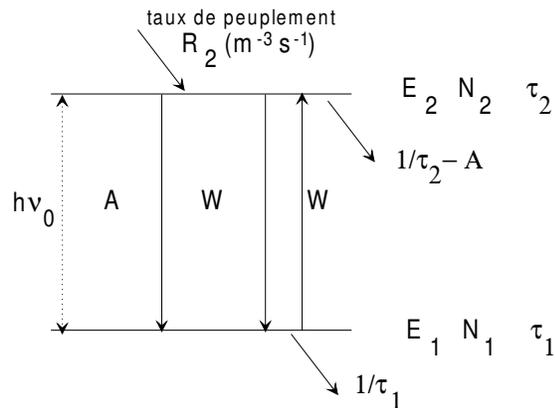


Par convention, l'amplification optique se fait sur la transition  $2 \leftrightarrow 1$  donc le laser extrait possède la fréquence  $\nu_{21}$ . On peut montrer facilement que le pompage optique d'un système fermé à deux niveaux ne permet pas d'obtenir l'inversion de population (voir TD n°4).

On peut par contre utiliser un système à deux niveaux avec des atomes provenant de niveaux plus excités non représentés, avec un taux de peuplement  $R_2$  ( $\text{m}^{-3}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Ce système est de type ouvert. Le calcul réalisé pour ce système au paragraphe 4.2.3 du chapitre 'Principes de base des amplificateurs lasers' conduit à

$$\Delta N^0 = R_2 \tau_1 \tau_2 \left( \frac{1}{\tau_1} - A \right)$$

Dans ce cas également, la différence de population non saturée est proportionnelle à la puissance de pompage. Dans d'autres cas, la puissance de pompage doit dépasser un seuil pour que  $\Delta N^0$  devienne positif (inversion de population).



### \* Types de pompage :

De nombreuses méthodes de pompage sont utilisées, on en cite quelques unes.

- pompage optique : lampe flash, lampe à arc, diode laser ou autre laser.
- pompage électronique (collisions électrons-atomes) : décharge électrique continue ou radiofréquence, faisceau d'électrons accélérés
- pompage chimique : combustion chimique exothermique (flammes), formation par collision réactive de molécules directement dans un état excité (lasers à Excimère :  $Ar + F \rightarrow ArF^*$  formé directement sur le niveau 2)
- pompage par injection de porteurs : courant traversant une jonction p-n dans un semiconducteur (diodes lasers)

D'une manière générale,  $\Delta N^0$  et  $\alpha^0$  sont des fonctions croissantes de la puissance de pompage.

Remarque : chaque niveau d'énergie se caractérise par des nombres quantiques. Une transition radiative est possible entre deux niveaux seulement à certaines conditions sur ces nombres quantiques (règles de sélection dipolaire électrique, cf cours Atomes et Molécules). C'est la raison pour laquelle certains systèmes peuvent être pompés optiquement et d'autres pas. Il existe des contraintes pour les transitions par collision mais elles sont en général moins restrictives.

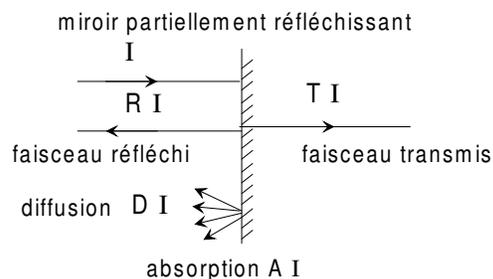
## 5.2 Pertes de la cavité

### 5.2.1 Analyse physique de l'origine des pertes

#### a) Pertes dues aux miroirs de la cavité

Les miroirs de la cavité engendrent des pertes par transmission, par absorption ou encore par diffusion.

Pour une intensité incidente  $I$  sur un miroir, les intensités réfléchies, transmises, absorbées, diffusées valent respectivement  $\mathcal{R}I$ ,  $TI$ ,  $AI$  et  $DI$ , par définition des coefficients de réflexion, transmission, absorption et diffusion de l'intensité. La conservation de l'énergie entraîne  $\mathcal{R} + T + A + D = 1$ .



Des coefficients  $\mathcal{R}$  et  $T$  tels que  $\mathcal{R} + T \geq 0,999$  sont obtenus avec des miroirs à couches diélectriques<sup>1</sup>. Les pertes par absorption sont généralement négligeables mais peuvent poser problème dans le cas des très fortes

1. Du type des couches anti-reflets sur les objectifs des appareils photographiques ou les lunettes.

puissances (chauffage et destruction du miroir). La diffusion est engendrée par les défauts de planéité du miroir. Ces défauts ont des dimensions de l'ordre de  $\lambda/10$  ou  $\lambda/20$ .

Les pertes par transmission des miroirs sont bien contrôlées. Ce sont des pertes 'utiles' puisque la transmission non nulle d'un miroir est le plus souvent choisie pour extraire le faisceau laser de la cavité (coupleur de sortie).

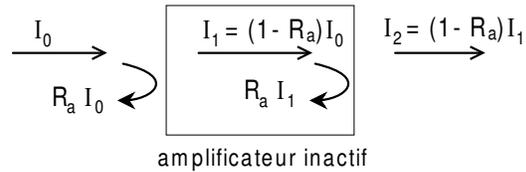
#### b) Pertes dues aux éléments optiques insérés dans la cavité

Les éléments optiques présents à l'intérieur d'une cavité peuvent produire d'autres pertes pour l'onde la parcourant.

On peut choisir de décrire explicitement leur action sur le faisceau, comme par exemple dans le cas de la réflexion sur les fenêtres d'entrée du milieu amplificateur.

On note  $R_a$  le coefficient de réflexion de la face d'entrée. Les équations de Maxwell montrent que celui de la face de sortie possède la même valeur. La fraction de l'intensité qui reste dans le faisceau malgré la réflexion vaut  $(1 - R_a)$  pour chaque interface. Pour l'exemple schématisé ci-contre, l'intensité transmise par l'amplificateur inactif vaut  $I_2 = (1 - R_a)^2 I_0$ .

Les faces peuvent être traitées anti-reflet pour minimiser  $R_a$ .



*On suppose à ce stade que le milieu lui-même est sans action sur les photons ('amplificateur inactif'). Exemple : un système pour lequel la transition laser se fait entre deux états excités est transparent en l'absence de pompage.*

Dans certains cas, on ajoute dans la cavité un filtre en fréquence (filtre spectral) qui transmet une fraction  $T_f(\nu)$  de l'intensité.  $T_f(\nu)$  est le facteur de transmission du filtre pour l'intensité, fonction qui peut être étroite autour de certaines fréquences<sup>2</sup>.

#### c) Autres pertes (absorption par l'air, diffusion par des poussières, ...)

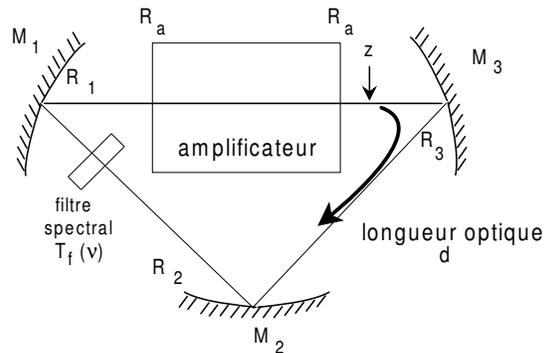
Il est possible de prendre en compte des pertes même si on ne précise pas exactement à quel endroit elles se produisent dans la cavité.

On donne pour cela un coefficient global noté  $\eta$  traduisant **les pertes relatives d'intensité 'autres que pour les causes explicitement décrites'**, avec la propriété suivante : pour un parcours complet de la cavité à partir d'un point où l'intensité est notée  $I(0)$ , l'intensité perdue à cause de ces pertes vaut  $\eta I(0)$ , l'intensité restant dans le faisceau malgré ces pertes vaut après un parcours complet de la cavité  $(1 - \eta)I(0)$ .

Remarque : en général, les coefficients  $\eta$ ,  $\mathcal{R}_i$  et  $T_i$  sont donnés en pourcentage.

Exemple : on considère la cavité schématisée ci-contre. L'amplificateur est inactif. Un paquet de photons d'intensité  $I(z, t)$  part de  $z$  pour s'y retrouver un tour plus tard avec l'intensité  $I(z, t + \frac{d}{c_0})$ . Les causes de pertes sont les suivantes :

- \* Miroirs : les coefficients de réflexion  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .
- \* Faces d'entrée et de sortie de l'amplificateur : coefficient de réflexion  $R_a$ .
- \* Filtre spectral de facteur de transmission  $T_f(\nu)$  pour l'intensité.
- \* Pertes relatives d'intensité autres :  $\eta$ .



2. Exemple : filtres interférentiels utilisés dans le TP 'effet Zeeman' pour isoler l'une des transitions émises par la lampe spectrale à vapeur de cadmium ; L'interféromètre de Fabry-Perot transmet un peigne de fréquences appelées 'modes spectraux' de l'instrument.

$$\begin{aligned}
I\left(z, t + \frac{d}{c_0}\right) &= I(z, t) \underbrace{\times R_3}_{\substack{\text{fraction de l'intensité} \\ \text{restant dans le faisceau compte tenu} \\ \text{de la réflexion sur } M_3}} \times R_2 \\
&\quad \times \underbrace{T_f(\nu)}_{\substack{\text{fraction de l'intensité} \\ \text{restant dans le faisceau compte tenu} \\ \text{du filtre spectral}}} \times R_1 \\
&\quad \times \underbrace{(1 - R_a)}_{\substack{\text{fraction de l'intensité} \\ \text{restant dans le faisceau compte tenu} \\ \text{des pertes par réflexion sur une face} \\ \text{de l'amplificateur}}} \times (1 - R_a) \\
&\quad \times \underbrace{(1 - \eta)}_{\substack{\text{fraction de l'intensité} \\ \text{restant dans le faisceau} \\ \text{malgré les pertes 'autres'}}}
\end{aligned}$$

## 5.2.2 Caractérisation quantitative des pertes de la cavité

### a) Longueur optique d'une cavité

Soit une cavité en anneau contenant à la position  $z$  des éléments optiques d'indice  $n(z)$  différent de 1. Le temps d'un parcours complet de cette cavité s'écrit

$$\Delta t = \int_{\text{cavité}} \frac{dz}{c} = \int_{\text{cavité}} \frac{n(z) dz}{c_0} = \frac{\int_{\text{cavité}} n(z) dz}{c_0}$$

On utilisera par convention la notation suivante :

Pour la cavité **en anneau**,  $d = \int_{\text{cavité}} n(z) dz$  est la **la longueur optique totale** de la cavité. On a alors  $\Delta t = \frac{d}{c_0}$ .

Pour une cavité **linéaire**, on note  $d$  la longueur optique **d'une extrémité à l'autre de la cavité**. Avec cette convention, la durée d'un parcours complet de la cavité (aller-retour) s'écrit  $\Delta t = \frac{2d}{c_0}$ .

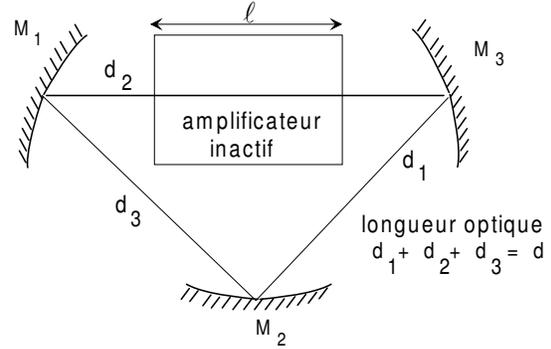
### b) Coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur

On va montrer que le laser fonctionne si l'amplification sur un parcours complet de cavité est supérieure aux pertes sur le même parcours. Dans la mesure où le coefficient d'amplification  $\alpha$  a un sens sur la longueur  $\ell$  de l'amplificateur, on caractérise les pertes **en les rapportant elles aussi à la longueur du milieu amplificateur**. Le **coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur**, noté  $\alpha_P$ , est défini de la manière suivante :

- cavité en anneau de longueur optique  $d$ .  
Le milieu amplificateur est inactif. Sa longueur est notée  $\ell$ . Un paquet de photons effectue un parcours complet de la cavité. On écrit :

$$I(z, t + \frac{d}{c_0}) = I(z, t) \exp -(\alpha_P \ell)$$

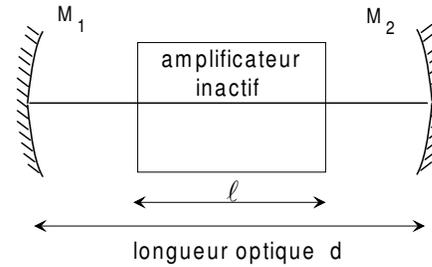
par définition de  $\alpha_P$ , le coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur.



- cavité linéaire de longueur optique totale  $2d$ .<sup>a</sup>  
Le temps d'un parcours complet de cavité vaut  $\frac{2d}{c_0}$ . Les photons traversent l'amplificateur à l'aller puis au retour donc sur une longueur  $2\ell$ . On pose par définition :

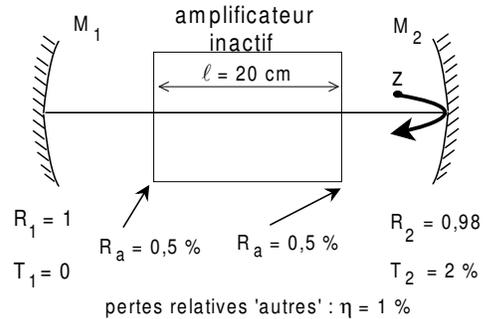
$$I(z, t + \frac{2d}{c_0}) = I(z, t) \exp -(\alpha_P 2\ell)$$

<sup>a</sup>. On rappelle qu'on a choisi de désigner par  $d$  la longueur optique d'un miroir d'extrémité à l'autre.



Exemple pour une cavité linéaire :

Miroir  $M_1$  :  $R_1 = 1$ ,  $T_1 = 0$ ; miroir  $M_2$  :  $R_2 = 0,98$ ,  $T_2 = 0,02$ ; coefficient de réflexion de chaque face de l'amplificateur :  $R_a = 0,005$ ; pertes relatives 'autres que les miroirs et les faces de l'amplificateur' :  $\eta = 0,01$ ; longueur du milieu amplificateur :  $\ell = 20$  cm. Ces coefficients sont souvent donnés en pourcentage ( $R_2 = 98$  %,  $T_2 = 2$  %, ...,  $\eta = 1$  %).



