

---

## Chapitre 3

# Composition de moments cinétiques ~~structure fine de l'atome~~

*Introduction*

*Addition de moments cinétiques*

*Définitions et choix d' E.C.O.C.*

~~*Applications à la spectroscopie*~~

~~*Structure fine des atomes monovalents - Interaction "spin-orbite"*~~ On verra ces applications avec

~~*Structure hyperfine de l'atome d'hydrogène - Interaction "spin-spin"*~~ la théorie des perturbations

### 3.1 Introduction

En mécanique quantique, il existe de nombreux systèmes physiques où plusieurs moments cinétiques peuvent être impliqués en même temps. Il arrive que ces moments cinétiques contribuent au Hamiltonien par leur produit scalaire, e.g,  $\hat{L} \cdot \hat{S}$ , où  $\hat{L}$  et  $\hat{S}$  sont les moments cinétiques orbital et de spin d'une particule.

► Avec des spectromètres de plus en plus précis, on observe que les raies  $1s, 2s, 3s, \dots$ , des atomes monovalents sont dédoublées avec un même élargissement d'énergie  $\Delta E$ . Ce dédoublement, qui est également observé pour des orbitales  $np$ , est présent même si aucun champ magnétique extérieur n'est appliqué.

► Nous allons voir que ces dédoublements sont dûs à la prise en compte du spin des électrons et de leurs interactions magnétiques dans l'atome. On doit donc considérer les interactions de couplage entre moments cinétiques et apprendre à "composer" des moments cinétiques afin de pouvoir former un ensemble complet d'observables commutantes (E.C.O.C.) optimal et donc de construire une base de vecteurs propres idéale pour l'étude de ces problèmes. Par exemple, la structure fine des atomes qui est due à l'interaction "spin-orbite", peut être décrite par un terme de couplage proportionnel à  $\hat{L} \cdot \hat{S}$ , et en l'absence de champ magnétique extérieur, les quantités conservées (constantes du mouvement) sont  $\langle \hat{J}^2 \rangle$  et  $\langle \hat{J}_z \rangle$  où  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ .

► Le but de ce chapitre est tout d'abord d'acquérir une méthode qui permet d'"additionner" (composer) deux moments cinétiques génériques, c'est à dire quelconque. Comme application,

---

nous allons considérer le couplage d'un moment cinétique orbital avec un spin (couplage spin-orbite) responsable de la structure fine des atomes, ainsi que le couplage spin-spin responsable de la structure hyper-fine des atomes.

► Dans le cas général où on a plus de deux moments cinétiques, le moment cinétique total est obtenu par la l'addition de deux moments cinétiques, puis par l'addition des suivants, l'un après l'autre. C'est pour cela que la section qui suit traite le cas général de la composition de deux moments cinétiques.

### 3.2 Addition de deux moments cinétiques

Soient deux moments cinétiques  $\widehat{\mathcal{J}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{J}}_2$  agissant dans des espaces de Hilbert différents  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , ce qui se traduit par  $[\widehat{\mathcal{J}}_1, \widehat{\mathcal{J}}_2] = 0$ . Ces moments cinétiques peuvent représenter, par exemple, les moments cinétiques de spin d'un système de deux électrons,  $\widehat{\mathcal{S}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{S}}_2$ , ou des moments cinétiques orbitaux  $\widehat{\mathcal{L}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{L}}_2$  d'un système de deux particules en mouvement par rapport à un point fixe. On appellera l'espace de Hilbert du système global  $\varepsilon_H = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$ .

#### 3.2.1 Définition

L'observable moment cinétique total d'un système régi par deux moments cinétiques  $\widehat{\mathcal{J}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{J}}_2$  tels que  $[\widehat{\mathcal{J}}_1, \widehat{\mathcal{J}}_2] = \vec{0}$  est

$$\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}_1 + \widehat{\mathcal{J}}_2 \equiv \widehat{\mathcal{J}}_1 \otimes \mathbb{1}_{(2)} + \mathbb{1}_{(1)} \otimes \widehat{\mathcal{J}}_2, \quad (3.1)$$

où  $\mathbb{1}_{(1,2)}$  représente l'opérateur identité de l'espace  $\varepsilon_{1,2}$ .

