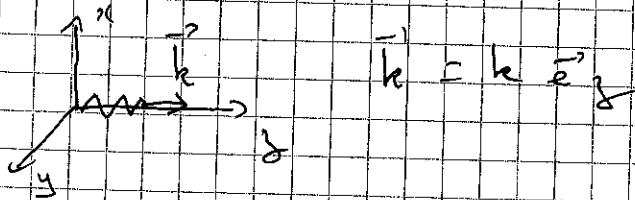


Polarisation de la lumière: introduction à la mesure en MQ

I Polarisation de la lumière

1) Rappels em

onde en pulsation ω se propageant $\vec{z}$



onde em ds le vide $\rightarrow$ onde transverse $\vec{E}$ et $\vec{B} \perp \vec{k}$
($\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ trièdre direct)

Notation $\mathbb{C}$ $\vec{E} = \text{Re}(\vec{\underline{E}})$ avec $\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}$

avec $\vec{\underline{E}}_0 \perp \vec{Oz}$, $k = \frac{\omega}{c}$ (relation de dispersion)

On peut décomposer $\vec{\underline{E}}_0$ ds la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

$$\vec{\underline{E}}_0 = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{C}$$

Rq (pas si évidente): $\vec{\underline{E}}_0 \in \text{ev de dim 2 sur } \mathbb{C}$

2) Polarisation

Def: la façon dont se déplace l'extrémité de $\vec{E}$ au cours du temps est appelée "polarisation" de l'onde lumineuse.

Par abus de langage, on assimile tout la polarisation avec le champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ lui-même.

Sans perte de généralité, on peut recevoir $\vec{\underline{E}}_0$ comme:

$$\vec{\underline{E}}_0 = E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} e^{i\phi} \vec{e}_y$$

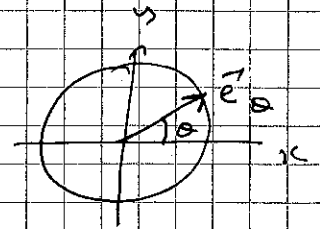
avec E_{0x} et $E_{0y} \in \mathbb{R}$ et ϕ le déphasage entre les 2 composantes sur x et y du champ.

* si $\phi_0 = 0 (\pi)$, les composantes de $\vec{E}_0$ sont purement réelles et alors on peut écrire :

$$\vec{E}_0 = E_0 (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$$

on pose alors $\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$

(c'est en fait le vecteur radial des coord. pol.)



et $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_\theta \rightarrow$ polarisation linéaire de la direction $\vec{D}$.

* si $\phi_0 = \frac{\pi}{2} (\pi)$ $\vec{E}_0 = E_0 (\vec{e}_x + i \vec{e}_y)$

et $E_{0x} = E_{0y} = E_0$

$$\left(\begin{matrix} +i\pi/2 & -i\pi/2 \end{matrix} \right)$$

$$\text{alors } \vec{E} = \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \right)$$

$$= E_{0x} \cos(\omega t - kz) \pm E_{0y} \sin(\omega t - kz)$$

$\rightarrow$ polarisation circulaire (droite si $+\frac{\pi}{2}$) horizontale
(gauche si $-\frac{\pi}{2}$) anti-horizontale

* Tout autre cas : polarisation elliptique (cas général)

NB la lumière peut aussi ne pas être polarisée (lumière soleil par ex.) ou partiellement polarisée

$\uparrow$
extremité de $\vec{E}$ a mt aléatoire.

* si l'on ne considère que des polarisations rectilignes

- (C'EST CE CAS DANS TOUTE LA SUITE -

$$(\vec{e}_0, \vec{e}'_{\frac{\pi}{2}}) \text{ ou } (\vec{e}_\pi, \vec{e}'_{-\frac{\pi}{2}})$$

$$\uparrow$$

ie $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

$$\uparrow$$

 $(-\vec{e}_x, -\vec{e}_y)$

(avec la mt $\vec{e}_0$) sont des bases adaptées pour décrire les états de polarisation.

Mais on peut aussi bien utiliser la base des polarisations circulaires :

$$\begin{cases} \vec{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_0 + i \vec{e}_\pi) \\ \vec{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_0 - i \vec{e}_\pi) \end{cases}$$

C'est juste une question de commodité. Idem M2.

3) Polarisation et loi de Malus

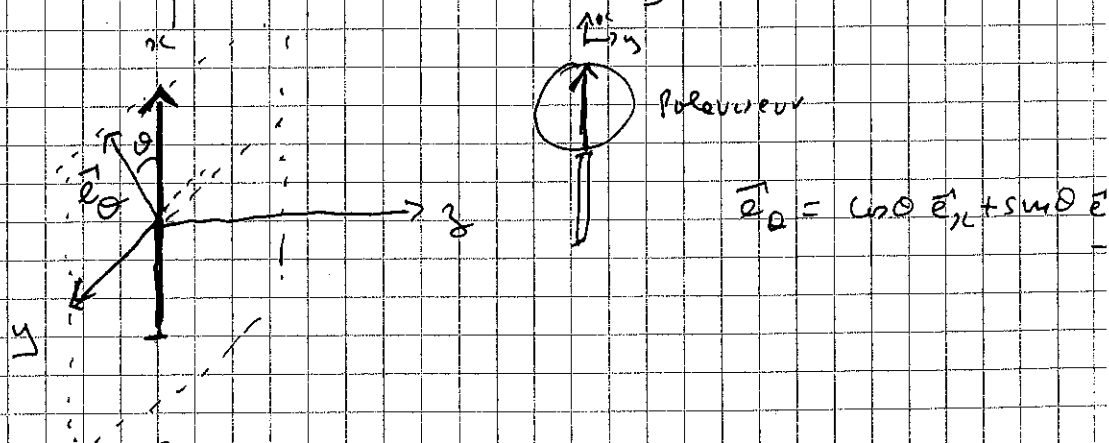
∃ matériaux ("dichroïques") dont l'absorption dépend de la direction du champ incident (ce se polarisation)

Ex important: Films polaroïdes

(longues molécules alignées qui absorbent la composante du champ // aux molécules)

Un polariseur fait à partir d'un tel matériau possède donc 2 directions privilégiées, l'une dite "passante", l'autre dite "non passante" ou "absorbante" et ⊥ à la direction passante ou "bloquante".