Soit  $I(z, t)$  l'intensité juste après la sortie de l'amplificateur supposé inactif. L'intensité au même point après un parcours complet de la cavité s'écrit :

$$\begin{aligned} I(z, t + \frac{2d}{c_0}) &= I(z, t) (1 - \eta) R_2 (1 - R_a)^2 R_1 (1 - R_a)^2 \\ &= I(z, t) R_1 R_2 (1 - R_a)^4 (1 - \eta) \end{aligned}$$

$$\text{avec par définition } I(z, t + \frac{2d}{c_0}) = I(z, t) \exp -2 \alpha_P \ell$$

On en déduit le coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur :

$$\alpha_P = -\frac{1}{2\ell} \ln (R_1 R_2 (1 - \eta) (1 - R_a)^4)$$

Si  $T_1 = 1 - R_1$ ,  $T_2 = 1 - R_2$ ,  $\eta$  et  $R_a$  sont petits devant 1, on peut transformer cette expression puis utiliser la relation  $\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$  pour  $\epsilon \ll 1$  (développement limité à l'ordre 1 en  $\epsilon$ ) :

$$\begin{aligned} \ln (R_1 R_2 (1 - \eta) (1 - R_a)^4) &= \ln(1 - T_1) + \ln(1 - T_2) + \ln(1 - \eta) + 4 \ln(1 - R_a) \\ &\approx -(T_1 + T_2 + \eta + 4R_a) \end{aligned}$$

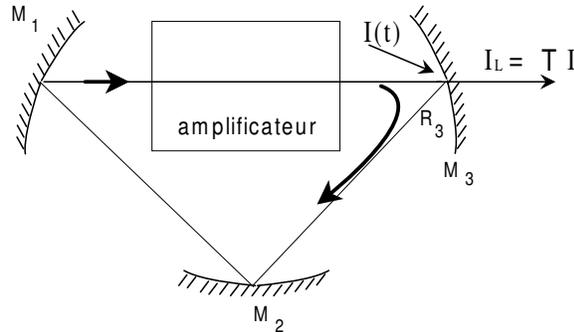
$$\text{d'où } \alpha_P \approx \frac{T_1 + T_2 + \eta + 4R_a}{2 \ell}$$

Application numérique :  $\alpha_P = 0,125 \text{ m}^{-1}$  avec le développement limité,  $\alpha_P = 0,126 \text{ m}^{-1}$  sans simplification.

On remarque que  $\alpha_P \ell = 0,025$  d'où  $\exp -\alpha_P \ell = 0,98$ . L'intensité est quasi uniforme sur un parcours complet de la cavité. Cette situation  $\alpha_P \ell \ll 1$  est appelée 'régime à pertes faibles'.

### 5.2.3 Durée de vie des photons dans la cavité

On s'intéresse à une cavité en anneau. L'intensité juste avant le miroir de sortie  $M_3$  est notée  $I(t)$ . L'intensité laser extraite de la cavité vaut  $I_L(t) = T I(t)$ , où  $T$  désigne le facteur de transmission du miroir  $M_3$ . Lorsqu'on coupe l'amplification, les photons accumulés dans la cavité en sortent progressivement,  $I_L(t)$  décroît avec un temps caractéristique qu'on va relier à  $\alpha_P$  pour des pertes faibles ( $\alpha_P \ell \ll 1$ ).



Pour un parcours complet de cavité partant de  $M_3$ , l'intensité vérifie :

$$\begin{aligned} I\left(t + \frac{d}{c_0}\right) &= I(t) \exp -(\alpha_P \ell) \\ &\simeq I(t) (1 - \alpha_P \ell) \\ I\left(t + \frac{d}{c_0}\right) - I(t) &= -\alpha_P \ell I(t) \end{aligned}$$

$\alpha_P \ell \ll 1$  fait qu'il s'agit d'une petite variation d'intensité d'où  $I\left(t + \frac{d}{c_0}\right) - I(t) = \frac{dI}{dt} \times \frac{d}{c_0}$  et :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} \times \frac{d}{c_0} &= -\alpha_P \ell I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{c_0 \alpha_P \ell}{d} I(t) \end{aligned}$$

Remarque : pour  $\alpha_P \ell \ll 1$ , on a vu au paragraphe précédent que l'intensité varie très peu sur un tour de cavité. On aura donc la relation précédente avec  $I(t)$  désignant l'intensité en un point quelconque du faisceau dans la cavité ou à sa sortie.

On note  $\frac{dI}{dt} = -\frac{I(t)}{\tau_c}$  par définition de  $\tau_c$ , appelé 'durée de vie des photons dans la cavité'.

Il vient alors la relation  $\tau_c = \frac{d}{c_0 \alpha_P \ell}$

Les pertes de la cavité peuvent aussi être caractérisées par la quantité  $Q_c = \omega \tau_c$  appelée facteur de qualité.  $\omega$  désigne la pulsation de l'onde lumineuse.<sup>3</sup>

3. D'une manière générale, le facteur de qualité d'un oscillateur électronique, mécanique ou optique est défini par :

$$Q_c = \omega \frac{\text{Énergie emmagasinée}}{|\text{Puissance dissipée}|}$$

Pour un oscillateur optique,  $\omega$  représente la pulsation de l'onde lumineuse puisque l'énergie électromagnétique instantanée de la cavité oscille comme  $\frac{\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t}{2} + \frac{\mu_0 B_0^2 \cos^2 \omega t}{2}$ . L'énergie d'une cavité laser étant stockée sous forme lumineuse, elle est proportionnelle à l'intensité et la puissance dissipée est proportionnelle à  $|\frac{dI}{dt}| = \frac{I}{\tau_c}$ . On a donc

$$Q_c = \omega \tau_c$$

On retiendra que  $\tau_c$  et  $Q_c$  élevés correspondent à une très lente diminution du nombre de photons dans la cavité donc à  $\alpha_P \ell$  très petit.

Remarque 1 : pour une cavité linéaire, l'équation  $I(z, t + \frac{2d}{c_0}) = I(z, t) \exp(-\alpha_P 2 \ell)$  conduit également à la relation  $\tau_c = \frac{d}{c_0 \alpha_P \ell}$ .

Remarque 2 : on peut montrer que  $\tau_c$  ainsi défini correspond au temps moyen qu'un photon passe dans la cavité.

On en déduit le nombre de tours qu'un photon fait en moyenne dans la cavité avant de disparaître ou d'en sortir :

$$\frac{\text{temps moyen que le photon passe dans la cavité}}{\text{durée d'un tour de cavité}} = \frac{\tau_c}{d/c_0} = \frac{1}{\alpha_P \ell}$$

Avec par exemple  $\exp(-\alpha_P \ell) = 0,98$ , il vient  $\frac{\tau_c}{d/c_0} = \frac{1}{\alpha_P \ell} = 50$  donc un photon effectue en moyenne une cinquantaine de tours de cavité avant d'en sortir.

Remarque 3 : La notation prête à confusion, mais la durée de vie des photons dans la cavité est une notion indépendante de celle de temps de cohérence de la radiation. On s'en convaincra par l'exemple d'un laser à colorant. L'amplification y est forte donc il peut fonctionner en continu malgré des pertes importantes (durée de vie des photons dans la cavité très courte). Par contre, ces systèmes sont utilisables pour obtenir des faisceaux très monochromatiques<sup>4</sup> (spectre très étroit et temps de cohérence très long).

## 5.2.4 Sélectivité d'une cavité

### Modes spectraux

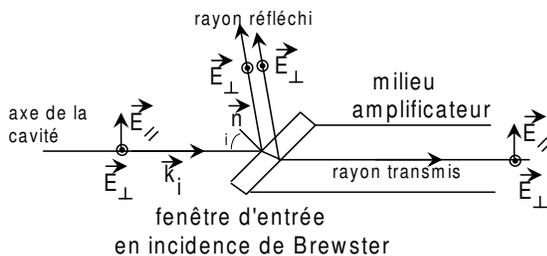
On a vu au chapitre 'Cavités Lasers' que les seules ondes pouvant s'établir dans une cavité sont celles dont la fréquence correspond à un mode  $\nu_q$  de la cavité (mode spectral). Ceci s'interprète physiquement comme si la cavité imposait des pertes très élevées pour les fréquences ne correspondant pas à un mode spectral.

Dans une cavité en anneau de longueur optique  $d$ ,  $\nu_q = (q + 1) \frac{c_0}{d}$  et  $(\nu_{q+1} - \nu_q) = \frac{c_0}{d}$  alors que pour une cavité linéaire on a  $\nu_q = (q + 1) \frac{c_0}{2d}$  et  $(\nu_{q+1} - \nu_q) = \frac{c_0}{2d}$ . L'effet laser est possible si une fréquence amplifiée correspond à un mode spectral de la cavité. Le laser est **monomode** si l'effet laser se produit sur un seul mode de la cavité et multimode dans le cas contraire.

### Polarisation

La polarisation (direction du vecteur champ électrique de l'onde) est une autre caractéristique du faisceau laser qui peut être imposée par la cavité.

Soit le milieu amplificateur gazeux contenu dans un tube dont la fenêtre d'entrée, d'indice  $n$ , est schématisée ci-dessous.



Les coefficients de réflexion et de transmission de l'intensité dépendent de l'angle d'incidence  $i$  du rayon lumineux sur la fenêtre d'entrée, mais aussi de la direction du champ électrique (polarisation) par rapport au plan d'incidence<sup>a</sup>.

Pour un angle d'incidence particulier appelé **angle de Brewster**, une onde de champ électrique parallèle au plan d'incidence est totalement transmise par l'interface (aucune réflexion).

<sup>a</sup>. le plan formé par le rayon incident et la normale à l'interface

En construisant la cellule pour que l'angle  $i$  corresponde à l'angle de Brewster ( $\tan i = n$ ), on a  $T = 0,711$  pour l'intensité lumineuse associée à la polarisation  $\vec{E}_\perp$  et  $T = 1$  pour l'intensité lumineuse associée à la

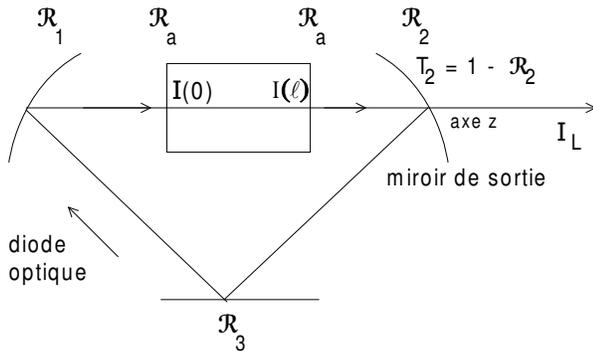
4. L'élargissement spectral est homogène, une cavité en anneau permettra un fonctionnement monomode, Cf 5.3.7

polarisation  $\vec{E}_{\parallel}$  (valeur numérique pour  $n = 1,52$ ). L'effet laser est possible pour l'onde voyant les pertes minimales, la cavité impose pour le faisceau laser une polarisation rectiligne suivant  $\vec{E}_{\parallel}$

## 5.3 Laser fonctionnant en régime stationnaire

### 5.3.1 Cas d'un amplificateur placé dans une cavité en anneau

#### \* Caractéristiques du laser



On considère l'exemple d'un laser constitué d'une cavité en anneau représentée ci-contre et d'un milieu amplificateur pour lequel tous les atomes possèdent la même section efficace d'interaction avec l'onde. Le miroir d'extraction du faisceau laser est  $M_2$  avec un coefficient de transmission  $T_2$ . Le pompage du milieu amplificateur y produit un coefficient d'amplification non saturé  $\alpha^0$  uniforme.

L'objectif est de déterminer l'intensité lumineuse établie en tout point de la cavité et l'intensité laser extraite, tout cela pour un fonctionnement **en régime stationnaire**.

Les coefficients de réflexion pour l'intensité sont  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$  pour les miroirs et  $\mathcal{R}_a$  pour les fenêtres d'entrée de l'amplificateur. Il n'y a pas d'autre perte significative dans la cavité. Un dispositif optique appelé diode optique, qu'on ne détaillera pas, impose un sens unique de parcours de la lumière dans la cavité.

#### \* Gain total de l'amplificateur

En régime stationnaire, l'évolution de l'intensité lumineuse  $I(z)$  à l'intérieur de l'amplificateur est régie par l'équation

$$\frac{1}{I(z)} \frac{dI(z)}{dz} = \alpha(z)$$

avec  $\alpha(z) = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I(z)}{I_s}}$  fonction de  $I(z)$  donc de  $z$  (effet de saturation de l'amplification). La valeur de  $\alpha^0$  est déterminée par le pompage de l'amplificateur. On a calculé dans le chapitre 'Amplificateurs Lasers' que le gain total  $G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$  du milieu amplificateur est la solution de l'équation

$$\ln G + (G - 1) \frac{I(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell$$

où  $I(0)$  représente l'intensité juste après l'entrée de l'amplificateur et  $I(\ell)$  celle juste avant sa sortie. Si on connaît  $G$ , on déduit  $I(0)$  par

$$I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \ln G}{G - 1}$$

#### \* Évolution de l'intensité sur un parcours complet de la cavité.

Une onde s'établit en régime stationnaire dans la cavité : son intensité ne dépend pas du temps mais seulement de la position  $z$  suivant l'axe de la cavité.

On prend comme point de départ l'intensité  $I(0, t) \equiv I(0)$  juste après l'entrée dans l'amplificateur. Soit  $I(d)$  l'intensité obtenue au même endroit après un parcours complet de la cavité, en supposant dans un premier temps que l'amplificateur est inactif (pas d'amplification)

$$I(d) = I(0) (1 - R_a) R_2 R_3 R_1 (1 - R_a)$$

$$\Leftrightarrow I(d) = I(0) \exp -\alpha_P \ell$$

Avec amplification, l'intensité  $I(0)$  est multipliée par  $G$  à la traversée de l'amplificateur et les pertes relatives sont inchangées donc :

$$I(d) = I(0) G \exp -\alpha_P \ell$$

\* Amorçage d'une onde laser (régime transitoire précédant l'établissement du régime stationnaire)

L'amplificateur pompé produit par émission spontanée (fluorescence) des photons dont certains sont sur l'axe de la cavité. L'amplification de cette lumière est suffisante pour compenser les pertes lorsque  $I(d) > I(0) \Leftrightarrow G \exp -\alpha_P \ell > 1 \Leftrightarrow G > \exp \alpha_P \ell$ .

