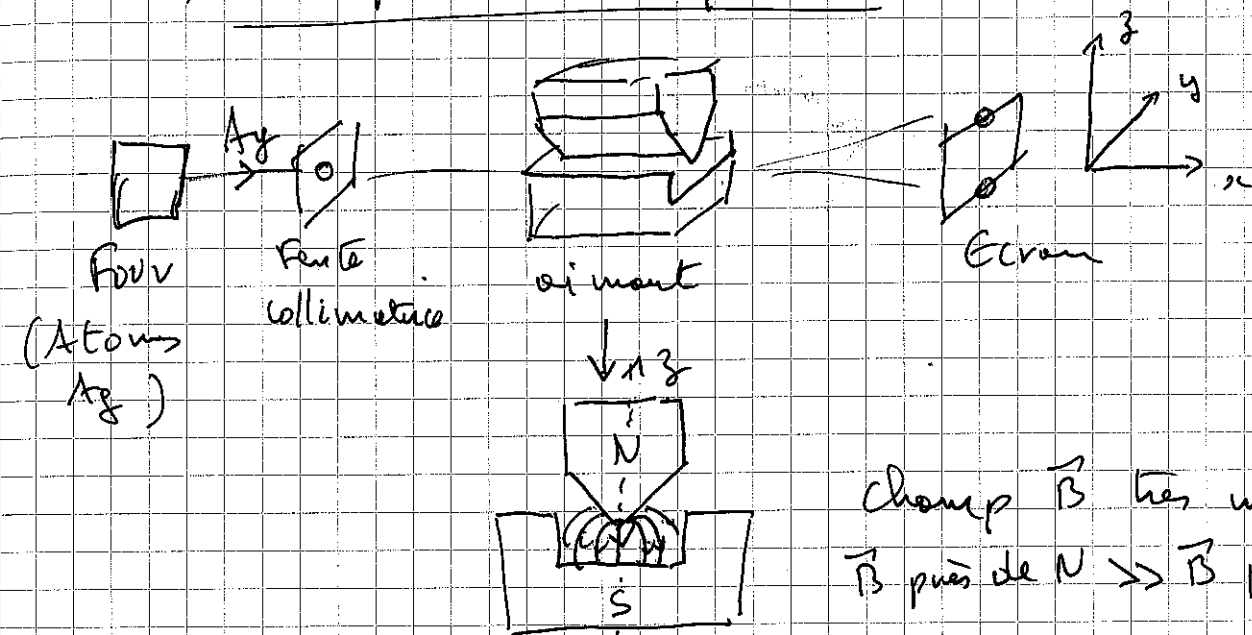


Mise en évidence du spin $1/2$ de l' e^-

Premières applications : systèmes à 2 états / à 2 niveaux.

I Expérience de Stern et Gerlach

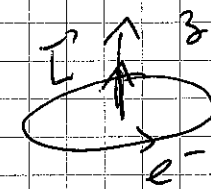
1) Description de l'expérience



Champs $\vec{B}$ très inhomogène
 $\vec{B}$ près de N $\gg$ $\vec{B}$ près de S

Si l'atome (ou autre système quantique) passant de l'aimant possède un moment magnétique $\vec{\mu}$ alors
 Force $\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}$ dont la composante sur Oz est
 est $\boxed{F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}}$

Rappel (harmon) $n \in \mathbb{Z}$ alors $\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$
 Modèle classique



$$\vec{L} = \vec{r}' \wedge \vec{p}' = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} \vec{u}_z$$

$$\text{or } i = -\frac{e}{T} \quad (T = \text{période orbitale})$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow i = -\frac{e v}{2\pi r}$$

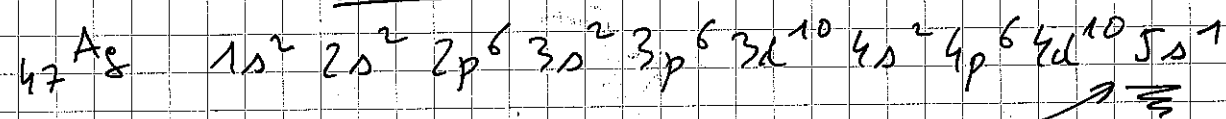
Pour une boucle de courant $\vec{\mu} = i S \vec{u}_z$

donc $\vec{\mu} = -\frac{ev}{2\pi n} \times \pi n^2 \vec{u}_z$

soit $\vec{\mu} = -\frac{evn}{2} \vec{u}_z$

avec $\vec{L} = m \cdot n v \vec{u}_z \Rightarrow \vec{\mu} = \frac{-e}{2m} \vec{L}$

~ Atome d'Ag a $\vec{L} = \vec{0}$! (classique ni quantique !)



~~3 2 1~~ couches complètes sauf e périphérique seul

Ex^{le} de SG : φ classique prédit $\vec{\mu} = \vec{0}$
classique

(seule origine de $\vec{\mu}$ est $\vec{L}$ en φ classique)

~ Set G observent 2 tâches m l'éam.
selon la direction Oz

2) Premières conséquences

* $\exists$ moment magnétique max possible par la φ
classique. Vu la structure de l'atome d'Ag
seul l'e périphérique est important $\Rightarrow$
moment cinétique intrinsèque ou spin
pour l'e- $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$

* de plus, si $\exists \vec{\mu}$ lt comme l'e- a un
mt aléatoire, $\vec{\mu}$ orienté aléatoirement ds
les 3 directions. Même $\mu_z : \mu_z = \mu \cos \theta$
avec θ random ds $[0, \pi]$

f classique $\rightarrow$ tâche continue selon l'axe Oz
centre les 2 extrêmes $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, i.e. ds
l'intervalle $[-\mu, +\mu]$ pour M_z .

Or on observe 2 tâches distinctes

$\Rightarrow M_z$ est quantifié et ne peut prendre
que 2 valeurs possibles et de $\hbar$ pour S_z ,
projection de $\vec{S}$ sur Oz .

+ précisément l'exp^e conclue que les 2 valeurs
possibles, quantifiées, de S_z sont $\pm \frac{\hbar}{2}$

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2} \text{ pour l'e}^-$$

$\hookrightarrow$ particule "de spin $\frac{1}{2}$ ", i.e. valeur
de la projection sur l'axe = moitié du
quantum d'action ou de moment cinétique

3) Interprétation

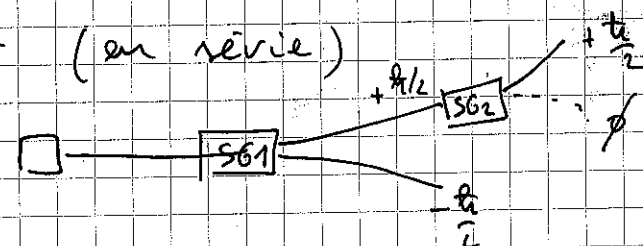
Faire passer un atome d'Ag à travers un appareil
de SG revient à effectuer une mesure de la
projection de son spin (spin de l'e périphérique) sur
la direction de l'axe du gradient de $\vec{B}$ (Oz)