On considère donc un polariseur dont la direction passante définit par ex l'axe Ox et une onde incidente avec polarisation rectiligne la direction $\vec{e}_0$



Le polariseur laisse passer la composante sur Ox et absorbe celle sur Oy

$$\vec{E}_{\text{incident}} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_0 = E_0 (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z)$$

$$\hookrightarrow \vec{E}_{\text{transmis}} = E_0 \cos \theta e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$$

si I_{in} est l'intensité incidente ($I = \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \underline{E} \underline{E}^*$)

alors I_{tr} l'intensité transmise = $I_{in} \cos^2 \theta$
(Loi de Malus)

⚡ θ est l'angle entre la direction du champ (polarisation rectiligne $\vec{e}_\theta$) et la direction passant du polariseur.

On retrouve trivialement :

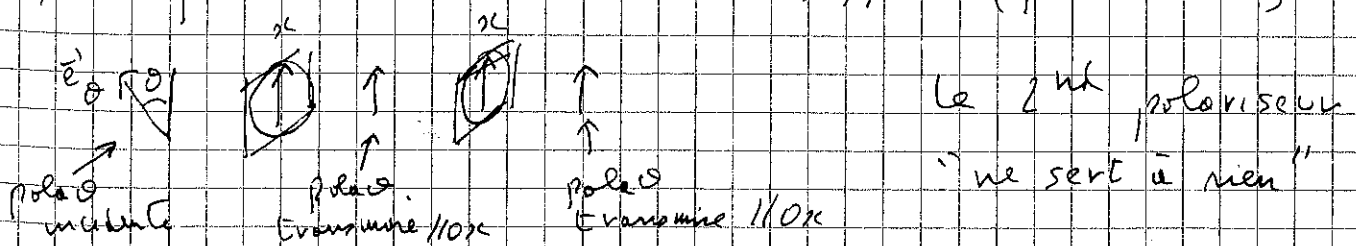
$$\begin{aligned} \text{si } \theta = 0 & \quad I_{tr} = I_{in} \\ \text{si } \theta = 45^\circ & \quad I_{tr} = \frac{1}{2} I_{in} \\ \text{si } \theta = 90^\circ & \quad I_{tr} = 0 \end{aligned}$$

NB Après passage à travers le polariseur de direction passant $\vec{e}_n$, la lumière est polarisée ds la direction $\vec{e}_n$ $\forall$ l'état de polarisation de la lumière incidente (rectiligne, circulaire et si elle n'était polarisée)

↳ Tout se passe comme si le polariseur jouait le rôle de projecteur sur la direction $\vec{e}_n$.

4) Polariseurs en série

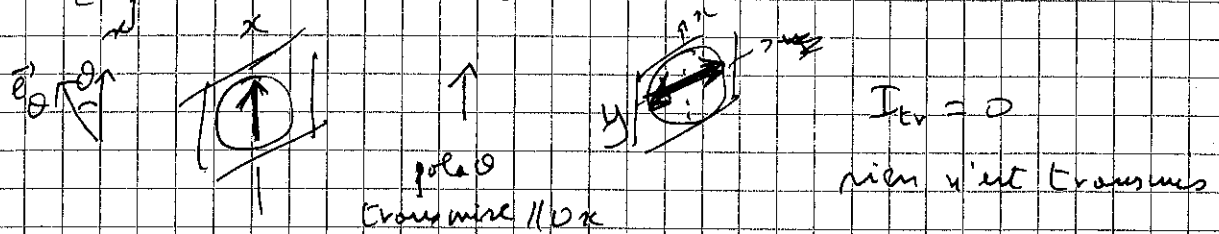
* 2 polariseurs en série // axes // (par ex Oz)



Le champ sortant du 1^{er} polariseur est polarisé selon Oz et est donc transmis intégralement par le 2nd.

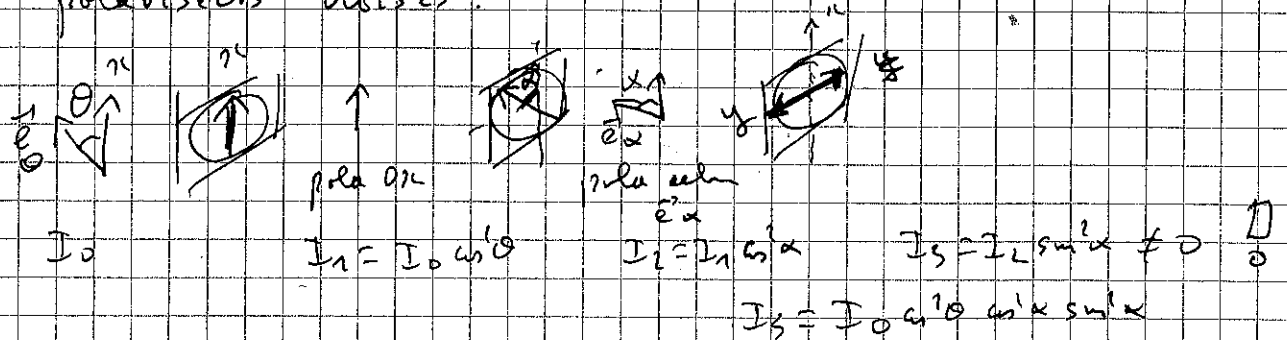
// Le 2nd effectue donc une mesure de polarisation dont on est certain du résultat (100% polarisé selon Oz)

* 2 polariseurs "croisés"



Rq : c'est encore un cas où on est certain du résultat
Final de mesure

* on rajoute un 3ème polariseur entre les 2 polariseurs croisés :



Curieux : on rajoute un 3ème élément partiel
absorbant entre les polariseurs croisés
et la lumière jaillit !!!

