

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES¹

Marc Massot
Professeur, Ecole Centrale Paris
Laboratoire EM2C - UPR CNRS 288
marc.massot@ecp.fr

Adam Larat
Chargé de Recherche CNRS
Laboratoire EM2C - UPR CNRS 288
adam.larat@ecp.fr

20 janvier 2014

1. Copyright 2014 by M. Massot and A. Larat. This material is the property of A. Larat and M. Massot. It is not to be sold, reproduced or distributed without the prior written permission of the owner.

Table des matières

Table des matières	i
1 Modèles Simplifiés	1
1.1 L'équation d'advection linéaire en dimension un	2
1.2 Une équation non-linéaire en dimension un	7
1.2.1 Idée de Courbes Caractéristiques	7
1.2.2 Problème de Riemann	9
1.2.3 Résolution du problème du "petit chapeau"	13
1.3 Systèmes linéaires en dimension 1	18
1.3.1 La notion d'Hyperbolicité - Variables caractéristiques	20
1.3.2 Domaine de dépendance et d'influence	21
1.3.3 Résolution du problème de Riemann	22
1.3.4 Application à l'équation des ondes	23
1.4 Feuille d'exercices I	33
1.5 Travaux Dirigés I - Correction	39
1.5.1 Exercice 1	39
1.5.2 Exercice 2	40
1.5.3 Exercices 3 et 4	41
1.5.4 Exercice 5	42
1.5.5 Exercice 6	44
1.5.6 Une autre approche pour montrer que (1.52) définit bien des solutions faibles du problème de Riemann	47
2 Mécanique des fluides Compressibles	55
2.1 Équations de conservation	55
2.1.1 Coordonnées Lagrangiennes	55
2.1.2 Conservation de la masse	57
2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement	57
2.1.4 Conservation du moment angulaire	58
2.1.5 Conservation de l'énergie totale	58
2.2 Application aux fluides - Modélisation	58
2.2.1 Thermodynamique - Rappels	58

2.2.2	Modélisation du Fluide Newtonien	59
2.2.3	Équation d'état	60
2.3	Les équations de Navier-Stokes	61
2.3.1	Les équations du Fluide Réel	61
2.3.2	Adimensionnalisation	63
2.3.3	Hierarchie des Modèles	65
2.4	Les équations d'Euler	65
2.4.1	Les équations du Fluide Parfait	65
2.4.2	Propriétés des équations d'Euler	66
2.5	Conditions Limites	67
3	Écoulements Stationnaires 1D	69
3.1	Le Choc Droit Dans un Écoulement de Fluide Parfait	70
3.1.1	Vitesse du Son et Nombre de Mach	70
3.1.2	Grandeurs Soniques et Relation de Prandtl	72
3.1.3	Grandeurs d'arrêt	75
3.1.4	Relations de Saut dans un Choc Droit	77
3.1.5	Relation de Hugoniot, Droite de Rayleigh	78
3.1.6	Propriétés Fondamentales du Choc Droit	82
3.1.7	Généralisation aux dimensions supérieures	83
3.2	Les Écoulements Quasi Monodimensionnels	86
3.2.1	Bases de l'approximation	86
3.2.2	Équations de bilan locales	87
3.2.3	Exemple d'écoulement stationnaire : la Tuyère de Laval	89
3.3	Étude de la Tuyère de Laval	99
3.4	Application Numérique	102
3.5	Ré-entrée Atmosphérique	103
4	Écoulements Instationnaires 1D	107
4.1	Écoulements instationnaires continus 1D	107
4.1.1	Formes Alternatives	108
4.1.2	Courbes caractéristiques et invariants de Riemann	110
4.1.3	Courbes Intégrales	115
4.1.4	Ondes simples : définitions et propriétés	117
4.1.5	Exemple d'application pour un gaz idéal polytropique	119
4.2	Le Problème de Riemann 1D pour les Équations d'Euler	126
4.2.1	Cas de la 1-onde	127
4.2.2	Cas de la 3-onde	130
4.2.3	Cas de la 2-onde	130
4.2.4	Cas de l'apparition du vide	132
4.2.5	Résolution complète du problème du tube à chocs	132
4.3	Feuille d'exercices II	136

4.4	Travaux Dirigés II - Correction	141
4.4.1	Exercice 1	141
4.4.2	Exercice 2	142
4.4.3	Exercice 3	143
4.4.4	Exercice 4	145
4.4.5	Exercice 5	145
4.4.6	Exercice 6	147
5	Écoulements Bidimensionnels Permanents	151
5.1	Introduction	151
5.2	Les équations d'Euler en régime permanent	152
5.3	Choc permanent dans un écoulement permanent	154
5.3.1	Formes générales des conditions de saut	154
5.3.2	Le choc oblique permanent	155
5.3.3	Ondes de Mach	162
5.4	Méthode des caractéristiques	164
5.4.1	Introduction	164
5.4.2	Notion de système différentiel elliptique, parabolique et hyperbolique en un point. Caractéristiques	165
5.4.3	Écoulement de fluide parfait permanent et continu plan. Application de la méthode des caractéristiques	171
5.4.4	Écoulement supersonique le long d'une paroi	179
5.5	Feuille d'exercices IV	184
5.5.1	Réflexion d'une onde de choc oblique	184
5.5.2	Étude qualitative de l'interaction de deux ondes de choc obliques	185
5.5.3	Problème : Plaque infiniment fine dans un écoulement supersonique	185
5.6	Travaux Dirigés IV - Correction	189
5.6.1	Réflexion d'un choc oblique	192
5.6.2	Intersection de deux chocs obliques – résolution graphique	194
	Bibliographie	199

Chapitre 1

Modèles simplifiés et leur analyse

Le but de chapitre est d'introduire, dans un cadre le plus simple possible, les outils, les concepts et les difficultés que nous allons rencontrer par la suite dans l'étude de la dynamique des gaz. Après avoir observé un certain nombre d'écoulements présentant des "ondes de choc", nous nous sommes interrogés sur un ensemble de notions physiques (compressibilité du milieu, lien avec la thermodynamique du problème, notion de propagation d'une onde, épaisseur d'une onde de choc, lien avec les phénomènes dissipatifs, idée d'une vitesse maximale de propagation de l'information associée à une description microscopique d'un gaz, présence d'un flux de matière à la traversée d'une onde choc) qui nous ont conduit à définir quatre point clefs : *compressibilité, propagation, non-linéaire et irréversibilité*. Les points que nous souhaitons aborder dans ce cours tournent autour de la notion de propagation, de la notion de singularité, telles les ondes de choc, en lien avec la notion de loi de conservation et enfin, autour de deux dualités : Linéaire/Non-linéaire et Réversible/Irréversible. Pour cela nous commençons par considérer une équation d'advection linéaire en dimension un d'espace puis enchainons avec l'étude d'une équation de conservation non-linéaire "type" en dimension un : l'équation de Burgers. Ce tour d'horizon de modèles élémentaires se termine par l'étude d'un système linéaire en dimension un d'espace et avec l'introduction de la notion d'hyperbolicité. Cette étude permet en particulier de résoudre les équations de l'acoustique en dimension un. Les aspects mathématiques ne sont pas abordés clairement dans ce cours ; les personnes intéressées par ce champ d'étude, tant sur les aspects équations aux dérivées partielles que convergence des schémas numériques dans des cas simples, pourront consulter le cours dispensé à l'École Centrale Paris en seconde année "Conception et Simulation" en mathématique qui propose une version allégée mais très utile d'un cours anciennement enseigné à l'École Normale Supérieure de Lyon au sein du DEA Analyse Numérique, équations aux Dérivées Partielles et Calcul Scientifique [15]. Sous peu, le présent polycopié sera fondu avec le cours de 2ème année pour proposer une approche globale de la question.

1.1 L'équation d'advection linéaire en dimension un

On considère dans cette partie le problème de Cauchy pour la fonction u , $u(t, x) \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u = 0, \\ u(0, x) = u^0(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, où $u^0(x)$ est la donnée initiale et a est une constante homogène à une vitesse. La solution de l'équation (1.1) est évidente et vaut $u(t, x) = u^0(x - at)$ à condition que la donnée initiale soit assez régulière pour donner un sens à l'équation (1.1), c'est-à-dire C^1 par exemple.

Remarque 1 : Dans le cas où la donnée initiale est la fonction de Heavyside :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

on peut toujours définir la solution par $u(t, x) = u^0(x - at)$ mais il devient plus délicat de donner un sens à l'équation aux dérivées partielles (1.1) car la dérivée de la donnée initiale est une masse de Dirac en zéro. Il convient alors de définir la notion de solution "faible" et d'avoir recours à la théorie des distributions [17, 15]. Un problème de Cauchy dont la donnée initiale est la fonction \mathcal{H} est un cas particulier du "Problème de Riemann", où u^0 est constitué de deux états constants séparés par une discontinuité en zéro :

$$u^0(x) = \begin{cases} U_G, & x < 0, \\ U_D, & x \geq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

avec U_G pour état gauche et U_D pour état droit.

Remarque 2 : L'équation (1.1) est un cas particulier d'une équation de conservation :

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad (1.3)$$

où $f(u)$ désigne la fonction flux et dans le cas linéaire vaut $f(u) = au$, $a = f'(u)$.

De manière à résoudre proprement le problème de Cauchy, on introduit une notion qui se révélera particulièrement importante dans la suite du cours : la notion de *courbe caractéristique*. On note $X(t; x, s)$ la solution du problème de Cauchy pour l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX(t; x, s)}{dt} = a = f'(u), \\ X(s; x, s) = x, \end{cases} \quad (1.4)$$

où le point du diagramme espace-temps $(x, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est appelé point de fixation de la courbe caractéristique solution du problème de Cauchy précédent. Lorsque l'on ne souhaite pas identifier une unique courbe caractéristique, mais l'ensemble de ces courbes associées à un champ de vecteur a , on note simplement $X(t)$, sans préciser de donnée initiale.

Le point important est : *la solution de l'équation (1.1) est constante le long des courbes caractéristiques*, données par $X(t; x, s) = x + a(t - s)$. En effet, la dérivée de la quantité u le long de la courbe caractéristique vaut :

$$\frac{d}{dt} [u(t, X(t))] = \partial_t u(t, X(t)) + \partial_x u(t, X(t)) \frac{dX(t)}{dt} = (\partial_t u + a \partial_x u)(t, X(t)) = 0. \quad (1.5)$$

L'interprétation de ce résultat est intéressante puisqu'elle indique que l'information se propage le long des courbes caractéristiques, et il en va donc de même des singularités comme les discontinuités. Par exemple dans le cas du problème de Riemann (1.2) on a :

$$u(t, x) = \begin{cases} U_G, & x < at, \\ U_D, & x \geq at, \end{cases} \quad (1.6)$$

et le diagramme permettant de visualiser la propagation de l'information dans l'espace caractéristique $(x, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ prend la forme proposée sur la Figure 1.1. Pour un point (y, s)

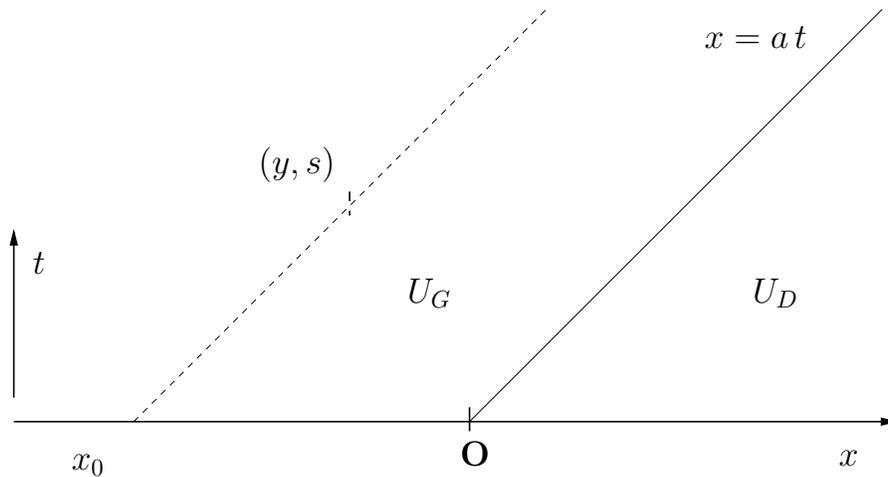


FIGURE 1.1 – Courbe caractéristique dans le plan (x, t) , pour $x \in \mathbb{R}$.

quelconque, $s > 0$, on voit que l'équation de la caractéristique est $x = y + a(t - s)$. On cherche alors le "pied" de la caractéristique correspondant à $t = 0$ et on obtient $x = y - as$. Comme la solution est constante le long de cette caractéristique on a donc :

$$u(s, y) = u^0(x) = u^0(y - as) \quad (1.7)$$

et l'on retrouve la solution que nous avons donnée de (1.1).

Digression 1: Lien avec un effet dissipatif évanescent

On considère l'équation suivante

$$\partial_t u^\varepsilon + a \partial_x u^\varepsilon = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon \quad (1.8)$$

où l'on ajoute un effet "régularisant" dont le coefficient, homogène à une viscosité, est censé approcher 0 (et cela correspond à une limite des grands nombres de Reynolds pour le passage des équations de Navier-Stokes aux équations des fluides parfait avec les équations d'Euler qui revient à négliger les effets dissipatifs); on parle de viscosité évanescente. En se plaçant sur les courbes caractéristiques, c'est-à-dire en effectuant le changement de variable $y = x - at$, $\tilde{u}^\varepsilon(t, y) = u^\varepsilon(t, x)$, on obtient une simple équation de la chaleur :

$$\partial_t \tilde{u}^\varepsilon = \varepsilon \partial_{yy} \tilde{u}^\varepsilon, \quad (1.9)$$

que l'on peut résoudre explicitement. Il suffit pour cela de considérer l'équation sur la dérivée de \tilde{u}^ε , $\tilde{v}^\varepsilon = \partial_y \tilde{u}^\varepsilon$. Le problème de Cauchy devient alors

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{v}^\varepsilon = \varepsilon \partial_{yy} \tilde{v}^\varepsilon, \\ \tilde{v}^\varepsilon(0, y) = (U_D - U_G) \delta(0), \end{cases} \quad (1.10)$$

où $\delta(0)$ désigne la masse de Dirac centrée en zéro et dont la solution est donnée par

$$\tilde{v}^\varepsilon(t, y) = (U_D - U_G) \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{4\varepsilon t}\right)}{\sqrt{4t\varepsilon}}.$$

On trouve la solution en \tilde{u}^ε en prenant l'intégrale de \tilde{v}^ε en y qui tend vers U_G en $-\infty$. Il s'agit d'une fonction d'erreur qui approche, à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution $u(t, x)$ obtenue auparavant.

Ceci montre bien que la solution de (1.1) est la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ d'une solution avec viscosité évanescente. On verra tout l'intérêt de ce point dans le cas non linéaire ! Un point qu'il est intéressant de noter à propos de l'équation (1.9), consiste à observer que la donnée initiale est concentrée en zéro, mais pour tout t strictement positif, la solution a été modifiée dans tout l'espace puisque \tilde{v}^ε est une distribution Gaussienne.

Remarque 3 : Une autre façon de procéder consiste à "régulariser" la donnée initial v^0 , en convoluant avec une Gaussienne d'écart type ε , puis à calculer la solution approchée et à passer à la limite. On peut se permettre de régulariser la donnée initiale car l'équation est linéaire mais cette approche est moins riche car elle ne sera pas transposable dans le cadre non-linéaire.

Digression 2: Retour sur la notion de propagation

Dans le modèle de l'équation d'advection linéaire, l'information se propage à vitesse finie a . Le profil de départ est préservé au cours du temps et se propage à vitesse a : on parle d'une onde progressive. Précisément, une onde progressive solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est définie par l'existence d'une vitesse c et d'un profil $w(y)$, $y \in \mathbb{R}$, tels que $u(t, x) = w(y) = w(x - ct)$ est solution de l'EDP de départ. La présence d'onde progressive se rencontre pour des systèmes et équations très différents (combustion : propagation d'une flamme par un modèle thermo-diffusif, biologie). Donnons un exemple, en utilisant l'équation que l'on appelle "KPP", KPP pour Kolmogorov-Petrovskii-Piskounov, les trois auteurs d'une publication originale de 1937, que l'on appelle aussi équation de Fisher dans la littérature :

$$\begin{cases} \partial_t \beta - \partial_{xx} \beta = \beta^2(1 - \beta), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \beta = 1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Cette équation de KPP provient d'un modèle de propagation de virus [12, 10] comprenant deux EDP de réaction-diffusion couplées :

$$\begin{cases} \partial_\tau a - D_a \partial_{yy} a = -k_1 a b^2, \\ a|_{-\infty} = 0, & a|_{+\infty} = a_0, \\ \partial_\tau b - D_b \partial_{yy} b = k_1 a b^2, \\ b|_{-\infty} = a_0, & b|_{+\infty} = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Dans l'hypothèse $D_a = D_b$, on peut montrer que $a + b = a_0$ pour tout y si la condition initiale vérifie également cette condition, et on obtient (1.11) en adimensionnant selon $\beta = b/a_0$, $t = k_1 a_0^2 \tau$, $x = (k_1 a_0^2 / D_a)^{\frac{1}{2}} y$. Le profil :

$$w(z) = \frac{\exp(-z/\sqrt{2})}{1 + \exp(-z/\sqrt{2})}, \quad z = x - ct,$$

est une onde progressive pour la vitesse $c = 1/\sqrt{2}$ c'est à dire que $\beta(t, x) = w(x - ct)$ est une solution de (1.11). On voit alors que le mécanisme de propagation pour (1.1) se trouve dans la structure du flux linéaire $f(u) = au$, i.e. $a = f'(u)$; il est totalement différent pour cette équation de réaction-diffusion (1.11), d'autant que dans le premier cas, la vitesse de propagation provient de la structure du flux, alors que c'est une inconnue qu'il faut déterminer dans le second cas.

Un dernier point qu'il nous faut illustrer sur le cas de l'équation très simple (1.1) est la question des conditions aux limites. Pour cela, on se contente de poser le problème de

Cauchy en restreignant le domaine physique à la demi-droite des réels positif.

$$\begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u = 0, & x \in \mathbb{R}_+, t > 0, \\ u(0, x) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1.13)$$

avec, pour le premier cas, $a > 0$. On a représenté quelques lignes caractéristique sur la Figure 1.2 à gauche. Pour $x > at$ on peut aller chercher le pied de la caractéristique, $u(t, x) =$

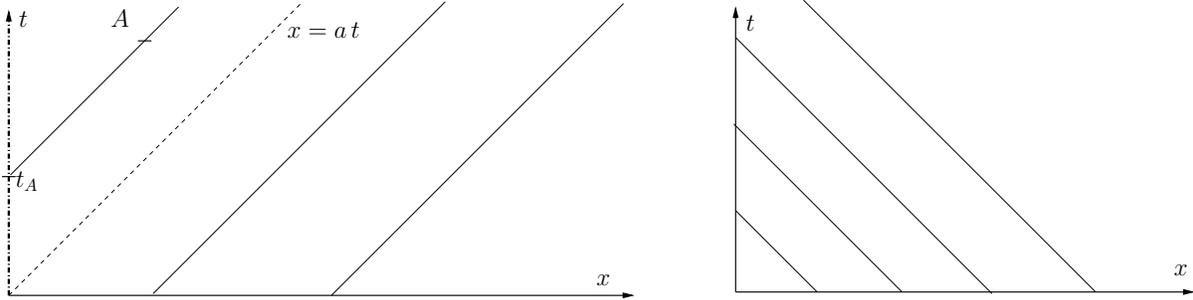


FIGURE 1.2 – Courbes caractéristiques dans le le plan (x, t) , pour $x \in \mathbb{R}_+$.

$u^0(x - at)$ et $x - at \in \mathbb{R}_+$. Mais ce n'est plus le cas pour le point A qui voit la caractéristique passant par ce point s'arrêter au point $x = 0$ à l'instant t_A tel que $x - a(t - t_A) = 0$. Ceci signifie que l'on a besoin d'imposer une condition supplémentaire à la limite $x = 0$ pour tout temps du type $u(t, 0) = g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, la valeur au point (x, t) hérite de la valeur au bord pour $x < at$ et on obtient $u(t, x) = g(t_A) = g(t - \frac{x}{a})$. Si l'on veut que la solution soit régulière, il faut de plus imposer une relation de compatibilité entre u^0 et g à l'instant initial. Maintenant si $a < 0$, le diagramme caractéristique est représenté sur la 1.2 à droite. Dans ce cas, on n'a pas besoin de préciser la condition à la limite $x = 0$. On peut interpréter ces résultats en terme de propagation de l'information. Dans le cas ou $a > 0$ la frontière $x = 0$ du domaine $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est une frontière par laquelle l'information entre dans le domaine; une condition doit donc y être fixée. Lorsque $a < 0$, l'information sort par cette frontière et l'on a pas besoin de spécifier la condition à la limite. Le dernier cas est celui où $a = 0$; ce cas particulier est celui où la frontière est dite caractéristique et la fonction peut y prendre n'importe quelle valeur. Nous reviendrons sur ce cas pathologique dans le cadre non-linéaire.

