

# L'EQUATION D'EQUILIBRE RADIAL

## I. Equation locale de la quantité de mouvement

1 - Expression dans le repère absolu

Rappel :

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) = \rho \vec{f} + \text{div}(\bar{\bar{\sigma}}) \quad \text{(E-VI-5)}$$

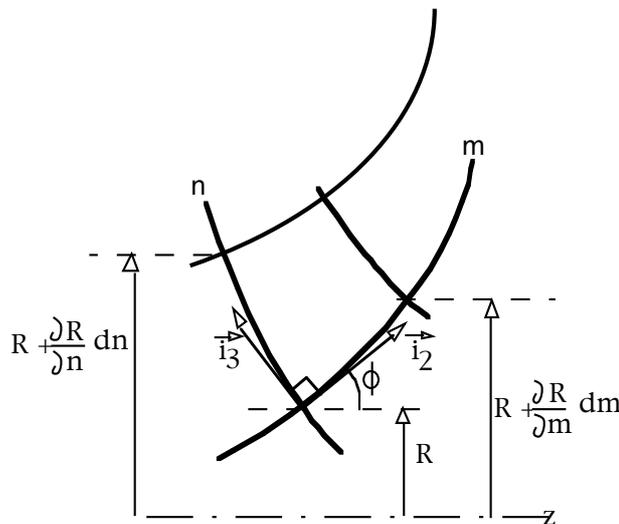
2 - Expression dans le repère relatif

Dans le repère relatif tournant, lié à la rotation des roues mobiles, cette expression devient :

$$\frac{\partial(\rho \vec{W})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) + 2 \rho \vec{\omega} \otimes \vec{W} + \rho \text{grad} \left( \frac{U^2}{2} \right) + \rho \frac{d\vec{\omega}}{dt} \otimes \vec{r} = \rho \vec{f} + \text{div}(\bar{\bar{\sigma}}) \quad \text{(E-VI-8)}$$

3 - Equation projetée dans un repère axisymétrique orthogonal curviligne (r, m, n)

Dans le cas d'une machine axiale, un repère cylindrique (r, z, R) est adapté pour projeter les équations. Dans le cas d'une machine à géométrie méridienne quelconque, il est préférable d'utiliser un repère axisymétrique orthogonal curviligne, épousant mieux la forme des lignes de courant dans le plan méridien et, ainsi, étant mieux adapté à l'expression d'hypothèses simplificatrices.



Les expressions des trois composantes de l'équation vectorielle de quantité de mouvement exprimée dans le repère relatif, pour un **écoulement permanent**, sont alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho RW_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho RW_m W_\varphi)}{\partial m} + \frac{\partial(\rho RW_n W_\varphi)}{\partial n} + \rho(W_\varphi W_n + 2\rho RW_n) \cos \varphi \\ & \quad + \rho(W_\varphi W_m + 2\rho RW_m) \sin \varphi + \rho RW_\varphi (W_m K_n + W_n K_m) = \\ & \quad \rho \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial(R \rho_{\varphi\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial(R \rho_{\varphi n})}{\partial m} + \frac{\partial(R \rho_{\varphi m})}{\partial n} + \rho_{m\varphi} \sin \varphi + \rho_{n\varphi} \cos \varphi + R(\rho_{\varphi n} K_n + \rho_{\varphi m} K_m) \\ \\ & \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho RW_\varphi W_m)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho RW_m^2)}{\partial m} + \frac{\partial(\rho RW_n W_m)}{\partial n} \rho \rho (W_\varphi^2 + \varphi^2 R^2 + 2\rho RW_\varphi) \sin \varphi \\ & \quad + 2\rho RW_m W_n K_m \rho \rho R K_n (W_n^2 \rho W_m^2) = \\ & \quad \rho R \frac{\partial p}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial(R \rho_{m\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial(R \rho_{mm})}{\partial m} + \frac{\partial(R \rho_{mn})}{\partial n} \rho \rho_{\varphi\varphi} \sin \varphi + R K_n (\rho_{mm} \rho \rho_{nn}) + R K_m (\rho_{mn} + \rho_{nm}) \\ \\ & \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho RW_\varphi W_n)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho RW_m W_n)}{\partial m} + \frac{\partial(\rho RW_n^2)}{\partial n} \rho \rho (W_\varphi^2 + \varphi^2 R^2 + 2\rho RW_\varphi) \cos \varphi \\ & \quad + 2\rho RW_m W_n K_n \rho \rho R K_m (W_m^2 \rho W_n^2) = \\ & \quad \rho R \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{R} \frac{\partial(R \rho_{n\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial(R \rho_{nm})}{\partial m} + \frac{\partial(R \rho_{nn})}{\partial n} \rho \rho_{\varphi\varphi} \cos \varphi + R K_m (\rho_{nn} \rho \rho_{mm}) + R K_n (\rho_{nm} + \rho_{mn}) \end{aligned}$$