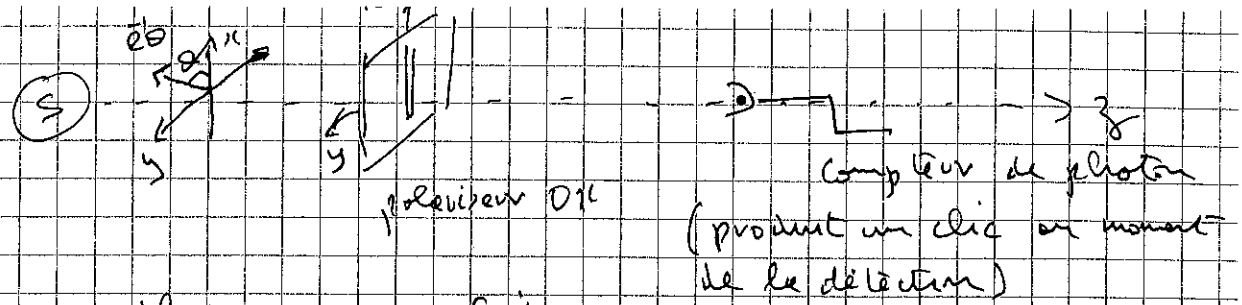
II Cas d'un photon unique, états de polarisation

(1er exemple de mesure quantique)

1) Mesure de polarisation sur un photon unique

On suppose qu'on dispose d'une source de photons uniques,
ie qui émet les photons un à un. (on fait idéal
diminuer l'intensité émise jusqu'à ce que les photons soient
émis individuellement)

Cette source est idéale et on peut contrôler la direction
d'émission (par ex oz) et la polarisation (linéaire)
(par ex la direction E_0)



NB : appareil de mesure parfait : 1 clic $\Leftrightarrow$ 1 photon

(pas de bruit etc...)

Manip : on envoie N photons 1 à 1 et on détecte N fois des clics $\rightarrow$ on retrouve la loi de Malus (et ce de façon d'autant plus précise que $N \nearrow$)

Du point de vue d'un photon unique (indépendant de tous les autres), cela se traduit par une proba $\cos^2 \theta$ d'être détecté par l'appareil final, i.e. d'avoir été transmis par le polariseur. (et donc proba $\sin^2 \theta$ d'avoir été arrêté)

* En fait, tous les résultats précédents ne dépendent pas de l'intensité lumineuse et on peut prendre la cas limite N grand (onde lumineuse) ou $N=1$ (photon unique).

* En particulier, on considère un ou plusieurs photons individuels incidents et 2 polariseurs en série :

$\rightarrow$ si 2 polariseurs alignés : alors tous les photons transmis par le 1^{er} passent le 2^{ème}.

(2 mesures successives identiques)

$\rightarrow$ si les 2 polariseurs sont croisés, aucun photon ne traverse le système.

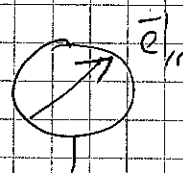
$\rightarrow$ de façon générale si le 2nd est à θ du 1^{er}, les photons transmis par le 1^{er} ont une proba $\cos^2 \theta$ de traverser le 2nd.

- $\rightarrow$ un polariseur est du point de vue du photon
 un appareil de mesure (quantique) de sa polarisation
 $\rightarrow$ la mesure "perturbe" en fait l'état du photon
 (ce qui change son état de polarisation)

2) Introduction à la notation de Dirac.

a) Polariseur = appareil de mesure de l'observable "polarisation du photon"

polariseur en fait : on peut noter $\vec{e}_{||}$ la direction de l'axe passant et $\vec{e}_{\perp}$ la direction (orthogonale) de l'axe bloquant



Soit $\vec{e}_p$ la direction de polarisation du photon, on a vu :

si $\vec{e}_p = \vec{e}_{||}$, Probab. de passer = 1

si $\vec{e}_p = \vec{e}_{\perp}$, $P = 0$

et de façon générale $P = |\vec{e}_p \cdot \vec{e}_{||}|^2$ (le "cos²" précédent)

On peut appeler $\vec{e}_{||}$ et $\vec{e}_{\perp}$ "vecteurs propres" du polariseur (ou + précisément, $\vec{e}_{||}$ le vecteur de la lumière, qu'on appelle comme "vecteurs propres de l'observable polarisation")

les deux $\vec{e}_{||}$ et $\vec{e}_{\perp}$ forment une base orthonormée des états de polarisation (l'ensemble des vecteurs $\{\vec{e}_p\}$ orthonormés en fait)

De façon générale on peut écrire : $\vec{e}_p = \alpha \vec{e}_{||} + \beta \vec{e}_{\perp}$
 avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Pour une polarisation rectiligne selon l'axe $\vec{e}_0$:

$$\vec{e}_p = \vec{e}_0 = \cos \theta \vec{e}_{||} + \sin \theta \vec{e}_{\perp}$$

Pour une polarisation circulaire droite :

$$\vec{e}_p = \frac{\vec{e}_{||} + i \vec{e}_{\perp}}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où l'impression de}$$

(α et $\beta \in \mathbb{C}$)

$$\vec{E}'_p = \alpha \vec{E}'_{||} + \beta \vec{E}'_{\perp} \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{C}$$

$$(\text{mais } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

→ polarisation elliptique.

b) Notation de Dirac

on va tout réécrire (donc non de nouveau !) avec la notation de Dirac, bien pratique en MQ.