Bilan du cas scalaire linéaire

- L'information se propage le long des lignes caractéristiques ainsi que les singularités et provient de la structure du flux $f(u) = au$.
- Si la donnée initiale est régulière, la solution l'est aussi; si la donnée initiale est singulière, cette singularité se propage le long des lignes caractéristiques.
- L'information se propage à vitesse a et caractérise la structure des conditions aux limites à imposer sur une frontière.

1.2 Une équation non-linéaire en dimension un

Commençons par donner l'équation de Burgers dans le cas que l'on qualifie de cas "non visqueux" :

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \quad f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad (1.14)$$

car le second membre est nul. Cette appellation est à mettre en parallèle avec l'équation de Burgers dans le cas "visqueux", que l'on appelle aussi équation de Burgers sans préciser :

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_x \left(\frac{u_\varepsilon^2}{2} \right) = \varepsilon \partial_{xx} u_\varepsilon. \quad (1.15)$$

L'équation (1.15) provient d'un papier de 1948 de Burgers : "A Mathematical model illustrating the theory of turbulence" [1].

1.2.1 Idée de Courbes Caractéristiques

Nous nous proposons de voir si la notion de courbe caractéristique s'applique dans le contexte d'un flux non linéaire $f(u) = u^2/2$ pour l'équation (1.14). Pour une solution régulière, l'équation (1.14) peut se réécrire

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0,$$

car $f'(u) = u$ est la vitesse de propagation de l'information localement et dépend donc de la fonction u , elle même. On définit donc

$$\frac{dX(t)}{dt} = u(t, X(t)). \quad (1.16)$$

Si l'on tient à "fixer" une courbe caractéristique particulière, on peut définir une donnée initiale particulière telle que $X(s) = x$, et l'on adopte alors la notation $X(t; s, x)$ qui désigne la courbe caractéristique au temps t qui passe par le point x au temps s . Quand la dépendance en la donnée initiale n'est pas précisée, cela signifie que l'on considère l'ensemble de toutes les courbes caractéristiques.

Encore une fois on montre, de même que précédemment, que la fonction u est constante le long des caractéristiques :

$$\frac{du(t, X(t))}{dt} = 0,$$

et par conséquent la pente de ces courbes reste constante et les caractéristiques sont donc *des droites*. On procède alors de même qu'auparavant pour calculer la solution au point (x, t) . On cherche la caractéristique qui passe par le point (x, t) d'équation $x = \xi + u^0(\xi)t$. On doit alors résoudre cette équation non-linéaire en ξ et il suffit de prendre la valeur de la solution initiale en ce point $u(t, x) = u^0(\xi)$ comme indiqué sur la Figure 1.3.

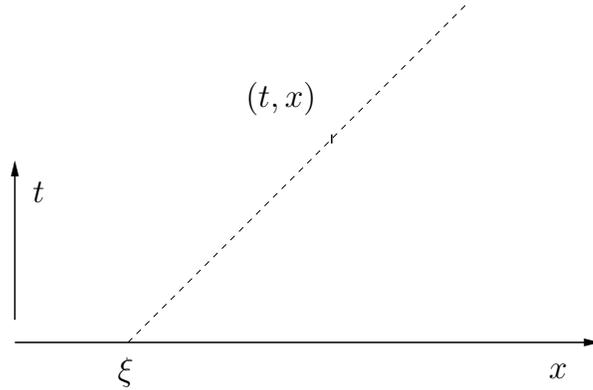


FIGURE 1.3 – Courbe caractéristique pour l'équation de Burgers non visqueux dans le plan (x, t) et identification du “pied” de la caractéristique ξ .

Considérons donc un exemple afin d'appliquer ces idées sur le problème Cauchy pour la donnée initiale particulière que l'on appellera le problème du “petit chapeau” (Figure 1.4) du fait de la structure de sa donnée initiale :

$$u^0(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ x + 1, & x \in]-1, 0], \\ 1 - x, & x \in [0, 1[. \end{cases} \quad (1.17)$$

Les caractéristiques sont donc données par :

$$\begin{cases} x = \xi, & \xi \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ x = \xi + (\xi + 1)t, & \xi \in]-1, 0], \\ x = \xi + (1 - \xi)t, & \xi \in [0, 1[. \end{cases} \quad (1.18)$$

On constate que la solution est bien définie ainsi que les caractéristiques sur l'intervalle de temps $[0, 1[$. Pour $t = 1$, on a représenté la forme de la solution pour laquelle les caractéristiques dont le pied appartient à $x \in [0, 1]$ se sont focalisées en un point A et une discontinuité s'est formée. Si l'on cherche à prolonger dans le temps une solution au sens des caractéristiques, elle devient multi-valuée comme le montre la donnée de $u(2, x)$ en trait pointillé sur la Figure 1.4 en bas.

Exercice 1 : *On se place à l'instant $t = 2$. Montrer que pour les points situés entre $x = 1$ et $x = 2$, on peut identifier trois courbes caractéristiques passant par le point (x, t) permettant de remonter à trois points ξ distincts pour l'évaluation de la donnée initiale. On expliquera alors pourquoi on obtient une solution multi-valuée, c'est-à-dire une solution prenant en x plusieurs valeurs et qui n'a donc plus de sens. On fera le lien avec la Figure 1.4 en bas et la courbe en pointillé.*

Exercice 2 : Montrer que la solution du problème de Cauchy pour u^0 croissante est bien définie pour tout temps au sens des caractéristiques.

En fait il est possible de quantifier la formation de singularité et en particulier le temps d'apparition de telles singularités. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème : Soit $u^0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^∞ et l'on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(u^0)'(x_0) < 0$. Alors il existe $T^* > 0$, que l'on appelle temps d'explosion :

$$T^* = \frac{-1}{\min_{x \in \mathbb{R}} (u^0)'(x)} \quad (1.19)$$

tel que pour tout temps t , $t \in [0, T^*[$, le problème de Cauchy admet une unique solution, dite régulière, donnée par la méthode des caractéristiques. Pour $t \rightarrow T^*$ la solution devient discontinue et ne conserve un sens que sous la forme de ce que l'on appelle une "solution faible".

Exercice 3 : Démontrer le théorème précédent qui montre que quelque soit la régularité de la donnée initiale, la solution peut développer des singularités en temps fini.

Remarque 4 : La notion de solution faible est très liée à la théorie des distributions puisque l'équation aux dérivées partielles (EDP) (1.14) n'est alors vérifiée qu'au sens des distributions quand u possède une discontinuité [15, 17, 7, 20].

On comprend alors que pour une donnée initiale aussi régulière que l'on veut, la solution peut développer des discontinuités au bout d'un temps fini. Avant que ne se forme cette singularité, la solution est bien définie par la méthode des caractéristiques, mais se pose le problème de savoir ce qui se passe pour la solution après la formation du choc et en particulier de comprendre quelle est la dynamique de ces discontinuités qui se forment naturellement.

1.2.2 Problème de Riemann

Pour analyser ce type de dynamique, nous allons considérer, dans un premier temps, le problème de Riemann. On rappelle que la donnée initiale est constituée d'une discontinuité, séparant deux états constants, U_G pour gauche et U_D pour droit. Nous allons commencer par traiter un premier cas : $U_G > U_D$.

Remarque 5 : Le problème de Cauchy associé au problème de Riemann est invariant par le groupe de transformation :

$$\begin{bmatrix} t \rightarrow \lambda t \\ x \rightarrow \lambda x \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

on pourra en effet vérifier que la donnée initiale est invariante par cette transformation sur la variable x et que pour toute solution $u(t, x)$ de l'EDP (1.14), $u(\lambda t, \lambda x)$ est aussi solution avec la même donnée initiale. Dans ces conditions la solution ne dépend que de la variable $x/t = \xi$ et des deux états initiaux. Par conséquent, elle est notée $W_R(\xi; U_G, U_D)$.

Dans le cas du problème de Riemann avec $U_G > U_D$, on peut penser, vu la remarque précédente sur l'invariance des solutions, que la discontinuité va se propager avec une vitesse σ constante (pour respecter l'invariance) qu'il s'agit d'évaluer. Pour ce faire, on effectue l'intégration de l'EDP de Burgers non visqueux (1.14) sur le rectangle indiqué sur le diagramme des caractéristiques sur la Figure 1.5. On obtient :

$$\sigma \Delta t (U_G - U_D) + \Delta t \left(\frac{U_D^2}{2} - \frac{U_G^2}{2} \right) = 0,$$

d'où

$$\sigma = \frac{f(U_G) - f(U_D)}{U_G - U_D} = \frac{U_G + U_D}{2},$$

ou encore

$$\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]},$$

où $[f(u)]$ désigne le saut de $f(u)$ et où $[u]$ désigne le saut de u au travers de la discontinuité.

Ce type de condition qui relie le saut du flux au saut de la variable via la vitesse de la discontinuité est très général et s'appelle relation de *Rankine-Hugoniot* (on consultera l'introduction historique pour situer ces deux scientifiques dans l'histoire de la science des écoulements compressibles). Le point important est que l'on a ici utilisé la forme conservative de l'équation (1.14). On peut alors compléter le diagramme des caractéristiques que l'on a représenté sur la Figure 1.6.

Il s'agit, à présent que nous avons identifié une solution de (1.14) au sens faible de souligner deux points importants :

- I. L'information se propage le long des lignes caractéristiques et elle se perd dans la discontinuité que l'on appelle aussi, par analogie avec la dynamique des gaz, une "onde de choc" ou un "choc". Tant que l'on a une solution au sens habituel régulière, comme pour $t \in [0, 1[$ dans l'exemple que nous avons traité auparavant, il est possible "d'inverser le temps" et de retrouver la donnée initiale. La solution possède alors un caractère réversible. Dès que l'on a formation et propagation d'une onde de choc, ce n'est plus le cas, l'information propagée le long des caractéristiques se perd dans la discontinuité et on

ne peut plus remonter dans le temps, la solution est alors à caractère irréversible. Cet aspect sera encore plus clair quand on terminera la résolution de l'exemple du "petit chapeau".

- II. Le problème avec viscosité ε (1.15) admet dans le cas du problème de Riemann précédent une solution explicite sous la forme d'une onde progressive $u^\varepsilon(t, x) = w^\varepsilon(x - \sigma t)$ où la forme du profil et la vitesse sont donnés par :

$$w^\varepsilon(z) = U_D + \frac{1}{2}(U_G - U_D) \left[1 - \tanh \left(\frac{(U_G - U_D)z}{4\varepsilon} \right) \right], \quad \sigma = \frac{U_G + U_D}{2}. \quad (1.21)$$

On peut montrer qu'il s'agit d'une solution régulière qui "tend" vers la solution discontinue identifiée ci dessus dans la limite d'une viscosité nulle $\varepsilon \rightarrow 0$ comme le montre la Figure 1.7. On dit alors de la solution du problème de Riemann pour (1.14) avec $U_G > U_D$ sous la forme d'une discontinuité se propageant à vitesse σ qu'elle est stable par perturbation visqueuse et qu'il s'agit d'une solution ENTROPIQUE car elle est la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ d'une solution régulière de (1.15) (Il faut penser que ε peut être vu comme $\frac{1}{Re}$ en dynamique des gaz et que l'on cherche bien des solution qui sont les limites des équations de Navier-Stokes quand $Re \rightarrow +\infty$).

Arrivé à ce point du cours, on peut se demander quel est l'intérêt de toute ces définitions et remarques. Le cas $U_G < U_D$ va nous permettre d'en saisir tout la pertinence. La première idée est de penser à une solution de la même forme que précédemment :

$$U(t, x) = \begin{cases} U_G, & x < \sigma t, \\ U_D, & x > \sigma t, \end{cases} \quad (1.22)$$

où la vitesse σ est donnée comme précédemment par l'équation 1.21.

Le diagramme des caractéristique représenté sur la Figure 1.8 révèle alors un problème ; en effet les lignes caractéristiques "sortent" du choc et la zone hachurée est une zone où l'on voit que la solution est mal définie car on ne peut pas trouver de droite caractéristique permettant d'affecter une valeur à la solution en remontant à la donnée initiale. Au lieu de se perdre dans le choc comme précédemment, l'information est "créée" dans la discontinuité. Par ailleurs, on peut vérifier numériquement que cette solution est instable aux perturbations visqueuses, c'est-à-dire, qu'elle n'est pas la limite d'une solution régulière de (1.15) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cependant, un autre type de solution peut être envisagé. En effet, la fonction :

$$U(t, x) = \begin{cases} U_G, & x < U_G t, \\ \frac{x}{t}, & \frac{x}{t} \in [U_G, U_D], \\ U_D, & x > U_D t, \end{cases} \quad (1.23)$$

est aussi solution du problème de Riemann ; elle présente seulement une discontinuité de sa dérivée le long des lignes caractéristiques $x = U_G t$ et $x = U_D t$, et elle est continue.

Son diagramme caractéristique est représenté sur la Figure 1.9 et l'on voit apparaître entre les deux lignes caractéristiques une “onde de détente” ou “onde de raréfaction” (par analogie avec la dynamique des gaz) qui se trouve être stable par perturbation visqueuse et la solution entropique dont on peut montrer qu'elle est unique [7, 20, 21].

Exercice 4 : Montrer que l'ensemble infini des fonctions :

$$U(t, x) = \begin{cases} U_G, & x < S_m t, \\ U_m, & x \in]S_m t, U_m t[, \\ \frac{x}{t}, & x \in]U_m t, U_D t[, \\ U_D, & x \in]U_D t, +\infty[, \end{cases} \quad (1.24)$$

pour tout $U_m \in [U_G, U_D]$, où $S_m = \frac{1}{2}(U_G + U_m)$, est un ensemble de solutions au sens faible de (1.14) et construire les diagrammes de droites caractéristiques correspondant ainsi que la forme des solutions. Parmi ces solutions, la seule admissible est la solution continue car toutes les autres comportent des chocs non admissibles, ou autrement dit non entropiques, i.e. instables par perturbation visqueuse. Seule la solution continue est donc physique.

Remarque 6 : Pour préciser la notion de solution entropique, on peut introduire un formalisme qui permet d'écrire une équation supplémentaire de conservation qui est vérifiée par les solutions au sens habituel mais qui prend un signe au passage des chocs. (on pourra consulter [15] ou pour une étude plus complète [7, 20]). Pour Burgers, une entropie est donnée par $\frac{u^2}{2}$ et son flux d'entropie $\frac{u^3}{3}$. On vérifiera que toute solution régulière vérifie l'EDP équivalente :

$$\partial_t \left(\frac{u^2}{2} \right) + \partial_x \left(\frac{u^3}{6} \right) = 0,$$

alors qu'une solution discontinue vérifie

$$\partial_t \left(\frac{u^2}{2} \right) + \partial_x \left(\frac{u^3}{6} \right) < 0.$$

Remarque 7 : Pour les solutions régulières, la manipulations des lois de conservation ne pose pas de problème. En effet

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \partial_t u + u \partial_x u = 0 \Leftrightarrow \partial_t \left(\frac{u^2}{2} \right) + \partial_x \left(\frac{u^3}{6} \right) = 0.$$

Par contre cette équivalence est fausse pour les solutions au sens faible. Pour illustrer cette affirmation, prenons, par exemple, le problème de Riemann pour Burgers non visqueux avec $U_G > U_D$. Le problème de Cauchy admet comme unique solution entropique la discontinuité se propageant à la vitesse $\sigma_1 = \frac{U_G + U_D}{2}$, alors que pour la troisième équation ci-dessus, la vitesse obtenue comme le rapport du saut de flux sur le saut de la variable vaut :

$$\sigma_2 = \frac{\frac{U_D^3}{6} - \frac{U_G^3}{6}}{\frac{U_D^2}{2} - \frac{U_G^2}{2}} = \frac{2U_D^2 + U_D U_G + U_G^2}{3(U_D + U_G)} \neq \sigma_1$$

sauf si $U_G = U_D$. On pourra par contre vérifier que :

$$U_G > U_D \Leftrightarrow \partial_t \left(\frac{u^2}{2} \right) + \partial_x \left(\frac{u^3}{6} \right) < 0,$$

en intégrant la seconde équation sur un rectangle comme nous l'avons fait précédemment pour obtenir la vitesse de propagation de la discontinuité. On voit alors qu'il est équivalent, pour que la solution du problème de Riemann soit entropique, que l'état gauche possède une vitesse plus élevée ou que l'inégalité d'entropie soit satisfaite.

En conclusion, la notion de solution faible doit conduire à une certaine prudence et montre que le choix de la variable et du flux associé à la loi de conservation (1.14) est très important pour une bonne représentation de la physique du problème car il conditionne la dynamique des discontinuités.

1.2.3 Résolution du problème du “petit chapeau”

Nous pouvons alors revenir au problème de départ du “petit chapeau”. Après le temps $T^* = 1$, un choc s'est formé qui se propage. Notons $\sigma(t)$ sa vitesse pour $t \geq 1$ et $\varphi(t)$ sa position. Nous allons établir une équation différentielle ordinaire permettant de caractériser les deux fonction du temps σ et φ .

La vitesse de ce choc est donnée par

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \sigma(t, \varphi(t)) = \frac{1}{2}[u^-(t, \varphi(t)) + u^+(t, \varphi(t))],$$

où u^- et u^+ sont les valeurs de la solution de chaque côté de la discontinuité. On voit immédiatement que :

$$u^+ = 0, \quad \forall t \geq 1, \quad \varphi(1) = 1, \quad \sigma(1, 1) = \frac{1}{2},$$

d'après l'analyse précédente.

Il nous manque donc la valeur u^- . Cependant une analyse des lignes caractéristique montre que

$$u^-(t, \varphi(t)) = u^0(\xi),$$

où la caractéristique a pour équation $x = \xi + u^0(\xi)t$. Il s'agit alors de résoudre l'équation précédente en ξ , et pour cela nous voyons que toutes les caractéristiques arrivant à gauche dans la discontinuité proviennent du segment $[-1, 0]$ de la donnée initiale, segment dans lequel on sait que $u^0(\xi) = \xi + 1$. Par conséquent, l'équation de la caractéristique est $x = (1 + t)\xi + t$ et elle doit passer par le point $(t, \varphi(t))$; on obtient alors

$$\xi = \frac{\varphi(t) - t}{1 + t},$$

ce qui permet, en utilisant le fait que la solution est constante le long de la caractéristique, d'arriver à la valeur de $u^-(t, \varphi(t))$:

$$u^-(t, \varphi(t)) = u^0\left(\frac{\varphi(t) - t}{1 + t}\right) = \frac{\varphi(t) - t}{1 + t} + 1 = \frac{1 + \varphi(t)}{1 + t}.$$

Finalement la position du choc est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \varphi(t)}{1 + t} \right], \\ \varphi(1) = 1. \end{cases} \quad (1.25)$$

Cette équation admet une solution évidente, en séparant les variables $\varphi(t) = \sqrt{2(1+t)} - 1$ ce qui conduit à une vitesse de propagation de la discontinuité $\sigma(t) = 1/\sqrt{2(1+t)}$ et à une amplitude de la discontinuité de $[u] = \sqrt{2/(1+t)}$. On remarquera que l'amplitude du saut de u tend vers zéro avec le temps et que la vitesse décroît comme la racine du temps quand $t \rightarrow +\infty$. La solution est représentée sur la Figure 1.10; on pourra comparer en particulier la solution à l'instant $t = 2$ par rapport à la solution multi-valuée obtenue précédemment par la seule méthode des caractéristiques.

Exercice 5 : Modélisation du trafic routier [13, 14].

On considère l'équation de conservation sur la densité de voiture $\rho(t, x)$:

$$\partial_t \rho + \partial_x (f(\rho)) = 0,$$

où $f(\rho)$ désigne le flux de voiture. En général, une modélisation standard montre que le flux s'écrit comme le produit de la densité locale par une vitesse u , qui doit ici, pour ne pas complexifier le modèle, être donnée comme une fonction de ρ . Une possibilité permettant de modéliser l'arrêt du trafic quand la densité de voiture atteint un maximum ρ_{\max} ainsi que la limitation de vitesse u_{\max} quand la densité de voiture est faible, est donnée par

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

La vitesse u_{\max} représente donc la vitesse maximum autorisée et ρ_{\max} une densité maximum correspondant à un bouchon où les voitures sont pare-choc contre pare-choc, à l'arrêt. L'expression du flux de départ est donc :

$$f(\rho) = \rho u = \rho u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

Les lignes caractéristiques sont alors données par :

$$\frac{dX(t)}{dt} = f'(\rho(t, X(t))) = u_{\max} \left(1 - \frac{2\rho(t, X(t))}{\rho_{\max}} \right),$$

et ρ est constant le long des caractéristiques qui sont donc des droites. La forme du flux est telle qu'il est concave (contrairement à Burgers où il est convexe) et les discontinuités admissibles sont telles que $\rho_G < \rho_D$ (le démontrer, en étudiant les caractéristiques).

- I. Résoudre le problème de Riemann pour $\rho_G = \frac{1}{2}\rho_{\max}$, $\rho_D = \rho_{\max}$, qui correspond au feu rouge. Expliquer ce qui se passe en traçant tant le diagramme des caractéristiques dans ce cas, que l'allure de la solution à deux instants successifs.
- II. Résoudre le problème de Riemann pour $\rho_G = \rho_{\max}$, et $\rho_D = \frac{1}{2}\rho_{\max}$ ce qui correspond au passage d'un feu vert à l'instant $t = 0$. Expliquer ce qui se passe en traçant tant le diagramme des caractéristiques dans ce cas, que l'allure de la solution à deux instants successifs.