► Comme  $\widehat{\mathcal{J}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{J}}_2$  sont des observables moment cinétique, alors  $\widehat{\mathcal{J}}$  est aussi une observable moment cinétique. En effet, on peut facilement vérifier les deux conditions suivantes (que doit vérifier tout moment cinétique) :

- l'hermiticité :  $\widehat{\mathcal{J}}^\dagger = \widehat{\mathcal{J}}$

- les règles de commutation : (la démonstration est évidente puisque  $\widehat{\mathcal{J}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{J}}_2$  commutent et que chacune des observables  $\widehat{\mathcal{J}}_1$  et  $\widehat{\mathcal{J}}_2$  vérifie l'algèbre des moments cinétiques),

$$[\widehat{\mathcal{J}}_i, \widehat{\mathcal{J}}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \widehat{\mathcal{J}}_k, \quad (3.2)$$

que l'on écrit parfois comme suit :

$$\widehat{\mathcal{J}} \wedge \widehat{\mathcal{J}} = i\hbar \widehat{\mathcal{J}}. \quad (3.3)$$

► La dimension de l'espace de Hilbert  $\varepsilon_H \equiv \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$  est le produit des dimensions de  $\varepsilon_{1,2}$  :  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

3.2.2 Quel choix d'E.C.O.C.?

Afin de pouvoir traiter un problème qui fait appel (dans le même Hamiltonien) à deux observables moments cinétiques distinctes, on a besoin de choisir une “représentation” ou base de l'espace de Hilbert dont les vecteurs de base contiennent toutes les informations pouvant caractériser l'état quantique du système. Il faut donc construire un ensemble d'observables qui commutent (E.C.O.C.).

a) Le premier choix (naturel) est de considérer l'ensemble

$$\{\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2\}, \tag{3.4}$$

on peut aisément vérifier que l'ensemble de l'Eq. (3.4) forme bien un ensemble complet d'observables qui commutent. La base orthonormée de vecteurs propres communs à toutes les observables, qu'on appellera **base couplée**, est formée des vecteurs :

$$\{|j_1, j_2, j, m\rangle\} \quad (\text{en notation abrégée } \{|j, m\rangle\}), \tag{3.5}$$

de sorte que

$$\begin{cases} \hat{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ \hat{J}_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \\ \hat{J}_{1,2}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j_{1,2}(j_{1,2}+1) |j, m\rangle \end{cases} . \tag{3.6}$$

**Remarque :** la notation  $|j_1, j_2, j, m\rangle$  est elle-même déjà abrégée. En effet, d'autres nombres quantiques devraient figurer mais on les omet pour ne pas alourdir l'écriture et surtout parce qu'on ne s'intéresse ici qu'aux états de moments cinétiques.

b) Un autre E.C.O.C., tout aussi naturel, correspondant aux degrés de liberté  $j_1, m_1$  et  $j_2, m_2$  et décrivant l'état des deux moments cinétiques  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$ , respectivement, est l'ensemble

$$\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}\}. \tag{3.7}$$

La base orthonormée de vecteurs propres communs à toutes les observables de cet ensemble, qu'on appellera **base découplée**, est

$$\{|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle\} \equiv \{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\} \quad (\text{en notation abrégée : } \{|m_1; m_2\rangle\}). \tag{3.8}$$

► On peut rapidement vérifier que dans cette base, les opérateurs  $\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}$  sont des matrices diagonales.

c) Changement de base : **coefficients de Clebsch-Gordan**<sup>1</sup>

Comment comparer des mesures faites sur des états développés dans sur la base couplée et les mêmes mesures effectuées sur les états décrits à l'aide de la base découplée ?

1. R. Clebsch, mathématicien, 1833-1872. Il collabora avec Gordan - mathématicien (1837- 1912) - sur la théorie de la représentation des groupes orthogonaux qui a conduit à la définition des coefficients de Clebsch-Gordan, qu'on utilise en mécanique quantique.

Pour pouvoir le faire, il faudrait connaître **le lien entre les deux bases** (changement de base), définies dans les Eqs. (3.5) et (3.8) :

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle. \quad (3.9)$$

En d'autres termes, il faudrait connaître les éléments de la matrice de passage,

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} = \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j, m\rangle \quad (3.10)$$

appelés les **coefficients de "Clebsch-Gordan"**.