Origine : produit scalaire $\langle f | g \rangle$

$|g\rangle \leftrightarrow$ vecteur "ket"

$\langle f| \leftrightarrow$ forme linéaire "bra" sur $\mathcal{E}$

($\langle f | g \rangle =$ bra ket !)

valeurs sont notées $|\dots\rangle$

↑
information pertinente

(par ex. valeurs quantiques pour états d'énergie quantifiés)

ici $\vec{E}'_{||} \rightarrow |E'_{||}\rangle$ ou + simplement $|1\rangle$

(ou $|P\rangle$ "p" pour "parallel")

$\vec{E}'_{\perp} \rightarrow |E'_{\perp}\rangle$ ou $|1\rangle$ (ou $|B\rangle$ "B" pour "broad")

→ $|1\rangle$ et $|1\rangle \rightarrow$ base de l'espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) des états

l'état ψ du photon noté $|\psi\rangle$ par ex. est alors (si on ne s'intéresse qu'à son état de polarisation,

$$|\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |1\rangle$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

NB : le vecteur d'état est, par convention, normé.

Cette représentation de l'état quantique d'un système

(ici particule unique = photon + aspect particulier de son état (le sa polarisation) peut être (et va être) étendu
à des systèmes + complexes, impliquant des EV de
 $\dim > 2$, voire ∞^2 , et entourant les comportements
des états sur des bases ∞^2 , voire continues.

→ généralisation de l'EV transitionnel et de la
notion de base orthonormale

→ espace de Hilbert et bases hilbertiennes.

Rq: la formalisme tel qu'il se décline inclut naturellement
le $\mathbb{R}^2$ de superposition (implémenté parce que
espace des états $\rightarrow$ EV). Si $|\psi\rangle$ est un état
possible et $|\varphi\rangle$ en est un autre alors

$\lambda |\psi\rangle + \mu |\varphi\rangle$ est aussi un état possible.
($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$)

(1) retour au la mesure de polarisation du photon.

(Éventuellement à la Dirac)

- On suppose notre petit photon polarisé linéairement ds la
direction θ

- on dispose d'un polariseur d'axes passant et bloquant
 $\vec{e}_{||}$ et $\vec{e}_{\perp}$, i.e. de $\vec{v}_p$ $|11\rangle$ et $|1\perp\rangle$ qui forment une
base des états de polarisation

le photon est dans l'état de polarisation $|\psi\rangle$ qui
peut se décomposer sur la base $\{|11\rangle, |1\perp\rangle\}$:

$$|\psi\rangle = \cos\theta |11\rangle + \sin\theta |1\perp\rangle$$

on a vu que la proba de passer $P = \cos^2\theta$

et être bloqué $P' = \sin^2\theta$

or $\cos \theta = \text{composante de } |4\rangle \text{ sur } |1\rangle$ (on projette)
 ie $= \text{produit scalaire } \langle 4 | 1 \rangle$
 $\rightarrow \cos \theta = \langle \cancel{4} | \cancel{1} \rangle \overset{\text{"hermitien"}}{=} \langle 1 | 4 \rangle$ car on prend le
 de $\sin \theta = \langle \cancel{4} | \cancel{2} \rangle = \langle 1 | 4 \rangle$

Rappel sur le produit scalaire hermitien (à 2D)

$$\text{si } |4\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ et } |1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } \langle 4 | 1 \rangle = \alpha^* x + \beta^* y$$

en ce sens on peut ainsi écrire le bras $\langle 4 |$

$$\text{comme } \langle 4 | = \alpha^* \langle 1 | + \beta^* \langle 2 |$$

(et on retrouve bien $\langle 4 | 1 \rangle = \alpha^* x + \beta^* y$)

$$\text{et en particulier } \langle 4 | 4 \rangle = \alpha^* \alpha + \beta^* \beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

on remarque donc que -

$$P_{\text{passe}} = \cos^2 \theta = |\langle 1 | 4 \rangle|^2$$

ie le module au carré de la projection de l'état du photon sur l'état propre passant du polariseur.

C'est un 1^{er} exemple de la règle de Born des probabilités d'obtenir tel ou tel résultat lors d'une mesure quantique

3) Bilan

* les états quantiques $\rightarrow$ vecteurs normés d'un EV sur $\mathbb{C}$

* $\exists$ $\mathcal{V}_p$ associés à des appareils de mesure (donc à des quantités f mesurables = "observables" en MA)

* De $\mathcal{V}_p$ on peut introduire des V_p aux résultats des mesures. Par ex: $V_p 1$ (passe) $\rightarrow |1\rangle$

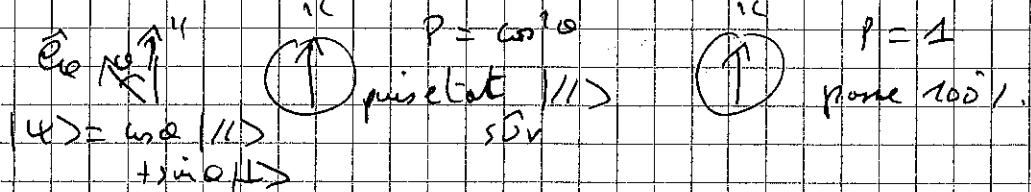
(10) $V_p 0$ (s'arrête) $\rightarrow |2\rangle$

* un état quantique quelconque peut s'écrire comme superposition de $\cos \vec{v}_p$ ou de $\sin \vec{v}_p$ c. à d. lui les vecteurs d'une base q .