Exercice 6 : Modélisation du trafic routier (bis).

On reprend le cadre de l'exercice précédent. Pour chacun des deux cas de problèmes de Riemann résolus, on représentera le diagramme dans le plan (x, t) des trajectoires des véhicules (le lecteur notera bien que dans le cas de l'équation de Burgers, les trajectoires des particules sont exactement les droites caractéristiques et ne demandent donc pas de traitement supplémentaire). Ces trajectoires seront notées $Y(t)$; elles sont telles que

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} x = u(\rho(t, Y(t))) \\ Y(0) = x^0. \end{cases} \quad (1.26)$$

On montrera, en particulier que les trajectoires des véhicules, dans le cas de la présence d'une onde de choc (cas I), traversent cette onde (ce n'est pas le cas dans le cadre linéaire!!).

Exercice 7 : Modélisation du trafic routier (ter - DIFFICILE).

On reprend encore le cadre de l'exercice précédent du trafic routier, mais se propose de résoudre un problème de Cauchy différent avec une donnée initiale sous la forme de la perturbation par une fonction Gaussienne d'un état constant. On suppose que $\rho_0(x)$ est donnée par $\rho_0(x) = \bar{\rho}_0 + \varepsilon \rho_0^1(x)$ où $\rho_0^1(x)$ est une Gaussienne de centre $x = 0$, d'intégrale 1 et d'écart type η .

- I. Résoudre qualitativement, dans l'hypothèse ε petit, le problème de Cauchy (donner l'allure du diagramme des caractéristiques et l'évolution de la donnée initiale pour plusieurs instants successifs). Y a-t-il formation d'un choc? Si oui, donner une estimation de sa vitesse de propagation et de l'ordre de grandeur de l'amplitude de la discontinuité.
- II. Dans la limite de ε petit, on peut linéariser le problème autour de l'état constant $\bar{\rho}_0$. Donner l'équation linéarisée sur la perturbation $\rho_0^1(x)$. Quelle en est la solution? Estimer la différence entre la solution du problème non-linéaire et celle du problème linéarisé (indication : donner une idée du temps de formation de la discontinuité en fonction de η et discuter en fonction de la valeur de η par rapport à 1). Conclure sur la validité de la linéarisation.

Bilan

- L'information se propage le long des caractéristiques comme dans le cas linéaire, cependant la solution est réversible tant que la solution reste régulière; dans ce cas tout l'information contenue dans la donnée initiale se propage via les caractéristiques.

- Dès qu'une discontinuité est présente, de l'information se perd dans la discontinuité car les caractéristiques "entrent" dans le choc et la solution devient irréversible. Les particules "traversent" alors la discontinuité.
- Quelque soit la régularité de la solution initiale, la solution peut développer des discontinuités en temps fini.
- Il n'y a pas unicité de la solution en général, mais unicité de la solution *entropique*, la seule "physique", qui correspond à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution du problème perturbé visqueux (1.15). Quand on ne considère que le cas non visqueux (1.14), on doit adjoindre des conditions supplémentaires qui découlent d'une loi de conservation sur l'entropie et permettent de sélectionner les discontinuités admissibles physiquement.

1.3 Systèmes linéaires en dimension 1

On considère maintenant un système d'EDP sur le vecteur de variables U , qui est en fait une application de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U(t, x)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Ce vecteur est solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x \cdot (F(U)) = 0, \\ F(U) = A U, \\ U(0, x) = U^0(x), \end{cases} \quad A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \quad (1.27)$$

où $\partial_x \cdot$ désigne l'opérateur différentiel divergence, qui, en dimension 1, n'est autre que l'opérateur de dérivation par rapport à la variable spatiale ; \mathcal{M}_m désigne l'algèbre des matrices carrées de dimension m à coefficients constants.

Remarque 8 : Ce type de système peut être obtenu à partir d'un système non-linéaire de lois de conservation par linéarisation autour d'un état constant ; il définit l'évolution des perturbations au premier ordre. On part du système de départ et on fait une hypothèse sur la structure de la solution :

$$\partial_t U + \partial_x(F(U)) = 0, \quad U = \bar{U} + \varepsilon U_1(t, x) + O(\varepsilon^2).$$

Si l'on note $A(U) = \partial_U F(U)$ la matrice jacobienne, formellement, au premier ordre, on obtient :

$$\varepsilon(\partial_t U_1(t, x) + A(\bar{U})\partial_x U_1(t, x)) = 0,$$

d'où l'équation (1.27) vérifiée par les perturbations au premier ordre $U_1 \in \mathbb{R}^m$. C'est la cas de l'équation des ondes obtenue en linéarisant les équations d'Euler isentropique autour d'un état de vitesse et pression constantes comme expliqué ci-dessous.

Digression 3: Linéarisation acoustique autour d'un état constant ¹

On part de la forme conservative des équations d'Euler pour décrire les écoulements de fluides parfait en dimension un d'espace ; le vecteur des variables conservatives s'écrit $U^t = (\rho, \rho v, \rho E)$ et satisfait à l'EDP :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} + \partial_x \cdot \left(F \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \right) = 0, \quad F \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho E v + p v \end{pmatrix}.$$

On donnera l'expression de la matrice jacobienne de F , $A(U) = \partial_U F(U)$ dans la suite du cours, mais son expression est relativement complexe. Elle permet d'obtenir le système sous forme quasi-linéaire $\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0$, ainsi appelé car la matrice A dépend de la variable U .

1. Dans la suite du cours, la notation $()^t$, dans U^t , désigne l'opération de transposition des matrices.

Dans l'optique de linéariser autour d'un état constant, on préfère travailler avec les variables (p, v, s) (pression, vitesse, entropie). Pour un écoulement régulier, on peut montrer que :

$$\partial_t \begin{pmatrix} p \\ v \\ s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v & \rho c^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} p \\ v \\ s \end{pmatrix} = 0, \quad (1.28)$$

où c désigne la vitesse du son.

On note $A_1(W)$ cette matrice apparue dans le système d'équations ci-dessus, avec $W^t = (p, v, s)$ et $\rho = \rho(p, s)$. Dans la mesure où l'on se donne un état constant $W_0^t = (p_0, v_0, s_0)$, la linéarisation du système (1.28) donne au premier ordre

$$\partial_t \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \\ s_1 \end{pmatrix} + A_1(W_0) \partial_x \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = 0,$$

où la matrice $A_1(W_0)$ possède 3 valeurs propres distinctes, $v_0 \pm c_0$ et v_0 , et est diagonalisable à valeur propres réelles. Dans le cas où la donnée initiale est homoentropique ($s_1 = 0$ pour tout x), on obtient un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \partial_t p_1 + v_0 \partial_x p_1 + \rho_0 c_0^2 \partial_x v_1 = 0, \\ \partial_t v_1 + \frac{1}{\rho_0} \partial_x p_1 + v_0 \partial_x v_1 = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Dans le repère qui se promène à vitesse v_0 , on obtient donc en effectuant une combinaison linéaire de la dérivée en temps de la première équation et de la dérivée en espace de la seconde équation multipliée par $-\rho_0 c_0^2$:

$$\partial_{tt} p_1 - c_0^2 \partial_{xx} p_1 = 0,$$

qui n'est autre que l'équation des ondes sur la perturbation de pression. La perturbation de pression est alors solution de l'équation des ondes et la donnée de $p_1(t=0)$ et $v_1(t=0)$ permet d'obtenir $p_1(t=0)$ et $\partial_t p_1(t=0)$. On pourra montrer, de même, que v_1 satisfait aussi l'équation des ondes. En conséquence, pour un écoulement homoentropique, il est équivalent de résoudre l'équation des ondes pour p_1 ou pour v_1 (avec donnée initiale et dérivée temporelle initiale) ou de résoudre le système (1.29) de deux équations à deux inconnues linéaire du premier ordre.

On comprend alors que le système (1.27) peut être vu comme le linéarisé d'un problème non-linéaire. Pour l'instant, nous nous concentrons donc sur la résolution de ce système linéaire et nous aborderons le cadre non-linéaire dans le contexte de la dynamique des gaz avec les équations d'Euler.

1.3.1 La notion d'Hyperbolicité - Variables caractéristiques

Définition On dit que le système (1.27) est strictement hyperbolique si A est diagonalisable à valeurs propres réelles distinctes.

On demande que la multiplicité algébrique et géométrique des valeurs propres soit au plus 1, ce qui correspond à l'aspect "stricte" de l'hyperbolicité.

Cette hypothèse étant vérifiée, il existe dans une base de vecteurs propres $(r_i)_{i \in [1, m]}$, et l'on note

$$R = [r_1, \dots, r_m],$$

la matrice de passage de dimension m . La matrice A peut alors se mettre sous la forme :

$$A = R \Lambda R^{-1}, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

où, pour des raisons de commodité, on introduit un ordre sur les valeurs propres, classées dans l'ordre croissant, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$.

On comprend alors qu'il est naturel de travailler avec les variables qui diagonalisent le système d'EDP linéaire (1.27); c'est l'objet du paragraphe suivant.

Variables caractéristiques

On introduit donc les *Variables Caractéristiques* : $V = R^{-1}U$, $V \in \mathbb{R}^m$, qui satisfont au nouveau système d'EDP linéaire :

$$\partial_t V + \Lambda \partial_x V = 0, \tag{1.30}$$

qui présente la particularité de se découpler en m équations scalaires indépendantes linéaires de vitesse de propagation $\lambda_p, p = 1, \dots, m$.

La condition initiale sur la variable V , qui détermine le problème de Cauchy est obtenue à partir de la condition initiale U^0 du problème de Cauchy (1.27) :

$$V^0 = R^{-1}U^0, \quad V^0 = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_m(x) \end{pmatrix}.$$

Il est alors naturelle d'introduire les courbes caractéristiques associées à la $p^{\text{ème}}$ valeur propre λ_p , que l'on appelle aussi la p -caractéristique, d'équation $x - \xi = \lambda_p t$ et de pied ξ en $t = 0$. On obtient donc m familles de droites dans le plan (t, x) qui vont structurer la propagation de l'information aux m vitesses différentes $\lambda_p, p = 1, \dots, m$.

La solution exacte pour la variable de départ U vaut alors :

$$U(t, x) = R V(t, x) = \sum_{p=1}^m v_p(t, x) r_p = \sum_{p=1}^m v_p(0, x - \lambda_p t) r_p. \tag{1.31}$$

Remarque 9 : La notion d'hyperbolicité n'est pas un artefact mathématique mais la condition nécessaire pour que le système (1.27) soit bien posé, y compris pour des données initiales non régulières. On pourra pour cela considérer le cas d'un système d'équations faiblement hyperbolique, dans le sens où la matrice est un bloc de Jordan :

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.32)$$

dans le cas du problème de Riemann. La résolution pour u_2 ne pose pas de problème, mais alors, l'équation sur u_1 devient $\partial_t u_1 + \partial_x u_1 = -\partial_x u_2$ avec un second membre sous la forme d'une masse de Dirac. Ce genre de comportement est symptomatique des δ -chocs que l'on voit apparaître lorsque l'on considère les gaz sans pression (en astrophysique, plasmas froids, où la pression est considérée comme nulle et les particules "collantes" voir [13]). En conclusion, l'hyperbolicité nous permet d'éviter tout type de comportement pathologique dans la résolution du problème de Cauchy.

On peut aussi proposer une autre interprétation de la résolution précédente où l'on a conclu que $U(t, x) = \sum_{p=1}^m v_p(0, x - \lambda_p t) r_p$. La coordonnée numéro p de $U(t, x)$ dans la base des vecteurs propres $(r_p)_{p \in [1, m]}$ n'est autre que le produit scalaire par le $p^{\text{ème}}$ vecteur propre à gauche l_p de la matrice A : $v_p(t, x) = l_p \cdot U(t, x)$. On rappelle que

$$A = R \Lambda R^{-1} \iff R^{-1} A = \Lambda R^{-1} \iff l_p \cdot A = \lambda_p l_p,$$

où l_p est la $p^{\text{ème}}$ ligne de la matrice R^{-1} ; ce vecteur vérifie donc $l_p \cdot r_q = f \delta_{pq}$, le facteur f dépendant de la normalisation des vecteurs r_p et l_q et valant 1 lorsque les vecteurs sont normalisés.

Si l'on note \mathcal{C}_p la $p^{\text{ème}}$ courbe caractéristique et $\partial_{\mathcal{C}_p}$ la dérivée le long de cette courbe caractéristique d'un champ $\varphi(t, x)$:

$$\partial_{\mathcal{C}_p} \varphi = \partial_t \varphi + \lambda_p \partial_x \varphi,$$

on peut réécrire la solution sous la forme

$$\partial_{\mathcal{C}_p} v_p(t, x) = 0, \quad l_p \cdot \partial_{\mathcal{C}_p} U = 0, \quad (1.33)$$

ce qui signifie que v_p est invariant le long de la $p^{\text{ème}}$ courbe caractéristique. Cette interprétation sera reprise dans le contexte d'un système non linéaire.

1.3.2 Domaine de dépendance et d'influence

En pratique pour résoudre le problème de Cauchy, il faut aller chercher l'information sur la donnée initiale en terme de variables caractéristiques au pied de chaque droite caractéristique comme indiqué sur la Figure 1.11. On définit alors le domaine de dépendance comme

l'ensemble des points de \mathbb{R} à l'instant $t = 0$ dont dépend la solution au point (t, x) . Cet ensemble est en fait :

$$\mathcal{D}(t, x) = \{x_0 | x_0 = x - \lambda_p t, p = 1, \dots, m\}.$$

Ce domaine est donc réduit à m points dans le cas linéaire, mais l'important est qu'il soit de mesure finie (on repensera à l'équation de la chaleur avec donnée initiale masse de Dirac en zéro à $t = 0$ et dont la solution à tout instant $t > 0$ est une Gaussienne, c'est-à-dire que la solution a été modifiée dans tout l'espace et cela indique une vitesse de propagation "infinie" de l'information). Si l'on note $a_{\max} = \max_{p=1}^m |\lambda_p|$, on voit que le domaine de dépendance est contenu dans un cône issu de (x, t) et délimité par des droites de pente $\pm a_{\max}$:

$$\mathcal{D}(t, x) \subset I, \quad I = [x - a_{\max}t, x + a_{\max}t].$$

La propagation de l'information se fait donc à vitesse finie. Il s'agit d'une propriété très générale des systèmes hyperboliques de lois de conservation.

On peut aussi définir le domaine d'influence d'un point (t, x) à l'instant ultérieur \bar{t} par :

$$\mathcal{I}(t, x, \bar{t}) = \{\bar{x} | \bar{x} - x = \lambda_p(\bar{t} - t), \quad p = 1, \dots, m\}$$

En particulier, quand on ne précise pas, t est pris comme étant l'instant initial. Là encore, il s'agit d'un ensemble de m points comme le montre la Figure 1.12 dont on peut montrer qu'il est contenu dans un cône associé à une propagation à vitesse finie de l'information.

1.3.3 Résolution du problème de Riemann

Pour le moment, nous avons mis l'accent sur les courbes caractéristiques et les variables caractéristiques sont un peu restées dans l'ombre. Le fait que l'on traite un système apporte des différences par rapport au cas scalaire d'une équation, et pas seulement à travers la multiplication des vitesses de propagation. Considérons donc le problème de Riemann.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U + A \partial_x U = 0, \\ U^0(x) = \begin{cases} U_G = \sum_{p=1}^m \alpha_p r_p & x < 0, \\ U_D = \sum_{p=1}^m \beta_p r_p & x \geq 0, \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.34)$$

où les coefficients α_p et β_p ne sont autres que les coordonnées de des deux états U_G et U_D dans la base de vecteurs propres de A .

Prenons pour l'exemple $m = 3$ et construisons la solution qui se trouve être constituée d'états constants séparés par des discontinuités qui se propagent comme représenté sur la Figure 1.13. Il est intéressant de constater que le saut entre U_G et U^* se propage à vitesse λ_1 , la vitesse la plus faible, comme on le voit sur la Figure 1.13. Cependant, le saut $U^* - U_G =$

$(\beta_1 - \alpha_1)r_1$ est la projection de $U_D - U_G$ sur la première direction caractéristique et ceci peut s'interpréter comme une condition de Rankine-Hugoniot vectorielle :

$$[F(U)] = A(U^* - U^G) = \lambda_1(U^* - U^G) = \lambda_1[U],$$

qui implique que $U^* - U^G$ est proportionnel au vecteur propre r_1 . On peut finalement décomposer la différence des deux états

$$U^D - U^G = \sum_{p=1}^m (\beta_p - \alpha_p)r_p,$$

en m sauts le long des directions propres *DANS LE PLAN DE PHASE* \mathbb{R}^m . Dans le cas où $m = 2$ ceci conduit à une construction géométrique dans \mathbb{R}^2 que l'on utilisera pour la dynamique des gaz et que l'on détaille donc ici. Dans la mesure où $U_G = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$ et $U_D = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2$, l'état intermédiaire U^* vaut donc $U^* = \beta_1 r_1 + \alpha_2 r_2$, et l'on a $U^* - U_G = (\beta_1 - \alpha_1)r_1$ et $U_D - U^* = (\beta_2 - \alpha_2)r_2$. On dit que U^* est relié à U_G par une 1-*onde* caractéristique et que U^* est relié à U_D par une 2-*onde* caractéristique. Comme le problème est linéaire, cela définit un unique point d'intersection dans le plan de phase $(U_1, U_2) \in \mathbb{R}^2$ comme on le voit sur la Figure 1.14. Toutes les ondes que l'on observe dans le cas de ce problème de Riemann ne font intervenir des discontinuités que dans une des variables caractéristiques. Par ailleurs, si $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$, alors la solution est constituée d'une unique discontinuité se déplaçant à vitesse λ_m .

Remarque 10 : Il est particulièrement important de bien faire la différence entre les deux diagrammes de la Figure 1.14, celui de gauche permettant de structurer la dynamique de propagation de l'information et celui de droite permettant de caractériser les *sauts* de la variable U le long des singularités dans l'espace des phases.

1.3.4 Application à l'équation des ondes

Nous terminons ce chapitre en mettant en œuvre les idées présentées dans ce chapitre sur le cas de l'équation des ondes où l'on choisit, par exemple, de travailler avec la perturbation de pression :

$$\begin{cases} \partial_{tt}p - c_0^2 \partial_{xx}p = 0, \\ p(0, x) = p_0(x), \\ \partial_t p(0, x) = p_1(x). \end{cases} \quad (1.35)$$

Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes peut être résolu par les techniques introduites précédemment, mais il convient dans un premier temps de repasser à un système

du premier ordre. On pose donc $w_1 = \partial_x p$, $w_2 = \partial_t p$ et $W^t = (w_1, w_2)$. La variable W est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t W + A \partial_x W = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad W^0 = \begin{pmatrix} w_1^0 \\ w_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm c_0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -c_0, \\ \lambda_2 = +c_0. \end{cases} \quad (1.37)$$

Les vecteurs propres associés s'écrivent :

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c_0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c_0 & -c_0 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{2c_0} \begin{bmatrix} c_0 & 1 \\ c_0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les variables caractéristiques sont donc $v_1 = \frac{1}{2c_0}(c_0 w_1 + w_2)$ et $v_2 = \frac{1}{2c_0}(c_0 w_1 - w_2)$. Pour la donnée initiale dans les variables caractéristiques, on a

$$v_1(t, x) = v_1^0(x - \lambda_1 t) = v_1^0(x + c_0 t) = \frac{1}{2c_0} [c_0 w_1^0(x + c_0 t) + w_2^0(x + c_0 t)],$$

$$v_2(t, x) = v_2^0(x - \lambda_2 t) = v_2^0(x - c_0 t) = \frac{1}{2c_0} [c_0 w_1^0(x - c_0 t) - w_2^0(x - c_0 t)].$$

Finalement on repasse dans les variables de départ :

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ c_0(v_1 - v_2) \end{pmatrix},$$

et tout calcul fait :

$$W(t, x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \partial_x p_0(x + c_0 t) + \frac{1}{c_0} p_1(x + c_0 t) + \partial_x p_0(x - c_0 t) - \frac{1}{c_0} p_1(x - c_0 t) \\ c_0 \partial_x p_0(x + c_0 t) + p_1(x + c_0 t) - c_0 \partial_x p_0(x - c_0 t) + p_1(x - c_0 t) \end{bmatrix},$$

où l'on retrouve la décomposition en deux ondes se propageant dans les deux directions.

Bilan

- L'information se propage le long des lignes caractéristiques ainsi que les singularités mais le fait que l'on travaille avec un système implique plusieurs vitesses de propagation de l'information qui sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de convection.
- Si la donnée initiale est régulière, la solution l'est aussi ; si la donnée initiale est singulière, cette singularité se propage le long des lignes caractéristiques à diverses vitesses comme dans le cas d'une équation linéaire

- La propagation de l'information caractérise la structure des conditions aux limites à imposer sur une frontière.
- L'aspect système apparaît de manière importante dans le fait que les sauts le long des points de discontinuité doivent se trouver dans un sous-espace propre associé à la vitesse de propagation de l'information et impose une condition dans l'espace des phase.