## II. Equations moyennées circonférentiellement

Nous allons maintenant à procéder à la moyenne de ces équations dans la direction circonférentielle  $\varphi$ .

### 1 – Définition du processus de moyenne

a. Tout paramètre A de l'écoulement peut-être moyenné dans la direction circonférentielle entre l'intrados d'une aube et l'extrados de l'aube adjacente (c'est donc une moyenne sur la largeur du passage inter aubes), à l'aide de l'expression suivante :

$$\bar{A} = \frac{1}{\varphi_s \rho \rho_p} \int_{\varphi_p}^{\varphi_s} A d\varphi = \frac{N_a}{2\rho b} \int_{\varphi_p}^{\varphi_s} A d\varphi$$

avec

$$\varphi_s \rho \rho_p = \frac{1}{R} \frac{2\rho R}{N_a} \rho t \rho = \frac{2\rho \rho}{N_a} \rho \frac{t}{g} \rho = \frac{2\rho}{N_a} b$$

où : -  $\varphi_s$  et  $\varphi_p$  sont respectivement les positions circonférentielles de l'extrados d'une aube et de l'intrados de l'aube adjacente

- $N_a$  est le nombre d'aubes de la roue concernée
- $R$  est le rayon auquel s'opère cette moyenne
- $t$  est l'épaisseur des aubes dans la direction circonférentielle
- $g$  est le pas inter aubes

-  $b$  est le coefficient de blocage géométrique dû à l'épaisseur des aubes

b. Valeurs moyennes des dérivées

$$\frac{\overline{\partial A}}{\partial m} = \frac{1}{b} \frac{\partial(b\bar{A})}{\partial m} \left[ \frac{N_a}{2\bar{b}} \left[ \frac{\partial \bar{A}_s}{\partial m} \right] A_p \frac{\partial \bar{A}_p}{\partial m} \right]$$

$$\frac{\overline{\partial A}}{\partial n} = \frac{1}{b} \frac{\partial(b\bar{A})}{\partial n} \left[ \frac{N_a}{2\bar{b}} \left[ \frac{\partial \bar{A}_s}{\partial n} \right] A_p \frac{\partial \bar{A}_p}{\partial n} \right]$$

$$\frac{\overline{\partial A}}{\partial \bar{A}} = \frac{N_a}{2\bar{b}} [A_s \bar{A}_p]$$

$\frac{\partial \bar{A}_s}{\partial m}$ ,  $\frac{\partial \bar{A}_p}{\partial m}$ ,  $\frac{\partial \bar{A}_s}{\partial n}$  et  $\frac{\partial \bar{A}_p}{\partial n}$  représentent respectivement les pentes des tangentes à l'extrados et à l'intrados des aubages, dans les directions méridiennes et normales.