Dans cette phase d'amorçage, l'intensité reste faible donc l'amplification n'est pas saturée par l'onde et  $\alpha = \alpha^0$ . En général, elle varie suffisamment peu avec  $t$  pour avoir  $\alpha = \frac{1}{I}(\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z}) \simeq \frac{1}{I} \frac{dI}{dz}$ . On a donc  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \alpha^0 \Leftrightarrow I(\ell) = I(0) \exp \alpha^0 \ell$  et  $G = \exp \alpha^0 \ell$  noté  $G^0$  ('gain total non saturé'). Une onde laser peut s'amorcer dans la cavité si  $G^0 = \exp \alpha^0 \ell > \exp \alpha_P \ell \Leftrightarrow \alpha^0 > \alpha_P$ . Son intensité augmentera ensuite jusqu'à atteindre un régime stationnaire.

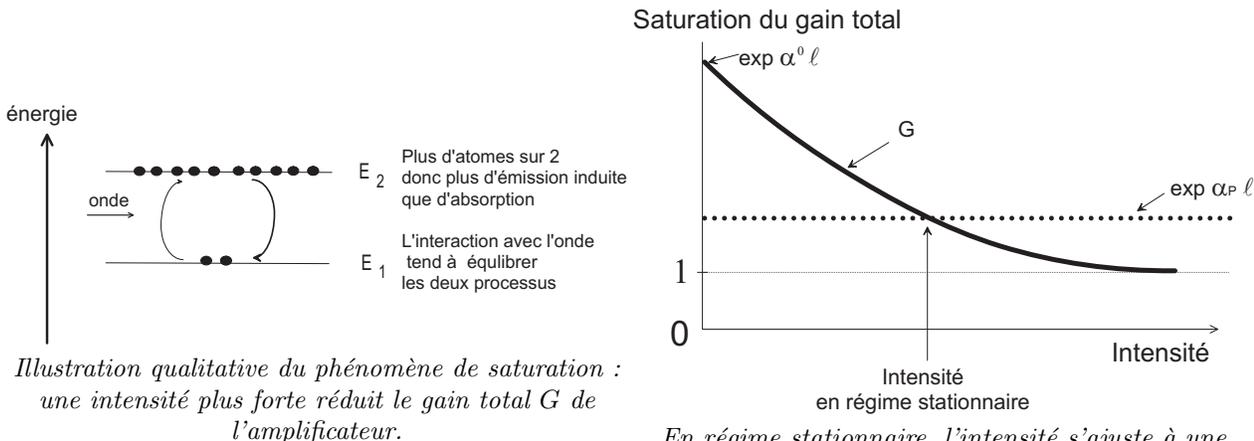
Lorsque  $\alpha^0 < \alpha_P$ , l'intensité laser reste nulle, seule une lumière de fluorescence (faible et non cohérente) sort de la cavité.

\* Fonctionnement laser en régime stationnaire.

Avec  $\alpha^0 > \alpha_P$ , une onde s'amorce dans la cavité et son intensité augmente à chaque traversée de l'amplificateur. Le phénomène de saturation fait que le coefficient d'amplification  $\alpha$  devient inférieur à  $\alpha^0$ . Sur la longueur de l'amplificateur, le gain total  $G$  devient inférieur à sa valeur  $G^0$  évaluée pour une intensité très faible. Le gain total dans l'amplificateur s'ajuste pour compenser exactement les pertes  $\exp(\alpha_P \ell)$  fixée par les caractéristiques physiques de la cavité ( $R_i, \ell, \dots$ ). Le système atteint un régime stationnaire pour lequel sur un tour de cavité :

$$I(d) = I(0) \Leftrightarrow G \exp -\alpha_P \ell = 1 \Leftrightarrow G = \exp \alpha_P \ell$$

La valeur de  $G$  dépend de  $G^0$ , fixé lui même par le pompage et les caractéristiques physiques du milieu amplificateur, mais aussi de l'intensité comme illustré sur les schémas suivants. L'ajustement de  $G$  à la valeur  $\exp(\alpha_P \ell)$  détermine la valeur de l'intensité  $I$  établie en régime stationnaire dans la cavité et par conséquent l'intensité extraite du laser, comme discuté quantitativement ci-dessous.



\* **Intensité laser extraite en régime stationnaire**

Pour l'exemple traité, l'intensité  $I_L$  extraite de la cavité est reliée à  $I(0)$  par :

$$I_L = G I(0) (1 - R_a) T_2$$

Pour un milieu amplificateur à élargissement spectral homogène, la relation de saturation s'écrit  $\alpha(z) = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I(z)}{I_s}}$  et l'intégration de l'équation d'évolution de l'intensité  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \alpha(z)$  montre que le gain total  $G = \frac{I(\ell)}{I(0)}$  vérifie :

$$\begin{aligned} \ln G + (G - 1) \frac{I(0)}{I_s} &= \alpha^0 \ell \\ \Leftrightarrow I(0) &= I_s \frac{\alpha^0 \ell - \ln G}{G - 1} \end{aligned}$$

On a montré qu'en régime stationnaire  $G = \exp \alpha_P \ell$  donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp \alpha_P \ell - 1} \\ I_L = (1 - R_a) T_2 I_s \exp(\alpha_P \ell) \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp \alpha_P \ell - 1} \end{array} \right.$$

L'intensité continue extraite de ce laser s'exprime en fonction des caractéristiques de l'amplificateur pompé ( $I_s, \alpha^0$ ) et de la cavité ( $\alpha_P, T_2, R_a, \dots$ ). Le raisonnement sera à adapter pour chaque laser.

Remarque : si l'élargissement spectral n'est pas homogène dominant, l'intégration de l'équation  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \alpha(z)$  n'a pas une forme analytique aussi simple. On ne développe pas cette situation dans le cas général.

## \* Puissance du faisceau laser

Le fonctionnement en régime stationnaire produit une intensité constante au cours du temps, ce laser est dit 'continu'.

On suppose que le faisceau extrait a une intensité uniforme sur sa section  $S$ . La puissance lumineuse extraite du laser vaut alors  $P_L = S I_L$ .

**5.3.2 Régime pertes faibles-gain faible**

On poursuit l'étude précédente en supposant les pertes faibles ( $\alpha_P \ell \ll 1$  d'où  $\exp -\alpha_P \ell \approx 1^-$ ).

Le régime stationnaire nécessite  $G \exp -\alpha_P \ell = 1$  donc le gain total vérifie  $G \simeq 1^+$ . L'intensité  $I(z)$  est quasi-uniforme de valeur  $I$  sur toute la cavité. Le coefficient d'amplification saturée  $\alpha$  est donc indépendant de  $z$  et l'équation  $\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} = \alpha$  s'intègre en  $I(\ell) = I(0) \exp \alpha \ell \Leftrightarrow G = \exp \alpha \ell$ . L'égalité  $G \exp -\alpha_P \ell = 1$  se simplifie en  $\alpha = \alpha_P$ .

On a alors  $\alpha \ell \ll 1$  donc pour ce régime le coefficient d'amplification saturée est faible lui aussi.

## \* Intensité dans la cavité pour un amplificateur à élargissement spectral homogène dominant

$$\left. \begin{array}{l} \text{condition de fonctionnement en régime stationnaire} \\ \text{(pertes faibles)} \\ \alpha = \alpha_P \\ \text{relation de saturation} \\ \alpha = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}} = \alpha_P \Rightarrow I = I_s \left( \frac{\alpha^0}{\alpha_P} - 1 \right)$$

## \* Intensité dans la cavité pour un amplificateur à élargissement spectral inhomogène dominant

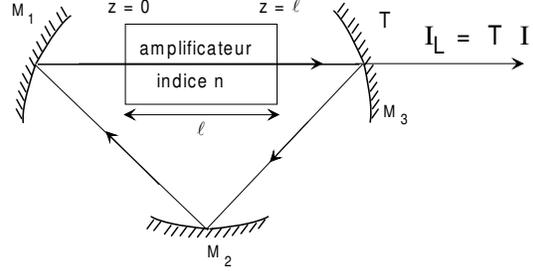
$$\left. \begin{array}{l} \text{condition de fonctionnement en régime stationnaire} \\ \text{(pertes faibles)} \\ \alpha = \alpha_P \\ \text{relation de saturation} \\ \alpha = \frac{\alpha^0}{\sqrt{1 + \frac{I}{I_s}}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha^0}{\sqrt{1 + \frac{I}{I_s}}} = \alpha_P \Rightarrow I = I_s \left( \left( \frac{\alpha^0}{\alpha_P} \right)^2 - 1 \right)$$

On peut montrer que ces résultats restent valables pour une cavité linéaire où l'intensité n'est pas trop forte (Cf remarque du §5.3.7)

### 5.3.3 Optimisation du couplage de sortie

L'intensité établie dans la cavité est d'autant plus importante que les pertes sont faibles. Cependant, l'intensité laser extraite est d'autant plus forte que le facteur de transmission du miroir de couplage est élevé, sachant que s'il est fort il augmente les pertes de la cavité. Il est donc possible de trouver une valeur optimale pour ce paramètre, ce qui va être illustré ici sur un exemple.

On considère la cavité en anneau décrite ci-contre. L'amplificateur est un milieu à élargissement spectral homogène. Le pompage produit le gain non saturé  $\alpha^0$ . Le faisceau laser est extrait de la cavité par le miroir  $M_3$  de facteur de transmission  $T$  et de facteur de réflexion  $\mathcal{R} = 1 - T$ . Les pertes relatives d'intensité pour un tour de cavité, autres que la transmission de  $M_3$ , valent  $\frac{\Delta I}{I} = \eta$ . Le gain et les pertes sont faibles.



Le coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur est déterminé par

$$\exp -\alpha_P \ell = (1 - \eta)(1 - T)$$

soit

$$\alpha_P = \frac{\eta + T}{\ell} \quad (\eta \text{ et } T \text{ sont faibles})$$

Si  $\alpha^0 > \alpha_P$ , on a en régime stationnaire  $I = I_s(\frac{\alpha^0 \ell}{\eta + T} - 1)$  et l'intensité sortant de la cavité par  $M_3$  vaut

$$I_L = T I_s \left( \frac{\alpha^0 \ell}{\eta + T} - 1 \right)$$

Pour  $T = 0$ , cette intensité est nulle; pour  $T$  trop grand, les pertes sont supérieures au gain et le laser ne fonctionne pas donc  $I_L = 0$ . L'intensité extraite de la cavité passe par un maximum en fonction de  $T$ , on va le calculer.

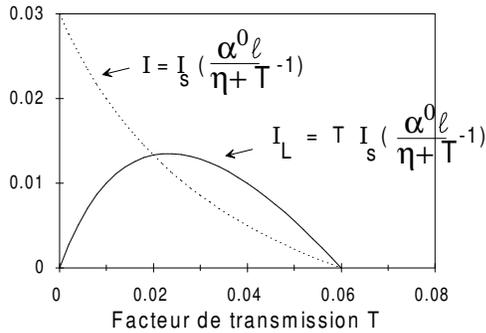
On pose  $y = I_L / I_s$  et  $x = \eta + T$ , soit  $y = (x - \eta) \left( \frac{\alpha^0 \ell}{x} - 1 \right)$ . L'intensité  $I_L$  est maximum pour la valeur de  $T$  donnant  $\frac{dy}{dx} = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = 0 &\Leftrightarrow \left( \frac{\alpha^0 \ell}{x} - 1 \right) + (x - \eta) \left( -\frac{\alpha^0 \ell}{x^2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha^0 \ell x - x^2 - (x - \eta) \alpha^0 \ell = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = \eta \alpha^0 \ell \\ &\Rightarrow T = \sqrt{\eta \alpha^0 \ell} - \eta \quad (\text{racine positive}) \end{aligned}$$

La valeur de  $I_L$  est maximale pour  $T = \sqrt{\eta \alpha^0 \ell} - \eta$  et vaut

$$\begin{aligned} I_L &= I_s (\sqrt{\eta \alpha^0 \ell} - \eta) \left( \frac{\alpha^0 \ell}{\sqrt{\eta \alpha^0 \ell}} - 1 \right) \\ &= I_s \eta \left( \sqrt{\frac{\alpha^0 \ell}{\eta}} - 1 \right) \left( \sqrt{\frac{\alpha^0 \ell}{\eta}} - 1 \right) \\ &= I_s \eta \left( \sqrt{\frac{\alpha^0 \ell}{\eta}} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

Les variations des intensités dans la cavité et dans le faisceau laser sont représentées en fonction de  $T$  sur le graphe suivant :



Les courbes sont tracées pour  $\alpha^0 \ell = 0,1$  et  $\eta = 0,04$

La courbe  $I(T)$  n'est pas représentée à l'échelle. Expérimentalement, il faut donc choisir le coefficient de transmission du miroir de sortie en fonction des autres pertes de la cavité et du coefficient d'amplification.

Remarque importante : en plus de la condition  $I_L > 0$ , il faudrait en principe vérifier également sur quel domaine de valeurs de  $T$  est valide l'approximation des pertes faibles qui a permis de linéariser l'expression du coefficient de pertes en fonction du facteur de transmission du miroir d'extraction.