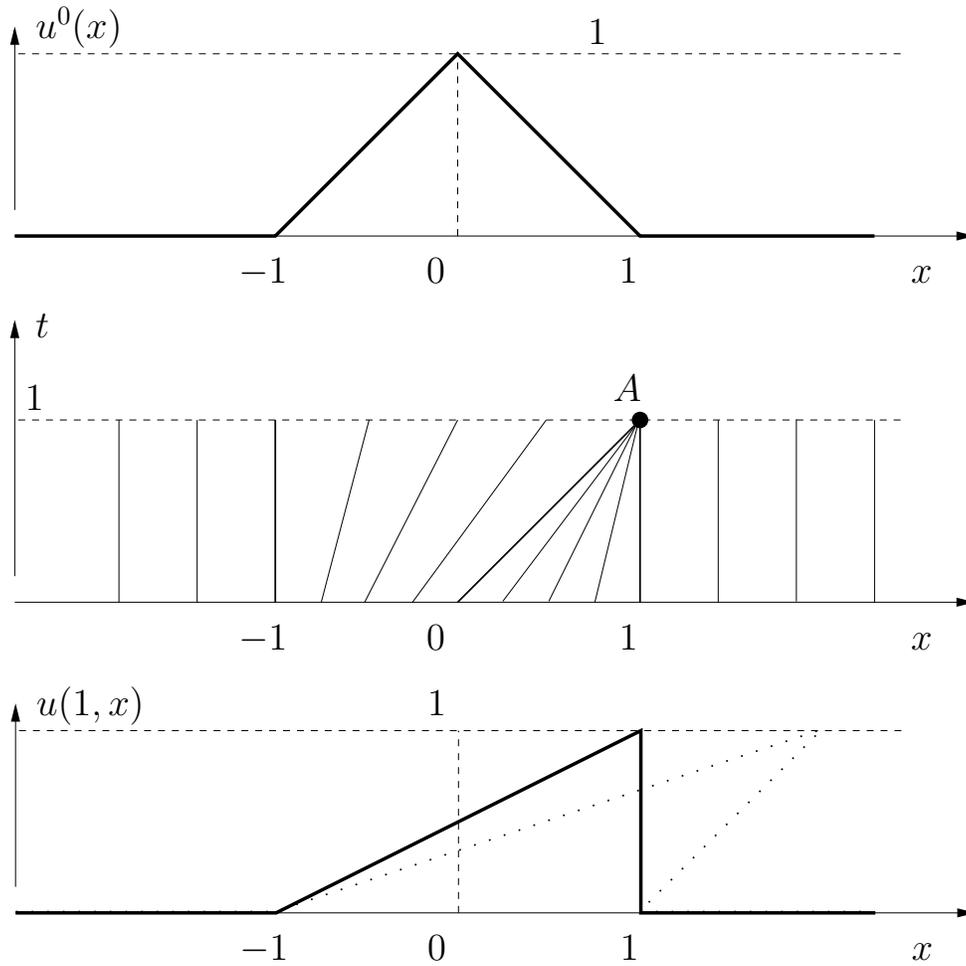


FIGURE 1.4 – Condition initiale $u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (en haut), diagramme des droites caractéristiques pour l'équation de Burgers "non visqueux" avec croisement des caractéristiques au point A à l'instant $t = 1$, solution $u(1, x)$ au temps $t = 1$ avec formation du choc (en bas en trait plein) et solution $u(2, x)$ multi-valuée au temps $t = 2$ issue de la prolongation de la méthode des caractéristiques (en bas en trait pointillé).

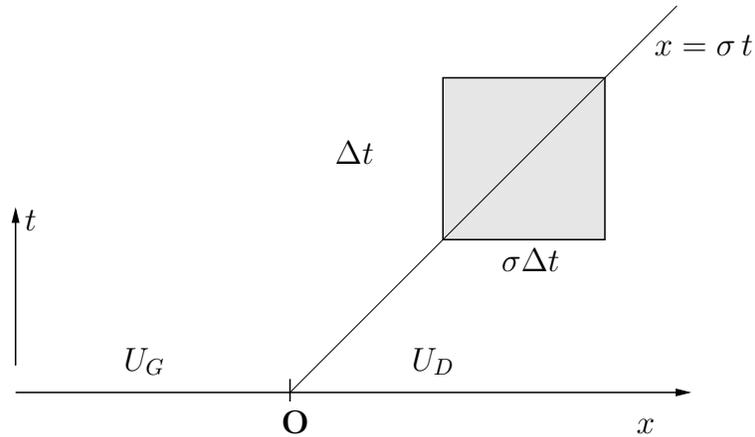


FIGURE 1.5 – Détermination de la vitesse de propagation de la discontinuité par intégration de l'EDP sur le rectangle grisé dans le diagramme des caractéristiques.

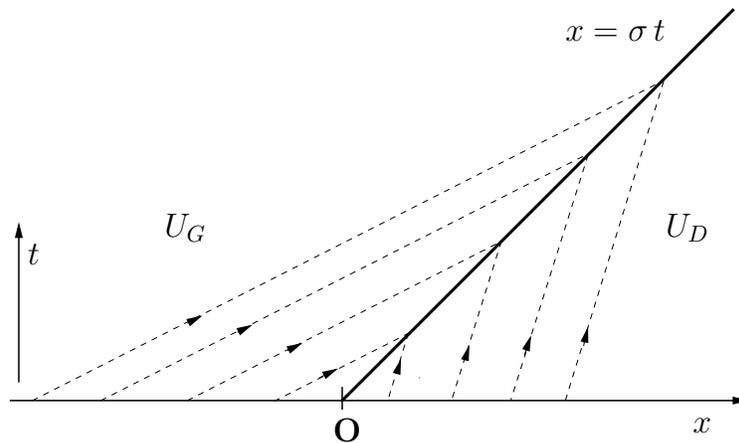


FIGURE 1.6 – Diagramme des droites caractéristiques pour le problème de Riemann avec $U_G > U_D$.

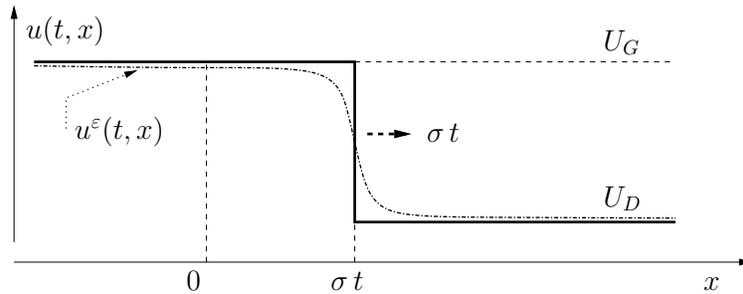


FIGURE 1.7 – Solution “faible” $u(t, x)$, pour le problème de Riemann avec $U_G > U_D$, de l’équation de Burgers dans le cas non-visqueux sous la forme d’une discontinuité se propageant à vitesse σ et son homologue sous la forme d’une onde progressive dans le cas visqueux $u^\varepsilon(t, x) = w^\varepsilon(x - \sigma t)$.

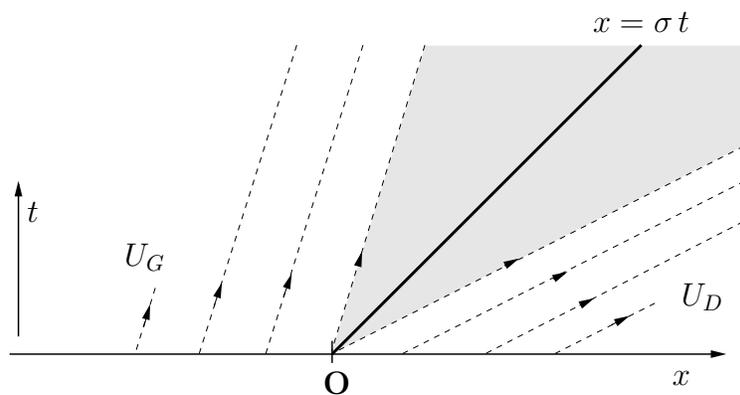


FIGURE 1.8 – Diagramme des droites caractéristiques pour le problème de Riemann avec $U_G < U_D$ et dans l’hypothèse que la solution est une discontinuité qui se propage à vitesse $\sigma = (U_G + U_D)/2$. La zone grisée représente la zone où l’on ne peut pas définir le solution à partir de la donnée initiale.

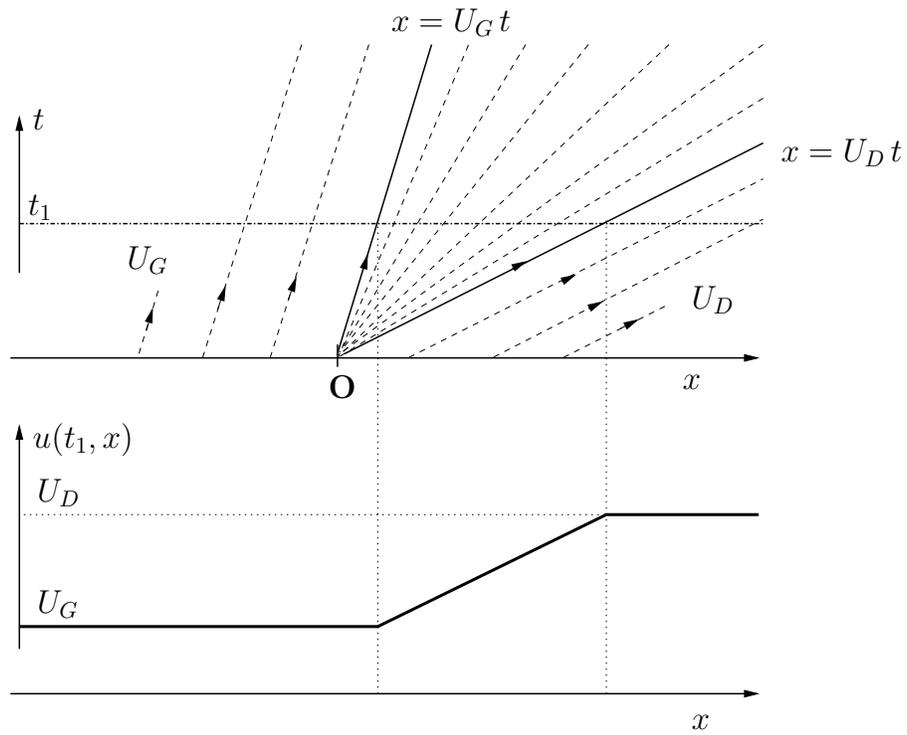


FIGURE 1.9 – Diagramme des droites caractéristiques pour le problème de Riemann avec $U_G < U_D$ et pour la solution entropique constituée d'une onde de raréfaction ou onde de détente.

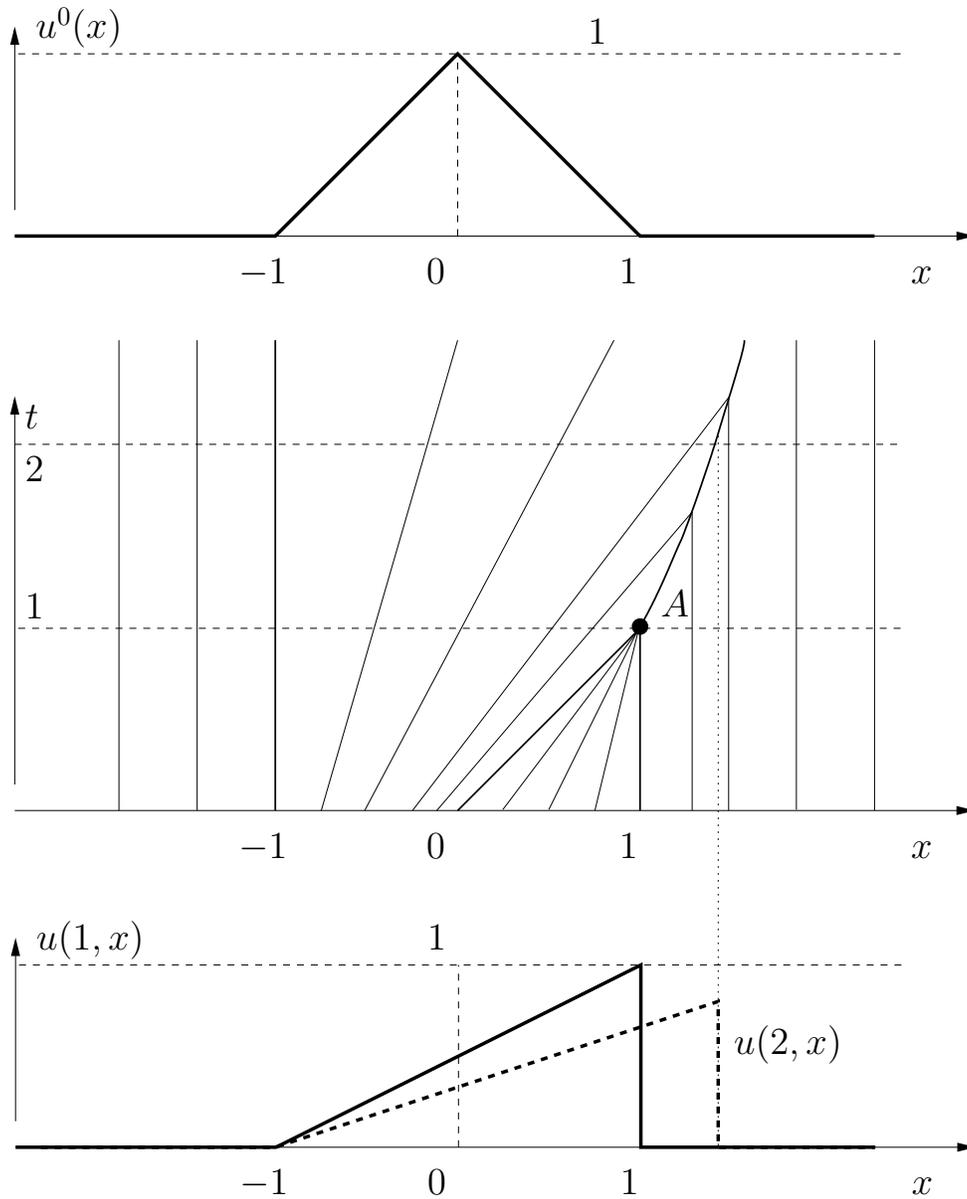
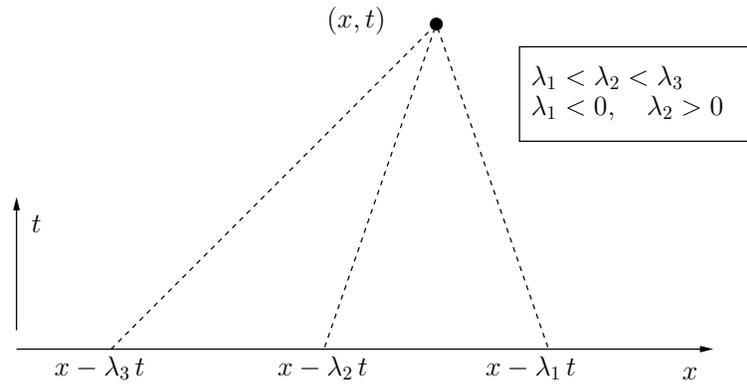
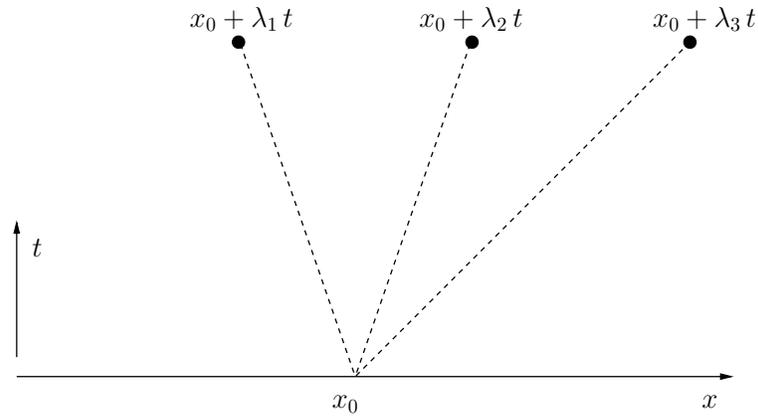


FIGURE 1.10 – Condition initiale $u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (en haut), diagramme des droites caractéristiques pour l'équation de Burgers “non visqueux” avec croisement des caractéristiques au point A à l'instant $t = 1$ et propagation de la discontinuité au cours du temps (centre) et solution $u(1, x)$ et $u(2, x)$ aux temps $t = 1$ (trait plein) et $t = 2$ (trait pointillé) avec formation et propagation de la discontinuité, puis décroissance de son amplitude (en bas).

FIGURE 1.11 – Domaine de dépendance de la solution au point (x, t) .FIGURE 1.12 – Domaine d'influence $\mathcal{I}(0, x_0, t)$ de la donnée initiale au point $(0, x_0)$.

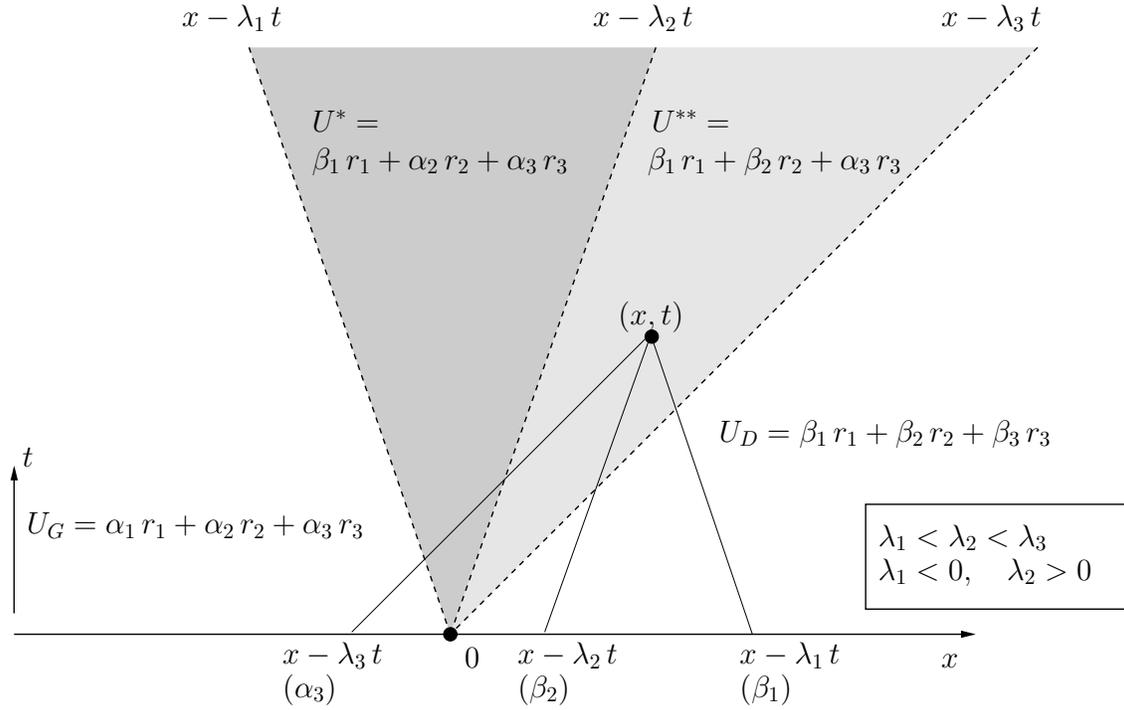


FIGURE 1.13 – Diagramme des caractéristiques pour la résolution du problème de Riemann dans le cas d’un système linéaire de trois équations en dimension 1 d’espace.

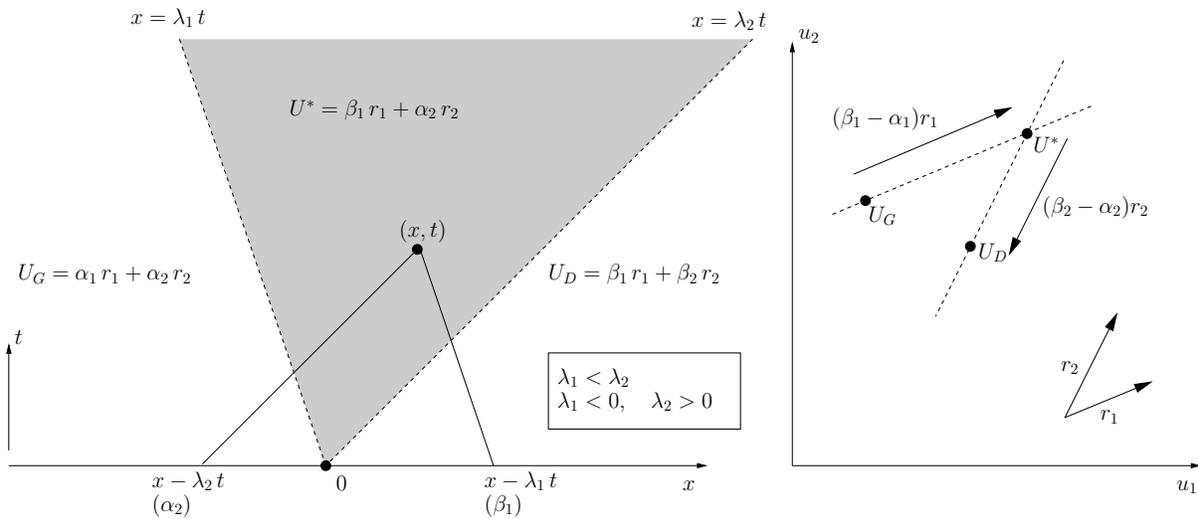


FIGURE 1.14 – Diagramme des caractéristiques et diagramme de phase pour la résolution du problème de Riemann dans le cas d’un système linéaire de deux équations en dimension 1 d’espace.