$\hookrightarrow$ on mesure S_z

2 valeurs possibles : $\pm \frac{\hbar}{2}$. Ce sont donc les vp
de S_z dans l'espace des états de spin (de dim 2)
on note $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ les $\vec{v}_p$ correspondants
donc $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ forme une BON de cet espace
et dans cette base la matrice de S_z s'écrit

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

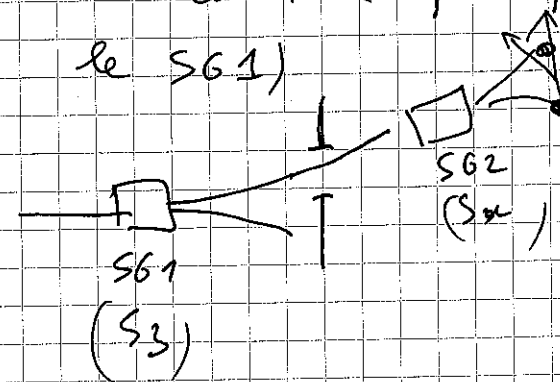
Juste après le passage ds le SG, on est sûr que les atomes déviés vers le haut sont dans l'état $|+\rangle_z$ et ceux déviés vers le bas dans l'état $|-\rangle_z$. Ce qu'on peut vérifier en mettant une 2^e SG identique à la suite de la 1^{re} (en série)



(2 mesures successives "identiques" : on est sûr du résultat de la 2^e mesure)

b) Deux mesures successives ds 2 directions $\neq z$

imaginons SG1 mesure S_z comme avant et une 2^e SG, SG2, mesure S_x ($\vec{B} // OX$) pour voir si le faisceau dévié vers le haut par le SG1 (un diaphragme judicieusement placé sélectionne les atomes de "spin up", i.e. ds l'état $|+\rangle_z$, après le SG1)



On montre (cf + laun) que les matrices de S_x, S_y et S_z de la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ sont:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont les matrices de Pauli (les 3 + $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ base des matrices 2×2)

De façon générale:

$$S_u = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{S}_u = \vec{S} \cdot \vec{u}, \quad \vec{u} = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z$$

Le SG_z mesure donc S_x , l'état initial étant

$$|+\rangle_z$$

Memme $\rightarrow$ 2 valeurs possibles, les v.p de S_x ie $\pm \frac{\hbar}{2}$

$$\vec{v}_p \text{ associe } \vec{u} + \frac{\hbar}{2} \text{ et } |+\rangle_x \\ - \frac{\hbar}{2} \text{ et } |-\rangle_x$$

$$\text{Calcul rapide: } \begin{cases} |+\rangle_x = \frac{|+\rangle_z + |-\rangle_z}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle_x = \frac{|+\rangle_z - |-\rangle_z}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$S_x |+\rangle_x = +\frac{\hbar}{2} |+\rangle_x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta \text{ + normalisation}$$

donc $P(\pm \frac{\hbar}{2})$

$$\text{donc } P(+\frac{\hbar}{2}) = |\langle + | \psi \rangle|^2 = |\langle + | + \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{\hbar}{2}) = |\langle - | \psi \rangle|^2 = |\langle - | + \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

(on aurait trouver la même chose pour S_y)

si $|\psi\rangle = \vec{v}_p$ de S_z , alors mesure de S_x (S_y)
"randomise" totalement le résultat

$$(P(\pm \frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2})$$

cela signifie que les observables S_x , S_y et S_z
sont incompatibles $[S_i, S_j] \neq 0$.

II Système à 2 niveaux

1) Introduction

Système simple car 2D. Cependant plein d'applications.
Nombreux systèmes complexes peuvent être approximates
par un syst. à 2 niveaux. Par ex. si 3 états
dont les énergies sont voisines et très $\neq$ de tous les
autres

$$\begin{array}{c} \text{---} E_2 \\ \Delta E \downarrow \\ \text{---} E_1 \\ \text{---} E_0 \end{array} \quad E_1 \text{ et } E_0 \text{ et } E_1 - E_0 \ll \Delta E$$

L'hypothèse forte est donc le hamiltonien
 $\hat{H}_0$ du système "réduit" possède 2 niveaux
d'énergie (non dégénérés), par ex E_1 et E_2
et de $\vec{v}_p$ associés resp. $|1\rangle$ et $|2\rangle$
 $\hat{H}_0 |1\rangle = E_1 |1\rangle$; $\hat{H}_0 |2\rangle = E_2 |2\rangle$

w_{11} et w_{22} ne jouent pas un rôle important --

Dans la base ON $\{|1\rangle, |2\rangle\}$: $H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$

On applique ensuite un "champ extérieur" $\rightarrow$ petite perturbation qui va modifier le hamiltonien :

$$H = H_0 + \hat{W} \quad \hat{W} \rightarrow \text{couplage ou perturbation}$$

$$\text{on bien que } H = \begin{pmatrix} E_1 + w_{11} & w_{12} \\ w_{12}^* & E_2 + w_{22} \end{pmatrix}$$

avec w_{11} et $w_{22} \in \mathbb{R}$. ds $\{|1\rangle, |2\rangle\}$

En fait, E_1 et E_2 ne sont plus vp de H et $|1\rangle$ et $|2\rangle$ ne sont plus $\vec{v}_p$ de H .

$\rightarrow$ nouveaux niveaux (notés E_+ et E_-) obtenus par diagonalisation de H :

$$\begin{vmatrix} E_1 + w_{11} - \lambda & w_{12} \\ w_{12}^* & E_2 + w_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (E_1 + w_{11} - \lambda)(E_2 + w_{22} - \lambda) - |w_{12}|^2 = 0$$

$$\text{soit } \lambda^2 - \lambda(E_1 + E_2 + w_{11} + w_{22}) + (E_1 + w_{11})(E_2 + w_{22}) - |w_{12}|^2 = 0$$

w_{ii} : perd le rôle !

$\rightarrow$ simplification pour la suite : soit $w_{11} = w_{22} = 0$
soit on renomme $E_i + w_{ii} \rightarrow E_i$

$$\rightarrow \lambda^2 - \lambda(E_1 + E_2) + E_1 E_2 - |w_{12}|^2 = 0$$

$$\Delta = (E_1 + E_2)^2 - 4(E_1 E_2 - |w_{12}|^2)$$

$$= (E_1 + E_2)^2 - 4E_1 E_2 + 4|w_{12}|^2$$

$$= (E_1 - E_2)^2 + 4|w_{12}|^2 \text{ toujours } \geq 0$$

$$\text{d'où } E_{\pm} = \frac{1}{2} (E_1 + E_2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + |W_{12}|^2}$$

$$(\text{si } |W_{12}| \rightarrow 0, E_{\pm} \rightarrow E_{1,2}.)$$

on montre de + (cf Cohen).