* lors d'une mesure, le système se comporte de manière probabiliste. $P_{\text{mesure}} = \cos^2 \theta$

~~l'état~~ Pas certain du résultat sauf cas particuliers (après une première mesure)

* l'état du système après la mesure est l'un des $\vec{v}_p$ associés à l'observable mesurée.



Rp : mécanique quantique (probabilité de trouver telle ou telle valeur lors d'une mesure) est intrinsèque

≠ mécanique classique (introduit une connaissance incomplète du système)

↳ thermodynamique, stat, hydrodynamique
biologie - - -

LA MESURE en MR

① Mesure classique vs mesure quantique

Mesure en ψ classique $\rightarrow$ automatisme à oublier !

Notion de mesure est en fait bcp + subtile qu'il n'y paraît, en particulier à cause de nos habitudes du monde classique.

Question: lors de la mesure d'une propriété / d'un paramètre d'un certain système ψ , ce système possédait-il cette propriété ou le valeur de ce paramètre ~~ou~~ au préalable de la mesure ou l'a-t-il acquis lors de la mesure ?

Question en fait philosophique sur la nature des objets ψ . Les objets et leurs propriétés existent-ils indépendamment de l'observateur ?

La ψ classique ne pose "vrai" à ce genre de question.

Elle suppose d'at que l'état d'un système en mécanique newtonienne peut être complètement déterminé par l'ensemble des positions, vitesses et potentiels d'interaction de ses ~~ses~~ parties élémentaires.

Cette connaissance en mécanique classique n'est en outre limitée que par la précision des instruments de mesure. "Il n'y a qu'à améliorer continuellement ces derniers pour obtenir une détermination de + en + précise (prévisible) de l'état du système."

En pratique, complexité des systèmes limite cette précision $\rightarrow$ description statistique (ex: therm., hydrodynamique, ψ stat. obs., biologie...)

$\hookrightarrow$ fluctuations (classiques) autour de valeurs moyennes

Les valeurs moyennes étant établies en répétant un ~~gros~~ grand nombre de fois les mesures.

Cet aléatoire classique n'est donc pas intrinsèque car découle de notre connaissance incomplète du système, de notre manque d'information.

En fin, en ~~me~~ ^{la} classique, les objets ont un statut bien défini : une onde est une onde et une masse ponctuelle est et restera une masse ponctuelle, & la mesure ou l'exp^é effectuée.

Comme vu ds le chap précédent, le monde microscopique met en défaut l'essentiel de ces aspects !

- des systèmes préparés ds le m^êm état et passant ds le m^êm appareil de mesure ne donnent pas les m^êm résultats de mesure.
- le côté aléatoire de ces résultats est le m^êm & la précision de cet appareil de mesure.
- certains systèmes présentent un double comportement, par fois ondulatoire, par fois corpusculaire, selon l'exp^é en jeu (interférences lumineuses / effet photoé).
- en core + fort, des expériences par ex sur l'intrication quantique (cf + tard) montrent qu'un système ϕ peut ne pas avoir de propriété p bien déterminée avant ~~une~~ d'avoir effectué une mesure. C'est donc la mesure qui lui donnerait cette propriété?

↳ modification profonde / approche classique
habituelle :
 { ϕ état
 ϕ évolution
 ϕ notion de mesure.

I Espace des états

1) Vecteur d'état et espace de Hilbert.

- L'état ψ d'un système est représenté par un vecteur $|\psi\rangle$ (normé) d'un "certain espace vectoriel" muni d'un produit scalaire hermitien
- Selon le pb posé, cet espace peut être de dimension q (voire ∞ , voire ∞ continu)
- Espace de Hilbert = généralisation de la notion d'ev

$\hookrightarrow$ on autorise les décompositions ∞^{ies} !

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i\rangle$$

voire ∞^{e} continues :

$$|\psi\rangle = \int \phi(x) |x\rangle dx$$

Ex Même si la dimension est ∞ (cf par ex spectres d'énergies des atomes, atome H $E_n = -\frac{E_I}{n^2}$ $n=1, \dots, \infty$), on peut parfois (souvent ?) se restreindre à 2 ~~ou 3~~ états de base. Par ex, pour un système donné (1 atome ?) on considèrera que l'état fondamental est associé à l'énergie la + basse E_0 et le 1^{er} état excité à l'énergie associée E_1 , si le spectre contient une ∞^{e} d'énergies possibles E_n , $n \in \mathbb{N}$. $\rightarrow$ système à 2 niveaux (très important en MQ !)

(ex de syst à 2 niveaux (ou plutôt 2 états))

- e⁻ supplémentaire de l'ion H_2^+
 - oscillations de la position de N / p^{com} des 3 H de la molécule de NH_3 .
- etc...