1.4 FEUILLE D'EXERCICES I

Thermodynamique - entropie

Rappel des équations de conservation de Navier-Stokes.

— conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \partial_x \cdot (\rho v) = 0$$

— conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x \cdot (\rho v \otimes v + p\mathcal{I}) = \partial_x \cdot (\Pi) + \rho f \quad (1.38)$$

— conservation de l'énergie totale

$$\partial_t(\rho \mathcal{E}) + \partial_x \cdot (\rho \mathcal{E} v + p v) = -\partial_x \cdot q + \partial_x \cdot (\Pi \cdot v) + \rho f \cdot v \quad (1.39)$$

On rappelle aussi la relation de Gibbs dans les variables spécifiques

$$de = T ds + p \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (1.40)$$

On souhaite obtenir les équations de conservation de l'énergie interne et de l'entropie

— Evolution de l'énergie interne spécifique

$$\partial_t(\rho e) + \partial_x \cdot (\rho e v) = \rho(\partial_t e + v \cdot \partial_x e) = (-p\mathcal{I} + \Pi) : \partial_x v - \partial_x \cdot q$$

où \mathcal{I} est le tenseur d'ordre deux identité.

— Conservation de l'entropie

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x \cdot (\rho s v) = -\partial_x \left(\frac{q}{T} \right) - \frac{q \cdot \partial_x T}{T^2} + \frac{\Pi : \partial_x v}{T}$$

— Le second principe local s'exprime par l'inégalité

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x \cdot (\rho s v) \geq -\partial_x \left(\frac{q}{T} \right)$$

— ou encore par la notion de positivité des termes dissipatifs :

$$-\frac{q \cdot \partial_x T}{T^2} + \frac{\Pi : \partial_x v}{T} \geq 0$$

Exercice 1 : Détailler le calcul permettant d'obtenir l'équation de conservation sur l'énergie interne puis l'entropie à partir des équations de conservation sur l'énergie totale (1.39) et sur la quantité de mouvement (1.38) et en utilisant la relation de Gibbs (1.40).

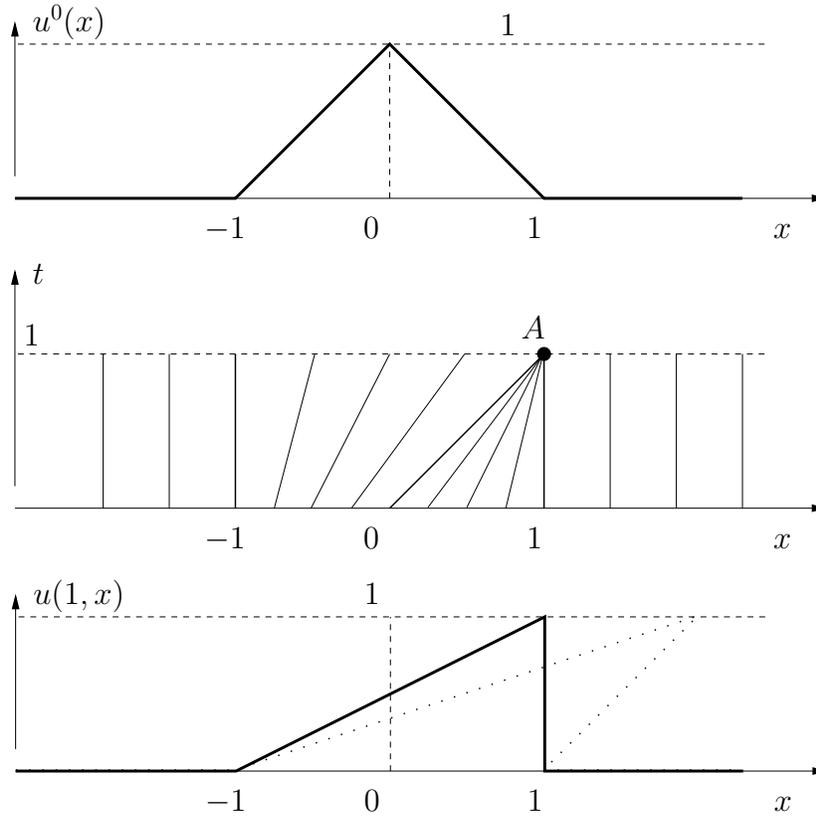


FIGURE 1.15 – Condition initiale $u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (en haut), diagramme des droites caractéristiques pour l'équation de Burgers “non visqueux” avec croisement des caractéristiques au point A à l'instant $t = 1$, solution $u(1, x)$ au temps $t = 1$ avec formation du choc (en trait plein) et solution $u(2, x)$ multi-valuée au temps $t = 2$ issue de la prolongation de la méthode des caractéristiques.

Solution multi-valuée selon les caractéristiques

Considérons donc un exemple afin d'appliquer ces idées sur le problème Cauchy pour la donnée initiale particulière que l'on appellera le problème du “petit chapeau” (Figure 1.15) du fait de la structure de sa donnée initiale :

$$u^0(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ x + 1, & x \in]-1, 0], \\ 1 - x, & x \in [0, 1[. \end{cases} \quad (1.41)$$

Les caractéristiques sont donc données par :

$$\begin{cases} x = \xi, & \xi \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ x = \xi + (\xi + 1)t, & \xi \in]-1, 0], \\ x = \xi + (1 - \xi)t, & \xi \in [0, 1[. \end{cases} \quad (1.42)$$

On constate que la solution est bien définie ainsi que les caractéristiques sur l'intervalle de temps $[0, 1[$. Pour $t = 1$, on a représenté la forme de la solution pour laquelle les caractéristiques dont le pied appartient à $x \in [0, 1]$ se sont focalisées en un point A et une discontinuité s'est formée. Si l'on cherche à prolonger dans le temps une solution au sens des caractéristiques, elle devient multi-valuée comme le montre la donnée de $u(2, x)$ en trait pointillé sur la Figure 1.15 en bas.

Exercice 2 : On se place à l'instant $t = 2$. Montrer que pour les points situés entre $x = 1$ et $x = 2$, on peut identifier trois courbes caractéristiques passant par le point (x, t) permettant de remonter à trois points ξ distincts pour l'évaluation de la donnée initiale. On expliquera alors pourquoi on obtient une solution multi-valuée, c'est-à-dire une solution prenant en x plusieurs valeurs et qui n'a donc plus de sens. On fera le lien avec la Figure 1.15 en bas et la courbe en pointillé.

Exercice 3 : Montrer que la solution du problème de Cauchy pour u^0 croissante est bien définie pour tout temps au sens des caractéristiques.

En fait il est possible de quantifier la formation de singularité et en particulier le temps d'apparition de telles singularités. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème : Soit $u^0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^∞ et l'on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(u^0)'(x_0) < 0$. Alors il existe $T^* > 0$, que l'on appelle temps d'explosion :

$$T^* = \frac{-1}{\min_{x \in \mathbb{R}} (u^0)'(x)} \quad (1.43)$$

tel que pour tout temps t , $t \in [0, T^*[$, le problème de Cauchy admet une unique solution, dite régulière, donnée par la méthode des caractéristiques. Pour $t \rightarrow T^*$ la solution devient discontinue et ne conserve un sens que sous la forme de ce que l'on appelle une "solution faible".

Exercice (Facultatif) 4 : Démontrer le théorème précédent qui montre que quelque soit la régularité de la donnée initiale, la solution peut développer des singularités en temps fini.

Problème de Riemann : multiplicité de solutions

Exercice 5 : Montrer que l'ensemble infini des fonctions :

$$U(t, x) = \begin{cases} U_G, & x < S_m t, \\ U_m, & x \in]S_m t, U_m t[, \\ \frac{x}{t}, & x \in]U_m t, U_D t[, \\ U_D, & x \in]U_D t, +\infty[, \end{cases} \quad (1.44)$$

pour tout $U_m \in [U_G, U_D]$, où $S_m = \frac{1}{2}(U_G + U_m)$, est un ensemble de solutions au sens faible de Burgers non visqueux et construire les diagrammes de droites caractéristiques correspondant ainsi que la forme des solutions. Parmi ces solutions, la seule admissible est la solution continue car toutes les autres comportent des chocs non admissibles, ou autrement dit non entropiques, i.e. instables par perturbation visqueuse. Seule la solution continue est donc physique.

Trafic Routier

Exercice 6 : Modélisation du trafic routier (d'après Leveque).

On considère l'équation de conservation sur la densité de voiture $\rho(t, x)$:

$$\partial_t \rho + \partial_x (f(\rho)) = 0,$$

où $f(\rho)$ désigne le flux de voiture. En général, une modélisation standard montre que le flux s'écrit comme le produit de la densité locale par une vitesse u , qui doit ici, pour ne pas complexifier le modèle, être donnée comme une fonction de ρ . Une possibilité permettant de modéliser l'arrêt du trafic quand la densité de voiture atteint un maximum ρ_{\max} ainsi que la limitation de vitesse u_{\max} quand la densité de voiture est faible, est donnée par

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

La vitesse u_{\max} représente donc la vitesse maximum autorisée et ρ_{\max} une densité maximum correspondant à un bouchon où les voitures sont pare-choc contre pare-choc, à l'arrêt. L'expression du flux de départ est donc :

$$f(\rho) = \rho u = \rho u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

Les lignes caractéristiques sont alors données par :

$$\frac{dX(t)}{dt} = f'(\rho(t, X(t))) = u_{\max} \left(1 - \frac{2\rho(t, X(t))}{\rho_{\max}} \right),$$

et ρ est constant le long des caractéristiques qui sont donc des droites. La forme du flux est telle qu'il est concave (contrairement à Burgers où il est convexe) et les discontinuités admissibles sont telles que $\rho_G < \rho_D$ (le démontrer, en étudiant les caractéristiques).

- I. Résoudre le problème de Riemann pour $\rho_G = \frac{1}{2}\rho_{\max}$, $\rho_D = \rho_{\max}$, qui correspond au feu rouge. Expliquer ce qui se passe en traçant tant le diagramme des caractéristiques dans ce cas, que l'allure de la solution à deux instants successifs.
- II. Résoudre le problème de Riemann pour $\rho_G = \rho_{\max}$, et $\rho_D = \frac{1}{2}\rho_{\max}$ ce qui correspond au passage d'un feu vert à l'instant $t = 0$. Expliquer ce qui se passe en traçant tant le diagramme des caractéristiques dans ce cas, que l'allure de la solution à deux instants successifs.

Exercice 7 : Modélisation du trafic routier (bis).

On reprend le cadre de l'exercice précédent. Pour chacun des deux cas de problèmes de Riemann résolus, on représentera le diagramme dans le plan (x, t) des trajectoires des véhicules (le lecteur notera bien que dans le cas de l'équation de Burgers, les trajectoires des particules sont exactement les droites caractéristiques et ne demandent donc pas de traitement supplémentaire). Ces trajectoires seront notées $Y(t)$; elles sont telles que

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} x = u(\rho(t, Y(t))) \\ Y(0) = x^0. \end{cases} \quad (1.45)$$

On montrera, en particulier que les trajectoires des véhicules, dans le cas de la présence d'une onde de choc (cas I), traversent cette onde (ce n'est pas le cas dans le cadre linéaire!!).

Exercice 8 : Modélisation du trafic routier (ter - DIFFICILE et facultatif).

On reprend encore le cadre de l'exercice précédent du trafic routier, mais se propose de résoudre un problème de Cauchy différent avec une donnée initiale sous la forme de la perturbation par une fonction Gaussienne d'un état constant. On suppose que $\rho_0(x)$ est donnée par $\rho_0(x) = \bar{\rho}_0 + \varepsilon \rho_0^1(x)$ où $\rho_0^1(x)$ est une Gaussienne de centre $x = 0$, d'intégrale 1 et d'écart type η .

- I. Résoudre qualitativement, dans l'hypothèse ε petit, le problème de Cauchy (donner l'allure du diagramme des caractéristiques et l'évolution de la donnée initiale pour plusieurs instants successifs). Y a-t-il formation d'un choc? Si oui, donner une estimation de sa vitesse de propagation et de l'ordre de grandeur de l'amplitude de la discontinuité.
- II. Dans la limite de ε petit, on peut linéariser le problème autour de l'état constant $\bar{\rho}_0$. Donner l'équation linéarisée sur la perturbation $\rho_0^1(x)$. Quelle en est la solution? Estimer la différence entre la solution du problème non-linéaire et celle du problème linéarisé (indication : donner une idée du temps de formation de la discontinuité en fonction de η et discuter en fonction de la valeur de η par rapport à 1). Conclure sur la validité de la linéarisation.

1.5 FEUILLE D'EXERCICES I – CORRECTION

1.5.1 Exercice 1

Equations En utilisant la convention d'Einstein, les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j - p \delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (-q_j + \tau_{jk} v_k)}{\partial x_j} + \rho f_k v_k \quad (1.48)$$

où ρ représente la densité, $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ la vitesse, p la pression et E l'énergie totale. \underline{f} est une force volumique. L'énergie totale E peut s'écrire comme la somme de l'énergie interne e et de l'énergie cinétique, $E = e + \underline{v}^2/2$.

Les quantités $\underline{\tau}$ (tenseur des contraintes) et \underline{q} (flux de chaleur) dépendent du fluide considéré. Pour un fluide parfait newtonien, on a

$$\underline{\tau} = 2\mu \frac{\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T}{2} - \frac{2\mu}{3} (\nabla \cdot \underline{u}) \mathbb{1}$$

et

$$\underline{q} = -K \nabla T$$

Par ailleurs on a l'équation d'état

$$p = \rho r T = (\gamma - 1) \rho e. \quad (1.49)$$

Energie interne On peut réécrire le membre de gauche de (1.47) sous la forme

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) u_i + \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

donc en utilisant (1.46) on obtient

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i$$

On peut multiplier cette équation par u_i . On obtient

$$\frac{\partial (u_i u_i / 2)}{\partial t} + u_j \frac{\partial (u_i u_i / 2)}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} u_i + f_i u_i$$

D'autre part (1.48) peut se réécrire

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u_j \frac{\partial E}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (-q_j + \tau_{jk} v_k)}{\partial x_j} + f_k v_k$$

donc en soustrayant les 2 dernières équations on obtient

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-q_j + \tau_{jk} v_k)}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} u_i$$

soit finalement

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \underbrace{(-p\delta_{ij} + \tau_{ij})}_{(-p\mathbb{1} + \underline{\tau}) : \nabla \underline{u}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

Entropie On part de l'équation de Gibbs

$$T dS = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (1.50)$$

qui nous permet d'évaluer la dérivée matérielle de l'entropie :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) &= \frac{\rho}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + v_i \frac{\partial e}{\partial x_i} \right) - \frac{p}{\rho T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{T} \left((-p\mathbb{1} + \underline{\tau}) : \nabla \underline{u} - \nabla \cdot \underline{q} + p \nabla \cdot \underline{u} \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(\underline{\tau} : \nabla \underline{u} - \nabla \cdot \underline{q} \right) \end{aligned}$$

Notons que

$$-\frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q} = -\nabla \cdot \frac{\underline{q}}{T} - \underbrace{\underline{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2}}_{+K \frac{(\nabla T)^2}{T^2} \geq 0}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{\tau} : \nabla \underline{u} &= \mu \sum_{i,j} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \mu \left[\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

1.5.2 Exercice 2

Considérons un point (x_0, t_0) tel que $0 \leq x_0 \leq t_0$ et $t_0 \geq 1$. Comme cela est illustré en Figure 1.16, on peut tracer 3 caractéristiques passant par ce point (en rouge sur la figure) :

— $x = x_0$ le long de laquelle $u = 0$,

— $x = \xi_2 + (1 - \xi_2)t$ avec

$$\xi_2 = \frac{x_0 - t_0}{1 - t_0}$$

Le long de cette caractéristique on a

$$u = \frac{1 - x_0}{1 - t_0}$$

— $x = \xi_3 + (1 + \xi_3)t$ avec

$$\xi_3 = \frac{x_0 - t_0}{1 + t_0}$$

Le long de cette caractéristique on a

$$u = \frac{1 + x_0}{1 + t_0}$$

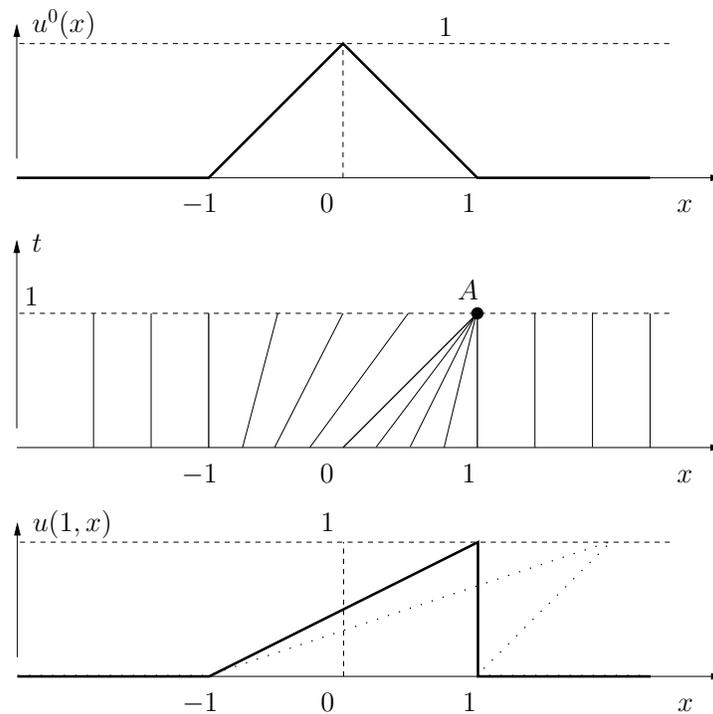


FIGURE 1.16 – Diagramme des caractéristiques pour l'équation de Burgers et la condition initiale "chapeau".

1.5.3 Exercices 3 et 4

Condition initiale croissante. La caractéristique issue du point $(\xi, 0)$ a pour équation

$$x = \xi + u_0(\xi)t$$

Deux caractéristiques issues de ξ_1 et ξ_2 se croisent donc au temps $t(\xi_1, \xi_2)$ tel que

$$\xi_1 + u_0(\xi_1)t = \xi_2 + u_0(\xi_2)t$$

ce qui donne

$$t(\xi_1, \xi_2) = -\frac{\xi_2 - \xi_1}{u_0(\xi_2) - u_0(\xi_1)}$$

u_0 étant croissante, on a bien $t \leq 0$: les caractéristiques en se croisent jamais pour $t \geq 0$. La solution est donc bien définie pour tout temps au sens des caractéristiques.

Condition initiale générale. Dans tous les cas, $\tau(\xi_1, \xi_2) = t^{-1}(\xi_1, \xi_2)$ est donné par l'opposé de la pente de la corde joignant les points $(\xi_i, u_0(\xi_i))$:

$$-\tau(\xi_1, \xi_2) = \frac{u_0(\xi_2) - u_0(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \geq \min_{\xi} u'_0(\xi) \equiv -\tau^*$$

Si u_0 n'est pas croissante, on a $\tau^* \geq 0$. L'équation précédente donne

$$\tau(\xi_1, \xi_2) \leq \tau^*$$

On a donc deux possibilités :

- $t(\xi_1, \xi_2) \leq 0$, c'est à dire deux caractéristiques qui ne se croisent pas pour $t > 0$,
- $t(\xi_1, \xi_2) \geq T^* \equiv 1/\tau^*$, c'est à dire deux caractéristiques qui se croisent après un temps supérieur à T^* .

Cela prouve donc que pour $t \leq 1/\tau^*$ la solution est bien définie au sens des caractéristiques.

Supposons que $u'(\xi_0) = \tau^*$. On peut alors s'intéresser au temps de croisement de deux caractéristiques issues de points voisins de ξ_0 :

$$\tau(\delta) \equiv \tau(\xi_0, \xi_0 + \delta) = -\frac{u_0(\xi_0 + \delta) - u_0(\xi_0)}{\delta}$$

On a ainsi

$$\tau(\delta) \rightarrow \tau^* \text{ quand } \delta \rightarrow 0$$

On peut donc trouver au moins deux caractéristiques qui se croisent pour $t \geq 1/\tau^*$.

1.5.4 Exercice 5

On s'intéresse à la résolution de l'équation de Burgers (au sens faible) avec la condition initiale suivante :

$$\begin{cases} u(0, x) = u_g, & x \leq 0 \\ u(0, x) = u_d, & x > 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

dans le cas où $u_g \leq u_d$. Dans ce cas, le diagramme des caractéristiques est représenté dans la Figure 2 : on voit que les caractéristiques nous permettent de donner une valeur unique à $u(t, x)$ pour $x \leq u_g t$ et $x \geq u_d t$, mais ne donnent aucune information pour $u_g t < x < u_d t$.