### 3.2.3 Quelles sont les valeurs de $j$ connaissant celles de $j_1$ et de $j_2$ ?

L'objectif de cette section est de montrer que la valeur propre  $\hbar^2 j(j+1)$  associée à l'état  $|jm\rangle$  de  $\hat{J}^2$  est telle que  $j$  ne prend que les valeurs possibles suivantes :

**A connaître absolument**  $\longrightarrow j \in \{|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, |j_1 - j_2| + 2, \dots, j_1 + j_2\}.$  (3.11)

Pour cela, nous allons considérer tous les cas possibles pour  $m$ . Comme  $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$ , les valeurs possibles de  $m = m_1 + m_2$  sont nombreuses étant donné que  $m_1 \in [-j_1, +j_1]$  et que  $m_2 \in [-j_2, +j_2]$ . Nous considérons d'abord l'une des valeurs extrêmes de  $m$  qui est  $j_1 + j_2$  (pour les valeurs maximales de  $m_1$  et  $m_2$ ) ou bien  $-j_1 - j_2$  (pour les valeurs minimales de  $m_1$  et  $m_2$ ). Prenons par exemple la valeur  $m = j_1 + j_2$ . Puisque  $m \in [-j, +j]$ ,  $j = j_1 + j_2$  est une des valeurs possibles de  $j$ , en réalité sa valeur maximale. C'est précisément par cette valeur que nous débutons le raisonnement.

#### ■ Cas $j = j_1 + j_2$ Un des cas faciles à calculer

1) On commence donc par considérer l'état extrême de la base **couplée** de l'Eq. (3.5) ; tel que  $m = j_1 + j_2$ . Cet état  $|j_1, j_2, j, j_1 + j_2\rangle$  est **unique** car

$$m_{\max} = m_{1\max} + m_{2\max} = j_1 + j_2, \\ \hat{J}_z |j_1, j_2, j, j_1 + j_2\rangle \equiv \hat{J}_z |j, j_1 + j_2\rangle = \hbar(j_1 + j_2) |j, j_1 + j_2\rangle. \quad (3.12)$$

Si  $\hbar(j_1 + j_2)$  est la valeur propre maximale de  $\hat{J}_z$ , et puisque  $m \in \{-j, -j + 1, \dots, +j\}$ , alors la valeur maximale de  $\hat{J}^2$  est  $\hbar^2 j_{\max}(j_{\max} + 1)$  :

$$\hat{J}^2 |j_1, j_2, j, j_1 + j_2\rangle \equiv \hat{J}^2 |j, j_1 + j_2\rangle = \hbar^2 j_{\max}(j_{\max} + 1) |j, j_1 + j_2\rangle, \quad j = j_{\max} = j_1 + j_2. \quad (3.13)$$

Rappelons que cette propriété ne dépend que des règles de commutation des moments cinétiques, elle est donc valable pour  $\hat{J}$ , tout comme elle l'est pour  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$ .

► Comme le vecteur propre de  $\hat{J}_z$  associé à  $m = j_1 + j_2$  est unique, ce vecteur est donné (après normalisation) par :

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle (\equiv |j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle) = |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle (\equiv |j_1; j_2\rangle); \quad (3.14)$$

### 3.2. ADDITION DE DEUX MOMENTS CINÉTIQUES

autrement dit, le coefficient de Clebsch-Gordan correspondant est :

$$C_{j_1 j_1 j_2 j_2}^{j_1+j_2, j_1+j_2} = 1.$$

**C'est la valeur la plus simple!!**

► Pour être complet, il faut vérifier que le vecteur d'état de l'Eq. (3.14) est bien un vecteur propre de  $\widehat{J}^2$ , avec la valeur propre  $\hbar^2(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)$ . Pour cela, il suffit d'utiliser :

$$\widehat{J}^2 = (\widehat{J}_1 + \widehat{J}_2)^2 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 + 2 \times \widehat{J}_{1z} \widehat{J}_{2z} + \widehat{J}_{1+} \widehat{J}_{2-} + \widehat{J}_{1-} \widehat{J}_{2+}, \quad (3.15)$$

et de l'appliquer sur le ket  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$ .