Remarquons que, du fait du caractère visqueux du fluide, la vitesse relative de l'écoulement s'annule à la surface des aubes :

$$\vec{W}_s = \vec{W}_p = \vec{0}$$

c. Procédure de moyenne

- Tous les paramètres de l'écoulement sont décomposés dans les équations en une valeur moyenne (selon  $\bar{A}$ ) et une valeur fluctuante :

$$A = \bar{A} + A'$$

Nous ferons uniquement l'hypothèse que, pour une position méridienne donnée ( $m, n$ ), la fluctuation circumférentielle de la masse volumique est tout à fait négligeable :

$$\bar{\rho} = \rho$$

- Les équations sont ensuite moyennées en  $\bar{A}$ , avec :

$$\overline{\bar{A} B} = \bar{A} \bar{B}$$

$$\overline{A' B} = \overline{\bar{A} B'} = 0$$

2 - Moyenne circumférentielle des équations

Afin d'alléger les notations, les quantités moyennées seront désormais représentées par  $A$  au lieu de  $\bar{A}$ . Nous poserons également :

$$\bar{\rho}_{ij} = \bar{\rho} \bar{W}_i \bar{W}_j + \overline{\rho' W_i' W_j'} \bar{\rho}_{ij}$$

- Equation projetée selon  $\bar{A}$  :

$$\frac{1}{b} \frac{\partial(b R \square_{m \square})}{\partial m} + \frac{1}{b} \frac{\partial(b R \square_{n \square})}{\partial n} + R K_n \square_{m \square} + R K_m \square_{n \square} + \square_{n \square} \cos \square + \square_{m \square} \sin \square + 2 \square \square R (W_n \cos \square + W_m \sin \square) =$$

$$+ \frac{N_a}{2 \square b} \square_{(s \square p)} \square (p \square \square_{\square}) \square \square_{m \square} R \frac{\partial \square}{\partial m} \square \square_{n \square} R \frac{\partial \square}{\partial n} \square$$

$\square_{(s \square p)} \{A\}$  représente la différence entre la valeur de A prise à l'extrados (s) et la valeur de A pris à l'intrados (p).

Nous dénommerons par  $\frac{1}{b} D_{1 \square}$  le dernier terme du second membre de cette équation.

- Equation projetée selon m :

$$\frac{1}{b} \frac{\partial(b R \square_{mm})}{\partial m} + \frac{1}{b} \frac{\partial(b R \square_{mn})}{\partial n} + R K_n \square_{mm} + 2 R K_m \square_{mn}$$

$$\square \sin \square (\square_{\square} + \square \square^2 R^2 + 2 \square \square R W_{\square}) \square R K_n \square_{mm} =$$

$$\square \frac{R}{b} \frac{\partial(b p)}{\partial m} + \frac{N_a}{2 \square b} \square_{(s \square p)} \square (p \square \square_{mm}) R \frac{\partial \square}{\partial m} \square \square_{mn} R \frac{\partial \square}{\partial n} + \square_{m \square} \square$$

avec la dénomination  $\frac{1}{b} D_{1m}$  pour le dernier terme du second membre de cette équation.

- Equation projetée selon n :

$$\frac{1}{b} \frac{\partial(b R \square_{mn})}{\partial m} + \frac{1}{b} \frac{\partial(b R \square_{nn})}{\partial n} + R K_m \square_{nn} + 2 R K_n \square_{mn}$$

$$\square \cos \square (\square_{\square} + \square \square^2 R^2 + 2 \square \square R W_{\square}) \square R K_m \square_{mn} =$$

$$\square \frac{R}{b} \frac{\partial(b p)}{\partial n} + \frac{N_a}{2 \square b} \square_{(s \square p)} \square (p \square \square_{nn}) R \frac{\partial \square}{\partial n} \square \square_{mn} R \frac{\partial \square}{\partial m} + \square_{n \square} \square$$

avec la dénomination  $\frac{1}{b} D_{1n}$  pour le dernier terme du second membre de cette équation.