$\vec{V}_P | \pm \rangle$ associé à $E_{\pm}$:

$$\begin{cases} | + \rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} | 1 \rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} | 2 \rangle \\ | - \rangle = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} | 1 \rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} | 2 \rangle \end{cases}$$

$$\text{on } \tan \theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1 - E_2}$$

$$\text{et } W_{21} = W_{12}^* = |W_{12}| e^{i\phi}$$

2) Aspect dynamique, évolution du vecteur d'état (autre façon de trouver $E_{\pm}$)

$\{|1\rangle, |2\rangle\}$ base, on peut poser, $\forall t$:

$$|\psi(t)\rangle = a_1(t) |1\rangle + a_2(t) |2\rangle$$

$$\text{Eqn de Sch: } i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

soit

$$i\hbar (\dot{a}_1 |1\rangle + \dot{a}_2 |2\rangle) =$$

$$\begin{pmatrix} E_1 & W_{12} \\ W_{12}^* & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

abus

$$= (E_1 a_1 + W_{12} a_2) |1\rangle + (W_{12}^* a_1 + E_2 a_2) |2\rangle$$

d'où le système d'équations couplées:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{a}_1 = E_1 a_1 + W_{12} a_2 & (1) \\ i\hbar \dot{a}_2 = W_{12}^* a_1 + E_2 a_2 & (2) \end{cases}$$

Couplage $\leftrightarrow$ terme W_{12} (et W_{12}^*)

(en core une fois on voit bien que W_{11} et W_{22} ne sont pas importants, $E_1 + W_{11}$ ou E_1 c'est pareil)

Decouplage?

$$(1) \rightarrow a_2 = \frac{i\hbar \dot{a}_1 - E_1 a_1}{W_{12}}$$

on injecte ds (2):

$$i\hbar \left(\frac{i\hbar \dot{a}_1 - E_1 a_1}{W_{12}} \right) = \frac{E_2 + i\hbar \dot{a}_1 - E_1 a_1}{W_{12}} + W_{12}^* a_1$$

$$\text{soit } -\hbar^2 \ddot{a}_1 - i\hbar (E_1 + E_2) \dot{a}_1 + (E_1 E_2 - |W_{12}|^2) a_1 = 0$$

$\Rightarrow$ OH amorti

solⁿ sous la forme $\propto e^{i\omega t}$

$$\hookrightarrow +\hbar^2 \omega^2 + \hbar (E_1 + E_2) \omega + E_1 E_2 - |W_{12}|^2 = 0$$

$\omega = \hbar \omega$

$$\Delta = (E_1 + E_2)^2 - 4(E_1 E_2 - |W_{12}|^2)$$

$$= (E_1 - E_2)^2 + |W_{12}|^2$$

$$\Rightarrow \hbar \omega_{\pm} = \frac{-(E_1 + E_2) \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + |W_{12}|^2}}{2}$$

on retrouve $E_{\pm}$

$\rightarrow$ oscillations "aux fréquences de Bohr" du système à $\omega_+ - \omega_-$

3) Oscillations de Rabi - Formule de Rabi

hyp: $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ à un moment (état initial)

le système est dans l'état (1)

il dans le fondamental du système non perturbé. Perturbation $\hat{W}$ de forme évolue le système...

$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ états propres de $\hat{H} \rightarrow$ états stationnaires (base d'états stationnaires)

donc on peut écrire $\forall t$:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_0 |+\rangle + \beta_0 |-\rangle$$

$$\text{alors } |\psi(t)\rangle = \alpha_0 e^{-i\frac{E_+ t}{\hbar}} |+\rangle + \beta_0 e^{-i\frac{E_- t}{\hbar}} |-\rangle$$

$$\text{avec } \alpha_0 |+\rangle + \beta_0 |-\rangle = |1\rangle$$

$$\hookrightarrow \alpha_0 = \langle +|1\rangle$$

$$\beta_0 = \langle -|1\rangle$$

$$\text{or } |+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |1\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |2\rangle$$

$$\langle +|+\rangle \Rightarrow \langle +|1\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} = \alpha_0$$

$$\text{et } |-\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |1\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |2\rangle$$

$$\langle -|1\rangle \Rightarrow \langle -|1\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} = \beta_0$$

Finalt

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-i\frac{E_1+t}{\hbar}} |+\rangle - \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-i\frac{E_2-t}{\hbar}} |-\rangle$$

on peut factoriser $e^{i\phi/2}$ et le voir.

Calculons la proba de trouver le système ds l'état $|2\rangle$, ie ds l'état excité du système non perturbé.

$$P_2(t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2$$

$$\text{or } \langle 2|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{E_1+t}{\hbar}} \langle 2|+\rangle - \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{E_2-t}{\hbar}} \langle 2|-\rangle$$

$$\text{avec } \langle 2|+\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \text{ et } \langle 2|-\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \langle 2|\psi(t)\rangle &= \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{E_1+t}{\hbar}} \times \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} - \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{E_2-t}{\hbar}} \times \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \\ &= e^{i\phi/2} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \left(e^{-i\frac{E_1+t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E_2-t}{\hbar}} \right) \\ &= e^{i\phi/2} \frac{1}{2} \sin\theta e^{-i\frac{E_1+t}{\hbar}} \left(1 - e^{+i(E_2-E_1)t/\hbar} \right) \end{aligned}$$

$$\text{et } |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4} \sin^2\theta \times 4 \sin^2\left(\frac{E_2-E_1}{2\hbar}t\right)$$

Rappel: $\tan\theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1-E_2}$ trigo: $\sin\theta = \frac{2E_3\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2} - 1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{ant } \sin^2\theta = \frac{4|W_{12}|^2 / (E_1-E_2)^2}{1 + \frac{4|W_{12}|^2}{(E_1-E_2)^2}} = \frac{4|W_{12}|^2}{4|W_{12}|^2 + (E_1-E_2)^2}$$

As trige: $|1-e^{i\alpha}|^2 = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \left| e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} \right|^2$

$$= 4 \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

d'où finalement

$$P_2(t) = \frac{4|W_{12}|^2}{4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2} \sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} t\right)$$