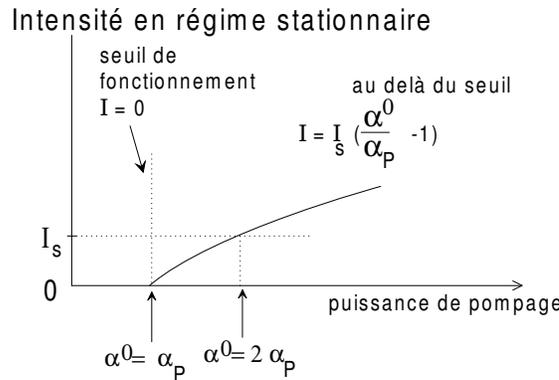
### 5.3.4 Seuil de fonctionnement en régime stationnaire

On reprend l'exemple d'un laser en anneau à pertes faibles et élargissement spectral homogène. Le coefficient d'amplification non saturée  $\alpha^0$  augmente avec la puissance du pompage de l'amplificateur. Pour un pompage trop faible,  $\alpha^0 < \alpha_P$  donc la condition d'amorçage n'est pas réalisée et l'intensité laser reste nulle.

Avec un pompage plus important,  $\alpha^0$  devient supérieur à  $\alpha_P$  et le système atteint un régime stationnaire de fonctionnement. La condition  $\alpha = \alpha_P$  est réalisée pour une valeur de  $I$  vérifiant :

$$\frac{\alpha^0}{1 + \frac{I}{I_s}} = \alpha_P \quad \Leftrightarrow \quad I = I_s \left( \frac{\alpha^0}{\alpha_P} - 1 \right)$$

Lorsque  $\alpha^0$  est à peine supérieur à  $\alpha_P$ , l'intensité  $I$  obtenue en régime stationnaire est très proche de 0, c'est le **seuil de fonctionnement**. L'évolution de  $I$  en fonction du pompage et de  $\alpha^0$  croissants est illustrée ci-dessous.



Remarque :  $I_s$  est la valeur de  $I$  qui commence à réduire significativement  $\Delta N$  en régime stationnaire (relation  $\Delta N = \frac{\Delta N^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$ ), mais rien n'empêche d'avoir dans la cavité une intensité supérieure à  $I_s$ <sup>5</sup>.

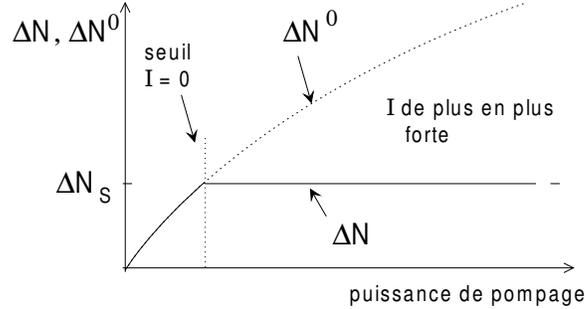
Pour ce milieu à élargissement spectral homogène, on a  $\alpha = \sigma \Delta N$  qui pour  $I \ll I_s$  prend la valeur  $\alpha^0 = \sigma \Delta N^0$ . On va utiliser ces relations pour déduire l'évolution de la différence de population saturée  $\Delta N$  et de la différence de population non saturée  $\Delta N^0$  avec la puissance de pompage.

Au delà du seuil d'amorçage  $\alpha^0 \geq \alpha_P$ , le système atteint le régime stationnaire avec  $\alpha = \alpha_P$  donc la différence de population saturée vérifie :

$$\Delta N = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha_P}{\sigma}$$

5. Ne pas confondre avec la saturation d'un courant en électronique.

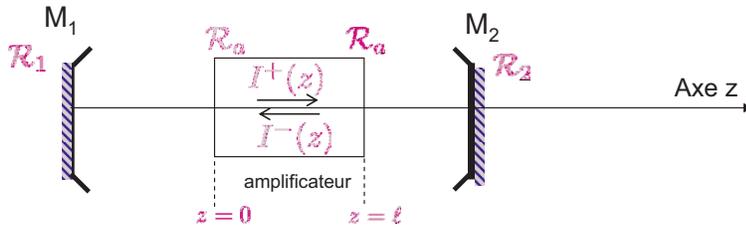
Pour un pompage au-delà de l'amorçage de l'effet laser, la différence de population saturée conserve en régime stationnaire la valeur constante  $\Delta N_S = \frac{\alpha^0 P}{\sigma}$  appelée 'différence de population au seuil'.



Interprétation physique : en dessous du seuil, le pompage dépose de l'énergie dans le système en portant des atomes sur le niveau 2 pour augmenter la différence de population  $\Delta N$ . Au dessus du seuil, une énergie déposée plus importante est convertie en photons.

### 5.3.5 Cas d'un amplificateur placé dans une cavité linéaire

On reprend les idées développées dans le paragraphe 5.3.1 en les appliquant au cas d'une cavité linéaire comme par exemple celle de la figure ci-dessous.



Le miroir d'extraction du faisceau laser est  $M_2$  avec un coefficient de transmission  $T_2$ . Les coefficients de réflexion pour l'intensité sont  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  pour les miroirs et  $\mathcal{R}_a$  pour les fenêtres d'entrée et sortie de l'amplificateur. Il n'y a pas d'autre perte significative dans la cavité. Le pompage du milieu amplificateur y produit un coefficient d'amplification non saturé  $\alpha^0$  uniforme.

A cause de la géométrie linéaire de la cavité, en un point donné de coordonnée  $z$ , il existe deux ondes contra-propagatives, l'une se dirigeant vers  $M_1$  et l'autre se dirigeant vers  $M_2$ . Si on suppose qu'il n'y a pas d'interférences entre ces deux ondes progressives<sup>6</sup>, l'intensité totale  $I(z)$  mesurée en ce point est la somme des intensités  $I^+(z)$  et  $I^-(z)$  des deux ondes :  $I(z) = I^+(z) + I^-(z)$ .

L'aller et le retour dans la cavité étant semblables, on a naturellement  $I^+(z) = I^-(z)$ , d'où :  $I^+(z) = I^-(z) = \frac{I(z)}{2}$ .

#### \* Gain de l'amplificateur pour un passage

On peut définir un gain pour la traversée du milieu amplificateur à l'aller, noté  $G^+$  et un gain pour le retour,  $G^-$ , qui auront la même valeur :

$$G^+ = \frac{I^+(\ell)}{I^+(0)}; G^- = \frac{I^-(0)}{I^-(\ell)}; \text{ avec } G^+ = G^- = G$$

Comme pour une cavité en anneau, on pourra ainsi utiliser un gain  $G$  correspondant à **un passage** dans le milieu amplificateur. On aura alors :

$$\frac{1}{I(z)} \frac{dI(z)}{dz} = \alpha(z) \text{ avec } \alpha(z) = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{I^+(z) + I^-(z)}{I_s}} = \frac{\alpha^0}{1 + \frac{2I^+(z)}{I_s}}$$

Le gain obéit à l'équation :

$$\ln G^+ + (G^+ - 1) \frac{2I^+(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell \text{ et } \ln G^- + (G^- - 1) \frac{2I^-(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell; \text{ soit } \ln G + (G - 1) \frac{I(0)}{I_s} = \alpha^0 \ell$$

6. Ceci revient à négliger le phénomène de 'Hole-burning spatial' ou 'creusement spatial' en français. Le calcul correct doit tenir compte des interférences au sein du milieu amplificateur qui vont créer un réseau spatial de saturation.

On retrouve donc la même équation que pour une cavité en anneau. Si on connaît  $G$ , on en déduit  $I(0)$  par

$$I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \ln G}{G - 1}$$

\* **Bilan d'énergie sur un aller-retour**

En régime stationnaire on aura :  $I(0) = I(0) G^+ G^- \times \exp -(\alpha_P 2\ell) = I(0) G^2 \exp -(\alpha_P 2\ell)$

avec pour cette cavité :  $\exp -(\alpha_P 2\ell) = (1 - \mathcal{R}_a) \mathcal{R}_2 (1 - \mathcal{R}_a)^2 \mathcal{R}_1 (1 - \mathcal{R}_a)$ . D'où

$$G^2 \exp - (2\alpha_P \ell) = 1 \Leftrightarrow G = \exp \alpha_P \ell$$

Le laser fonctionne en régime stationnaire seulement si l'amplification sur un passage compense exactement les pertes avec la relation  $G \exp -\alpha_P \ell = 1 \Leftrightarrow G = \exp \alpha_P \ell$ . On aura donc **la même relation en régime gain faible-pertes faibles pour une cavité linéaire ou en anneau.**

\* **Intensité laser extraite** L'intensité qui est extraite par le miroir  $M_2$  correspond seulement à la partie du faisceau qui se propage de  $M_1$  vers  $M_2$  donc :

$$I_L = I^+(\ell)(1 - \mathcal{R}_a)T_2 = \frac{I(\ell)}{2}(1 - \mathcal{R}_a)T_2.$$

En rassemblant les résultats précédents, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(\ell) = G I(0) \\ G = \exp \alpha_P \ell \\ I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \ln G}{G - 1} \\ I_L = (1 - \mathcal{R}_a)T_2 \frac{I(\ell)}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I(0) = I_s \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp \alpha_P \ell - 1} \\ I_L = (1 - \mathcal{R}_a)T_2 \frac{I_s}{2} \exp \alpha_P \ell \frac{\alpha^0 \ell - \alpha_P \ell}{\exp \alpha_P \ell - 1} \end{array} \right.$$

Cette expression a un sens si  $I(0) > 0 \Leftrightarrow \alpha^0 > \alpha_P$

**5.3.6 Conditions de fonctionnement laser**

On rassemble dans le tableau suivant l'ensemble des conditions nécessaires au fonctionnement d'un laser à la fréquence  $\nu$ . On utilise les notations  $G(\nu)$ ,  $\alpha^0(\nu)$  et  $\alpha_P(\nu)$  pour rappeler que ces coefficients peuvent varier avec la fréquence du rayonnement.

La production de lumière est possible seulement si  $\alpha^0(\nu) > \alpha_P(\nu)$ , pour un laser fonctionnant en impulsions, en régime transitoire ou en régime stationnaire (laser continu).

En régime stationnaire, l'amplification doit exactement compenser les pertes avec  $G(\nu) = \exp \alpha_P(\nu) \ell$  qui pour des pertes faibles se simplifie en  $\alpha(\nu) = \alpha_P(\nu)$ .

Amorçage d'une impulsion	Régime stationnaire (laser continu)
$\nu = \nu_q$	$\nu = \nu_q$
$\alpha^0(\nu) > \alpha_P(\nu)$	$G(\nu) \exp(-\alpha_P(\nu) \ell) = 1$ avec pour des pertes faibles le gain $G(\nu) = \exp \alpha(\nu) \ell$ proche de 1, la condition de fonctionnement se simplifie en $\alpha(\nu) = \alpha_P(\nu)$

Remarque : l'expression  $G(\nu) = \exp \alpha_P(\nu) \ell$  a été justifiée pour une cavité en anneau et on a vu qu'elle reste valable pour une cavité linéaire si  $G$  représente le gain total pour une traversée de l'amplificateur et si les effets d'interférences entre l'onde aller et l'onde retour sont négligeables.

**5.3.7 Fonctionnement continu monomode ou multimode**

**Milieu amplificateur à élargissement spectral homogène**

Soit un laser continu en anneau possédant les caractéristiques suivantes :

- la cavité impose l'écart  $\delta\nu$  entre deux modes spectraux consécutifs.

- les pertes sont faibles ( $\alpha_P \ell \ll 1$ ).
- tous les atomes ont la fréquence de résonance  $\nu_0$ , avec le profil spectral  $g(\nu - \nu_0)$  de largeur  $\Delta\nu_h$
- le pompage fait que le milieu possède pour l'onde  $\nu$  le coefficient d'amplification non saturée  $\alpha^0(\nu)$  qui pour ce système est proportionnel à  $g(\nu - \nu_0)$ . L'amplification est donc efficace sur un domaine de fréquences de largeur  $\Delta\nu_h$  autour de  $\nu_0$ .
- on suppose  $\delta\nu < \Delta\nu_h \ll \nu_0$ .
- on note  $\nu_n$  le mode spectral le plus proche de  $\nu_0$ .

On suppose qu'une onde s'établit à la fréquence  $\nu_n$ . L'élargissement spectral est homogène donc elle voit le coefficient d'amplification saturée :

$$\begin{aligned} \alpha(\nu_n) &= \sigma(\nu_n - \nu_0) \Delta N \\ \text{avec } \sigma(\nu_n - \nu_0) &= \frac{h\nu_n}{c} B g(\nu_n - \nu_0) \\ &\approx \frac{h\nu_0}{c} B g(\nu_n - \nu_0) \text{ car } \delta\nu \ll \nu_0 \end{aligned}$$

En régime stationnaire (pertes faibles), la condition de fonctionnement  $\alpha(\nu_n) = \alpha_P$  impose :

$$\Delta N = \frac{\alpha_P}{\sigma(\nu_n - \nu_0)} = \frac{\alpha_P}{\frac{h\nu_0}{c} B g(\nu_n - \nu_0)}$$

Une onde de fréquence correspondant à un mode spectral  $\nu_m \neq \nu_n$  verrait le coefficient d'amplification saturée :

$$\begin{aligned} \alpha(\nu_m) &= \sigma(\nu_m - \nu_0) \Delta N \\ &\approx \frac{h\nu_0}{c} B g(\nu_m - \nu_0) \frac{\alpha_P}{\frac{h\nu_0}{c} B g(\nu_n - \nu_0)} \\ &= \frac{g(\nu_m - \nu_0)}{g(\nu_n - \nu_0)} \alpha_P \end{aligned}$$

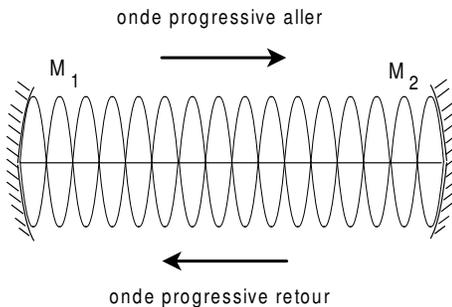
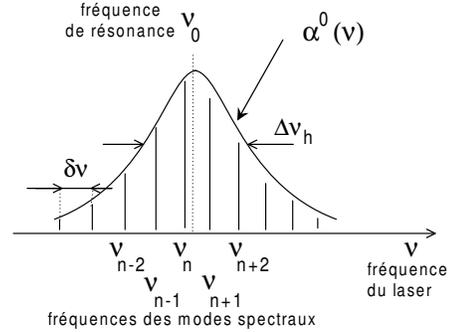
$\nu_n$  désigne le mode le plus proche de  $\nu_0$  donc pour  $m \neq n$  on aura  $\frac{g(\nu_m - \nu_0)}{g(\nu_n - \nu_0)} < 1$ . Une onde de fréquence  $\nu_m$  voit alors  $\alpha(\nu_m)$  inférieur à  $\alpha_P$  et elle ne peut pas s'établir en régime stationnaire dans la cavité.