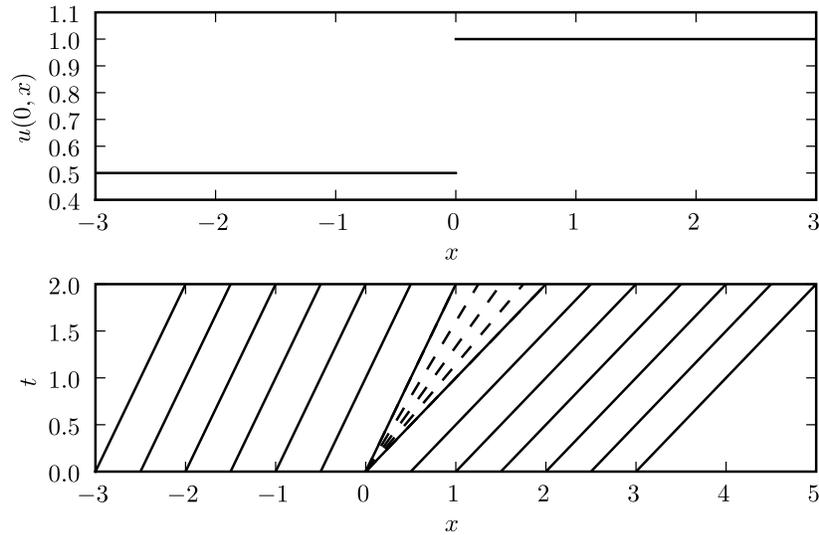


FIGURE 1.17 – Problème de Riemann pour l'équation de Burgers avec $u_g = 1/2$ et $u_d = 1$. Les lignes continues représentent les caractéristiques tracées à partir de la condition initiale. Les lignes pointillées sont les caractéristiques dans la détente.

Considérons la famille fonctions suivantes

$$\begin{cases} u(x, t) = u_g & x < S_m t \\ u(x, t) = u_m & S_m t < x < u_m t \\ u(x, t) = x/t & u_m t < x < u_d t \\ u(x, t) = u_d & x > u_d t \end{cases} \quad (1.52)$$

où $u_g \leq u_m \leq u_d$ et S_m est la vitesse donnée par :

$$S_m = \frac{u_g + u_m}{2}$$

Un exemple de telle fonction est donné en Figure 1.18.

Toutes ces fonctions vérifient bien la condition initiale (1.51). Afin de montrer qu'il s'agit bien d'une solution faible, montrons tout d'abord que là où elle est \mathcal{C}^1 est vérifiée l'équation de Burgers au sens fort : pour $x < S_m t$, $S_m t < x < u_m t$ et $x > u_d t$ cela ne pose aucune difficulté car la fonction est constante. Pour $u_m t < x < u_d t$ on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{t^2}$$

l'équation est donc aussi vérifiée au sens fort.

Il ne reste plus qu'à vérifier que les discontinuités vérifient le relation de Rankine-Hugoniot. En $x = u_m t$ et $x = u_d t$ la fonction est continue, la relation est donc automatiquement vérifiée. En $x = S_m t$, la vitesse de propagation de la discontinuité s'écrit

$$\sigma = \frac{u_m^2/2 - u_g^2/2}{u_m - u_g} = \frac{u_m + u_g}{2}$$

On reconnait ici l'expression de S_m , la relation de Rankine-Hugoniot est donc bien vérifiée.

Toutes les solutions définies par (1.52) sont donc bien des solutions faibles du problème de Riemann.

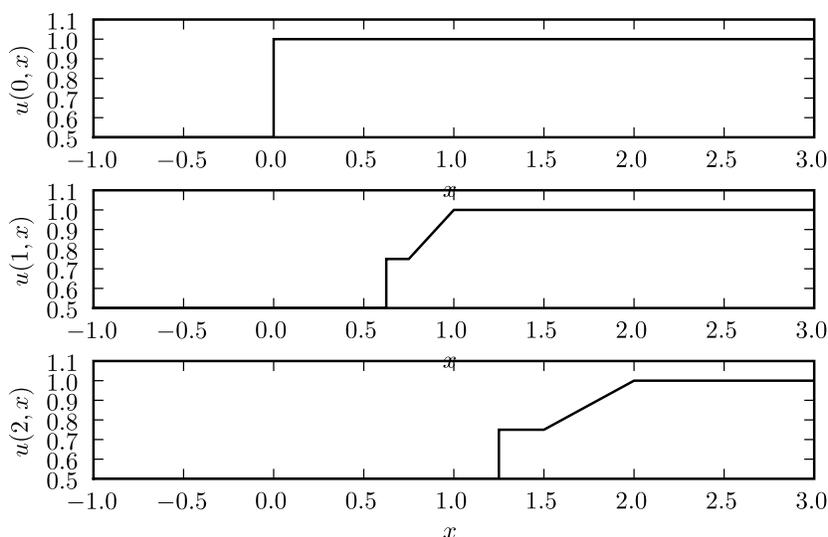


FIGURE 1.18 – Fonction définie par (1.52) pour $u_g = 1/2$, $u_m = 3/4$ et $u_d = 1$

On a donc trouvé une famille infinie de solutions faibles du problème de Riemann. Il faut donc imposer d'autres relations afin de trouver les solutions *physiques* de l'équation.

Remarque 1.5.1. *On aurait pu utiliser la formulation faible de l'équation de Burgers et montrer qu'elle est bien vérifiée pour toutes les fonctions définies par (1.52) et pour toute fonction test. Ceci est fait à la fin du document.*

1.5.5 Exercice 6

L'équation du trafic routier modélise un flux de voitures qui roule d'autant moins vite que la densité de voitures ρ est importante : on considère ici que $0 \leq \rho \leq 1$ et que la vitesse est donnée $u(\rho) = (1 - \rho)$.

Il s'agit d'une version adimensionalisée de l'équation du trafic routier, où la densité a été divisée par la densité maximale ρ_{max} (celle obtenue lorsque les voitures roulent pare-choc contre pare-choc), et où la vitesse a été divisée par la vitesse maximale autorisée u_{max} .

La conservation du nombre de voitures s'écrit donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (1.53)$$

où le flux est donné par $f(\rho) = u(\rho)\rho$. Notons que le flux, représenté en Figure 1.19, est cette fois concave.

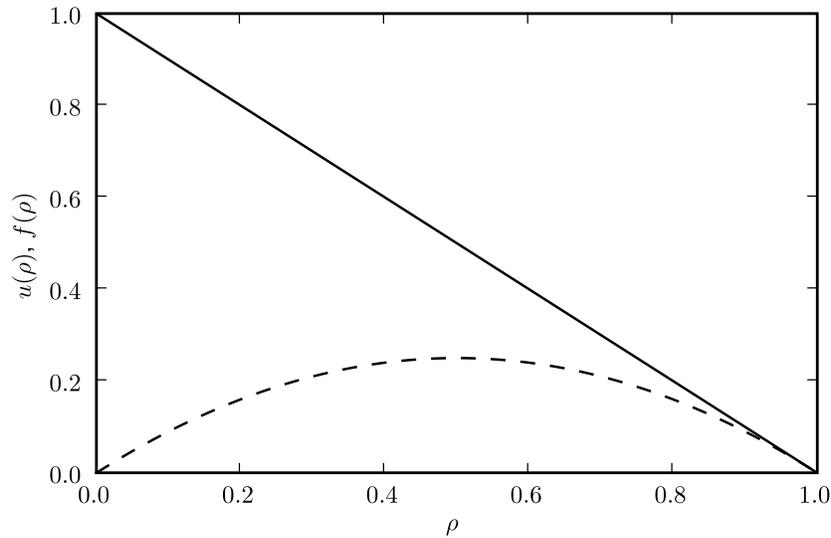


FIGURE 1.19 – Vitesse (en trait plein) et flux (en pointillés) pour l'équation du trafic routier.

Dans ce cas, les caractéristiques sont données par

$$\frac{dX(t)}{dt} = 1 - 2\rho(t, X(t))$$

Notons que cette fois, cette équation diffère de celle des trajectoires :

$$\frac{dY(t)}{dt} = u = 1 - \rho(t, Y(t))$$

Feu rouge.

On considère tout d'abord le cas d'un feu passant au rouge alors que la densité de voiture est $\rho = 1/2$. On peut modéliser ce cas par un problème de Riemann où $\rho_g = 1/2$ et $\rho_d = 1$. Le diagramme des caractéristiques est donné en Figure 1.20. On voit que la solution doit être un choc se déplaçant à une vitesse négative. La vitesse est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\sigma = \frac{\rho_d(1 - \rho_d) - \rho_g(1 - \rho_g)}{\rho_d - \rho_g} = -\frac{1}{2}$$

On vérifie que cette solution est entropique.

Les trajectoires sont représentées en Figure 1.21. On voit qu'elles traversent le choc, ce qui n'a rien d'étonnant : il s'agit de voitures qui avançaient puis se retrouvent arrêtées au feu.

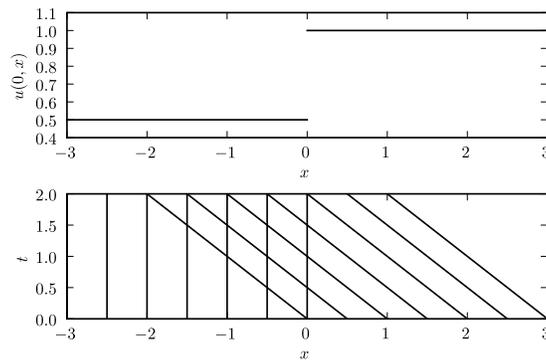


FIGURE 1.20 – Equation du trafic routier : condition initiale et caractéristiques pour le problème de Riemann avec $\rho_g = 1/2$ et $\rho_d = 1$.

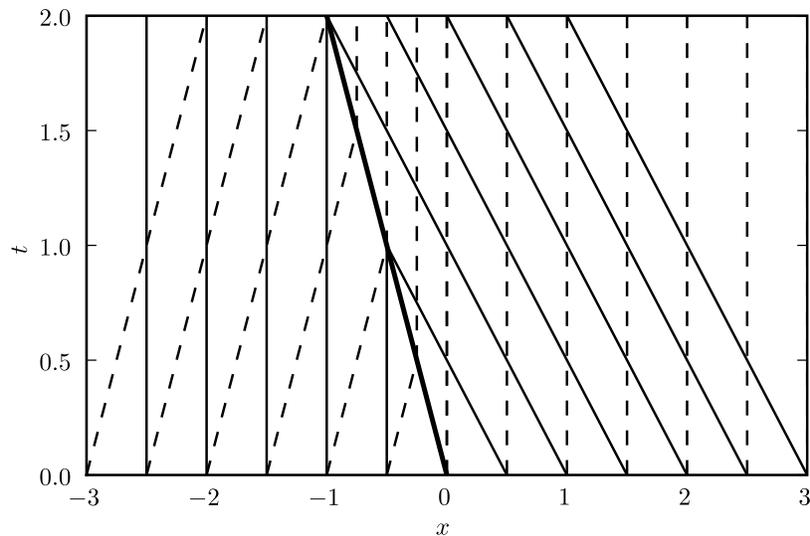


FIGURE 1.21 – Equation du trafic routier : caractéristiques (trait fin), trajectoires (pointillés) et discontinuité (trait épais) pour le problème de Riemann avec $\rho_g = 1/2$ et $\rho_d = 1$.

Feu vert.

On considère cette fois le cas où $\rho_g = 1$ et $\rho_d = 1/2$. On a cette fois une onde de détente, les chocs n'étant pas entropiques (le flux étant concave l'innégalité caractérisant les discon-

tinuités entropiques s'écrit $\rho_g \leq \rho_g$). Cela signifie que les voitures démarrent progressivement au fur et à mesure que celles situées devant elles s'éloignent. Plus le temps avance, plus les voitures qui étaient initialement loin du feu commencent à rouler.

Plaçons nous dans la région correspondant à la détente, $-t \leq x \leq 0$. On sait que la solution w dans ce domaine est régulière et qu'elle ne dépend que de $\xi = x/t$. On doit donc avoir

$$-\frac{x}{t^2}W'(\xi) + \frac{1}{t}f'(W)W'(\xi) = 0$$

soit

$$W(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}$$

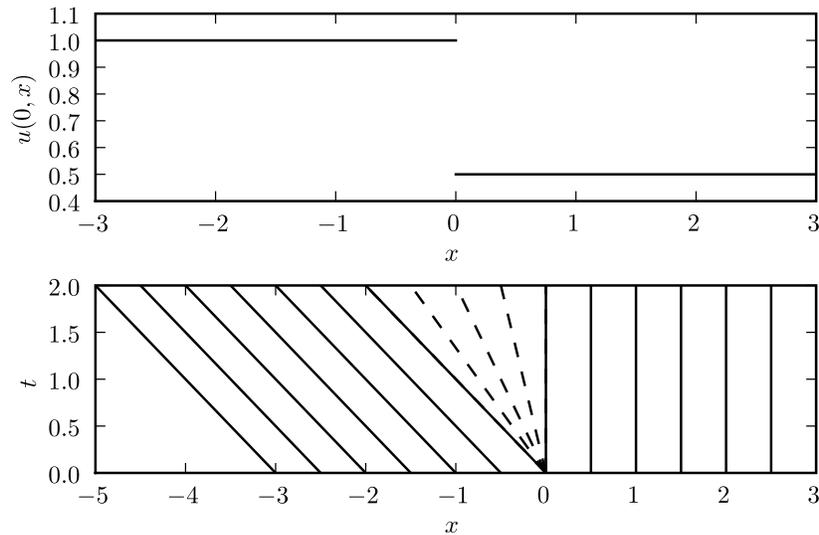


FIGURE 1.22 – Equation du trafic routier : condition initiale et caractéristiques pour le problème de Riemann avec $\rho_g = 1$ et $\rho_d = 1/2$. Les lignes continues représentent les caractéristiques tracées à partir de la condition initiale. Les lignes pointillées sont les caractéristiques dans la détente.

1.5.6 Une autre approche pour montrer que (1.52) définit bien des solutions faibles du problème de Riemann

Montrons que toute cette famille de fonctions est solution faible de l'équation de Burgers, i.e. vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx + \int_{-\infty}^{\infty} u(0, x) \varphi(0, x) dx = 0 \quad (1.54)$$

pour toute fonction test régulière φ .

Pour cela, on introduit les domaines suivants, tels que représentés en Figure 1.23 :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \{(x, t) \text{ tels que } x < S_m t\} \\ \mathcal{D}_2 &= \{(x, t) \text{ tels que } S_m t < x < u_m t\} \\ \mathcal{D}_3 &= \{(x, t) \text{ tels que } u_m t < x < u_d t\} \\ \mathcal{D}_4 &= \{(x, t) \text{ tels que } x > u_d t\}\end{aligned}$$

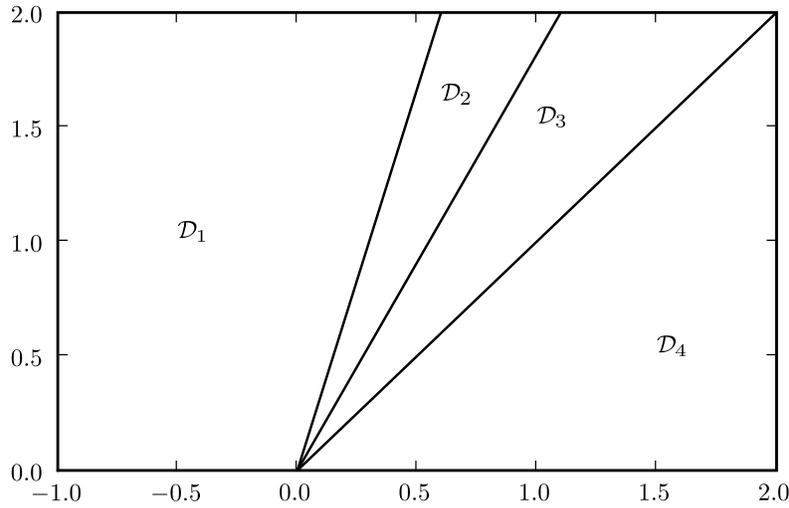


FIGURE 1.23 – Domaines d'intégration.

On rappelle la formule de Green pour l'intégration par partie en plusieurs dimensions :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f n_i dS$$

où $\underline{n} = (n_1, n_2)$ est la normale extérieure à Ω .

Pour toute fonction test φ on peut alors décomposer (1.54) en

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx + \int_{-\infty}^{\infty} u(0, x) \varphi(0, x) dx = \\ \int_{\mathcal{D}_1} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx + \int_{\mathcal{D}_2} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx + \int_{\mathcal{D}_3} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx \\ \int_{\mathcal{D}_4} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx + \int_{-\infty}^0 u(0, x) \varphi(0, x) dx + \int_0^{\infty} u(0, x) \varphi(0, x) dx\end{aligned}$$

On peut alors évaluer chacun des termes :

$$T_1 \equiv \int_{\mathcal{D}_1} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx + \int_{-\infty}^0 u(0, x) \varphi(0, x) dx =$$

$$\int_{\mathcal{D}_1} \varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} dt dx - \int_{x < 0} u(0, x) \varphi(0, x) dx -$$

$$\int_{x=S_m t} u(x, t) \varphi(x, t) n_t + \frac{u(x, t)^2}{2} \varphi(x, t) n_x dl + \int_{-\infty}^0 u(0, x) \varphi(0, x) dx$$

Le long de la droite $x = S_m t$, on a $n_x = 1/\sqrt{1 + S_m^2}$ et $n_t = S_m/\sqrt{1 + S_m^2}$ donc

$$T_1 = \int_{x=S_m t} \varphi(x, t) \left(u_g \frac{S_m}{\sqrt{1 + S_m^2}} + \frac{u_g^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + S_m^2}} \right) dl$$

où l désigne l'abscisse curviligne le long de la demie droite $x = S_m t$ pour $t \geq 0$. De même

$$T_2 \equiv \int_{\mathcal{D}_2} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx =$$

$$\int_{\mathcal{D}_2} \varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} dt dx -$$

$$\int_{x=S_m t} u(x, t) \varphi(x, t) n_t + \frac{u(x, t)^2}{2} \varphi(x, t) n_x dl + \int_{x=u_m t} u(x, t) \varphi(x, t) n_t + \frac{u(x, t)^2}{2} \varphi(x, t) n_x dl$$

Le long de la droite $x = S_m t$, on a cette fois $n_x = -1/\sqrt{1 + S_m^2}$ et $n_t = -S_m/\sqrt{1 + S_m^2}$. D'autre part le long de $x = u_m t$ on a $n_x = 1/\sqrt{1 + u_m^2}$ et $n_t = u_m/\sqrt{1 + u_m^2}$, donc

$$T_2 = - \int_{x=S_m t} \varphi(x, t) \left(u_m \frac{S_m}{\sqrt{1 + S_m^2}} + \frac{u_m^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + S_m^2}} \right) dl +$$

$$\int_{x=u_m t} \varphi(x, t) \left(u_m \frac{u_m}{\sqrt{1 + u_m^2}} + \frac{u_m^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + u_m^2}} \right) dl$$

On a ensuite

$$T_3 \equiv \int_{\mathcal{D}_3} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx =$$

$$\int_{\mathcal{D}_3} \varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} dt dx -$$

$$\int_{x=u_m t} u(x, t) \varphi(x, t) n_t + \frac{u(x, t)^2}{2} \varphi(x, t) n_x dl + \int_{x=u_d t} u(x, t) \varphi(x, t) n_t + \frac{u(x, t)^2}{2} \varphi(x, t) n_x dl$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right] = 0$$

on a

$$T_3 = - \int_{x=u_m t} \varphi(x, t) \left(u_m \frac{u_m}{\sqrt{1+u_m^2}} + \frac{u_m^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+u_m^2}} \right) dl + \\ \int_{x=u_d t} \varphi(x, t) \left(u_d \frac{u_d}{\sqrt{1+u_d^2}} + \frac{u_d^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+u_d^2}} \right) dl$$

Et enfin

$$T_4 \equiv \int_{\mathcal{D}_4} -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt dx + \int_0^\infty u(0, x) \varphi(0, x) dx = \\ \int_{\mathcal{D}_4} \varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} dt dx - \int_{x>0} u(0, x) \varphi(0, x) dx - \\ \int_{x=u_d t} u(x, t) \varphi(x, t) n_t + \frac{u(x, t)^2}{2} \varphi(x, t) n_x dl + \int_{-\infty}^0 u(0, x) \varphi(0, x) dx \\ = - \int_{x=u_d t} \varphi(x, t) \left(u_d \frac{u_d}{\sqrt{1+u_d^2}} + \frac{u_d^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+u_d^2}} \right) dl$$

On a finalement

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \int_{x=S_m t} \varphi(x, t) \left(u_g \frac{S_m}{\sqrt{1+S_m^2}} + \frac{u_g^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+S_m^2}} \right) dl \\ - \int_{x=S_m t} \varphi(x, t) \left(u_m \frac{S_m}{\sqrt{1+S_m^2}} + \frac{u_m^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+S_m^2}} \right) dl \\ \int_{x=S_m t} \frac{\varphi(x, t)}{\sqrt{1+S_m^2}} \left(S_m u_g + \frac{u_g^2}{2} - S_m u_m - \frac{u_m^2}{2} \right) dl = 0$$

car

$$S_m = \frac{u_g + u_m}{2}$$

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

DEVOIR À LA MAISON I

Problème de Riemann : multiplicité de solutions

Exercice 1 : Soient $U_G < U_D$, deux états constants droite et gauche. Pour tout $U_m \in [U_G, U_D]$, un état médiant constant, on définit la vitesse d'onde $S_m = \frac{1}{2}(U_G + U_m)$.