• oscillation à la fréquence de Bohr du système $\hbar\omega_{Bohr} = E_1 - E_2$

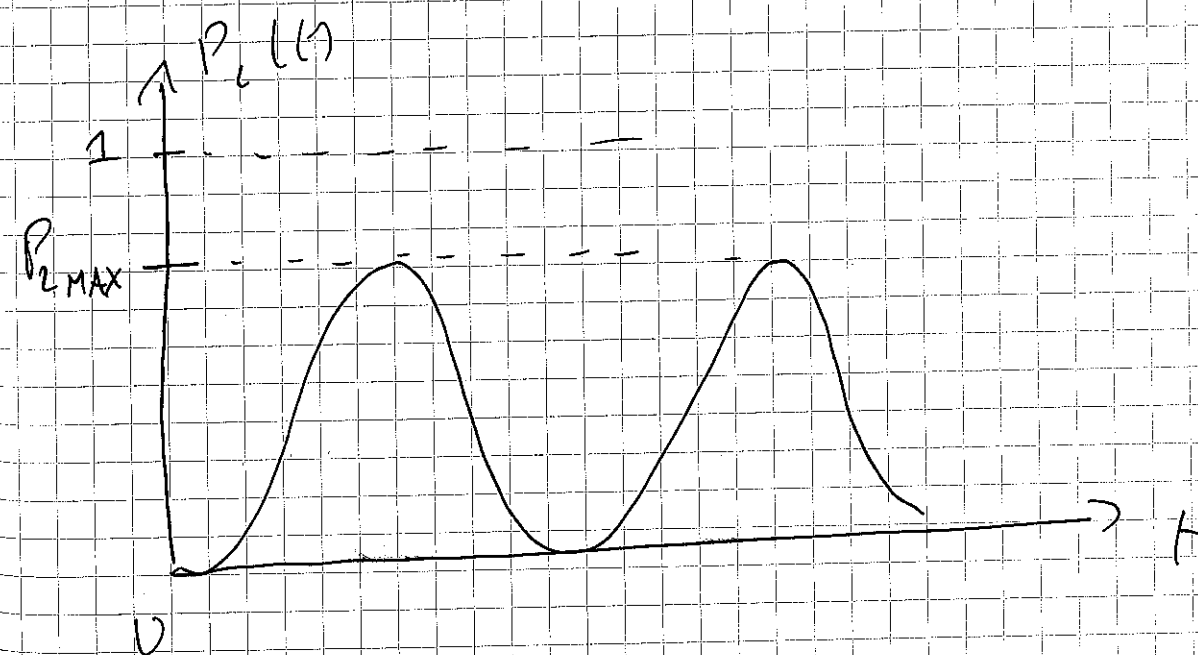
• $P_1(t) = 1 - P_2(t)$

• $P_2(t)$ dépend du couplage $|W_{12}|^2$ (ou $\sin^2\theta$)

si $|W_{12}| \nearrow \quad P_2(t) \rightarrow \sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} t\right)$

ie $P_2(t)$ peut prendre la valeur 1
(on est sûr qu'à certains instants
le système est dans l'état $|2\rangle$)

si on pose $P_{2MAX} = \sin^2\theta = \frac{4|W_{12}|^2}{4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2}$



Par sébile: $\sin^2\theta = 1$ est aussi obtenu pour $E_1 = E_2 \quad \forall W_{12}$
bof bof!

de façon que $P_{2\text{MAX}} < 1$: $\exists$ instants où la proba de trouver le syst. ds l'état $|2\rangle$ est MAX mais < 1 , donc pas sûr. Par contre $\exists$ instants où $P_2(t) = 0$ donc $P_1(t) = 1$ et donc on est sûr de trouver le système ds l'état $|1\rangle$.

Applications :

- Ion H_2^+

- molécule NH_3

- RMN

etc

→ TD 3

SUPERPOSITION et INTRICATION (Produit tensoriel)

I Superposition d'états et conséquences.

1) Rappels

$\mathcal{E}$ est un $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire hermitien.
Espace des états

si $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle \in \mathcal{E}$ alors $\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$
($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) est aussi un vecteur
d'état représentant un état admissible du
système considéré

2) Différence entre superposition quantique et mélange statistique.

Supposons maintenant que $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont 2 $\vec{v}_p$ d'une
certaine observable A associée aux $\vec{v}_p$ a_1 et a_2

Si le système est préparé dans l'état $|\psi_1\rangle$ (appelé)
on peut calculer toutes les prévisions concernant les
résultats de la mesure d'une autre observable B .

On suppose, pour simplifier, que le spectre de B est non
dégeneré. $\rightarrow \vec{v}_p \{b_n\}$ associés aux $\vec{v}_p \{u_n\}$

Le prob de trouver le $\vec{v}_p$ b_n est alors :

$$P_1(b_n) = |\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2$$

De même si le système a été préparé dans l'état $|\psi_2\rangle$:

$$P_2(b_n) = |\langle u_n | \psi_2 \rangle|^2$$

Considérons maintenant le cas où l'état initial du système n'est ni $|\psi_1\rangle$ ni $|\psi_2\rangle$ mais une superposition linéaire des deux : $|\psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle$ ($|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$)

On dit svte que, quand le système est dans l'état $|\psi\rangle$, on a une proba $|\lambda_1|^2 (= |\langle \psi_1 | \psi \rangle|^2)$ de le trouver dans l'état $|\psi_1\rangle$ et $|\lambda_2|^2 (= |\langle \psi_2 | \psi \rangle|^2)$ de le trouver dans l'état $|\psi_2\rangle$. C'EST CE QU'ON A FAIT / DIT AU CHAPITRE PRÉCÉDENT. ÇA C'EST UN RACCOURCI.

↳ Il faudrait en principe dire qq chose de + précis, comme : $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ étant 2 vp de l'observable correspondante aux 2 vp a_1 et a_2 , la proba de trouver a_1 lors d'une mesure de A est $P(a_1) = |\langle \psi_1 | \psi \rangle|^2 = |\lambda_1|^2$ et idem $P(a_2) = |\langle \psi_2 | \psi \rangle|^2 = |\lambda_2|^2$.

La première manière de parler, le raccourci, peut en effet être source de confusion et laisser croire que $|\psi\rangle$ est un mélange statistique de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ avec des poids $|\lambda_1|^2$ et $|\lambda_2|^2$. C'est à dire, si on considère N systèmes identiques tous dans l'état $|\psi\rangle$, $N|\lambda_1|^2$ se voient en fait dans l'état $|\psi_1\rangle$ et $N|\lambda_2|^2$ dans l'état $|\psi_2\rangle$ et $|\lambda_i|^2 = \text{proba d'être dans l'état } |\psi_i\rangle$ (c'est évidemment (?) total faux).

↳ En effet, ne prenons par ex, qu'on mesure B l'état du système étant $|\psi\rangle$.

Si on interprète $|\psi\rangle$ comme un mélange statistique, $P(b_n)$ doit s'écrire $|\lambda_1|^2 P_1(b_n) + |\lambda_2|^2 P_2(b_n)$
 $= |\lambda_1|^2 |\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2 + |\lambda_2|^2 |\langle u_n | \psi_2 \rangle|^2$ (*)

Or les postulats de la MQ nous disent:

$$P(b_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$$

$$= |\langle u_n | \lambda_1 | \psi_1 \rangle + \lambda_2 | \psi_2 \rangle|^2$$

$$= |\lambda_1 \langle u_n | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle u_n | \psi_2 \rangle|^2$$

$$\text{soit } P(b_n) = |\lambda_1|^2 |\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2 + |\lambda_2|^2 |\langle u_n | \psi_2 \rangle|^2 \\ + \lambda_1 \lambda_2^* \langle u_n | \psi_1 \rangle \langle u_n | \psi_2 \rangle^* + c.c$$

$$\text{ou encore } P(b_n) = |\lambda_1|^2 |\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2 + |\lambda_2|^2 |\langle u_n | \psi_2 \rangle|^2 \\ + \underbrace{2 \operatorname{Re} \{ \lambda_1 \lambda_2^* \langle u_n | \psi_1 \rangle \langle u_n | \psi_2 \rangle^* \}}$$

le $\neq$ avec (*) est le terme supplémentaire
souligné $\rightarrow$ TERME D'INTERFERENCE

Si donc on interprète $|\psi\rangle$ $\bar{c}$ un mélange statistique
on perd tous les effets d'interférence propres
à la MQ (cf à l'optique!)