Un laser continu en anneau et à élargissement spectral homogène est donc monomode sur le mode spectral le plus proche de la fréquence de résonance  $\nu_0$  des atomes. Son intensité  $I(\nu_n)$  est telle que :

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\nu_n) &= \alpha_P \\ \alpha(\nu_n) &= \frac{\alpha^0(\nu_n)}{1 + \frac{I(\nu_n)}{I_s}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I(\nu_n) = I_s \left( \frac{\alpha^0(\nu_n)}{\alpha_P} - 1 \right)$$

Remarque : dans une cavité linéaire, les deux ondes progressives se propageant en sens inverse créent une onde stationnaire avec des noeuds et des ventres d'intensité. Au niveau des noeuds d'intensité pour l'onde  $\nu_n$ , il ne se produit pas de saturation de l'amplification donc on n'a pas comme précédemment  $\alpha(\nu_m) < \alpha_P$  et une onde  $\nu_m$  peut s'amorcer si  $\alpha^0(\nu_m) > \alpha_P$ . Plusieurs modes spectraux voisins de  $\nu_0$  peuvent coexister dans la cavité. Le rayonnement n'est pas strictement monomode. Ces modes sont non cohérents temporellement entre eux, ce qui signifie que les valeurs de leurs phases relatives fluctuent au cours du temps de sorte que s'additionnent leurs intensités et non leurs amplitudes.

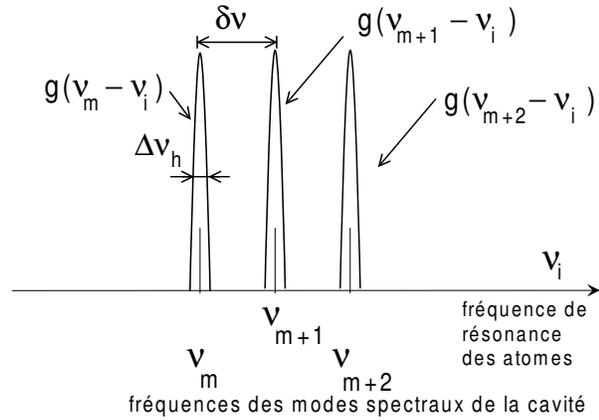
Remarque : pour les lasers fonctionnant en impulsions, un mode n'a pas le temps de supplanter les autres. Le rayonnement obtenu est généralement multimode même si l'élargissement spectral est homogène.



## Milieu amplificateur à élargissement spectral inhomogène

Description du système :

- les modes spectraux  $\nu_m$  de la cavité sont séparés de  $\delta\nu$ .
- les fréquences de résonance  $\nu_i$  des atomes sont au voisinage d'une valeur caractéristique  $\nu_0$ , avec une répartition décrite par la distribution  $P(\nu_i - \nu_0)$  de largeur notée  $\Delta\nu_i$  (largeur inhomogène).
- l'absorption d'une onde  $\nu$  par un atome de résonance  $\nu_i$  est caractérisée par le profil spectral  $g(\nu - \nu_i)$  de largeur  $\Delta\nu_h$ .
- on suppose  $\Delta\nu_h \ll \delta\nu \ll \Delta\nu_i \ll \nu_0$ .
- les pertes sont faibles.



a) Une onde peut s'établir si sa fréquence correspond à un mode spectral  $\nu_m$  de la cavité.

b) Des atomes de fréquence de résonance  $\nu_i$  amplifient l'onde de fréquence  $\nu_m$  avec une efficacité proportionnelle à  $g(\nu - \nu_i)$ , significative si qualitativement  $|\nu_m - \nu_i| < \Delta\nu_h$ . Le graphe montre que si des atomes interagissent avec l'onde de fréquence  $\nu_m$ , alors ils n'interagissent pas avec celle établie sur un autre mode spectral (hypothèse  $\Delta\nu_h \ll \delta\nu$ ).

On en déduit que deux ondes de fréquences correspondant à deux modes spectraux distincts sont amplifiées par interaction avec des atomes différents. Elles peuvent donc s'établir dans la cavité totalement indépendamment l'une de l'autre.<sup>7</sup>

D'une manière générale, l'onde établie sur le mode spectral  $\nu_m$  de la cavité voit le coefficient d'amplification non saturée :

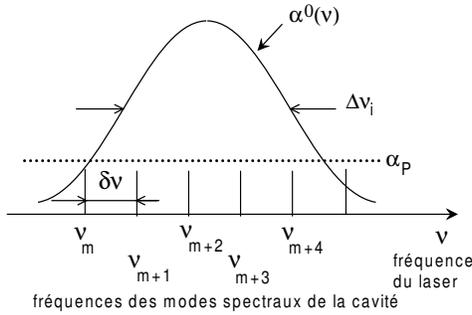
$$\alpha^0(\nu_m) = \frac{h\nu_m}{c} B \Delta N^0 \int \underbrace{g(\nu_m - \nu_i)}_{\text{largeur } \Delta\nu_h} \underbrace{P(\nu_i - \nu_0)}_{\text{largeur } \Delta\nu_i} d\nu_i$$

qui pour ce système à élargissement spectral inhomogène dominant ( $\Delta\nu_h \ll \Delta\nu_i$ ) se simplifie en :

$$\alpha^0(\nu_m) = \frac{h\nu_m}{c} B P(\nu_m - \nu_0) \Delta N^0$$

L'amplification est efficace sur un intervalle de fréquences de largeur  $\Delta\nu_i$  autour de  $\nu_0$ .

7. Des études plus poussées prenant en compte les effets de polarisation de la lumière montrent que le couplage entre les populations d'atomes amplifiant deux modes spectraux consécutifs est minimal si les polarisations des deux ondes sont rectilignes et perpendiculaires entre elles. Cet effet est mis en évidence dans le TP Fabry Perot, dans l'analyse des modes spectraux d'un laser Hélium-Néon légèrement multimode.



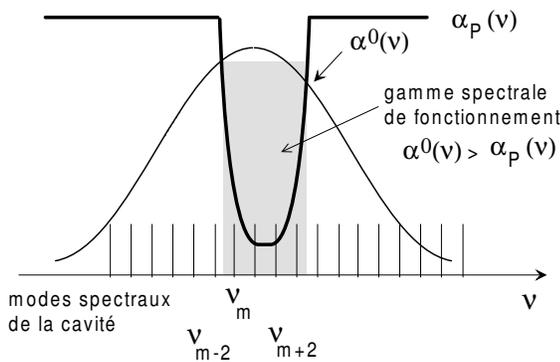
On revient aux conditions de fonctionnement laser. Lorsque  $\alpha^0(\nu_m) \geq \alpha_P(\nu_m)$ , il s'établit en régime stationnaire une intensité  $I(\nu_m)$  telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fonctionnement R.S. :} \\ \alpha(\nu_m) = \alpha_P \\ \text{Relation de saturation :} \\ \alpha(\nu_m) = \frac{\alpha^0(\nu_m)}{\sqrt{1 + \frac{I(\nu_m)}{I_s}}} \end{array} \right\} \Rightarrow I(\nu_m) = I_s \left( \left( \frac{\alpha^0(\nu_m)}{\alpha_P} \right)^2 - 1 \right)$$

Cette expression donnant  $I(\nu_m)$  est valable pour tous les modes spectraux tels que  $\alpha^0(\nu_m) > \alpha_P$ . Un laser à élargissement spectral inhomogène est donc *a priori* multimode avec d'autant plus de modes que  $\Delta\nu_i$  est grand devant  $\delta\nu$ .

Remarque :  $I_s$  désigne dans ces expressions l'intensité de saturation à résonance, la même pour toutes les fréquences.

En fonctionnement multimode, l'intensité résultante fluctue au cours du temps à cause de battements entre les différentes ondes incohérentes<sup>8</sup>. On cherche souvent à réduire le nombre de ces modes spectraux en faisant en sorte que les pertes de la cavité ne soient inférieures à  $\alpha^0(\nu)$  que sur un intervalle de fréquences englobant quelques modes seulement.



Dépendance en fréquence pour les pertes permettant de sélectionner un petit nombre de modes spectraux.

De telles variations de  $\alpha_P$  avec  $\nu$  peuvent être obtenues en insérant dans la cavité un filtre spectral interférentiel, un interféromètre de Fabry-Perot, ou un réseau (Cf Annexe §Laser à colorant accordable). Cependant, il est difficile d'obtenir une fonction pertes suffisamment étroite pour sélectionner un seul mode. Différentes techniques permettent d'ajuster la position du creux de cette fonction sur la fréquence d'un mode spectral (laser accordable) ou de déplacer la position des modes pour que l'un d'entre eux coïncide avec le maximum de la courbe de gain (modification de la longueur optique de la cavité en fixant un miroir sur des cales piézo-électriques, modification des indices optiques du milieu par effet électro-optique).

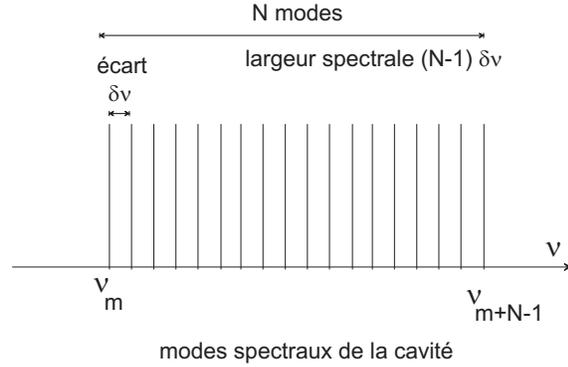
## 5.4 Lasers produisant des impulsions

### 5.4.1 Laser en fonctionnement 'modes bloqués'

On va étudier ici une situation paradoxale où la présence d'un très grand nombre de modes fonctionnant en continu dans la cavité permet à certaines conditions la production d'impulsions lasers extrêmement courtes.

8. Chaque onde possède une phase constante à l'échelle de la période  $\frac{1}{\nu_m}$  mais variant aléatoirement à une échelle de temps grande devant  $\frac{1}{\nu_m}$  appelée 'temps de cohérence'. Cela entraîne que sur des temps 'longs' la phase relative entre deux modes varie aléatoirement, ce qu'on traduit en disant qu'ils sont incohérents. On ne pourrait visualiser des interférences entre deux modes qu'en mesurant l'intensité de leur superposition sur une durée inférieure au temps de cohérence (durée pendant laquelle ils conserveront une phase relative constante).

Soit une cavité laser linéaire de longueur optique  $d$ , où l'amplificateur pompé en continu permet l'oscillation laser simultanée en régime stationnaire d'un nombre  $N$  grand de modes spectraux séparés de  $\delta\nu = \frac{c_0}{2d}$ . On les note  $\nu_{m+p} = \nu_m + p \delta\nu$  pour  $p$  allant de 0 à  $N-1$ .



On s'intéresse au champ électrique de l'onde résultante, au niveau du miroir de sortie de la cavité. C'est la somme des champs des différentes ondes monochromatiques continues présentes :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{E_p \exp i(2\pi\nu_{m+p} t + \varphi_p) + C.C.}{2}$$

En général, les phases  $\varphi_p$  des différents modes varient indépendamment et aléatoirement au cours du temps. Les ondes correspondantes sont incohérentes et l'intensité résultante est la somme des intensités des ondes continues.

Certaines techniques non décrites ici imposent à ces phases d'être fixes les unes par rapport aux autres (situation de 'modes bloqués'). On étudie la forme de l'onde résultante dans un cas simplifié  $E_p = E_0$  réel et  $\varphi_p = 0$  pour tout  $p$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{E_0 \exp(2i\pi\nu_m t) \sum_{p=0}^{N-1} \exp(2i\pi p \delta\nu t) + C.C.}{2} \\ \text{avec } \sum_{p=0}^{N-1} \exp(2i\pi p \delta\nu t) &= \frac{1 - \exp(2i\pi N \delta\nu t)}{1 - \exp(2i\pi \delta\nu t)} \quad (\text{somme d'une suite géométrique}) \\ &= \frac{\exp(2i\pi \frac{N \delta\nu t}{2}) \sin(\pi N \delta\nu t)}{\exp(2i\pi \frac{\delta\nu t}{2}) \sin(\pi \delta\nu t)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{E_0 \exp 2i\pi(\nu_m + \frac{N-1}{2}\delta\nu)t \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} + C.C.}{2}$$

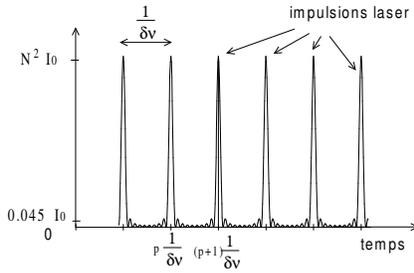
On note  $\nu_0 = (\nu_m + \frac{N-1}{2}\delta\nu)$  la fréquence moyenne du rayonnement d'où le champ électrique résultant  $\mathcal{E}(t) = E_0 \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \cos 2\pi\nu_0 t$  et l'intensité instantanée :

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{\mu_0 c} \langle \mathcal{E}^2(t) \rangle_{\text{période}} \\ I(t) &= I_0 \left( \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \right)^2 \quad \text{avec } I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \end{aligned}$$

Cette fonction est maximale (pic principal) lorsque le numérateur et le dénominateur tendent simultanément vers 0 :

$$\pi \delta\nu t = p \pi \Leftrightarrow t = p \frac{1}{\delta\nu}$$

Un maximum d'intensité <sup>a</sup> correspond à une impulsion temporelle d'intensité crête  $I(t) = I_0 N^2$ . On peut vérifier numériquement que l'intensité du plus haut des pics secondaires vaut 0,045  $I_0$ . L'écart temporel entre deux impulsions successives vaut  $\frac{1}{\delta\nu}$ .



a. Dans  $I(t)$ , le numérateur et le dénominateur sont inchangés en remplaçant  $t$  par  $t + \frac{p}{\delta\nu}$  avec  $p$  entier donc tous les pics ont la même hauteur que celui centré sur  $t = 0$ . On note  $\epsilon = \delta\nu t$ . Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0,

$$\left( \frac{\sin(\pi N \delta\nu t)}{\sin(\pi \delta\nu t)} \right)^2 \simeq \left( \frac{(\pi N \delta\nu t)}{(\pi \delta\nu t)} \right)^2 = N^2$$

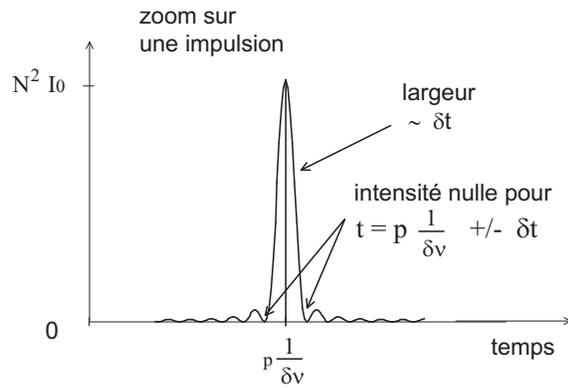
d'où  $I(t) = I_0 N^2$ .