2) À partir de l'Eq. (3.14), on peut appliquer  $\widehat{J}_-$  sur  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$  afin d'obtenir tous les vecteurs propres tel que  $j = j_1 + j_2$  et  $-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2$ , ce qui fera  $2(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)$  vecteurs. Dans cette démarche, on utilise les opérateurs

$$\widehat{J}_\pm = \widehat{J}_x \pm i \widehat{J}_y \quad (3.16)$$

$$= \widehat{J}_{1\pm} + \widehat{J}_{2\pm}, \quad (3.17)$$

dont l'action sur un état  $|j, m\rangle$  de la base couplée est :

$$\widehat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle, \quad \forall j, m. \quad (3.18)$$

Cette équation s'applique aussi aux opérateurs  $\widehat{J}_{1,2\pm}$  lorsqu'ils agissent sur les vecteurs (de la base découplée)  $|m_1; m_2\rangle$  :

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{1\pm} |m_1; m_2\rangle &= \hbar \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)} |m_1 \pm 1; m_2\rangle, \\ \widehat{J}_{2\pm} |m_1; m_2\rangle &= \hbar \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)} |m_1; m_2 \pm 1\rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ainsi, pour avoir le sous-espace propre associé à  $\widehat{J}_z$ , toujours pour la valeur de  $j$ ,  $j = j_1 + j_2$ , on applique successivement  $\widehat{J}_-$  sur l'état  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$  et, grâce à l'Eq. (3.18), on obtient tous les vecteurs de la base

$$\{|j_1 + j_2, -(j_1 + j_2)\rangle, |j_1 + j_2, -(j_1 + j_2) + 1\rangle, \dots, |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle, |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle\}, \quad (3.20)$$

laquelle est constituée de  $2 \times (j_1 + j_2) + 1$  vecteurs propres.

Par exemple, pour avoir le vecteur  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$ , d'une part on applique  $\widehat{J}_-$  sur le ket  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$  :

$$\widehat{J}_- |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = \hbar \sqrt{(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1) - (j_1 + j_2)(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 - 1)} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle,$$

et d'autre part, puisque

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle \text{ (de la base couplée)} \equiv |j_1; j_2\rangle \text{ (de la base découplée)}$$

et comme  $\widehat{J}_- = \widehat{J}_{1-} + \widehat{J}_{2-}$ , on peut montrer à l'aide des équations Eqs. (3.19) et (3.20) que

$$\sqrt{j_1 + j_2} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \sqrt{j_1} |j_1 - 1; j_2\rangle + \sqrt{j_2} |j_1; j_2 - 1\rangle. \quad (3.21)$$

### A lire avec attention

► **Remarques sur la dimension :**

- le sous-espace de Hilbert  $\varepsilon(m = j_1 + j_2)$  associé à la valeur propre  $m = j_1 + j_2$  de  $\hat{J}_z$  est de dimension 1,
- le sous-espace de Hilbert  $\varepsilon(m = j_1 + j_2 - 1)$ , associé à la valeur propre  $m = j_1 + j_2 - 1$  de  $\hat{J}_z$  est de dimension 2,
- et ainsi de suite, on procède par itération et on finit par appliquer  $\hat{J}_-^p$  sur le ket  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$  (Eq. (3.21)) pour obtenir le ket  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - p\rangle$  (où  $p$  peut prendre les valeurs de 1 à  $2 \times (j_1 + j_2)$ ).