3) Exemple: retour sur les états de polarisation
du photon

ex photon polarisé à 45° : $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$

$\hookrightarrow$ état = superposition des 2 états de polarisation $\perp$
 $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$

Absurde de penser que N photons de l'état $\vec{e}$

sont $\Leftrightarrow \frac{N}{2}$ photons de l'état $\vec{e}_x$ + $\frac{N}{2}$ photons de l'état $\vec{e}_y$

La preuve est que si on insère un polariseur

l'axe $\perp$ à $\vec{e}$, $I_{\text{trans}} = 0 \rightarrow$ aucun photon
ne traverse.

1^{re} série

cf 3 polariseurs en série
sur chap I

alors que ds le cas d'un mélange statistique, $\frac{N}{2}$ photons traversent! ($\bar{e}_\perp = \frac{\bar{e}_x - \bar{e}_y}{\sqrt{2}}$)

4) Mesures intermédiaires entre 2 mesures simples.

1^{re} exp^{te}: on mesure A et on trouve la v.p. a (non dég.)
→ état après la mesure est $|a\rangle$ la v.p. associée $\bar{a}$.

2^{de} exp^{te}: "juste après", ie sans laisser le système évoluer, on mesure une autre observable C spectre non dég. $\{c, |c\rangle\}$.

↳ la proba de trouver c est $P_a(c) = |\langle c|a\rangle|^2$

Autre série d'exp^{ts}: on mesure A et C mais entre les 2 on mesure B, spectre non dég. $\{b, |b\rangle\}$

↳ quelle est la proba de trouver c l'état après la mesure de A est $|a\rangle$?

je sais avec la 1^{re} série d'exp^{ts} est qu'il $\exists$ un état intermédiaire $|b\rangle$, associé à la v.p. b effectivement trouvée lors de la mesure de B.

↳ $P_a(b) = |\langle b|a\rangle|^2$ et, $|b\rangle$ étant connu

fixé $P_b(c) = |\langle c|b\rangle|^2$

⇒ la proba pour que les mesures successives donnent b puis c est $\rightarrow$ la 1^{re} mesure ayant donné a est:

$$P_a(b, c) = P_a(b) \times P_b(c)$$

$$= |\langle b|a\rangle|^2 |\langle c|b\rangle|^2 \neq |\langle c|a\rangle|^2$$

4th entre les 2 séries de mesure:

- ds la 1^{re} on ne détermine pas le "chemin" par lequel le système est passé pour aller de $|a\rangle$ à $|c\rangle$

↳ la zone, on "choisit" un chemin particulier
(via la mesure de B et l'état intermédiaire
1b2)

⚠ on veut peut être alors tenter d'écrire en Σ les
probas: $P_a(c) = \sum_b P_a(b, c)$ (**)
↑
tous les chemins possibles
ce qui est faux

↳ ce qui fait Σ , ce sont les amplitudes de proba
et non les probas, donc qu'en optique on Σ les
amplitudes du dip et non pas les intensités

↳ interférences

On peut voir pourquoi (**) est faux, un peu é précéd.

$$P_a(c) = |\langle c|a \rangle|^2 \quad (\text{c'est exact!})$$

$$\text{et } \langle c|a \rangle = \sum_b \langle c|b \rangle \langle b|a \rangle \quad (\text{rel}^n \text{ de fermeture})$$

{b} BON.

$$\Rightarrow P_a(c) = \left| \sum_b \langle c|b \rangle \langle b|a \rangle \right|^2$$

$$\text{d'où } P_a(c) = \sum_b |\langle c|b \rangle \langle b|a \rangle|^2 + \underbrace{\sum_{b, b' \neq b} \langle c|b \rangle \langle b|a \rangle \langle c|b' \rangle^* \langle b'|a \rangle^*}_{\substack{\text{Termes d'itf entre tous} \\ \text{les chemins possibles.}}}$$

↑
 $P_a(b, c)$
(**)

Ceci explique pourquoi on perd les itf si on
essaie de mesurer par où passent les photons
lors d'une expé de trous d'Young par ex.

NB: dans la 1^{re} série d'expé, on ne sait pas par quel
état intermédiaire passe le système.

cette question n'a d'ailleurs pas de ~~bon~~ sens: il
pense à la fois par tous les états 16

De m^{ême} le photon ~~pense~~ pense à la fois par les 2
trous d'Young.

Bilan: Comme en optique, ce sont les
amplitudes de proba (par ex $\langle a|U\rangle$)
qui comptent

↳ Pratique: on Σ les amplitudes
puis on prend le module au carré

Si non on perd les termes d'inf^{er} essentiels.

II Intrication.

1) Produit tensoriel d'espaces d'états.

a) Portion du pb

- passage de 1 à 2 (N) particules
- espace des états 3D vs espace des états 1D
(fonction d'onde)
- nouveaux degrés de liberté (spin par ex.)

2 particules isolées (1) et (2) $\rightarrow$ espaces des états
 E_1 et E_2 indépendants. Maintenant, ces 2
particules en interaction $\rightarrow$ un seul système
constitué des 2 particules. C^{'est} construire l'espace
des états E à partir de E_1 et E_2 ?

↳ réponse = produit tensoriel.

Notation $|\psi(1)\rangle \otimes |\varphi(2)\rangle$
 mais aussi $|\psi(1)\rangle |\varphi(2)\rangle$
 ou $|\psi(1) \varphi(2)\rangle$
 encore $|\psi\varphi\rangle$

b) Définition

2 espaces E_1 dim N_1 E_2 dim N_2

$E = E_1 \otimes E_2$ espace produit tensoriel de E_1 et E_2 .
 obtenu comme suit :

à tt couple de vecteurs $|\psi(1)\rangle$ de E_1 et $|\varphi(2)\rangle$ de E_2 on associe le vecteur de E $|\psi(1)\rangle \otimes |\varphi(2)\rangle$

qu'on appelle π^t tensoriel de $|\psi(1)\rangle$ et $|\varphi(2)\rangle$
 "Produit" ?

en effet : • linéarité / $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$[\lambda |\psi(1)\rangle] \otimes |\varphi(2)\rangle = \lambda [|\psi(1)\rangle \otimes |\varphi(2)\rangle]$$

• distributivité / addition vectorielle :

$$|\psi(1)\rangle \otimes [|\varphi_1(2)\rangle + |\varphi_2(2)\rangle]$$

$$= |\psi(1)\rangle \otimes |\varphi_1(2)\rangle + |\psi(1)\rangle \otimes |\varphi_2(2)\rangle$$

et pareil de l'autre sens -

2) B.O.N. de $E = E_1 \otimes E_2$

on a $\{ |u_i(1)\rangle \}_{i=1, \dots, N_1}$ B.O.N. de E_1

et $\{ |v_j(2)\rangle \}_{j=1, \dots, N_2}$ B.O.N. de E_2

alors $\{ |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \}_{\substack{i=1, \dots, N_1 \\ j=1, \dots, N_2}}$ B.O.N. de $E = E_1 \otimes E_2$

↳ Conséq : $\dim E = N_1 N_2 = \dim E_1 \times \dim E_2$

$$\text{on } |\psi(1)\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} a_i |u_i(1)\rangle \in E_1$$

$$\text{et } |\varphi(2)\rangle = \sum_{j=1}^{N_2} b_j |v_j(2)\rangle \in E_2$$

$$\text{alors } |\psi(1)\rangle \otimes |\varphi(2)\rangle = \sum_{i,j} a_i b_j |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$$

↳ les composantes du π^t tensoriel sont les π^t des composants.