1. Montrer que l'ensemble infini des fonctions de la forme :

$$U(t, x) = \begin{cases} U_G, & x < S_m t, \\ U_m, & x \in]S_m t, U_m t[, \\ \frac{x}{t}, & x \in]U_m t, U_D t[, \\ U_D, & x \in]U_D t, +\infty[, \end{cases} \quad (1.55)$$

est un ensemble de solutions au sens faible du problème de Riemann pour l'équation de Burgers non visqueux.

2. Construire les diagrammes de droites caractéristiques correspondant dans le plan (x, t) , ainsi que la forme des solutions, dans le plan (t, u) . Pour quelle(s) valeur(s) de U_m obtient-on une solution physique.

Modélisation du Trafic Routier

Exercice 2 : On considère l'équation de conservation sur la densité de voiture $\rho(t, x)$:

$$\partial_t \rho + \partial_x (f(\rho)) = 0,$$

où $f(\rho)$ désigne le flux de voiture. Dans le cadre de la conservation de la masse dans tout intervalle évoluant dans le référentiel du trafic, on montre que le flux s'écrit comme le produit de la densité par la vitesse locale du trafic. Afin d'obtenir un modèle fermé, on souhaite ici que u s'exprime en fonction de ρ uniquement. Une possibilité permettant de modéliser la limitation de vitesse u_{\max} ainsi que l'arrêt du trafic lorsque la densité de voitures est trop forte est donnée par :

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

La vitesse u_{\max} représente donc la vitesse maximum autorisée et ρ_{\max} une densité maximum correspondant à un bouchon où les voitures sont pare-choc contre pare-choc, à l'arrêt.

Préliminaires

1. Adimensionaliser ce modèle. Dans toutes la suite, les variables désignent les quantités adimensionnées.
2. Calculer $c(\rho) = f'(\rho)$ et représenter les fonctions u et c sur un même graphique. Que représentent ces quantités? Que représentent les courbes du plan (x, t) vérifiant $X'(t) = c(\rho(t, X(t)))$, $Y'(t) = u(\rho(t, Y(t)))$? Faire un parallèle avec la mécanique des fluides.
3. Écrire l'équation des caractéristiques dans le plan (x, t) . Dans le cas d'un choc, exprimer sous quelle condition le choc est entropique, c'est-à-dire conserve une signification physique? Exprimer le dernier résultat en fonction de ρ^+ et ρ^- , les états limites à droite et à gauche.

Feu Rouge et Chocs

Pour tout $t \leq 0$, on suppose $0 < \rho(t, x) = \rho_0 < 1/2$, avec ρ_0 une densité constante indépendante de l'espace et du temps. À partir de $t = 0$, un feu rouge situé en $X = 0$ sépare la droite réelle en deux, à travers les deux conditions limites :

$$u(\rho(t, 0^-)) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(t, 0^+) = 0$$

4. À travers l'étude des caractéristiques, décrire ce qu'il se passe dans la partie $x \leq 0$. Même question pour la partie $x \geq 0$. Dans le plan (x, t) , représenter la solution jusqu'au temps $T_r = 1$ pour la valeur particulière $\rho_0 = 1/4$. Afin de pouvoir représenter toute la solution de l'exercice sur un même graphe, le diagramme utilisera la fenêtre $[-2, 4] \times [0, 5]$ du plan (x, t) . On tâchera de représenter les caractéristiques en traits pleins ainsi que les trajectoires en pointillés (ou dans une autre couleur).
5. Tracer le profil de $\rho(x)$, pour $x \in [-2, 4]$, au temps $T_r = 1$.

Passage au Vert

6. On considère la condition initiale

$$\rho(T_r, x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Donner l'expression de $\rho(t, x)$, pour $t \geq T_r$ et $x \in \mathbb{R}$.

7. À $t = T_r$, le feu passe au vert et les deux demi-droites jusqu'alors considérées comme séparées sont à nouveau connectées.
 - a) Calculer le temps $T_a > T_r$ pour lequel le choc situé à gauche du feu n'est plus animé d'une vitesse constante.

b) Montrer que la position $\varphi(t)$ du choc vérifie l'équation différentielle

$$\varphi' - \frac{\varphi}{2(t - T_r)} = \frac{1 - 2\rho_0}{2}$$

c) Résoudre l'équation homogène associée.

d) Par la méthode de la variation de la constante, trouver la position du choc en fonction du temps.

e) En déduire le temps T_b pour lequel la vitesse du choc devient nulle, puis T_c le temps pour lequel ce choc revient en $x = 0$.

8. Prolonger le graphe réalisé à la question 4) jusqu'au temps T_c et représenter le profil de $\rho(x)$ au temps T_c .

9. Pour un temps T_r de feu rouge donné, le temps $T_v = T_c - T_r$ de feu vert minimise le temps d'attente des piétons tout en ne perturbant pas le trafic amont. Montrer que ce temps dépend de la densité ρ_0 par la relation :

$$\frac{T_v}{T_r} = \frac{\rho_0(1 - \rho_0)}{(1/2 - \rho_0)^2} = F(\rho_0)$$

10. Tracer $F(\rho_0)$ pour $\rho_0 \in [0, \frac{1}{2}]$. Quelle est sa valeur pour $\rho_0 = 1/4$. Commenter la variation de ce rapport de temps de feu en fonction de l'intensité du trafic.

Chapitre 2

La Mécanique des Fluides Compressibles : Modèles et Méthodologie

2.1 Équations Intégrales et Équations Locales de Conservation

Nous détaillons maintenant la construction des deux systèmes d'équations qui nous intéressent pour l'étude des fluides compressibles en une, deux ou trois dimensions d'espace : les équations d'Euler et de Navier-Stokes. Comme nous allons le voir par la suite, les équations d'Euler constituent en fait une approximation des équations de Navier-Stokes dans le cadre des très grands nombres de Reynolds.

Ces systèmes se construisent de la manière suivante : on commence par appliquer les lois de conservation sur les quantités conservées (masse, quantité de mouvement et énergie totale), puis on fait de plus fines hypothèses sur le comportement du fluide pour modéliser les termes de contraintes internes. Chaque terme de ces équations aux dérivées partielles sera analysé et des formulations équivalentes seront également proposées.

2.1.1 Coordonnées Lagrangiennes

Soit $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble de particules du plan au temps $t = 0$, et $\Omega(t)$ son évolution au temps t . Pour simplifier, nous supposons qu'à tout temps fixé t , la fonction

$$f(t) : \begin{cases} \Omega_0 & \longrightarrow & \Omega(t) \\ \mathbf{X} & \longmapsto & \mathbf{x} \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ et définit un difféomorphisme de Ω_0 dans $\Omega(t)$. Ceci nous permet alors de définir la Jacobienne d'une telle transformation, $J(\mathbf{X}, t) = \det \left(\frac{\partial f(t)}{\partial \mathbf{X}} \right)$, qui est inversible

partout. Un rapide calcul, [18], donne :

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = J(\mathbf{X}, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}.$$

Démonstration 1 : Le déterminant de $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}$ étant une somme de produits de composantes de $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}$ ne faisant jamais intervenir deux éléments d'une même colonne dans un même produit, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_n} \right) \right] \\ &= \sum_j \left[\det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_j}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_n} \right) \right] \end{aligned}$$

Ensuite, en multipliant cette expression par J^{-1} , on a :

$$\begin{aligned} J^{-1} \frac{\partial J}{\partial t} &= \sum_j \det \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_j}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_n} \right) \right] \\ &= \sum_j \det \left(\mathbf{e}_1, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_j}, \dots, \mathbf{e}_n \right) \end{aligned}$$

En développant chacun des termes de la dernière somme par rapport à la dernière colonne, on a immédiatement :

$$J^{-1} \frac{\partial J}{\partial t} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial X_j} \right)_j = \sum_j \sum_k \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial X_j} = \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \operatorname{div}(\mathbf{v})$$

Les coordonnées Cartésiennes (\mathbf{x}, t) ne sont pas très pratiques pour la construction des lois de conservation sur la particule fluide $\Omega(t)$, car les dérivées temporelles doivent être calculées sur les trajectoires $\mathbf{x}(t)$, dépendantes de t . Il est en fait très intéressant d'utiliser le changement de variable $f(t)$, menant aux coordonnées Lagrangiennes (\mathbf{X}, t) , pour lesquelles la coordonnées spatiale $\mathbf{X} = \mathbf{x}(0)$ ne dépend plus du temps.

On considère alors ω_0 un sous ensemble de Ω_0 , $\omega(t)$ son image par la transformation $f(t)$ et on y applique les lois de conservations des variables densité, quantité de mouvement et énergie totale, en considérant que le milieu est continu.

2.1.2 Conservation de la masse

Puisque par définition aucune particule n'entre ni ne sort de $\omega(t)$ durant le temps, la masse totale dans $\omega(t)$ est conservée :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{D}m(\omega(t))}{\mathcal{D}t} &= 0 \\
&= \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left(\int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) \\
&= \int_{\omega_0} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} (\rho(f(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t)) d\mathbf{X} \\
&= \int_{\omega_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}) \right) J(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \\
&= \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \operatorname{div}(\rho \vec{\mathbf{u}}) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout sous ensemble ω_0 , on en déduit l'équation de la conservation locale de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{\mathbf{u}}) = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \quad (2.1)$$

2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

D'après le principe fondamental de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement totale dans ω est régie par

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left(\int_{\omega(t)} \rho \vec{\mathbf{u}} d\mathbf{x} \right) = \int_{\omega(t)} \rho \vec{f}_v d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}_s(M, \vec{\mathbf{n}}) ds \quad (2.2)$$

où \vec{f}_v représente l'ensemble des contraintes volumiques au sein de ω et $\vec{F}_s(M, \vec{\mathbf{n}})$ est la force surfacique appliquée aux bords de ω au point M et dans la direction $\vec{\mathbf{n}}$, normale extérieure à $\partial\omega$ en M .

Un raisonnement de physique [2, 11] montre que \vec{F}_s doit être une fonction linéaire du vecteur $\vec{\mathbf{n}}$. Cela signifie qu'il existe un tenseur des contraintes $\sigma(M)$ tel que :

$$\forall M \in \Omega, \quad \forall \vec{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}_s(M, \vec{\mathbf{n}}) = \sigma(M) \cdot \vec{\mathbf{n}}.$$

Ainsi, en utilisant une fois de plus l'argument que la relation (2.2) doit être vérifiée pour tout sous ensemble ω_0 de Ω_0 , et en appliquant le théorème de la divergence sur les termes frontière, on obtient les équations locales de la conservation de la quantité de mouvement, qui s'écrit composante par composante ($i = 1, 2$)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \operatorname{div}(\rho u_i \vec{\mathbf{u}}) = \rho (\vec{f}_v)_i + \operatorname{div}(\sigma_i), \quad (2.3)$$

où σ_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne du tenseur des contraintes σ .

2.1.4 Conservation du moment angulaire

Toujours selon le principe fondamental de la dynamique appliqué le long des degrés de liberté en rotation, les variations du moment angulaire total dans ω sont données par :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left(\int_{\omega(t)} \rho O\vec{M} \wedge \vec{\mathbf{u}} dM \right) = \int_{\omega(t)} \rho O\vec{M} \wedge \vec{f}_v dM + \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge (\sigma(M) \cdot \vec{\mathbf{n}}) ds \quad (2.4)$$

Dans \mathbb{R}^2 , cette dernière est en fait une équation scalaire dans la direction Oz , qui, combinée avec (2.1) et (2.3), permet rapidement de trouver qu'on a nécessairement $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Dans \mathbb{R}^3 , nous avons 3 équations permettant de trouver respectivement que $\sigma_{32} = \sigma_{23}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ et $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Dans les deux cas, l'équation sur le moment angulaire impose donc la symétrie du tenseur des contraintes σ .

2.1.5 Conservation de l'énergie totale

Le premier principe de la thermodynamique stipule que, dans un système, les variations de l'énergie totale dans le temps sont égales à la puissance des forces agissant sur le système, plus les contributions de chaleur. Si l'on note $E = \frac{1}{2}\|u\|^2 + e$ l'énergie totale par unité de volume (e étant l'énergie interne par unité de volume), w la création de chaleur spécifique par unité de temps, et $\vec{\mathbf{q}}$ le flux de chaleur au sein de Ω , cela se traduit au temps t par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left(\int_{\omega(t)} \rho E d\mathbf{x} \right) &= \int_{\omega(t)} \rho \vec{f}_v \cdot \vec{\mathbf{u}} d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}_s(M, \vec{\mathbf{n}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}(M) ds \\ &+ \int_{\omega(t)} \rho w d\mathbf{x} - \int_{\partial\omega(t)} \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{n}} ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

Une fois de plus, en utilisant le théorème de la divergence et le fait que ω est indifféremment choisi, nous obtenons l'expression locale de la conservation de l'énergie totale :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \vec{\mathbf{u}} - \sigma \cdot \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{q}}) = \rho \vec{f}_v \cdot \vec{\mathbf{u}} + \rho w \quad (2.6)$$

2.2 Application aux fluides - Modélisation

2.2.1 Thermodynamique - Rappels

To be Done!!!

2.2.2 Modélisation du Fluide Newtonien

Définition 1 :

Un milieu continu est un fluide Newtonien lorsque le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du tenseur des déformations, ce dernier étant défini par

$$(\mathbb{D})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

On peut alors démontrer [2, 11] qu'il existe une variable intensive p , appelée pression, et deux coefficients de viscosité λ et μ , appelés respectivement premier et second coefficients de Lamé, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda \operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbb{D} \quad (2.7)$$

De plus, les équations du début de ce chapitre ne sont que l'expression de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Elles ne prennent pas en compte le second principe de la thermodynamique. Nous devons donc trouver un critère sur le système d'équation et les lois de comportement qui assure la compatibilité des solutions d'un tel système avec le second principe de la thermodynamique. Ce principe énonce l'existence d'une variable d'état scalaire, appelée entropie spécifique, telle que pour tout ω

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left(\int_{\omega(t)} \rho s d\mathbf{x} \right) \geq \int_{\omega(t)} \frac{\rho w}{T} d\mathbf{x} - \int_{\partial\omega(t)} \frac{\vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{n}}}{T} ds. \quad (2.8)$$

Nous obtenons alors l'inégalité locale d'entropie :

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho s \vec{\mathbf{u}} + \frac{\vec{\mathbf{q}}}{T} \right) \geq \frac{\rho w}{T}. \quad (2.9)$$

En utilisant l'expression de la production de chaleur à partir de l'équation sur la conservation de l'énergie, (2.6)

$$\rho w = \rho \frac{\mathcal{D}e}{\mathcal{D}t} + \operatorname{div}(\vec{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D},$$

où le sigle ':' symbolise l'opérateur $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} = \sigma_{ij} \mathbb{D}_{ij}$, on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem [2, 11] :

$$\rho \left(T \frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}t} - \frac{\mathcal{D}e}{\mathcal{D}t} \right) - \frac{\vec{\mathbf{q}} \cdot \operatorname{grad}(T)}{T} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} \geq 0. \quad (2.10)$$

Cette relation est essentielle pour l'étude de la loi de comportement. Par exemple, dans le cas où on suppose que l'énergie interne ne dépend que de l'entropie spécifique s et du volume spécifique $v = 1/\rho$, on a :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\mathcal{D}e}{\mathcal{D}t} &= \rho \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}t} + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s \operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}) \\ &= \rho \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}t} + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s \operatorname{Tr}(\mathbb{D}), \end{aligned}$$

$\mathbf{Tr}()$ étant l'opérateur trace. L'équation (2.10) se reformule alors comme :

$$\rho \left(T - \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \right) \frac{\mathcal{D}s}{\mathcal{D}t} - \left(p + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s \right) \mathbf{Tr}(\mathbb{D}) + \lambda (\operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}))^2 + 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} - \frac{\vec{\mathbf{q}} \cdot \operatorname{grad}(T)}{T} \geq 0. \quad (2.11)$$

Considérons un écoulement à vitesse constante. La seule manière de toujours vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem ([11]) impose la contrainte suivante :

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \quad \text{et} \quad \frac{\vec{\mathbf{q}} \cdot \operatorname{grad}(T)}{T} \leq 0.$$

Si l'on suppose ensuite que les transferts thermiques suivent la loi de Fourier $\vec{\mathbf{q}} = -k \operatorname{grad}(T)$, cela implique en particulier que le coefficient de conduction thermique k doit être positif.

De plus, si l'on considère maintenant un écoulement à température constante et qu'on utilise la définition suivante de la température

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho,$$

l'inégalité de Clausius-Duhem dis que :

$$- \left(p + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s \right) \mathbf{Tr}(\mathbb{D}) + \lambda (\operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}))^2 + 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} - \frac{\vec{\mathbf{q}} \cdot \operatorname{grad}(T)}{T} \geq 0,$$

équation qui est toujours satisfaite si et seulement si :

$$p = - \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s \quad \text{et} \quad \lambda (\operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}))^2 + 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} - \frac{\vec{\mathbf{q}} \cdot \operatorname{grad}(T)}{T} \geq 0$$

Un rapide calcul sur le second membre de cette dernière équation [11] montre que celle-ci implique

$$3\lambda + 2\mu \geq 0. \quad (2.12)$$

2.2.3 Équation d'état

Dans cette section, nous avons construit un système d'équations aux dérivées partielles avec 4 équations et 5 inconnues (les variables conservées plus la pression). Afin de fermer le problème, nous avons besoin d'une équation supplémentaire décrivant la nature du fluide. En effet, à ce stade de modélisation on pourrait appliquer de manière identique les quatre équations de conservation au problème du vol d'un ballon d'hélium, comme à l'écoulement d'une rivière de mercure. Nous avons alors besoin d'une relation entre les variables physiques décrivant l'état du fluide. Ces variables sont communément la température, la pression, la densité, l'énergie interne et l'entropie. À partir d'une équation d'état d'un système physique, il est alors possible de déterminer toutes les grandeurs thermodynamiques du système et donc ses propriétés physiques.

Nous donnons dans la suite quelques exemples d'équations d'état :

- **Gaz Parfaits** : la loi d'état des gaz parfaits est la bien connue

$$pv = NRT \quad (2.13)$$

où N est le nombre de mole de gaz contenues dans le volume v et $R = 8.3144 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ est la constante universelle des gaz parfaits.

- **Gaz idéaux polytropiques** : un gaz polytropique est un gaz parfait pour lequel la capacité thermique à volume constant c_v est considérée constante.

$$c_v = \left. \frac{\partial e}{\partial T} \right|_v \Rightarrow e = c_v T.$$

La relation (2.13) se reformule alors comme :

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (2.14)$$

où γ est le ratio des capacités thermiques

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} (= 1.4 \text{ pour l'air}).$$

- **Autres** : il existe bien d'autres équations d'état. Quelques exemples sont l'équation de Wan der Waals [22], les équations d'états hypersoniques [23], les équations d'états pour la combustion [19, 6], les mélanges de gaz parfaits [5], les écoulements multiphasique, les gaz denses [4], les gaz rares, etc... D'un point de vue théorique, l'équation des gaz polytropiques est souvent considérées car elle seule permet en général de résoudre les équations à la main dans les cas les plus simples.

2.3 Les équations de Navier-Stokes

2.3.1 Les équations du Fluide Réel

On s'intéresse maintenant aux équations de Navier-Stokes complètes. On utilise ici l'adjectif supplémentaire "complètes", car les équations de Navier-Stokes sont aujourd'hui considérées comme un des systèmes qui modélise le mieux certains phénomènes naturels extrêmement complexes. On pense notamment aux phénomènes de turbulence. Même si certains modèles numériques rajoutent des variables et des équations associées pour contrecarrer la dissipation numérique qui empêche de simuler correctement les petites échelles de la turbulence, il est communément admis que les phénomènes de turbulence sont déjà inclus dans le modèle de Navier-Stokes. Les instabilités hydrodynamiques, la cascade énergétique des grandes aux petites échelles, la dissipation énergétique aux petites échelles, etc..., phénomènes qui rendent la mécanique des fluides tellement passionnante, sont des solutions du système aux dérivées partielles de Navier-Stokes.

Afin de terminer la modélisation de certains termes des équations de conservation développées au début de cette section, on fait les hypothèses suivantes :

1. Le fluide est un fluid Newtonien :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(-p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \mathbf{I} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

voir la définition 1 ;

2. D'après la loi de Fourier, la diffusion thermique s'effectue dans la direction opposée au gradient de la température. Le coefficient de proportionnalité $k > 0$ est appelé le coefficient de diffusion thermique :

$$\vec{\mathbf{q}} = -k \vec{\nabla} T$$

3. Il n'y a pas de force volumique : $\vec{f}_v = \vec{0}$,

4. Il n'y a pas de source de chaleur au sein du domaine considéré : $w = 0$,

5. Le fluide est un gaz polytropique : $p = (\gamma - 1)\rho e$. Cette condition n'étant qu'une loi de pression, elle peut aisément être remplacée par une autre équation d'état, complète ou non. Celle-ci est considéré ici par mesure de simplicité.