► **Remarques sur la dégénérescence :**

- On rappelle qu'on est toujours dans le cas où  $j = j_1 + j_2$ , où l'espace  $\varepsilon_H(m)$  de Hilbert des états propres de  $\hat{J}_z$  ( $j = j_1 + j_2$ ) est de dimension  $2(j_1 + j_2) + 1$ .
- Pour  $m = \pm(j_1 + j_2)$ , on a un seul vecteur propre associé  $|j_1 + j_2, \pm(j_1 + j_2)\rangle = |\pm j_1; \pm j_2\rangle$ , et donc pas de dégénérescence, comme déjà dit avant.
- Pour  $m = \pm(j_1 + j_2) \mp 1$ , on a deux vecteurs propres associés :  $|j_1 + j_2, \pm(j_1 + j_2) \mp 1\rangle = f(|j_1, \pm j_1 \mp 1\rangle |j_2, \pm j_2\rangle, |j_1, \pm j_1\rangle |j_2, \pm j_2 \mp 1\rangle)$  ce qui fait une dégénérescence d'ordre 2.
- Et ainsi de suite; le sous-espace de Hilbert  $\varepsilon_H(m = j_1 + j_2 - p)$ , associé à la valeur propre  $m = j_1 + j_2 - p$  de  $\hat{J}_z$  est de dimension  $p + 1$ .

► **Bilan :** jusque-là on a construit  $(2j + 1)$  vecteurs de la base couplée pour  $j = j_1 + j_2$ . Mais on n'a cerné que le sous-espace de Hilbert associé à  $\hat{J}^2$  et  $\hat{J}_z$  lorsque  $j = j_1 + j_2$ ; or on sait que l'espace total associé à  $\hat{J}^2$  et  $\hat{J}_z$ , pour toute valeur de  $j$  obtenue à partir de valeurs fixées de  $j_1, j_2$ , est de dimension  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ . Pour avoir l'ensemble de tous les vecteurs propres constituant la base couplée, on procède de la même manière à partir de la valeur  $m = j_1 + j_2 - 1$  qui, lorsqu'elle représente la valeur maximale pour  $\hat{J}_z$ , ceci veut dire que la valeur du moment cinétique totale correspond à  $j = j_1 + j_2 - 1$ .

■ **Cas  $j = j_1 + j_2 - 1$**

**Les notations peuvent être « confusing » => un peu difficile à lire**

Avec le même raisonnement, on applique successivement  $\hat{J}_-$  sur  $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$  et on peut monter que

$$\sqrt{(j_1 + j_2)} |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = \sqrt{j_2} |j_1 - 1; j_2\rangle - \sqrt{j_1} |j_1; j_2 - 1\rangle.$$

Il s'agit, bien sûr, d'une combinaison orthogonale à  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$  de l'Eq. (3.21) : ces vecteurs appartiennent à des espaces de Hilbert différents, puisque la valeur de  $j$  est différente (i.e.  $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle \in \varepsilon_H(m = j_1 + j_2 - 1)$  alors que  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle \in \varepsilon_H(m = j_1 + j_2)$ ), ils sont par conséquent orthogonaux).

► **Une autre façon de faire :** soit la valeur propre  $m = j_1 + j_2 - 1$  de  $\hat{J}_z/\hbar$ . Quelle est la valeur de  $j$  associée à  $\hat{J}^2$  pour cette valeur de  $m$  fixée ?

On sait que  $-j \leq m \leq j$  et donc  $j \geq |m|$ . On applique successivement  $\hat{J}_-$  sur le ket  $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$  pour avoir la base de vecteurs propres associée à la valeur  $j_1 + j_2 + 1$  de  $j$  et à la valeur  $m = j_1 + j_2 - 1$ ,  $\varepsilon(m = j_1 + j_2 - 1)$  (de dimension 2), qui est une base complètement orthogonale à celle de l'espace de Hilbert correspondant à la valeur  $j_1 + j_2$  de  $j$  et à la valeur  $m = j_1 + j_2$ ,  $\varepsilon(m = j_1 + j_2)$  (de dimension 1).

Ainsi de suite, on applique successivement  $\hat{J}_-$  sur  $|j_1 + j_2 - 2, j_1 + j_2 - 2\rangle$  pour construire la

base de  $\varepsilon(m = j_1 + j_2 - 2)$ , qui est de dimension 3 puisque  $m = j_1 + j_2 - 2 = (j_1 - 2) + j_2 = (j_1 - 1) + (j_2 - 1) = j_1 + (j_2 - 2)$ .

La dimension du sous-espace propre de  $\widehat{J}_z$  ( $\varepsilon(m = j_1 + j_2 - 2)$ ) est la dimension de  $\varepsilon(m = j_1 + j_2 - 1) + 1$ .