3) π^{it} scalaire dans E

on le définit à partir des π^{it} scalaires de E_1 et E_2

$$\text{notons } |\psi(1)\psi(2)\rangle = |\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle$$

$$\text{et } |\psi'(1)\psi'(2)\rangle = |\psi'(1)\rangle \otimes |\psi'(2)\rangle$$

$$\text{alors } \langle \psi'(1)\psi'(2) | \psi(1)\psi(2) \rangle = \underbrace{\langle \psi'(1) | \psi(1) \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \pi^{\text{it}} \text{ scal. de } E_1}} \underbrace{\langle \psi'(2) | \psi(2) \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \pi^{\text{it}} \text{ scal. de } E_2}}$$

en particulier

$$\langle u_i v_j | u_{i'} v_{j'} \rangle = \langle u_i | u_{i'} \rangle \langle v_j | v_{j'} \rangle = \delta_{ii'} \times \delta_{jj'}$$

4) Opérateurs dans E

$\hat{A}_1$ opérateur agissant sur $|\psi(1)\rangle$ de E_1

$\hookrightarrow$ prolongement de E :

$\forall |\psi(1)\rangle \in E_1, |\psi(2)\rangle \in E_2$:

$$\hat{A}_1 [|\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle] = [\hat{A}_1 |\psi(1)\rangle] \otimes |\psi(2)\rangle$$

$\hookrightarrow$ abus de notation !

5) États intriqués

$|\psi(1)\rangle$ vecteur de E_1 et $|\psi(2)\rangle$ vecteur de $E_2 \rightarrow$ on peut

en déduire un vecteur de $E_1 \otimes E_2$ $|\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle$

⚠ Tous les vecteurs de $E_1 \otimes E_2$ ne sont pas factorisables en un vecteur de E_1 fois un vecteur de E_2 .

De tels états sont appelés états intriqués

$$\begin{aligned} |1: \pm\rangle \\ |2: \pm\rangle \end{aligned}$$

Ex: 2 spins $\frac{1}{2}$ $\mathcal{E}_1$ base $\{|+\rangle_1, |-\rangle_1\}$
 $\mathcal{E}_2$ base $\{|+\rangle_2, |-\rangle_2\}$

le vecteur $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |+\rangle_2 + |+\rangle_1 |-\rangle_2)$

est factorisable et peut se mettre sous la

forme $|\varphi(u)\rangle \otimes |\varphi(v)\rangle$

ici $\frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_1 \otimes \left(\frac{|+\rangle_2 + |-\rangle_2}{\sqrt{2}} \right)$

Par contre $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |+\rangle_2 - |+\rangle_1 |-\rangle_2)$ ou

$\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2)$ ne le sont pas

ce sont des états intriqués.

Et pour ces états intriqués, on ne peut définir séparément l'état de chacun des sous-systèmes.

NB $\{|+\rangle_1 |+\rangle_2, |+\rangle_1 |-\rangle_2, |-\rangle_1 |+\rangle_2, |-\rangle_1 |-\rangle_2\}$ que l'on

peut ré-écrire $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ est une base $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ et tout état, factorisable ou intriqué, peut toujours se décomposer sur cette base.

(*) d'états factorisés

"Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?"

E, P, R Phys. Rev. May 15 1935

Réponse par Bohr, Phys. Rev., July 13 1935.
 $\rightarrow$ "YES"

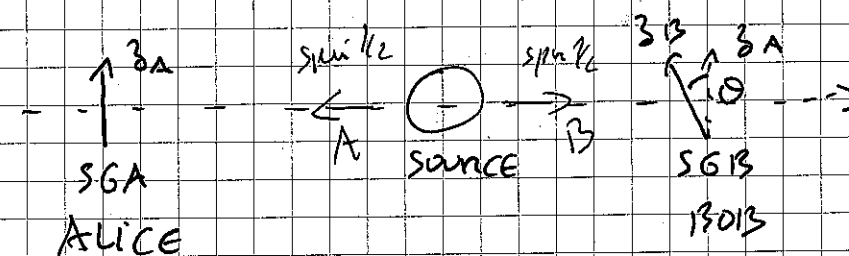
III) Système à 2 particules (2 photons / 2 spins $\frac{1}{2}$) et paradoxe EPR (-Bohm)

1) Historique

EPR $\rightarrow$ photons

EPR B $\rightarrow$ spins $\frac{1}{2}$

2) Paradoxe EPR-Bohm



Source au repos émet des ~~particules~~ particules de spin $\frac{1}{2}$ ~~z_A et z_B~~ (A et B)
 dans 2 directions opposées (conservation $\vec{p}$)
 + conservation m cinétique (m cinétique ~~initial~~ = 0)

$\rightarrow$ état "singulet" de spin (spin total = 0)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) \quad \leftarrow \text{projection } \underline{\underline{S_z}}$$

c'est bien un état intriqué.

Alice et Bob disposent chacun d'un SG et mesurent
 la projection du spin de la particule incidente ^(A ou B) selon z_A
 et z_B respectivement. on note $\theta = \angle \hat{z}_A, \hat{z}_B$

* si $z_A = z_B = z$:

Alice mesure proj. du spin de A sur z (S_z). Elle trouve:

soit $+\frac{\hbar}{2}$ avec $P = \frac{1}{2}$

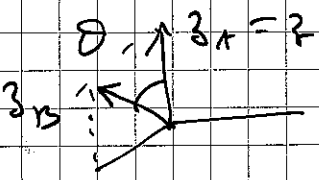
et l'état juste après la mesure est $|+\rangle$

et si Bob mesure S_z "juste après" il est sûr

de trouver $-\frac{\hbar}{2}$ ($P=1$)

- soit $-\frac{\hbar}{2}$ avec $P = \frac{1}{2}$ et l'état juste après la mesure est $| - + \rangle$ et donc Bob est sûr de trouver $+\frac{\hbar}{2}$ par la mesure de S_z sur B.

* De façon plus générale si les 2 SG de Alice et Bob sont inclinées d'un angle θ , Alice mesure $S_{z_A} = S_z$ et Bob mesure S_{z_B}

pourquoi cela est l'effet d'une mesure? 