### 3 – Interprétation physique du vecteur $\vec{D}_1$

Le terme  $\vec{D}_1 (D_{1 \square}, D_{1m}, D_{1n})$  peut être noté sous la forme :

$$\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \vec{D}_1 \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} = \frac{N_a}{2 \square b} \square_{(s \square p)} \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \begin{matrix} p \square \square_{\square} \\ \square \square_{m \square} \\ \square \square_{n \square} \\ \square \square_{nn} \end{matrix} \begin{matrix} \square \square_{\square} \\ p \square \square_{mm} \\ \square \square_{nn} \\ p \square \square_{mn} \end{matrix} \begin{matrix} \square \square_{\square} \\ \square \square_{mn} \\ \square \square_{mn} \\ \square \square_{mn} \end{matrix} \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ R \frac{\partial \square}{\partial m} \\ R \frac{\partial \square}{\partial n} \\ \square \end{matrix}$$

soit : 
$$\bar{D}_1 = \frac{N_a}{2 \bar{\rho} b} \bar{\rho}_{(s \bar{\rho} p)} \left\{ \left( p \bar{I} \bar{\rho} \bar{\rho} \right) \bar{n}_a \right\}$$

où  $\bar{n}_a$  est le vecteur normal à la surface de l'aubage.

Ce terme représente donc explicitement la **force exercée par l'aubage** sur le fluide.

### III. Equation d'équilibre radial

Nous allons maintenant nous intéresser à la projection normale de l'équation de quantité de mouvement moyennée dans un cas simplifié.

#### 1 – Hypothèse d'axisymétrie des surfaces de courant moyennes

Faisons l'hypothèse que les surfaces de courant moyennes sont axisymétriques, c'est à dire que l'angle méridien  $\bar{\rho}$  du vecteur vitesse moyen est indépendant de  $\bar{\rho}$ . Remarquons que cette hypothèse est moins restrictive que celle de l'axisymétrie de l'écoulement (où tous les paramètres de l'écoulement –  $p$ ,  $V$ ,  $\bar{\rho}$ ... - sont indépendants de  $\bar{\rho}$ ).

Nous pouvons alors assimiler les surfaces de coordonnées à ces surfaces de courant. Il vient :

$$\bar{W}_n \equiv 0$$

En tenant compte de cette hypothèse, la projection normale de l'équation de quantité de mouvement moyennée s'exprime, en explicitant le terme  $\bar{\rho}_{ij}$ , par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\partial \left( b R \left( \bar{\rho} \bar{W}_m' \bar{W}_n' \bar{\rho} \bar{\rho}_{mn} \right) \right)}{\partial m} + \frac{1}{b} \frac{\partial \left( b R \left( \bar{\rho} \bar{W}_n'^2 \bar{\rho} \bar{\rho}_{nn} \right) \right)}{\partial n} \\ + R K_m \left[ \left( \bar{\rho} \bar{W}_n'^2 \bar{\rho} \bar{\rho}_{nn} \right) \bar{\rho} \left( \bar{\rho} \bar{W}_m'^2 + \bar{\rho} \bar{W}_m'^2 \bar{\rho} \bar{\rho}_{mm} \right) \right] + 2 R K_n \left( \bar{\rho} \bar{W}_m' \bar{W}_n' \bar{\rho} \bar{\rho}_{mn} \right) \\ \bar{\rho} \cos \bar{\rho} \left( \bar{\rho} \bar{W}_\square'^2 + \bar{\rho} \bar{W}_\square'^2 \bar{\rho} \bar{\rho}_{\square\square} + \bar{\rho} \bar{\rho}^2 R^2 + 2 \bar{\rho} \bar{\rho} R \bar{W}_\square' \right) = \bar{\rho} \frac{R}{b} \frac{\partial (b p)}{\partial n} + \frac{1}{b} D_{1n} \end{aligned}$$

#### 2 – Expression en dehors des aubages

Si on se place dans un plan inter roues, en dehors des zones aubées, certaines hypothèses peuvent être réalisées :

- la force d'aubage est nulle :  $\bar{D}_1 \equiv \bar{0}$
- il n'y a pas de blocage géométrique :  $b \equiv 0$
- les tensions visqueuses sont négligeables au sein du fluide :  $\bar{\rho}_{ij} \equiv 0$
- les termes de fluctuations sont négligeables :  $\bar{W}_i' \bar{W}_i' \equiv 0$