■ Cas  $j = j_1 + j_2 - 2, j_1 + j_2 - 3, \dots$  « Cas général ingérable sans une analyse plus profonde (qui existe)

► Pour les cas suivants :  $j = j_1 + j_2 - 3, j = j_1 + j_2 - 4, \dots, j = |j_1 - j_2|$ , on procède avec la même démarche jusqu'à ce que les vecteurs  $|m_1; m_2\rangle$  aient tous servi pour construire la base couplée  $|jm\rangle$ .

► On a fini d'utiliser toutes les valeurs possibles de  $m_1$  et de  $m_2$  lorsque la dimension de  $\varepsilon(m)$  (où  $m = m_1 + m_2$ ) devient inférieure ou égale à celle de  $\varepsilon(m + 1)$ .

Valeurs de  $j$  et dimension du sous-espace propre associé à  $\widehat{J}_z$  :

valeurs de $j$	$j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2, \dots, j_1 + j_2 - 2 \text{ Min}(j_1, j_2)$
dimension de $\varepsilon(m)$ :	$1, 2, 3, \dots, 2 \text{ Min}(j_1, j_2) + 1$
avec	$j_1 + j_2 - 2 \text{ Min}(j_1, j_2) =  j_1 - j_2  =  j_2 - j_1 .$ <span style="float: right;">(3.22)</span>

► On vérifie que la dimension totale de  $\varepsilon_H$  doit être  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  :

$$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = 2(j_1 + j_2) + 1 + 2(j_1 + j_2) - 1 + \dots + 2|j_1 - j_2| + 1$$

$$\varepsilon_H(j_1) \otimes \varepsilon_H(j_2) \equiv \sum_j \varepsilon_H(j) \quad \text{pour } j = j_1 + j_2, \dots, |j_1 - j_2|.$$

**Résumé :** pour  $j_1$  et  $j_2$  fixés,  $j$  prend les valeurs

$$j \in [j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2| + 1, |j_1 - j_2|]. \quad (3.23)$$

(Pour chaque valeurs de  $j$ ,  $m$  prend les valeurs dans l'intervalle  $[-j, +j]$ .

Le nombre de vecteurs de la base couplée est exactement le même que celui de la base découplée. L'espace de Hilbert conséquent au produit tensoriel  $\varepsilon_H(j_1) \otimes \varepsilon_H(j_2)$ , de dimension  $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$  se décompose en une somme directe d'espaces de Hilbert de dimension  $2(j_1 + j_2) + 1, 2(j_1 + j_2 - 1) + 1, 2(j_1 + j_2 - 2) + 1, \dots, 2|j_2 - j_1| + 1$ .

### 9.3 Composition de deux spins 1/2

#### Application Importante

Pour illustrer la procédure détaillée dans la section précédente nous considérons le cas de la composition de deux spins  $s_1 = s_2 = 1/2$  :  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ . Le spin total est noté  $S$ . Il satisfait  $|s_1 - s_2| \leq S \leq s_1 + s_2$ , i.e.  $S = 0$  ou  $1$ . Nous notons  $|++\rangle$ ,  $|+-\rangle$ ,  $| - + \rangle$  et  $|--\rangle$  les quatres vecteurs propres de  $S_{1z}$  et  $S_{2z}$ . Nous construisons les états propres de  $\vec{S}^2$  et  $S_z$ .

**Remarquez que ces trois états triplets sont symétriques par échange des deux spins**

**Sous espace  $\mathcal{E}(S = 1)$ .**— Le point de départ est le vecteur

$$|1, 1\rangle = |++\rangle \quad (9.13)$$

L'application de  $S_- = S_{1-} + S_{2-}$  sur  $|++\rangle$  sous donne successivement :

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \quad (9.14)$$

$$|1, -1\rangle = |--\rangle \quad (9.15)$$

Ces trois états portent le nom "d'état triplet".

**Sous espace  $\mathcal{E}(S = 0)$ .**— Le vecteur  $|S = 0, M = 0\rangle$  est orthogonal à  $|S = 1, M = 0\rangle$ . Nous déduisons l'expression du dernier vecteur :

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) \quad (9.16)$$

appelé "état singulet".