Espace de Hilbert de dimension N (éventuellement $N \rightarrow \infty$)

$$\exists \text{ B.O.N } \{ |\varphi_i\rangle \}_{i=1, \dots, N}$$

Le vecteur $|\psi\rangle$ représente l'état du système
peut s'écrire $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |\varphi_i\rangle \quad (*)$

avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$

$$|\psi\rangle \text{ est en gal normé : } \langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2 \\ = \sum |\alpha_i|^2 = 1$$

Notons que l'écriture duale de $(*)$ est :

$$\langle \psi | = \sum \alpha_i^* \langle \varphi_i |$$

VB si $|\psi\rangle$ est un vecteur, $\langle \psi |$ est une forme linéaire
sur $\mathbb{C}$.
(car $\forall |\varphi\rangle, \langle \psi | \varphi \rangle \in \mathbb{C}$)
 $\uparrow \quad \uparrow$
bra ket

2) Représentation matricielle.

$|\psi\rangle \rightarrow$ vecteur colonne $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$ de la B.O.N $\{|\varphi_i\rangle\}$

$\langle \psi | \rightarrow$ vecteur ligne $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*)$

$$\text{on retrouve } \langle \psi | \psi \rangle = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_N|^2$$

Question : et $|\psi\rangle \langle \psi |$ alors ?

Réponse : $|\psi\rangle \langle \psi |$ est une matrice carrée de rang N .

(cf + tabl. : $|\psi\rangle \langle \psi | =$ projecteur sur la direction $|\psi\rangle$)

$$\text{ex } N=2 : |\psi\rangle \langle \psi | = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (\alpha_1^*, \alpha_2^*) \\ = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \alpha_1 \alpha_2^* \\ \alpha_2 \alpha_1^* & |\alpha_2|^2 \end{pmatrix}$$

Rq : c'est une matrice "hermitienne"

3) Interprétation standard de la MQ

$|\psi\rangle$ contient tte l'info sur le système
(pas de "variables cachées" !)

II Opérateurs et observables dans $\mathcal{E}$

on a évoqué les $\vec{v}_p$ de l'exemple de la mesure de la polarisation du photon, $\vec{v}_p$ (et v_p) de quoi on parle ? $\rightarrow$ on va préciser cela.

1) Notion d'observable

$|\psi\rangle \rightarrow$ tte l'info - Comment extraire cette info? $\rightarrow$ Mesure!
La théorie de la mesure en MQ repose sur la notion d'observable d'opérateurs agissant sur $|\psi\rangle$ de $\mathcal{E}$, opérateurs associés à des "observables". On appelle observable les g de $\mathcal{F}$ que l'on peut mesurer. $\exists$ de nombreuses observables, certaines reliées à des grandeurs classiques : énergie, position, q^e de mot (ou impulsion), moment cinétique ... et d'autres purement quantiques : spin, couleur, étrangeté ...

Le résultat de la mesure d'une observable est v_p réel
 $\rightarrow$ l'opérateur associé devra avoir des v_p réelles. Ce qu'on a vu aussi avec l'ex de la mesure de la polarisation du photon : les $\vec{v}_p$ associés doivent être $\perp$ entre eux et former une base (BON).

$\exists$ certaine classe d'opérateurs de $\mathcal{E}$ qui vérifient les critères fondamentaux :

les opérateurs hermitiens (ou hermitique ou auto-adjoints) et la ψ quantique postule alors naturellement:

[A chaque grandeur ψ mesurable A , on associe un opérateur hermitien $\hat{A}$ agissant ds l'espace (linéaire) des états $\mathcal{E}$.]

2) Opérateurs hermitiens (matrices hermitiennes): rappels.

a) Defⁿ

$\hat{A}$ herm. $\Leftrightarrow \hat{A}^\dagger = \hat{A}$ (d'où le nom auto-adjoint)

~~Defⁿ adjoint:~~ $\hat{A}|\psi\rangle \rightarrow |\varphi\rangle$

avec defⁿ adjoint $\hat{A}^\dagger$: $\hat{A}^\dagger$ est défini par

$$\forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{E} \quad \langle \varphi | \hat{A}^\dagger | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle^*$$

b) représentation matricielle: ($\mathcal{E}$ dim finie N)

BON $\{ |1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle \}$

$\hat{A}$ est représenté par la matrice (A_{ij}) ds le BON $\{|i\rangle\}$

$$A_{ij} = \langle i | \hat{A} | j \rangle$$

$$\text{defⁿ } \hat{A}^\dagger \Rightarrow A_{ij}^\dagger = \langle i | \hat{A}^\dagger | j \rangle = \langle j | \hat{A} | i \rangle^* = A_{ji}^*$$

$$\forall i, j \quad A_{ij}^\dagger = A_{ji}^*$$

$\hookrightarrow (A_{ij}^\dagger)$ est la "trans conjuguée" de (A_{ij})

ex $N=2$ si $(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $(A^\dagger) = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

Conséquence: si A est une observable: $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$

$$\Rightarrow \forall i, j \quad A_{ij} = A_{ji}^*$$

matrice "hermitienne"

en particulier $\forall i \quad A_{ii} = A_{ii}^* \rightarrow$ la diagonale est réelle. ($\rightarrow \forall p \in \mathbb{R}$)

17

ex $N=2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ observable : a et $d \in \mathbb{R}$
et $b = c^*$

$$\hookrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix} \quad a, d \in \mathbb{R}$$

c) Propriétés fondamentales

- $\forall p \in \mathbb{R}$ (comme suggéré par la diagonale $\mathbb{R}$)