Il vient :

$$R K_m \bar{\rho} \bar{W}_m'^2 + \bar{\rho} \cos \bar{\rho} \left( \bar{W}_\square' + \bar{\rho} R \right)^2 = R \frac{\partial p}{\partial n}$$

soit, en repassant dans le repère absolu :

$$K_m V_m^2 + \frac{\cos \bar{\rho}}{R} V_\square^2 = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Il est possible d'éliminer le terme de pression en utilisant l'équation de Gibbs. Il vient :

$$2 \frac{\partial h_0}{\partial n} = \frac{\partial V_m^2}{\partial n} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial (RV_{\square})^2}{\partial n} + 2T \frac{\partial s}{\partial n} + 2K_m V_m^2$$

### 3 – Expression et utilisation de l'équation d'équilibre radial simplifié

Si nous introduisons les hypothèses supplémentaires :

- gradient radial d'entropie négligeable :  $2T \frac{\partial s}{\partial n} \approx 0$
- peu de courbures des lignes de courant dans le plan méridien :  $2K_m V_m^2 \approx 0$
- machine axiale :  $m \equiv z, \quad n \equiv R$

alors :

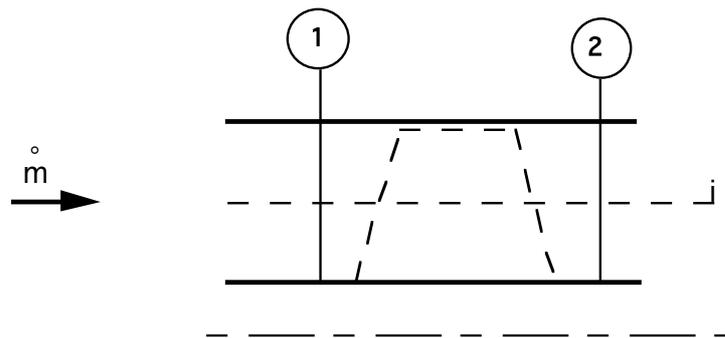
$$2 \frac{\partial h_0}{\partial R} = \frac{\partial V_z^2}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial (RV_{\square})^2}{\partial R}$$

Considérons l'écoulement au passage d'une roue. Si nous faisons les bilans du nombre d'inconnue du problème et du nombre d'équations disponibles, nous avons :

- 6 inconnues : les répartitions radiales de  $h_0, V_z$  et  $V_{\square}$  dans une section à l'amont de la roue  
les répartitions radiales de  $h_0, V_z$  et  $V_{\square}$  dans une section à l'aval de la roue
- 3 équations : l'équation d'équilibre radial simplifiée dans la section à l'amont de la roue  
l'équation d'équilibre radial simplifiée dans la section à l'aval de la roue  
l'équation d'Euler pour chaque rayon au passage de la roue

Il y a donc la possibilité de choisir librement 3 répartitions.

## IV. Quelques lois d'évolution classiques



### 1 – Le tourbillon libre

$$RV_{\square} = Cte$$

- Conditions amont :  $h_{01} = Cte \quad et \quad R_1 V_{\square 1} = Cte$
- Tourbillon libre à l'aval :  $R_2 V_{\square 2} = Cte = k$

$$\square \quad h_{02}, V_{z1} \text{ et } V_{z2} \text{ constants.}$$

## 2 – Le tourbillon forcé

$$V_{\varnothing} = k R$$

$$\square \quad V_z^2 = V_{zi}^2 + 2(\varnothing \square k)k(R^2 \square R_i^2)$$

$V_{zi}$  est calculé pour satisfaire la conservation du débit global.

## 3 – L'angle absolu constant

$$\varnothing = Cte \quad (\tan \varnothing = V_{\varnothing}/V_z)$$

$$\square \quad V_z = V_{zi} \frac{\square R_i \square \sin^2 \varnothing}{\square R \square}$$

## 4 – Quelques autres lois classiques

- Le vortex général

$$V_{\varnothing} = k_1 R^n \pm \frac{k_2}{R}$$

- L'étage exponentiel

$$V_{\varnothing} = k_1 \pm \frac{k_2}{R}$$

- Le degré de réaction constant

$$\varnothing = Cte$$