**Remarquez que cet état est antisymétrique dans l'échange des deux spins**

☞ **Exercice 9.4 (\*) :**  $\mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(1/2)$ .— La composition d'un moment  $j_1 = 1$  avec un moment  $j_2 = 1/2$  se révélera utile pour l'étude des corrections relativistes dans l'atome d'hydrogène (chapitre 13). Montrer que les vecteurs de  $j = 3/2$  sont :

$$\begin{cases} |3/2, 3/2\rangle &= |1, 1; 1/2, 1/2\rangle \\ |3/2, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 1; 1/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0; 1/2, 1/2\rangle \\ |3/2, -1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0; 1/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, -1; 1/2, 1/2\rangle \\ |3/2, -3/2\rangle &= |1, -1; 1/2, -1/2\rangle \end{cases} \quad (9.17)$$

et ceux de  $j = 1/2$  sont :

$$\begin{cases} |1/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1; 1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0; 1/2, 1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0; 1/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1; 1/2, 1/2\rangle \end{cases} \quad (9.18)$$

☞ **Exercice 9.5 (\*) :** Donner les coefficients de Clebsch-Gordan correspondant à cette décomposition.

☞ **Exercice 9.6 : (Important)** Soit deux moment cinétiques  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$  (par exemple les deux spins de deux particules). On note  $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$  le moment cinétique total. L'hamiltonien est<sup>2</sup>

$$H = A \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2. \quad (9.19)$$

<sup>2</sup>C'est l'hamiltonien effectif qui décrit l'interaction dipolaire magnétique entre les spins du proton et de l'électron lorsque l'atome d'hydrogène est dans son état fondamental, cf. § 13.3 sur la structure hyperfine, page 225. C'est aussi la forme de l'Hamiltonien décrivant le couplage spin-orbite, apparaissant dans l'étude de la structure fine de l'atome d'hydrogène, cf. § 13.2 page 221.

Montrer que  $[H, \vec{J}_1] = i\hbar\mathcal{A} \vec{J}_1 \times \vec{J}_2$  et  $[H, \vec{J}] = 0$  Interpréter physiquement ces relations. En écrivant

$$H = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\vec{J}^2 - \vec{J}_1^2 - \vec{J}_2^2) \quad (9.20)$$

déduire une base d'états stationnaires. Analyser (physiquement) les dégénérescences des niveaux d'énergie.

▣ **Exercice 9.7 (\*\*)** : Collision entre deux spins 1/2. – Nous étudions l'évolution de l'état de spin d'un proton et d'un neutron entrant en collision. Les spins des deux particules sont notés  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$ . Nous modélisons l'interaction sous la forme

$$H_{\text{int}} = \alpha(t) \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad (9.21)$$

La fonction  $\alpha(t)$  n'est non nulle que sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  correspondant à la durée de la collision (cf. figure 9.2). Elle est choisie constante sur cet intervalle.

1/ Pour  $\alpha(t) = \alpha$  donner les états propres et les valeurs propres de  $H_{\text{int}}$ .

2/ Initialement les deux spins sont dans l'état  $|\psi_{\text{initial}}\rangle = |+-\rangle$ . Calculer l'état de spin  $|\psi_{\text{final}}\rangle$  après la collision.

3/ Déduire la probabilité de retournement des deux spins  $\text{Proba}[|+-\rangle \rightarrow |-+\rangle]$  au cours de la collision. Tracer cette probabilité en fonction du temps d'interaction.

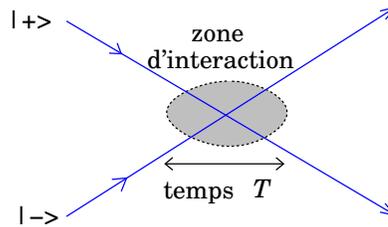


FIGURE 9.2 – Collision entre deux particules.

☺ Les idées importantes :

- Le plus important : la règle du triangle, i.e. l'encadrement (9.6), i.e. la décomposition (9.7).
- La logique pour trouver la relation entre les deux bases (9.3), résumée sur la figure 9.1.
- Dans la pratique, le contenu du chapitre est souvent utilisé pour diagonaliser des hamiltoniens du type de celui de l'exercice 9.6. Le même truc est toujours employé!