Demo : soit a vp de A associé au $\vec{v}_p / \psi_a$

$$A |\psi_a\rangle = a |\psi_a\rangle$$

$$\text{alors } \langle \psi_a | A | \psi_a \rangle = a \quad (|\psi_a\rangle \text{ normé})$$

$$\text{or } \langle \psi_a | A^\dagger | \psi_a \rangle = (\langle \psi_a | A | \psi_a \rangle)^*$$

$$\text{soit } \langle \psi_a | A | \psi_a \rangle = a^*$$

$$a = a^* \Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

- 2 vp associés à 2 vp $\neq 0$ sont $\perp$

Demo : $A |\psi_a\rangle = a |\psi_a\rangle$

$$A |\psi_b\rangle = b |\psi_b\rangle \quad a \neq b$$

$$\text{on a donc } \langle \psi_b | A | \psi_a \rangle = a \langle \psi_b | \psi_a \rangle$$

$$\text{mais } \langle \psi_b | A | \psi_a \rangle \text{ c'est aussi } (\langle \psi_a | A^\dagger | \psi_b \rangle)^*$$

$$\begin{aligned} \text{i.e.} &= (\langle \psi_a | A | \psi_b \rangle)^* \\ &= b^* \langle \psi_a | \psi_b \rangle^* \\ &= b \langle \psi_b | \psi_a \rangle \end{aligned}$$

$$\text{d'où } a \langle \psi_b | \psi_a \rangle = b \langle \psi_b | \psi_a \rangle$$

$$\text{avec } a \neq b \rightarrow \langle \psi_b | \psi_a \rangle = 0$$

3) Opérateurs particuliers : projecteur $\perp$

a) Rappel

$$|\psi\rangle \in \mathcal{E}$$

$P_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle \langle \psi|$ est le projecteur orthogonal sur la direction $|\psi\rangle$

$$\forall |\psi\rangle : P_{|\psi\rangle} |\psi\rangle = |\psi\rangle \langle \psi | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | \psi \rangle |\psi\rangle = 1 |\psi\rangle$$

c'est bien un projecteur sur $|\psi\rangle$
et $\perp$ à $|\psi\rangle$.

b) relation de fermeture

$\{|i\rangle\}$ base de E

$$\forall |\psi\rangle \in E : |\psi\rangle = \sum \alpha_i |i\rangle$$

$$\text{avec } \alpha_i = \langle i | \psi \rangle$$

$$\text{d'où } |\psi\rangle = \sum \langle i | \psi \rangle |i\rangle$$

$$\text{qu'on réécrit } |\psi\rangle = \sum |i\rangle \langle i | \psi \rangle$$

$$= \left(\sum |i\rangle \langle i| \right) |\psi\rangle$$

$\sum$ des projecteurs $\perp$ sur les $|i\rangle$

$$|\psi\rangle = \left(\sum |i\rangle \langle i| \right) |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \left(\sum |i\rangle \langle i| = Id \right) \quad (\text{opérateur unitaire})$$

"Relation de fermeture"

Exprime simplement le fait que $\{|i\rangle\}$
est une base de E

~~à valeur unique~~

III les postulats de la MQ

espace de Hilbert E

état du système $\rightarrow |\psi\rangle$

observable $A \rightarrow$ op. herm. $\hat{A}$ $\forall p \in \{a\}$.

ND : 5 les vecteurs sont supposés normés.

1) Lors d'une mesure de $\hat{A}$, le résultat obtenu est l'une des vp de $\hat{A}$

Rq: c'est indépendant de l'état $|\psi\rangle$ du système!

2) Règle de Born: la probabilité d'obtenir le résultat la vp a est $P(a) = |\langle a | \psi \rangle|^2$
où $|a\rangle$ est la vp associée à la vp a
(cas vp a non dégénérée)

Si vp a est dégénérée (SEP de dim g_a)

$\downarrow$
 $|a, i\rangle, i = 1, \dots, g_a$ $\overline{V_a}$

engendrant le SEP associé à a

$$\text{alors } P(a) = \sum_{i=1}^{g_a} |\langle a, i | \psi \rangle|^2$$

Avec des mots: $P(a)$ = module au carré de la projection de $|\psi\rangle$ sur le SEP associé à la vp a .

Rq: du coup les probas dépendent de l'état $|\psi\rangle$.

Ceci est le postulat pour un spectre discret. Si $\hat{A}$ a un spectre continu, la généralisation est:

la proba pour que le résultat $\in [a, a+da]$,

$$dP(a) = \sum_{i=1}^{g_a} |\langle a, i | \psi \rangle|^2 da$$

(= $|\langle a | \psi \rangle|^2$ du cas non dégénéré)

Rq: ça ressemble à la densité de proba de présence

$$dP(a) = |\psi(a)|^2 da \quad (= |\langle a | \psi \rangle|^2 da \quad ?)$$

3) Etat après la mesure

("pp^e de réduction de la fonction d'onde" ou "pp^e de projection")

état après la mesure $|\psi'\rangle =$ projection
de l'état initial $|\psi\rangle$ sur le SEP associé à la VP a
effectivement mesurée.

Si a non dégénérée : $|\psi'\rangle = |a\rangle$ (facile donc !)

si a dégénérée : $|\psi'\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{d_a} |a,i\rangle \langle a,i|\psi\rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^{d_a} |\langle a,i|\psi\rangle|^2}}$ ← pour renormaliser

si continue : $|\psi'\rangle = \frac{\int_{a-\Delta a}^{a+\Delta a} \langle a'|\psi\rangle |a'\rangle da'}{\sqrt{\int |\langle a'|\psi\rangle|^2 da'}}$

ici $\Delta a =$ précision de l'appareil de mesure
(ex : largeur de la fente de diffraction)

h) Intermède : valeur moyenne d'une observable.

$|\psi\rangle$ état donné $\rightarrow$ valeur moyenne au sens d'un
grand nombre de mesures identiques de l'observable A ,
l'état étant toujours $|\psi\rangle$.