La largeur temporelle  $\delta t$  d'une impulsion correspond qualitativement à l'écart entre son sommet et le premier minimum voisin. L'intensité est nulle en  $t = p \frac{1}{\delta\nu} \pm \delta t$  lorsque :

$$\begin{aligned} \sin \pi N \delta\nu \left( p \frac{1}{\delta\nu} \pm \delta t \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (Np \pm N \delta\nu \delta t) \pi &= p' \pi \text{ avec } p' \text{ entier} \end{aligned}$$

La plus petite valeur positive de  $\delta t$  vérifiant cette égalité est obtenue lorsque  $p' = Np \pm 1$  donc  $N \delta\nu \delta t \pi = \pi$ . La largeur temporelle d'une impulsion vaut donc

$$\delta t = 1/(N \delta\nu)$$



Pour l'onde extraite de la cavité, l'écart  $1/\delta\nu$  entre deux impulsions successives correspond à  $\frac{1}{c_0/2d} = \frac{2d}{c_0}$  donc au temps d'un parcours complet de la lumière dans cette cavité linéaire. Cette situation physique correspond à une impulsion unique de durée  $\delta t$  parcourant la cavité à la vitesse de la lumière, qui arrive sur le miroir de sortie et laisse sortir une partie de ses photons avec la périodicité  $\frac{2d}{c_0}$ . Cette impulsion est d'autant plus courte ( $\delta t \propto 1/(N \delta\nu)$ ) et intense (hauteur  $\propto N^2$ ) que le nombre  $N$  d'ondes continues superposées est élevé.

Exemple : soit une cavité linéaire de longueur  $d = 75$  cm et un amplificateur Saphire-Titane, l'oscillation laser se produit simultanément pour des longueurs d'onde de 800 nm à 1100 nm donc des fréquences de  $2,7 \cdot 10^{14}$  à  $3,7 \cdot 10^{14}$  Hz (intervalle particulièrement large). L'écart entre deux modes spectraux de la cavité vaut  $\delta\nu = \frac{c_0}{2d} = 2 \cdot 10^8$  Hz d'où  $N = 5 \cdot 10^5$ . On obtient en sortie de ce laser des impulsions de largeur  $\delta t = \frac{1}{N \delta\nu} = 10^{-14}$  s = 10 femtosecondes, séparées d'un intervalle  $\Delta t = \frac{1}{\delta\nu} = 5 \cdot 10^{-9}$  s = 5 ns.

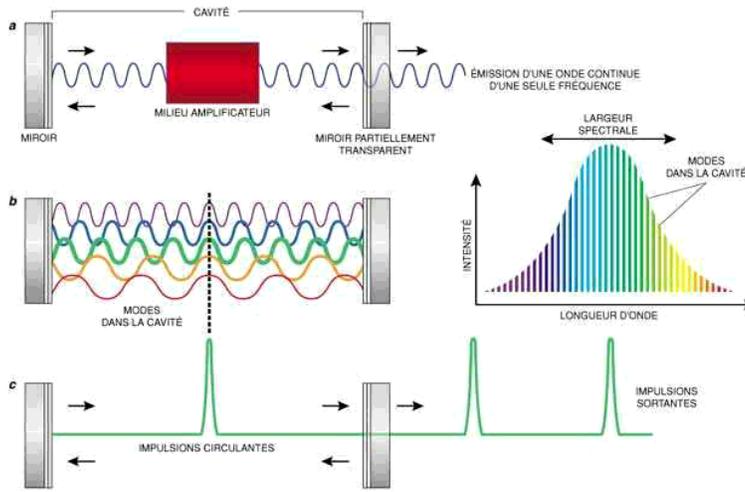


image <http://www.pour-la-science.com/numeros/pls-277/lasers/4.jpg>

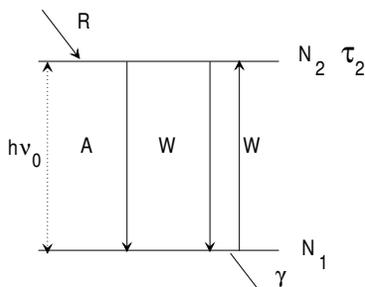
Remarque : la largeur spectrale du rayonnement sortant de la cavité vaut  $N \delta\nu$ , avec pour les fréquences uniquement les valeurs discrètes  $\nu_m = m \frac{c_0}{2d}$  (Cf figure au début de cette section). Cette largeur multipliée par la durée  $\delta t$  de l'impulsion vérifie  $(N \delta\nu) \times \delta t = 1$ , conformément à ce qu'on attend d'après le théorème de Wiener-Khintchine ou l'incertitude de Heisenberg temps-énergie appliquée à un photon.

En général, les impulsions de durée inférieure à 100 picosecondes sont produites à partir d'un laser en fonctionnement 'modes bloqués', celles de durée entre 1 et 100 ns sont produites en fonctionnement 'déclenché', technique qui va être étudiée plus loin.

### 5.4.2 Système laser en régime transitoire : équations couplées

Il est possible d'utiliser des régimes transitoires pour produire des impulsions lumineuses intenses. On va modéliser dans ce cas les évolutions temporelles de la différence de population  $\Delta N(t)$  et de l'intensité lumineuse  $I(t)$ , afin d'évaluer ces quantités en régime transitoire puis l'intensité lumineuse crête obtenue.

\* Évolution de la différence de population en régime transitoire



Le milieu amplificateur possède les caractéristiques suivantes.  $R$  : taux de peuplement du niveau **2**;  $A$ ,  $W$ ,  $\gamma$  : probabilité par seconde d'émission spontanée **2**  $\rightarrow$  **1**, d'émission induite, de désexcitation du niveau **1**. Ce milieu est supposé à élargissement spectral homogène.

L'équation d'évolution de la population  $N_2$  s'écrit :

$$\frac{dN_2}{dt} = R - \frac{N_2}{\tau_2} - W \Delta N$$

On suppose  $\gamma$  très grand avec les autres paramètres du système tels que  $N_1 \ll N_2$  à tout instant, d'où  $\Delta N(t) \approx N_2(t)$ . Il vient :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = R - \frac{\Delta N}{\tau_2} - W \Delta N$$

En régime stationnaire,  $\Delta N = \frac{R\tau_2}{1+W\tau_2}$  qu'on identifie à  $\Delta N = \frac{\Delta N^0}{1+\frac{I}{I_s}}$  pour noter  $\Delta N^0 = R \tau_2$  (différence de population non saturée) et  $W = \frac{I}{\tau_2 I_s}$ . Ceci permet d'écrire en régime transitoire :

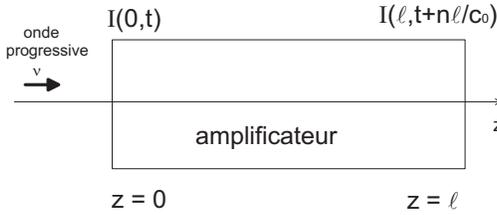
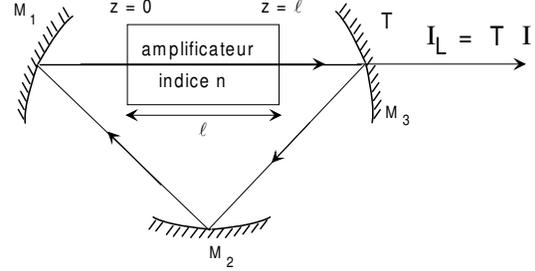
$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{\Delta N^0}{\tau_2} - \frac{\Delta N}{\tau_2} - \frac{I}{\tau_2 I_s} \Delta N$$

$$= \frac{1}{\tau_2} (\Delta N^0 - \Delta N - \frac{I}{I_s} \Delta N)$$

Dans cette dernière expression, on remplacera  $\tau_2$  par  $\tau$  pour avoir une forme générale dont on pourrait montrer qu'elle est valable au-delà de l'hypothèse  $N_1 \ll N_2$ .

\* Évolution de l'intensité lumineuse en régime transitoire.

La cavité étudiée est schématisée ci-contre. Soit  $n$  l'indice optique de l'amplificateur. Le coefficient de pertes par unité de longueur du milieu amplificateur est noté  $\alpha_P$ , en supposant  $\alpha_P \ell \ll 1$  (hyp. pertes et gain faibles).



Les photons entrant dans l'amplificateur en  $z = 0$  à l'instant  $t$  avec l'intensité  $I(0, t)$  en ressortent à l'instant  $t + \frac{n\ell}{c_0}$  avec l'intensité  $I(\ell, t + \frac{n\ell}{c_0})$ . Pour ce régime non stationnaire, on définit le gain total de l'amplificateur par  $G(t) = \frac{I(\ell, t + \frac{n\ell}{c_0})}{I(0, t)}$ .

Pour un élargissement spectral homogène, le bilan d'énergie pour l'interaction onde-amplificateur (cf Chapitre 4) a permis d'établir la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{I(z, t)} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial I}{\partial z}(z, t) \right) &= \sigma \Delta N \\ \Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial t}(z, t) &= \frac{c_0}{n} \sigma \Delta N I(z, t) - \frac{c_0}{n} \frac{\partial I}{\partial z}(z, t) \end{aligned}$$

On suppose le gain assez faible pour avoir  $\frac{\partial I}{\partial t}$  et  $\frac{\partial I}{\partial z}$  petits et écrire au premier ordre :

$$\begin{aligned} I(\ell, t + \frac{n\ell}{c_0}) &= I(0, t) + \frac{\partial I}{\partial t} \times \left( \frac{n\ell}{c_0} \right) + \frac{\partial I}{\partial z} \times \ell \\ &= I(0, t) + \left( \frac{c_0}{n} \sigma \Delta N I(0, t) - \frac{c_0}{n} \frac{\partial I}{\partial z}(0, t) \right) \frac{n\ell}{c_0} + \frac{\partial I}{\partial z} \times \ell \\ &= I(0, t) + \sigma \Delta N I(0, t) \ell \\ \text{donc } G(t) &= 1 + \sigma \Delta N \ell \end{aligned}$$

C'est l'idée physique d'un paquet de photons d'intensité  $I$  arrivant en  $z = 0$  à l'instant  $t$  puis traversant l'amplificateur en induisant la production d'une intensité supplémentaire  $\sigma \Delta N \ell I$ .

On discute maintenant le système (amplificateur + cavité), avec en  $z = 0$ , l'intensité  $I(t)$  à l'instant  $t$  devenant  $I(t + \frac{d}{c_0})$  au même point après un tour de cavité. Pour ce régime transitoire, on a :

$$\begin{aligned} I(t + \frac{d}{c_0}) &= I(t) \times G(t) \times \exp -\alpha_P \ell \quad \text{variation de } I \text{ sur un tour de cavité} \\ &= I(t) \times (1 + \sigma \Delta N \ell) \times (1 - \alpha_P \ell) \quad \text{au premier ordre, pertes faibles, gain faible} \\ &= I(t) \times (1 + \sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } I(t + \frac{d}{c_0}) - I(t) = I(t) (\sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell)$$

Au premier ordre,  $I(t + \frac{d}{c_0}) - I(t) = \frac{dI}{dt} \times \frac{d}{c_0}$  d'où l'évolution temporelle :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{c_0}{d} I(t) \times (\sigma \Delta N \ell - \alpha_P \ell)$$

$$= I(t) \times \frac{c_0 \alpha_P \ell}{d} \times \left( \frac{\sigma \Delta N}{\alpha_P} - 1 \right)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I(t)}{\tau_c} \left( \frac{\Delta N}{\Delta N_S} - 1 \right)$$

en notant  $\frac{1}{\tau_c} = \frac{c_0 \alpha_P \ell}{d}$  (durée de vie des photons dans la cavité) et  $\Delta N_S = \frac{\alpha_P}{\sigma}$  (différence de population au seuil).

\* Équations couplées.

Dans un fonctionnement en régime transitoire,  $\Delta N(t)$  et  $I(t)$  varient au cours du temps en respectant les équations non linéaires couplées :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau} (\Delta N^0 - \Delta N - \frac{I}{I_s} \Delta N) \quad (5.1)$$

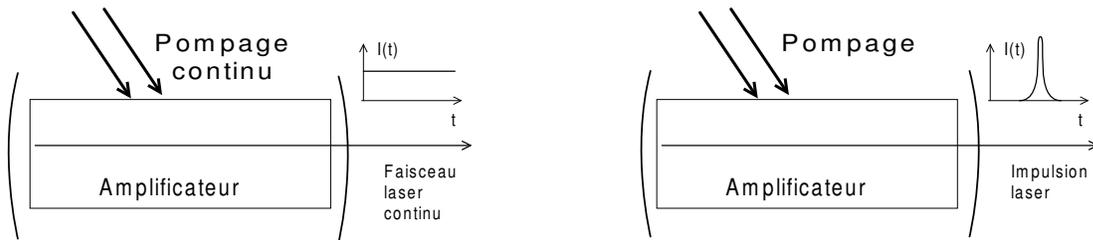
$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left( \frac{\Delta N}{\Delta N_S} - 1 \right) I \quad (5.2)$$

dont la forme générale se retrouve pour tous les types de fonctionnement laser (élargissement spectral homogène). Ces relations sont appelées 'Équations de Statz et DeMars'. Elles modélisent la dynamique de la transformation en lumière de l'énergie stockée initialement dans l'amplificateur sous forme de différence de population.