$z_A \rightarrow z_B$ rot "angle θ , $\varphi = 0$

? cf chap précédent : les $\vec{v}_p$ de S_{z_B} sont en F^n des $\vec{v}_p$ de S_z :

$$\begin{cases} | + \rangle_{z_B} = \cos \frac{\theta}{2} | + \rangle_z + \sin \frac{\theta}{2} | - \rangle_z \\ | - \rangle_{z_B} = -\sin \frac{\theta}{2} | + \rangle_z + \cos \frac{\theta}{2} | - \rangle_z \end{cases}$$

on oublie de lui mettre l'indice "z"

$$\hookrightarrow \text{en inversant : } \begin{cases} | + \rangle = \cos \frac{\theta}{2} | + \rangle_{z_B} - \sin \frac{\theta}{2} | - \rangle_{z_B} \\ | - \rangle = \sin \frac{\theta}{2} | + \rangle_{z_B} + \cos \frac{\theta}{2} | - \rangle_{z_B} \end{cases}$$

* Alice mesure avec S_z :

- elle trouve $+\frac{\hbar}{2}$ avec $P = \frac{1}{2}$ et l'état après mesure devient $| + - \rangle = | + \rangle \otimes | - \rangle$

$$\text{soit } | + \rangle \otimes (\sin \frac{\theta}{2} | + \rangle_{z_B} + \cos \frac{\theta}{2} | - \rangle_{z_B})$$

si Bob mesure avec S_{z_B} , il trouve :

$$- \quad +\frac{\hbar}{2} \text{ avec } P = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$- \quad -\frac{\hbar}{2} \text{ avec } P = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

- elle trouve $-\frac{\hbar}{2}$ avec $P = \frac{1}{2}$ et l'état après mesure devient $| - + \rangle = | - \rangle \otimes | + \rangle$

$$\text{soit } | - \rangle \otimes (\cos \frac{\theta}{2} | + \rangle_{z_B} - \sin \frac{\theta}{2} | - \rangle_{z_B})$$

si Bob mesure avec S_{z_B} , il trouve :

$$- \quad +\frac{\hbar}{2} \text{ avec } P = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\Gamma = \frac{1}{N} \sum \left(\frac{S_{zA}}{\frac{\hbar}{2}} \right) \left(\frac{S_{zB}}{\frac{\hbar}{2}} \right)$$

$$-\frac{\hbar}{2} \text{ avec } P = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Bob : probas de mesures :

$$A \rightarrow \frac{\hbar}{2} \quad B \rightarrow \frac{\hbar}{2} : P = \frac{1}{2} \times \sin^2 \frac{\theta}{2} = P_{++}$$

$$A \rightarrow \frac{\hbar}{2} \quad B \rightarrow -\frac{\hbar}{2} : P = \frac{1}{2} \times \cos^2 \frac{\theta}{2} = P_{+-}$$

$$A \rightarrow -\frac{\hbar}{2} \quad B \rightarrow \frac{\hbar}{2} : P = \frac{1}{2} \times \cos^2 \frac{\theta}{2} = P_{-+}$$

$$A \rightarrow -\frac{\hbar}{2} \quad B \rightarrow -\frac{\hbar}{2} : P = \frac{1}{2} \times \sin^2 \frac{\theta}{2} = P_{--}$$

$$\text{on a bien } P_{++} + P_{+-} + P_{-+} + P_{--} = 1$$

on peut enfin définir un coef de corrélation entre les mesures de A et celles de B

Expérimentalement : grand nombre N de mesures identiques par Alice et Bob

$$\Gamma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\text{signe mesure de } S_{zA} \text{ par Alice}) \times (\text{signe mesure de } S_{zB} \text{ par Bob})$$

probabilités : ++, +-, -+, --

dont l'espérance est : (N → ∞)

$$\Gamma = (++) P_{++} + (+-) P_{+-} + (-+) P_{-+} + (--) P_{--}$$

$$= P_{++} - P_{+-} - P_{-+} + P_{--}$$

$$= \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

direction des 2 SG.

$$\boxed{\Gamma = -\cos \theta} = -\vec{u}_A \cdot \vec{u}_B$$

si $\theta = 0$ on retrouve l'anticorrélation parfaite

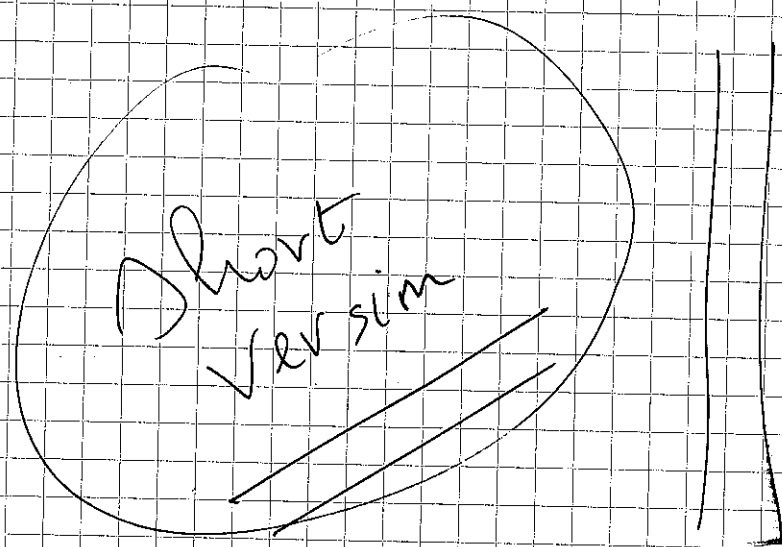
$$\Gamma = -1 \quad (A \rightarrow \pm \frac{\hbar}{2} \rightarrow B = \mp \frac{\hbar}{2} \text{ sûr})$$

si $\theta = \pi$ on trouve une corrélation parfaite

$$\Gamma = +1 \quad (A \rightarrow \pm \frac{\hbar}{2} \rightarrow B = \pm \frac{\hbar}{2} \text{ sûr})$$

si $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\Gamma = 0$ de corrélation totale. Bob trouve

les composants de spin total indépendants de celles mesurées par Alice



NB: n'exclue pas les théories à HV non locales!

3) Discussion

Avec $\theta = 0$ pour simplifier

Argument EPR: avant les 2 particules étaient déjà dans un état de spins opposés avant la mesure et la mesure n'a fait que ~~révéler~~ révéler cette information "cachée", information inconnue de la M_A et qu'on peut appeler de Feynman "variable cachée"

• soit "il existe une étrange action à distance" (mot d'Einstein) qui fait que la 2^{ème} particule "sait" quel axe a été choisi par Alice pour sa mesure de spin, et ce à la distance entre Alice et Bob.

1^{ère} possibilité: M_A incomplète et $\exists$ variables cachées (de la M_A) qui transportent / contiennent l'info manquante.

2^{ème} possibilité: la M_A semble violer, un peu, la causalité, mais le pp^e de localité.