Par défⁿ $\langle A \rangle = \sum a_n P(a_n)$

Pour simplifier, on suppose spectre discret non dég.

$\forall p, a_n \Leftrightarrow \forall p, |a_n\rangle$

$$P(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \langle A \rangle &= \sum a_n |\langle a_n|\psi\rangle|^2 \\ &= \sum a_n \langle a_n|\psi\rangle \langle \psi|a_n\rangle \\ &= \sum a_n \langle \psi|a_n\rangle \langle a_n|\psi\rangle \end{aligned}$$

mais $A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \langle A \rangle &= \sum \langle \psi|A|a_n\rangle \langle a_n|\psi\rangle \\ &= \langle \psi| \sum A|a_n\rangle \langle a_n|\psi\rangle \\ &= \langle \psi|A \left(\sum |a_n\rangle \langle a_n| \right) \psi\rangle \\ &= \langle \psi|A|\psi\rangle \end{aligned}$$

(relⁿ de fermeture)

$$\Rightarrow \boxed{\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle}$$

5) Postulat d'évolution

(on EV?)

l'évolution d'un système quantique repose sur un opérateur particulier, l'hamiltonien $\hat{H}$ ($\Leftrightarrow$ observable énergie)

Postulat d'évolⁿ - (eqⁿ de Schrödinger) :

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi\rangle \quad (1)$$

$$\begin{array}{c} |\Psi\rangle \\ \downarrow \\ |\Psi(t)\rangle \end{array}$$

(Sch. guidé par les w^{aux} de Hamilton, eqⁿ de Sch proche de l'eqⁿ d'Hamilton-Jacobi $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$ en M. classique)

NB: eqⁿ diff du 1^{er} ordre $\Rightarrow$ la donnée de $|\Psi(t=0)\rangle$ permet de calculer $|\Psi(t)\rangle \forall t$.

NB: obv $\hat{H}$ dépend du système considéré

ex: syst à 2 niveaux, de la base les $\vec{v}_p$ de $\hat{H}$:

$$\hat{H} \rightarrow (H) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

ex: particule mass m sur axe Ox soumise à pot. $V(x)$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(\hat{x}, t)$$

Ry: (1) $\rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(\vec{r}) \Psi$ dans une certaine représentation (cf + (evl) avec $\Psi(\vec{r}, t)$ f.o.

* si H ne dépend pas du temps (typ. le cas en LS)

(1) peut se résoudre formellement:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \hat{H}} |\Psi(t_0)\rangle$$

↑
opérateur d'évolution (op. unitaire) / 22

Au passage on admet qu'on peut dériver l'exponentielle d'un opérateur par ex. via un développ^t en série entière:

$$e^{\hat{A}} = I + \hat{A} + \frac{1}{2} \hat{A}^2 + \dots$$

* Rôle des VP de $\hat{H}$: (on suppose typ que $\hat{H}$ ne dépend pas du temps)

Pour simplifier: on suppose spectre discret non dégénéré

$$V_P \in E_n \iff V_P | \Psi_n \rangle$$

$$\hat{H} | \Psi_n \rangle = E_n | \Psi_n \rangle$$

$\{ | \Psi_n \rangle \}_{n \in \mathbb{N}}$ = BON de l'espace des états $\mathcal{E}$

on a $\hookrightarrow \forall | \Psi \rangle \in \mathcal{E}: | \Psi(t) \rangle = \sum \alpha_n(t) | \Psi_n \rangle$

et (1) $\rightarrow i\hbar \frac{\partial | \Psi(t) \rangle}{\partial t} = \hat{H} | \Psi(t) \rangle$

soit $i\hbar \sum \dot{\alpha}_n | \Psi_n \rangle = \sum \alpha_n E_n | \Psi_n \rangle$

d'où, $\forall n, i\hbar \dot{\alpha}_n = \alpha_n E_n$

$\hookrightarrow \alpha_n(t) = \alpha_n(0) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}}$

on a déduit la décomp de $| \Psi(t) \rangle$ en le BON $\{ | \Psi_n \rangle \}$

$\forall t$, à partir de sa décomp à $t=0$:

$$| \Psi(t) \rangle = \sum \alpha_n(0) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} | \Psi_n \rangle$$

Ces particulari si $| \Psi \rangle$ est un état propre de $\hat{H}$

par ex $| \Psi(0) \rangle = | \Psi_n \rangle$

alors $| \Psi(t) \rangle = e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} | \Psi(0) \rangle$
 $= e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} | \Psi_n \rangle$

$\in$ terme de phase global est insignifiant: $| \Psi(t) \rangle \equiv | \Psi_n \rangle$ (2)

$\Rightarrow$ les $\vec{v}_p$ de $\hat{H}$ "n'évoluent pas" en cours du tps.

$\hookrightarrow$ on parle "d'états stationnaires"

NB : état stationnaire = synonyme de $\vec{v}_p$ de $\hat{H}$.

les états stationnaires obéissent donc à l'eqⁿ aux v_p pour $\hat{H}$. $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

qui donne l'eqⁿ de Sch. stationnaire en "représentation u" : $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V(u)\psi = E\psi$

où $\psi(u)$ est l'onde stat. (1D)

Bien retenir : si à $t=0$ $|\psi\rangle$ est un état propre de l'énergie, il le restera tt le temps (à moins qu'on fasse une mesure - autre qu'une mesure d'énergie - sur le système.)

Bien noter également qu'en fait en MQ il y a DEUX pps d'évolution

$\rightarrow$ évolution aléatoire et instantanée (et qui perturbe l'état du système) lors d'une mesure

$\rightarrow$ évolution continue et déterministe (eque diff 1^{re} ordre) entre 2 mesures