### 5.4.3 Laser en fonctionnement 'déclenché' ('Q switching')

On va résoudre ce système d'équations pour le mode de fonctionnement appelé 'déclenché' ou 'Q switching'. Le terme 'Q switching' fait référence à une modification très rapide du facteur de qualité  $Q_c$  de la cavité (Cf §5.2.3) à la base de cette technique de production d'une impulsion unique et intense.

**Principe**



Dans un laser continu, le pompage apporte au milieu amplificateur une énergie qui est transférée au fur et à mesure à l'onde. On a vu comment déterminer l'intensité laser extraite en régime stationnaire. Si un dispositif permet d'accumuler de l'énergie dans l'amplificateur puis de la transférer ensuite très rapidement à l'onde, on obtient une impulsion lumineuse très concentrée dans le temps et beaucoup plus intense. C'est le principe du fonctionnement laser en régime impulsif 'déclenché', ou 'Q-switching'.

Au départ, des pertes supplémentaires sont introduites dans la cavité pour interdire tout effet laser ( $\alpha_P > \alpha^0$ ,  $\tau_c$  et  $Q_c$  faibles). Le pompage peut alors stocker de l'énergie dans le milieu amplificateur sans que celle-ci ne se transfère à une onde laser. Dans une seconde phase, on réduit brutalement les pertes<sup>9</sup>, c'est le déclenchement ou le 'Q switching'. On va montrer que l'énergie emmagasinée dans le milieu amplificateur se transfère quasi instantanément à l'onde pour former une impulsion lumineuse brève et intense. Les étapes de ce processus sont détaillées maintenant.

#### Phase 1 : le pompage

Hypothèses :

- les pertes sont fortes ( $\tau_c$  très faible, facteur de qualité  $Q_c$  faible)
- l'intensité laser dans la cavité reste nulle.
- à  $t = 0$ ,  $\Delta N = 0$ .

9. ce qui signifie qu'on augmente brutalement le facteur de qualité.

Lorsque  $I = 0$ , l'équation (1) devient :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{1}{\tau}(\Delta N^0 - \Delta N)$$

qui partant de  $\Delta N = 0$  à  $t = 0$  s'intègre en :

$$\Delta N(t) = \Delta N^0 \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau}\right)$$

Le fait de porter des atomes sur le niveau **2** accumule de l'énergie dans le milieu amplificateur et fait tendre  $\Delta N$  asymptotiquement vers  $\Delta N^0$ . On considère que suffisamment d'énergie y est stockée à un instant  $t_i$  tel que  $\Delta N(t_i) = 0,95 \Delta N^0$  et on passe à la phase suivante en réduisant instantanément les pertes de la cavité. Application numérique :  $t_i = -\tau \ln(1-0,95) = 1,5$  ms pour  $\tau = 0,5$  ms.

### Phase 2 : amorçage de l'impulsion

Hypothèses :

- l'émission spontanée de l'amplificateur produit sur l'axe de la cavité une intensité résiduelle  $I_i = 10^{-10} I_s$ .
- le pompage a créé dans le milieu amplificateur une différence de population  $\Delta N_i$  de l'ordre de  $10 \Delta N_S$  et qu'on suppose quasi-constante pendant la phase d'amorçage de l'impulsion.
- les pertes sont brutalement ramenées à une valeur faible caractérisée par  $\tau_c = 10$  ns, le facteur de qualité  $Q_c$  de la cavité devient grand, c'est l'instant du 'Q switching'.
- on fixe arbitrairement la fin de cette phase d'amorçage à l'instant  $t_D$  où  $I = I_s$ .

Avec ces hypothèses, l'équation (2) devient :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left( \frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1 \right) I$$

avec à  $t = t_i$  la condition initiale  $I = I_i$ . Le paramètre  $\frac{1}{\tau_c} \left( \frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1 \right)$  est constant.

Dans la cavité, l'intensité augmente exponentiellement à partir de l'intensité résiduelle  $I_i$ , suivant la relation :

$$I(t - t_i) = I_i \exp \left[ \frac{t - t_i}{\tau_c} \left( \frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1 \right) \right]$$

avec un temps caractéristique  $\frac{\tau_c}{\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1}$  de l'ordre de 1 ns. On fixe arbitrairement l'instant  $t_D$  de fin de la phase d'amorçage de l'impulsion lorsque l'intensité devient significative avec  $I(t_D - t_i) = I_s$ . Cela correspond à :

$$t_D - t_i = \frac{\tau_c}{\frac{\Delta N_i}{\Delta N_S} - 1} \ln \frac{I_s}{I_i} = 25 \text{ ns}$$

L'amorçage de l'impulsion est quasi-instantané par rapport à la durée initiale du pompage.

### Phase 3 : Développement de l'impulsion laser

Hypothèses :

- cette phase démarre à  $t = t_D$ , instant auquel on a les conditions initiales  $I = I_s$  et  $\Delta N = \Delta N_i$ .
- $\Delta N$  est assez proche de  $\Delta N^0$  ou  $I$  est suffisamment fort pour avoir  $\frac{I}{I_s} \Delta N \gg (\Delta N^0 - \Delta N)$ .

L'équation (1) se simplifie alors en

$$\frac{d\Delta N}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{I}{I_s} \Delta N \quad (1')$$

avec toujours 
$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left( \frac{\Delta N}{\Delta N_S} - 1 \right) I$$
 avec ici  $\Delta N$  fonction de  $t$ . (2)

Qualitativement,  $\Delta N$  décroît au cours du temps. D'après l'équation (2),  $\frac{dI}{dt}$  est positif tant que  $\Delta N > \Delta N_S$  : l'intensité croît puis atteint son maximum lorsque  $\Delta N = \Delta N_S$ . Pendant la montée de l'impulsion, le temps

caractéristique d'évolution est de l'ordre de  $\tau_c \frac{\Delta N_S}{\Delta N} < \tau_c$ . Physiquement, le transfert d'énergie de l'amplificateur vers l'onde par émission induite a une probabilité par seconde  $W$  d'autant plus grande que  $I$  est intense<sup>10</sup>. C'est pour cette raison que le temps de développement de l'impulsion est extrêmement rapide.

On élimine le temps entre les équations (1') et (2) :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d\Delta N}{dt}}{\frac{dI}{dt}} &= \frac{d\Delta N}{dI} = -\frac{1}{\tau} \frac{I}{I_s} \Delta N \tau_c \frac{1}{\left(\frac{\Delta N}{\Delta N_S} - 1\right)} \frac{1}{I} \\ &= \frac{\tau_c}{\tau} \frac{1}{I_s} \frac{1}{\left(\frac{1}{\Delta N_S} - \frac{1}{\Delta N}\right)} \end{aligned}$$

soit en séparant les variables  $\Delta N$  et  $I$  :

$$\frac{\tau}{\tau_c} \left( \frac{1}{\Delta N} - \frac{1}{\Delta N_S} \right) d\Delta N = \frac{dI}{I_s}$$

qu'on intègre entre  $t_D$  ( $\Delta N = \Delta N_i$ ,  $I = I_s$ ) et l'instant  $t$  correspondant à la différence de population  $\Delta N(t)$  et à l'intensité  $I(t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\tau_c} \int_{\Delta N_i}^{\Delta N(t)} \left( \frac{1}{\Delta N} - \frac{1}{\Delta N_S} \right) d\Delta N &= \int_{I_s}^{I(t)} \frac{dI}{I_s} \\ \frac{\tau}{\tau_c} \left( \ln \frac{\Delta N(t)}{\Delta N_i} - \frac{\Delta N(t) - \Delta N_i}{\Delta N_S} \right) &= \frac{I(t) - I_s}{I_s} \end{aligned}$$

L'impulsion étant maximale quand  $\Delta N(t) = \Delta N_S$ , on reporte cette valeur dans l'expression précédente pour obtenir l'intensité :

$$I_{max} = I_s \left[ 1 + \frac{\tau}{\tau_c} \left( \ln \left( \frac{\Delta N_S}{\Delta N_i} \right) - \frac{\Delta N_S - \Delta N_i}{\Delta N_S} \right) \right]$$

Avec  $\tau_c = 10$  ns,  $\tau = 0,5$  ms,  $\Delta N_i = 10 \Delta N_S$ , on obtient :

$$I_{max} = 3,3 \cdot 10^5 I_s$$

Cette valeur doit être comparée à celle obtenue en régime stationnaire,  $I = I_s \left( \frac{\alpha^0}{\alpha_P} - 1 \right) = I_s \left( \frac{\Delta N^0}{\Delta N_S} - 1 \right)$  qui est en général de l'ordre de 2 à 5 fois  $I_s$ .

Remarque :  $\Delta N_S$  correspond à la valeur de  $\Delta N$  telle que l'amplification compense juste les pertes en régime stationnaire. Lorsqu'après le maximum de l'impulsion  $\Delta N < \Delta N_S$ , l'amplificateur ne possède plus assez d'énergie pour pouvoir compenser les pertes de lumière donc la valeur de l'intensité dans la cavité commence à décroître, elle se vide de ses photons.

#### Phase 4 : fin de l'impulsion

Pour la suite de l'impulsion,  $\Delta N(t)$  est inférieure puis très inférieure à  $\Delta N_S$  donc l'équation (2) devient

$$\frac{dI}{dt} \approx -\frac{1}{\tau_c} I$$

L'amplificateur a transféré toute l'énergie disponible, il n'y a plus aucune amplification. Les photons encore présents dans la cavité en sortent progressivement avec le temps caractéristique  $\tau_c$ .

On peut montrer qu'à la fin de l'impulsion laser, la totalité de l'énergie initialement stockée dans le milieu amplificateur sous forme de différence de population (énergie  $h\nu \Delta N_i S\ell$ ) a été communiquée à l'onde<sup>11</sup>.

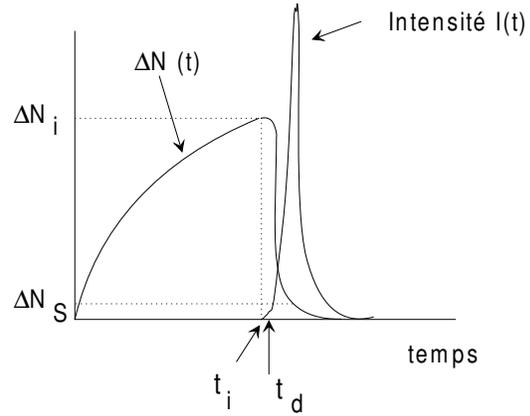
Le fonctionnement en mode déclenché permet ainsi d'utiliser des régimes transitoires pour obtenir des impulsions avec :

10. Autre formulation : plus l'intensité est forte, plus elle 'aspire' efficacement l'énergie disponible dans l'amplificateur.

11. On en déduit que la diminution de  $\Delta N$  pour que l'intensité passe pendant la phase d'amorçage de  $I_i$  à  $I_s$  est négligeable devant  $\Delta N_i$ . L'hypothèse de  $\Delta N$  restant égale à  $\Delta N_i$  pendant la phase d'amorçage est donc justifiée.

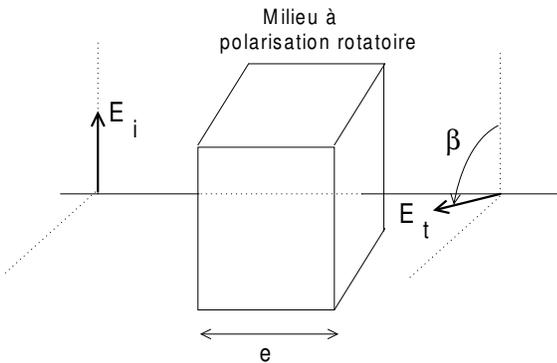
- une intensité crête de l'ordre de  $10^5$  fois plus forte qu'en régime continu.
- un temps de montée de l'ordre de quelques nanosecondes et le temps de descente de l'ordre de  $\tau_c$ . La durée de cette impulsion est typiquement de 10 à 25 ns à mi-hauteur pour un laser YAG standard, mais peut aussi être allongée jusqu'à quelques microsecondes<sup>12</sup>.

Les évolutions temporelles de la différence de population et de l'intensité sont représentées ci-contre pour un laser en fonctionnement déclenché.



## 5.5 Annexes

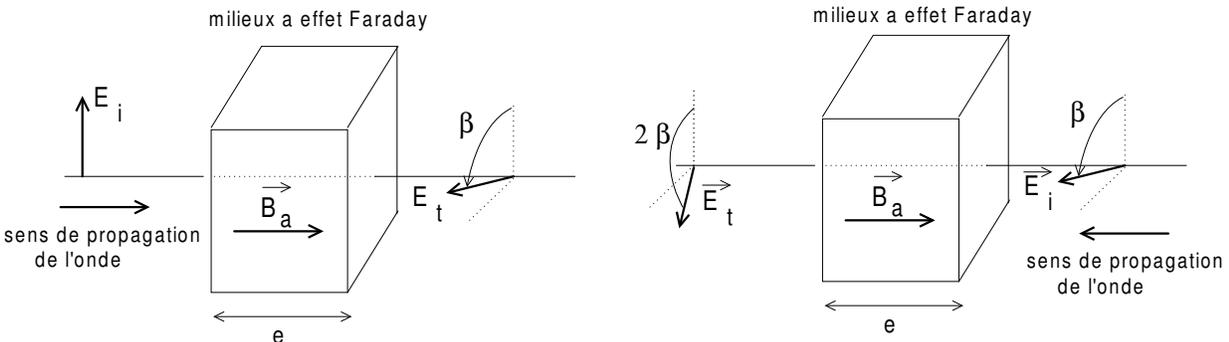
### 5.5.1 Principe d'un isolateur optique



Un isolateur optique utilise des propriétés de *polarisation rotatoire* de la matière qui sont une forme particulière de biréfringence. Un faisceau de lumière polarisée rectilignement à l'entrée de la substance ressort avec une polarisation toujours rectiligne mais dont la direction de polarisation a tourné d'un angle proportionnel à l'épaisseur traversée et à la concentration de l'espèce active.