Discussion académique jusqu'à Bell $\rightarrow$ intervient pour distinguer théories à variables cachées "inégalités de Bell"

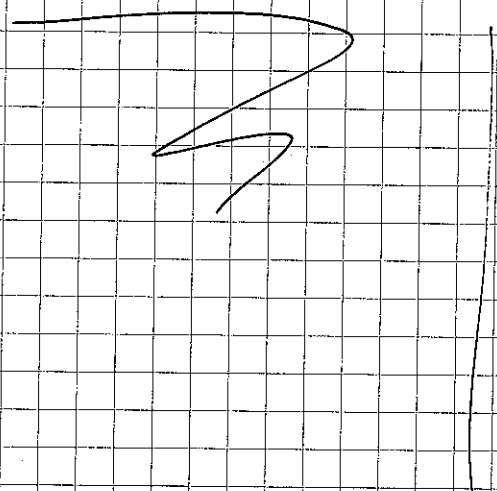
$$S = \Gamma(\vec{u}_A, \vec{u}_B) - \Gamma(\vec{u}_A, \vec{u}_B') + \Gamma(\vec{u}_A', \vec{u}_B) + \Gamma(\vec{u}_A', \vec{u}_B')$$

Bell montre que pour une théorie à variables cachées (locale) $|S_{HV}| \leq 2$

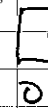
alors que $|S_{MA}|$ où $\Gamma(\vec{u}_A, \vec{u}_B) = -\vec{u}_A \cdot \vec{u}_B$

peut être ≥ 2 . La M_A viole l'inégalité de Bell et c'est bien ce qu'on a montré expérimentalement les exps d'Aspect, Grangier, Roger.

A traiter ou pas?



Conclusion : $MA \rightarrow$ non localité
non séparabilité



4) Variables cachées et inégalités de Bell (version longue)

a) Fidélité

$\exists$ variable cachée λ supposée continue.

si Alice choisit l'orientation $\vec{u}_A$ pour son SG, ie pour mesurer le spin, ~~alors $\lambda \in$ certain intervalle~~

alors, si $\lambda \in \Lambda_{\vec{u}_A}$ (certain intervalle) la mesure d'Alice donne $+\frac{\hbar}{2}$, et elle donne $-\frac{\hbar}{2}$ sinon.

De façon gale le résultat de la mesure d'Alice est une fonction de $\vec{u}_A$ et λ

$$\text{Alice} \rightarrow A(\vec{u}_A, \lambda)$$

$$\text{de si Bob} \rightarrow B(\vec{u}_B, \lambda)$$

De cette façon on note que le ppe de localité est respecté car A ne dépend pas de $\vec{u}_B$ et vice versa.

$$\text{Alors : } \left\{ \begin{array}{l} \bullet A(\lambda, \vec{u}_A) = +\frac{\hbar}{2} \text{ si } \lambda \in \Lambda_{\vec{u}_A} \\ \quad \quad \quad = -\frac{\hbar}{2} \text{ sinon} \\ \bullet B(\lambda, \vec{u}_B) = +\frac{\hbar}{2} \text{ si } \lambda \in \Lambda_{\vec{u}_B} \\ \quad \quad \quad = -\frac{\hbar}{2} \text{ sinon} \end{array} \right.$$

λ inconnue mais on peut lui associer une certaine densité de proba (inconnue) $p(\lambda) \geq 0$

$$\text{avec } \int p(\lambda) d\lambda = 1$$

HV $\leftrightarrow$ "Hidden Variable"

Le valeur moyenne d'une f^u qd $F(\lambda)$ s'écrit alors :

$$E(F) = \int F(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

On peut donc écrire la f^u de corrélation entre A et B :

$$\Gamma_{HV}(\vec{u}_A, \vec{u}_B) = E(AB)$$

$$= \frac{1}{\Omega^2} \int A(\lambda, \vec{u}_A) B(\lambda, \vec{u}_B) \rho(\lambda) d\lambda \quad (*)$$

$\uparrow$
pour normaliser ($-1 \leq \Gamma_{HV} \leq 1$)

La MQ prédit $\Gamma_{MQ} = -\cos\theta = -\vec{u}_A \cdot \vec{u}_B$ d'après la partie précédente.

b) Inégalité de Bell-CHSH (Clauser - Horne - Shimony - Holt)

$$\text{soit } S = \Gamma(\vec{u}_A, \vec{u}_B) - \Gamma(\vec{u}_A, \vec{u}_B') + \Gamma(\vec{u}_A', \vec{u}_B) + \Gamma(\vec{u}_A', \vec{u}_B')$$

(2 couples de mesures, pour chaque SG)

on montre à partir des propriétés des intégrales (*)

que $|S_{HV}| \leq 2$ (Démonstration suivante)

$$\text{Or pour la MQ: } S_{MQ} = -\vec{u}_A \cdot \vec{u}_B + \vec{u}_A \cdot \vec{u}_B' - \vec{u}_A' \cdot \vec{u}_B + \vec{u}_A' \cdot \vec{u}_B'$$

et cette quantité peut être > 2 ☐

$$\text{ex: } \vec{u}_A = \vec{e}_x \\ \vec{u}_A' = \vec{e}_z$$

$$\vec{u}_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_z) \\ \vec{u}_B' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

$$\hookrightarrow \theta_A = 90^\circ \text{ et } 0^\circ$$

$$\theta_B = 45^\circ \text{ et } 135^\circ$$

$$\text{ds ce cas } S_{MQ} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

$$|S_{MQ}| = 2\sqrt{2} > 2$$

la MQ viole les inégalités de Bell !

c) l'expérience (Aspect Grangier Roger, 1982)

expé → est on tjrs $|S| \leq 2$ ou $\exists$? situations où on trouve $|S| > 2$?

Aspect → c'est la 2

d) Démon de Bell-CHSH

$$S_{HV} = \Gamma_{HV}(\vec{u}_A, \vec{u}_B) - \Gamma_{HV}(\vec{u}_A, \vec{u}_B') + \Gamma_{HV}(\vec{u}_A', \vec{u}_B) + \Gamma_{HV}(\vec{u}_A', \vec{u}_B')$$

$$\hookrightarrow S_{HV} = \frac{4}{\pi} \int [A(\lambda, \vec{u}_A) B(\lambda, \vec{u}_B) - A(\lambda, \vec{u}_A) B(\lambda, \vec{u}_B') + A(\lambda, \vec{u}_A') B(\lambda, \vec{u}_B) + A(\lambda, \vec{u}_A') B(\lambda, \vec{u}_B')] p(\lambda) d\lambda$$

$$= \frac{4}{\pi} \int [A(\lambda, \vec{u}_A) \{B(\lambda, \vec{u}_B) - B(\lambda, \vec{u}_B')\} + A(\lambda, \vec{u}_A') \{B(\lambda, \vec{u}_B) + B(\lambda, \vec{u}_B')\}] p(\lambda) d\lambda$$

or $B(\lambda, \vec{u}_B)$ et $B(\lambda, \vec{u}_B')$ sont soit = soit opposés
 $\frac{1}{2}/\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}/-\frac{1}{2}$
 ou $-\frac{1}{2}/\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}/-\frac{1}{2}$

↳ que 2 possibilités :

= soit la 1^{ère} ligne = 0 et la 2^{ème} vaut
 qq chose $\in \mathbb{R} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$ car $\epsilon_A = \pm 1$ $\epsilon_B = \pm 1$
 ou soit la 2^{ème} ligne = 0 et la 1^{ère} vaut
 $\epsilon_A \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$ aussi

As $\tau \rightarrow \infty$, $\bar{c} \int p(\lambda) d\lambda = 1$, i.e. $p(\lambda) \in C_0$

$$|S_{\mu\nu}| \leq 2$$