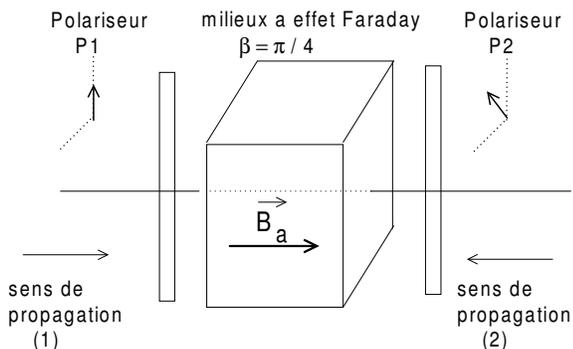
Exemple d'utilisation : la mesure de la concentration de glucose dans une solution.

Certaines substances acquièrent cette propriété sous l'action d'un champ magnétique appliqué  $\vec{B}_a$ . Cet effet a été découvert par Faraday en 1845 et porte son nom. L'angle de la rotation est proportionnel à  $B_a$  et à l'épaisseur  $e$ . Une caractéristique fondamentale de l'effet Faraday est que **l'angle de la rotation autour de la direction de  $\vec{B}_a$  est indépendant du sens de ce vecteur**, comme illustré sur les figures suivantes :



En ajustant l'épaisseur du matériau et la valeur du champ magnétique créé par un aimant pour que l'angle de rotation  $\beta$  soit égal à  $\pi/4$ , on construit le dispositif suivant :

12. En réduisant les pertes pour augmenter  $\tau_c$



Les directions passantes des polariseurs forment entre elles un angle  $\pi/4$ .

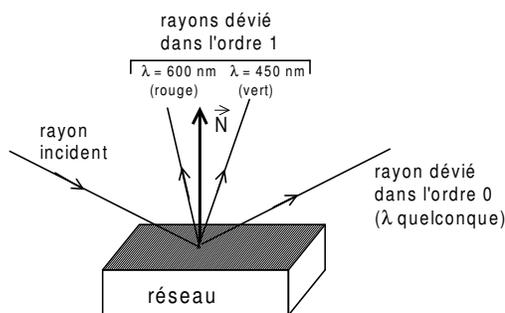
Une onde polarisée rectilignement suivant la direction passante de  $P_1$  et se propageant dans le sens (1) voit sa direction de polarisation tourner de  $\pi/4$  si bien qu'elle est intégralement transmise par  $P_2$ . Une onde de polarisation quelconque se propageant dans le sens (2) est partiellement transmise par  $P_2$ . Sa polarisation rectiligne tourne de  $\pi/4$  et se retrouve orthogonale à la direction de  $P_1$ . Cette onde est donc arrêtée par le dispositif qui joue le rôle d'une diode optique de sens passant (1).

### 5.5.2 Laser à colorant accordable.

Un montage classique pour réaliser un laser accordable utilise un amplificateur 'à colorant' et une cavité construite autour d'un réseau de diffraction. On va montrer comment il sélectionne une longueur d'onde puis justifier qu'il doit être éclairé en incidence rasante. Cette configuration est appelée "LIR", pour laser en incidence rasante, c'est celle utilisée dans le TP 'Laser à colorant'.

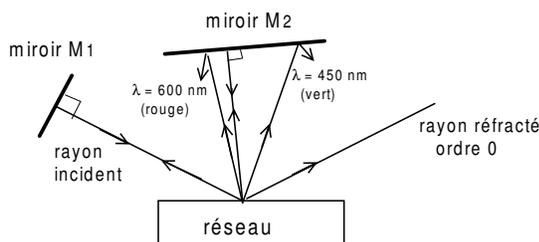
Les angles étant repérés par rapport à la normale à la surface du réseau, un rayon de longueur d'onde  $\lambda$  incident avec l'angle  $\theta_i$  est dévié dans différentes directions formant les angles  $\theta_r(\lambda, p)$  avec la normale, tels que

$$\sin \theta_r(\lambda, p) + \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec } p \text{ entier}$$



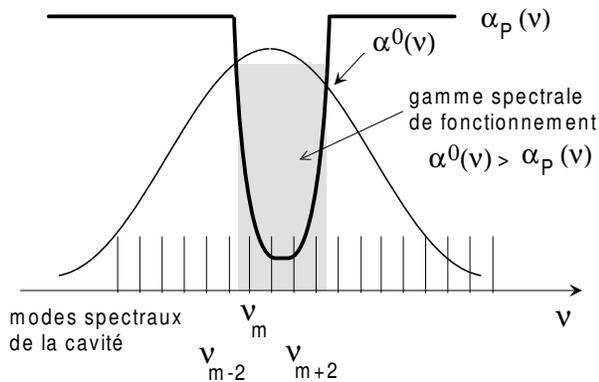
Les rayons sont tous dans le plan défini par le rayon incident et la normale  $\vec{N}$  au réseau au point d'incidence. Il s'agit physiquement d'un phénomène de diffraction de l'onde incidente sur le réseau. La distance entre deux traits du réseau est notée  $a$ . La direction des rayons renvoyés par le réseau est fonction de  $a$ , de l'entier  $p$  appelé 'ordre de diffraction' et de la longueur d'onde pour  $p \neq 0$ .

Un miroir plan  $M_2$  est disposé perpendiculairement au rayon de longueur d'onde  $\lambda_0$  diffracté dans l'ordre 1 du réseau. **Ce rayon est renvoyé sur lui-même** donc arrive sur le réseau avec l'angle d'incidence  $\theta_r(\lambda_0, 1)$ . La formule du réseau montre que sa diffraction dans l'ordre 1 forme l'angle  $\theta_i$  avec  $\vec{N}$  pour être diffracté dans l'ordre 1. S'il arrive en incidence normale sur le miroir  $M_1$ , il se retrouve superposé au rayon initial et la cavité est fermée.



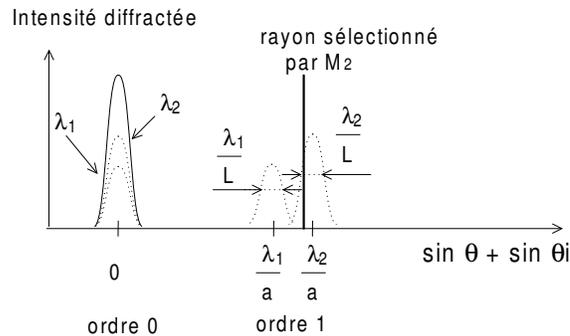
La cavité n'est fermée que pour les fréquences que le réseau envoie en incidence normale sur  $M_2$ , donc pour des fréquences très proches de  $\nu_0 = \frac{c_0}{\lambda_0}$ . On peut par contre modifier  $\nu_0$  en changeant l'orientation de  $M_2$ , ce

laser est accordable.



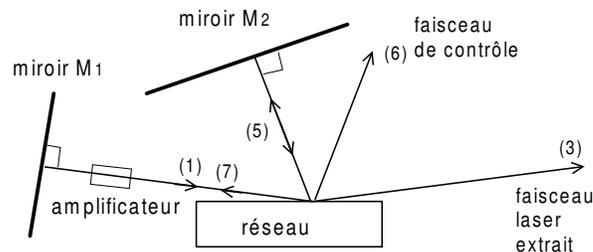
La fonction 'pertes' est étroite. On va étudier comment construire la cavité de manière à la rendre la plus étroite possible et à limiter le nombre de modes spectraux présents dans le rayonnement.

On précise la direction des rayons diffractés par le réseau, pour un rayonnement contenant deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  proches. Si on représente l'intensité diffractée dans l'ordre  $p = 1$  en fonction de  $\sin \theta_r(\lambda, 1) + \sin \theta_i$ , les propriétés du réseau font qu'il apparaît deux taches pour  $\sin \theta_r(\lambda, 1) + \sin \theta_i$  dans l'intervalle  $[\frac{\lambda_1}{a} - \frac{\lambda_1}{L}, \frac{\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_1}{L}]$  et  $[\frac{\lambda_2}{a} - \frac{\lambda_2}{L}, \frac{\lambda_2}{a} + \frac{\lambda_2}{L}]$  où  $L$  est la longueur éclairée du réseau. Le miroir  $M_2$  renvoie sur elle-même dans la cavité  $\lambda_2$  mais pas  $\lambda_1$  si les deux intervalles sont sans intersection. C'est possible pour deux longueurs d'onde très proches si chaque intervalle est étroit donc si la longueur éclairée  $L$  du réseau est la plus grande possible. Lorsque  $\lambda_2$  est renvoyée efficacement dans la cavité et  $\lambda_1$  très proche de  $\lambda_2$  ne l'est pas, on obtient une fonction pertes  $\beta(\nu)$  ou  $\beta(\lambda)$  étroite et une cavité laser pouvant fonctionner seulement sur une longueur d'onde très précisément définie.



La longueur éclairée du réseau est maximale si l'angle d'incidence  $\theta_i$  est proche de  $\pi/2$  : le réseau doit être utilisé en incidence rasante pour obtenir une résolution spectrale optimale. Les lasers recherchant une bonne résolution utilisent des réseaux de 2400 traits par millimètre larges de plus d'une dizaine de centimètres.

Le laser est construit en ajoutant dans la partie de la cavité conservant un axe fixe un milieu amplificateur et son système de pompage. Les pertes de cette cavité étant très élevées, on utilise ici un amplificateur à colorant qui sur une longueur de l'ordre du centimètre produit un gain non saturé  $\alpha^0 \ell \gg 1$ .



## **Chapitre 6**

# **PRINCIPALES APPLICATIONS DES DIFFÉRENTS TYPES DE LASERS**

## 6.1 Les lasers à milieux amplificateurs gazeux

Milieu Amplificateur	Longueur d'onde	Applications
CO <sub>2</sub> faible puissance	infrarouge moyen; 9,6 et 10,6 $\mu\text{m}$	Télémétrie; guidage; LIDAR (détection pollution); imagerie; anémométrie; détection; chimie laser;
CO <sub>2</sub> puissance moyenne et forte (qq kW)		Coupe; perçage et soudure des métaux; traitement de surface et alliages; usinage de céramiques et de matériaux résistants
CO <sub>2</sub> de très grande puissance (> 20 kW)		Usinage du plastique; micro-usinage; photochimie; marquage industriel (bois; métal); chirurgie; fusion thermonucléaire; armes lasers;
Hélium-Néon (He-Ne)	visible; 543 nm, 594 nm, 612 nm et 632,8 nm	Nivellement des routes; perçage de galeries; alignement dans le bâtiment; positionnement des machines outils; imprimerie et reprographie sans contact; lecture de compact et vidéo-disques; scanners de supermarchés; spectrométrie et métrologie industrielle; recherche scientifique; holographie; médecine; biologie.
Gaz ionisés (Ar <sup>+</sup> ; Kr <sup>+</sup> )	UV et violet; 351 nm, 407 nm et 413 nm	Usinage de circuits imprimés; enregistrement de vidéo-disques; sous titrage de films; imprimerie; recherche scientifique; vélocimétrie Doppler (mesure de flux de particules); photochimie; pompage de lasers à colorants et saphir-titane; holographie; ophtalmologie.
Lasers à excimères (F <sub>2</sub> , ArF, KrF, XeCl)	UV; 157 nm, 193 nm, 248 nm et 308 nm	Photochimie; séparation isotopique; pompage de lasers à colorants; fusion thermonucléaire; nettoyage d'œuvres d'art; nettoyage de monuments
Laser à azote (N <sub>2</sub> )	UV; 337 nm	Pompage de lasers à colorant; photochimie; recherche scientifique en général; chirurgie.
Lasers à vapeur métalliques (Cu)	visible; 510 et 578 nm	Remplacement du laser Ar <sup>+</sup> dans les utilisations faibles puissances; séparation isotopique; photochimie;
Laser à iode (I)	infrarouge proche; 1,31 $\mu\text{m}$	Fusion thermonucléaire; armes lasers

## 6.2 Les lasers à milieux amplificateurs liquides

Colorants (Rhodamines; Coumarines; Pyridines)	proche IR à proche UV; 360-900 nm	Photochimie; spectroscopie; séparation isotopique; génération d'impulsions ultra-courtes; recherche scientifique en général; analyses bio-médicales; thérapeutique (traitements de la peau); destruction photosélective de cellules cancéreuses
---	-----------------------------------	---

### 6.3 Les lasers à milieux amplificateurs solides

Rubis ( $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ )	rouge; 694 nm	Photochimie; recherche scientifique en général; holographie; micro-usinage; nettoyage d'œuvres d'art; détection de polluants; médecine
Néodyme-YAG ( $\text{Nd}^{3+}:\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ )	infrarouge moyen; 1,064 $\mu\text{m}$	Thérapeutique (chirurgie laser; destruction de tumeurs en des points accessibles par fibre optique); LIDAR (analyse de l'atmosphère); découpe et perçage des métaux; usinage de circuits intégrés; traitement de céramiques et de semiconducteurs; radars lasers; pompage de lasers à colorants; imprimerie; fusion thermonucléaire; armes laser; télémétrie et détection militaire;
Alexandrite ( $\text{Cr}^{3+}:\text{BeAl}_2\text{O}_3$ )	rouge-IR proche; 700-820 nm	Traitement des semi-conducteurs; spectroscopie; applications militaires;
Semiconducteurs (diodes lasers)	proche UV et infrarouge; 405 nm, 460-520 nm, 635-870 nm, 1,55 $\mu\text{m}$	Télécommunication par fibre; lecture de CD, DVD et blu-ray; scanners de supermarchés; reprographie (imprimantes); photocopieuses; spectroscopie;
Lasers à fibres (Erbium)	infrarouge proche; 1,54 $\mu\text{m}$	Télécommunication; amplification optique
OPO (Oscillateurs Paramétriques Optiques)	proche UV à infrarouge proche	Utilisation en laboratoires de recherche principalement
Titane-Saphir ( $\text{Ti}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ )	infrarouge proche; 800-1100 nm	Utilisation en laboratoires de recherche principalement (impulsions femtoseconde; spectroscopie à très haute résolution)