6. Par l'inégalité de Clausius-Duhem, on doit avoir $3\lambda + 2\mu \geq 0$ et cette contrainte est respectée en imposant la fermeture suivante pour les coefficient de viscosité :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

En appliquant ces hypothèses aux équations de conservation (2.1),(2.3) et (2.6), on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \vec{\mathbf{u}} + p \boldsymbol{\delta}_i) = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{\mathbf{u}}) + \mu \Delta u_i, \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho E + p) \vec{\mathbf{u}}) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad}(T) + \mathbb{T} \vec{\mathbf{u}}). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

C'est ici la forme sous laquelle les équations de Navier-Stokes sont le plus souvent présentées. Afin de simplifier les notations, on a utilisé le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\mathbb{T} = 2\mu \mathbb{D} + \lambda \operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}) \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \lambda \operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \lambda \operatorname{div}(\vec{\mathbf{u}}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Il y a pourtant d'autres manières de formuler ces équations, la différence provenant essentiellement de la facilité de manipulation pour l'application en vue. Une de ces formulations a l'avantage de présenter le système sous une forme totalement matricielle, ce qui le rend

nettement plus facile à retenir. Pour cela, on considère le flux advectif défini par (2.21) et les matrices de diffusion suivantes :

$$K_{11} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}u & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ -\left(2\mathcal{E}_c + \frac{v^2}{3} + \frac{\gamma}{\text{Pr}}(e - \mathcal{E}_c)\right) & u\left(\frac{4}{3} - \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right) & v\left(1 - \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right) & \frac{\gamma}{\text{Pr}} \end{pmatrix},$$

$$K_{12} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}v & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{uv}{3} & v & -\frac{2}{3}u & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{21} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}u & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{uv}{3} & -\frac{2}{3}v & u & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$K_{22} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}v & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ -\left(2\mathcal{E}_c + \frac{v^2}{3} + \frac{\gamma}{\text{Pr}}(e - \mathcal{E}_c)\right) & u\left(1 - \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right) & v\left(\frac{4}{3} - \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right) & \frac{\gamma}{\text{Pr}} \end{pmatrix},$$

On peut alors synthétiser le système (2.15) sous la forme :

$$\mathbf{U}_{,t} + \text{div} \left(\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \right) = (K_{ij} \mathbf{U}_{,j})_{,i} = \text{div}(\mathbb{K} \cdot \text{grad}(\mathbf{U})) \quad (2.16)$$

où l'on a utilisé la notation d'Einstein et “ $_{,j}$ ” désigne la dérivée partielle dans la $j^{\text{ème}}$ direction de l'espace.

2.3.2 Adimensionnalisation

Afin de reformuler les équations précédentes sans dimensions, on se donne des grandeurs de référence du problème :

- Une longueur de référence L ,
- Une vitesse caractéristique U_∞ ,
- Une densité moyenne ρ_0 ,
- Une pression moyenne p_0 ,
- Une viscosité moyenne μ_0 ,
- Un coefficient de conduction thermique moyen k_0 .

La donnée de la longueur de référence et de la vitesse caractéristique permet d'établir un temps de référence dans l'écoulement :

$$t_0 = \frac{L}{U_\infty}.$$

On définit alors les quantités adimensionnées :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U_\infty}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{k_0}.$$

On multiplie maintenant l'équation locale de la conservation de la masse (2.1) par $\left(\frac{t_0}{\rho_0}\right)$ et on obtient son équivalent adimensionné

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div}_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) = 0. \quad (2.17)$$

De même, on multiplie l'équation pour la conservation de la quantité de mouvement (2.3) par $\left(\frac{t_0}{\rho_0 U_\infty}\right)$ et on a

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(\tilde{\rho} \tilde{u}_i) + \operatorname{div}_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{p_0}{\rho_0 U_\infty^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\mu_0}{\rho_0 U_\infty L} \left(\frac{\tilde{\mu}}{3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} (\operatorname{div}_{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\mu} \Delta \tilde{u}_i \right). \quad (2.18)$$

On voit alors apparaître deux nombres sans dimensions. Le premier $p_0/(\rho_0 U_\infty^2)$ est proportionnel à l'inverse du nombre de Mach de référence :

$$M_0 = \frac{c_0}{U_\infty}.$$

Le second, $\rho_0 U_\infty L / \mu_0$ est appelé nombre de Reynolds et il correspond au rapport de la force d'advection sur les efforts visqueux.

Remarque 1 :

1. Dans la limite des très grands nombres de Reynolds, c'est à dire lorsque les effets advectifs sont prépondérants devant les effets visqueux, les termes de droite des équations de Navier-Stokes peuvent être négligés. On obtient alors les équations d'Euler qui seront étudiées dans la section suivante. Les équations de Navier-Stokes et les équations d'Euler ont des propriétés mathématiques très différentes. Malgré la suppression brutale des termes visqueux par le physicien, le passage d'un système à l'autre est encore aujourd'hui très mal compris. En effet, pour les solutions de Navier-Stokes, c'est aux hauts nombres de Reynolds qu'apparaissent les instabilités hydrodynamiques et la transition vers la turbulence alors que les solutions d'Euler sont toujours assez régulières. Le passage à la limite d'un système à l'autre est un sujet actif de recherche.
2. Dans la limite des très petits nombres de Mach ($M_0 \rightarrow 0$), l'équation adimensionnée de la quantité de mouvement montre que le gradient de pression devient négligeable et la pression est donc partout uniforme. Une interprétation possible est de dire que les perturbations de pression (ondes acoustiques) se propagent à vitesse infinie dans le domaine. La pression s'égalise donc partout instantanément. Le système résultant d'une telle approximation est appelé équations de la mécanique des fluides compressibles.

Enfin, en multipliant l'équation locale de conservation de l'énergie totale (2.6) par $\left(\frac{t_0}{\rho_0 U_\infty^2}\right)$, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left(\tilde{\rho} \tilde{E} \tilde{\mathbf{u}} \right) + \frac{1}{M_0^2} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left(\tilde{p} \tilde{\mathbf{u}} \right) = \frac{k_0}{\rho_0 U_\infty L C_p} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left(\tilde{k} \nabla \tilde{T} \right) + \frac{1}{Re} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left(\tilde{\mathbb{T}} \tilde{\mathbf{u}} \right) \quad (2.19)$$

Dans le premier terme du membre de droite, on voit apparaître l'inverse du produit du Reynolds par le nombre de Prandtl, ce dernier étant défini par :

$$Pr = \frac{C_p \mu_0}{k_0},$$

et quantifiant le rapport des effets de la diffusivité de la quantité de mouvement et de la diffusivité thermique.

2.3.3 Hiérarchie des Modèles

To Be Done!!!

2.4 Les équations d'Euler

2.4.1 Les équations du Fluide Parfait

D'après la sous-section précédente, nous avons vu que dans la limite des très grands nombres de Reynolds, les effets visqueux du fluides peuvent être négligés. C'est une hypothèse communément admise dans les études aéronautiques, loin des conditions de bord et des effets dus à la couche limite. Dans ce cadre, le fluide est assimilé à un fluide parfait, c'est-à-dire :

1. Pas d'effets visqueux : $\lambda = \mu = 0 \Rightarrow \sigma = -p\mathbf{I}$,
2. Pas de forces volumiques : $\vec{f}_v = \vec{0}$,
3. Pas de transfert thermique : $w = 0$, $\vec{q} = \vec{0}$.

Appliquant ces hypothèses sur les équations de conservation (2.1),(2.3) et (2.6), on obtient les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \vec{\mathbf{u}} + p \delta_i) = 0, \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho E + p) \vec{\mathbf{u}}) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

où δ_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice identité.

Si l'on pose

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{\mathbf{u}} \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{F}} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2), \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i \vec{\mathbf{u}} + p \delta_i \\ (\rho E + p) u_i \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

le système (2.20) peut être reformulé dans une forme plus compacte :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \right) = 0$$

et si $\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}}$, $\mathcal{B} = \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}}$ et $\vec{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ désignent les Jacobiennes des flux, le système peut être réécrit dans la forme quasi-linéaire suivante, lorsque la solution est suffisamment régulière :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{U} = 0.$$

2.4.2 Propriétés des équations d'Euler

Les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} sont données par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)\mathcal{E}_c - u^2 & (3 - \gamma)u & (1 - \gamma)v & (\gamma - 1) \\ -uv & v & u & 0 \\ u((\gamma - 1)\mathcal{E}_c - \mathcal{H}) & \mathcal{H} + (1 - \gamma)u^2 & (1 - \gamma)uv & \gamma u \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ (\gamma - 1)\mathcal{E}_c - v^2 & (1 - \gamma)u & (3 - \gamma)v & (\gamma - 1) \\ v((\gamma - 1)\mathcal{E}_c - \mathcal{H}) & (1 - \gamma)uv & \mathcal{H} + (1 - \gamma)v^2 & \gamma v \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{E}_c = (u^2 + v^2)/2$ et $\mathcal{H} = E + p/\rho$ sont respectivement l'énergie cinétique et l'enthalpie totale par unité de volume. Si $\vec{\mathbf{n}} = (n_x, n_y) \in S^1$ désigne une normale du plan, la matrice

$$\vec{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ (\gamma - 1)\mathcal{E}_c n_x - u \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} + (2 - \gamma)u n_x & u n_y + (1 - \gamma)v n_x & (\gamma - 1)n_x \\ (\gamma - 1)\mathcal{E}_c n_y - v \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} & v n_x + (1 - \gamma)u n_y & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} + (2 - \gamma)v n_y & (\gamma - 1)n_y \\ \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} ((\gamma - 1)\mathcal{E}_c - \mathcal{H}) & \mathcal{H} n_x + (1 - \gamma)u \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} & \mathcal{H} n_y + (1 - \gamma)v \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} & \gamma \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \end{pmatrix}$$

est toujours diagonalisable à valeurs propres réelles et l'on peut écrire $\vec{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \mathcal{R} \boldsymbol{\Lambda} \mathcal{L}$, avec :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} - c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} + c \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u - cn_x & u & -n_y & u + cn_x \\ v - cn_y & v & n_x & v + cn_y \\ \mathcal{H} - \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} c & \mathcal{E}_c & \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}}^\perp & \mathcal{H} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} c \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c} \left(\frac{\gamma-1}{c} \mathcal{E}_c + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \right) & -\frac{1}{2c} \left(\frac{\gamma-1}{c} u + n_x \right) & -\frac{1}{2c} \left(\frac{\gamma-1}{c} v + n_y \right) & \frac{\gamma-1}{2c^2} \\ 1 - \frac{(\gamma-1)\mathcal{E}_c}{c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & \frac{(1-\gamma)}{c^2} \\ -\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}}^\perp & -n_y & n_x & 0 \\ \frac{1}{2c} \left(\frac{\gamma-1}{c} \mathcal{E}_c - \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \right) & -\frac{1}{2c} \left(\frac{\gamma-1}{c} u - n_x \right) & -\frac{1}{2c} \left(\frac{\gamma-1}{c} v - n_y \right) & \frac{\gamma-1}{2c^2} \end{pmatrix}.$$

2.5 Conditions Limites

To be Done!!!

Chapitre 3

Les Écoulements Stationnaires de Fluides Parfaits 1D

Dans le Chapitre 1, nous avons travaillé en dimension un d'espace, successivement sur une équation linéaire, une équation non-linéaire et finalement sur un système d'équations linéaires. Nous abordons maintenant le cas d'un système d'équations non-linéaires, pour lequel nous allons devoir combiner les outils introduits dans le cadre d'une équation non-linéaire (identification de la formation de singularités en temps fini, résolution des courbes caractéristiques, conditions de saut et vitesse de propagation) à ceux identifiés dans le cadre des systèmes linéaires (multiplicité de vitesses de propagation, conditions de sauts vectorielles et analyse dans l'espace des phases). Le modèle "type" du système hyperbolique de loi de conservation non-linéaire est celui de la dynamique des gaz, même si dans certains cas, les propriétés des systèmes hyperboliques de lois de conservations sont présentées sur les équations de Saint-Venant ou "shallow water equations" comme dans Leveque [14].

Le but de cette troisième grande partie du cours est de se concentrer sur les écoulements de fluides parfaits en dimension un d'espace, modélisés comme nous l'avons vu, dans la limite des grands nombres de Reynolds, par les équations d'Euler, où les effets dissipatifs sont négligés. Dans ce 3^{ème} Chapitre, nous commençons par étudier le cas d'une discontinuité stationnaire en une dimension d'espace, ce qui va nous permettre d'en tirer des relations de saut pour le cas du choc droit. En effet, même en plusieurs dimensions d'espace, l'étude d'une discontinuité de normale constante (appelée choc droit) se ramène à une étude monodimensionnelle locale et des relations simples entre l'état des variables physiques en amont et en aval du choc peuvent être obtenues exactement par la simple étude dans le cadre monodimensionnel. Ce chapitre se termine par l'analyse des écoulements permanents dans l'approximation quasi-monodimensionnelle. Après une justification des équations employée dans ce cadre approximé, nous présentons les outils et les approximations qui permettent de résoudre le cas de la Tuyère "de Laval". Cette résolution peut mener à des écoulements réguliers mais aussi à la présence d'un choc dans le divergent pour une tuyère amorcée.

Dans le chapitre suivant, Chapitre 4, nous nous intéressons au système de la dynamique des gaz dans sa forme instationnaire. Nous faisons le lien avec les études précédentes et cela

nous conduit à introduire la notion d'invariant de Riemann dans le contexte des écoulements réguliers homoentropiques. Nous définissons aussi la notion de courbe intégrale et faisons le lien avec le cas des systèmes linéaires. Finalement, nous introduisons les notions de champs linéairement dégénérés et de champs vraiment non-linéaires permettant de préciser le comportement du système en lien avec les études précédentes dans le cas linéaire et non-linéaire. Après avoir illustré les notions sur des exemples et montré que dans un certain nombre de cas la résolution des problèmes proposés conduit à la formation d'ondes de discontinuités, nous consacrons une partie à préciser l'ensemble des propriétés associées à ces écoulements singuliers, tant dans le cas instationnaire que stationnaire. Ceci nous permet de conclure les études proposées de la compression d'un gaz par un piston conduisant à la formation d'une onde de choc qui se propage. Enfin dans une dernière section de ce chapitre 4, nous nous penchons sur la résolution totale du problème de Riemann 1D pour les équations d'Euler, section que nous terminons par la résolution du problème du tube à choc, qui n'est autre qu'un problème de Riemann un peu particulier pour la dynamique des gaz. Il est important de noter que cette section est essentielle à la compréhension de la majorité des méthodes numériques employées pour la résolution des problèmes réels de mécanique des fluides. Nous illustrerons d'ailleurs les résultats obtenus par des solutions numériques de problèmes particuliers.

3.1 Le Choc Droit Dans un Écoulement de Fluide Parfait

Dans le chapitre 1, nous avons eu un aperçu, sur des cas simplifiés (notamment l'équation de Burgers), de la relation entre hyperbolicité et propagation de l'information à vitesse finie donnée. Dans cette section, nous commençons par donner une explication physique à cette vitesse de l'information dans le cadre de la dynamique des fluides. Cette vitesse est la vitesse du son, dont nous donnons l'expression dans une première sous-section, par un raisonnement 1D. À partir de cette célérité locale on définit alors le nombre de Mach local et son interprétation nous permet de comprendre l'apparition d'ondes de choc dans des écoulements à Mach supérieur à 1. Afin de simplifier une partie des calculs et raisonnements de ce cours, nous introduisons alors les variables soniques et les variables totales ou variables d'arrêt d'un écoulement. Ces variables abstraites nous permettent d'exprimer facilement des relations de saut à travers une onde de choc monodimensionnelle. Dans une dernière sous-section, nous généralisons alors ces relations de saut au cas d'une onde de choc de normale constante en 2 ou 3 dimensions d'espace : le Choc Droit.

3.1.1 Vitesse du Son et Nombre de Mach

Imaginons une place circulaire remplie de badauds au yeux bandés qui déambulent de manière incohérente, tous à la même vitesse V_s , se bousculent, changent de direction... Ces personnes jouent le rôle des molécules d'un gaz. Plaçons nous alors au milieu de la place et poussons tout individu qui arrive vers nous dans la direction centripète. Chaque personne poussée va partir vers l'extérieur de la place à la vitesse proche de V_s , bousculer une personne aléatoire et changer de direction après avoir échangé l'information "direction

centripète". Cette personne retourne alors petit à petit dans son état normal précédent la poussée. De proche en proche on va donc voir une onde concentrique de gens se déplaçant préférentiellement dans la direction centripète et communiquant cette "information" par le biais de collisions. La vitesse de cette onde est bien entendu reliée à la vitesse moléculaire V_s : c'est la vitesse de propagation de l'information entre les badauds de cette place.

Nous venons d'expliquer la phénoménologie de la propagation à vitesse finie donnée dans un gaz par l'approche cinétique. Dans ce cours nous allons en fait nous intéresser à l'approche macroscopique de ce gaz et aux effets de cette vitesse de propagation déterminée. Pour cela nous avons besoin de considérer des valeurs moyennes et c'est pour ça que nous allons maintenant considérer que la place est bondée de monde. Un observateur fixe dans la foule recevra tellement de collision qu'il aura une bonne interprétation de l'état moyen du fluide l'environnant. Si nous reproduisons l'expérience du paragraphe précédent, l'observateur va percevoir un mouvement de foule vers l'extérieur de la place avant que tout ne redevienne normal. Il a senti le passage de l'onde. Cessons maintenant notre drôle image et revenons au gaz. Cette perturbation passagère (puisque'il s'agit bien d'une perturbation et non pas un pic d'énergie correspondant par exemple à une explosion) induit nécessairement des perturbations d'énergie, de densité et de pression que notre oreille percevrait comme un son dans le cas d'un gaz. Dans un fluide, cette onde est donc une onde sonore ou onde acoustique dont la vitesse de propagation, la vitesse du son, est liée à la vitesse moyenne des molécules le composant.



FIGURE 3.1 – Propagation d'une onde acoustique. (a) En repère absolu. (b) Dans un repère lié à l'onde.

Afin d'estimer l'expression de la vitesse du son c , considérons une onde acoustique se propageant à la vitesse c dans un milieu continu et séparant l'état gauche (ρ, p, T, c) d'un état droit perturbé $(\rho + d\rho, p + dp, T + dT, c + dc)$, voir Figure 3.1. Si l'on intègre les équations d'Euler stationnaires sur un volume de contrôle partagé en deux par la perturbation acoustique, on obtient pour la masse et la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \rho c & = & (\rho + d\rho)(c + dc) \\ \rho c^2 + p & = & (\rho + d\rho)(c + dc)^2 + p + dp \end{cases} \quad (3.1)$$

Soit, au premier ordre, c'est à dire pour des perturbations acoustiques très faibles,

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (3.2)$$

En fait, les variations des propriétés du fluide étant supposées faibles, le passage de l'état gauche à l'état droit peut être considéré comme réversible. Le phénomène étant en outre adiabatique (il n'y a pas de transfert de chaleur puisque le modèle retenu est celui d'un fluide idéal), le passage de l'onde acoustique peut être considéré comme isentropique. Donc :

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (3.3)$$

Dans le cas du gaz parfait, on a $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste}$, donc

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T} \quad (3.4)$$

On peut maintenant définir une grandeur physique importante, le nombre de Mach, rapport de la vitesse locale de l'écoulement et de la vitesse du son au même point :

$$M = \frac{u}{c} = \frac{u}{V_s} \quad (3.5)$$

Revenons à notre place avec ses badauds aveugles et imaginons que nous souhaitons maintenant traverser la place avec un camion. Tant que le camion roulera à une vitesse très inférieure à la vitesse V_s de déplacement des gens (c'est-à-dire que le nombre de Mach du camion est très petit devant 1), les gens vont venir rebondir sur le camion puis s'en écarter et propager l'information de l'existence du camion vers l'avant du véhicule. Le camion se déplace à une vitesse subsonique. En revanche, si le camion accélère et atteint une vitesse supérieure à la vitesse V_s , il va commencer à accumuler des gens sur son pare-choc, un bourrelet de personnes va se former devant le camion et aucune information ne pourra transiter de ce bourrelet vers l'avant puisque le tout se déplace plus vite que le support de l'information : les gens aux yeux bandés. Le camion se déplace à une vitesse supersonique ($M > 1$) et il a créé devant lui une onde de choc, voir Figure 3.2.

3.1.2 Grandeurs Soniques et Relation de Prandtl

Considérons un élément de fluide caractérisé par ρ, p, T, c, M, \dots et imaginons que nous l'amenons adiabatiquement à l'état sonique $M = 1$ (le fait que le processus soit adiabatique, i.e. se fasse sans échange de chaleur ne pose pas de problème en fluide parfait). Dans ce nouvel état virtuel, le fluide est caractérisé par des propriétés $p_*, \rho_*, T_*, c_* = \sqrt{\gamma r T_*}$. On définit aussi un nombre de Mach dit nombre de Mach caractéristique tel que

$$M_* = \frac{u}{c_*} \quad (3.6)$$

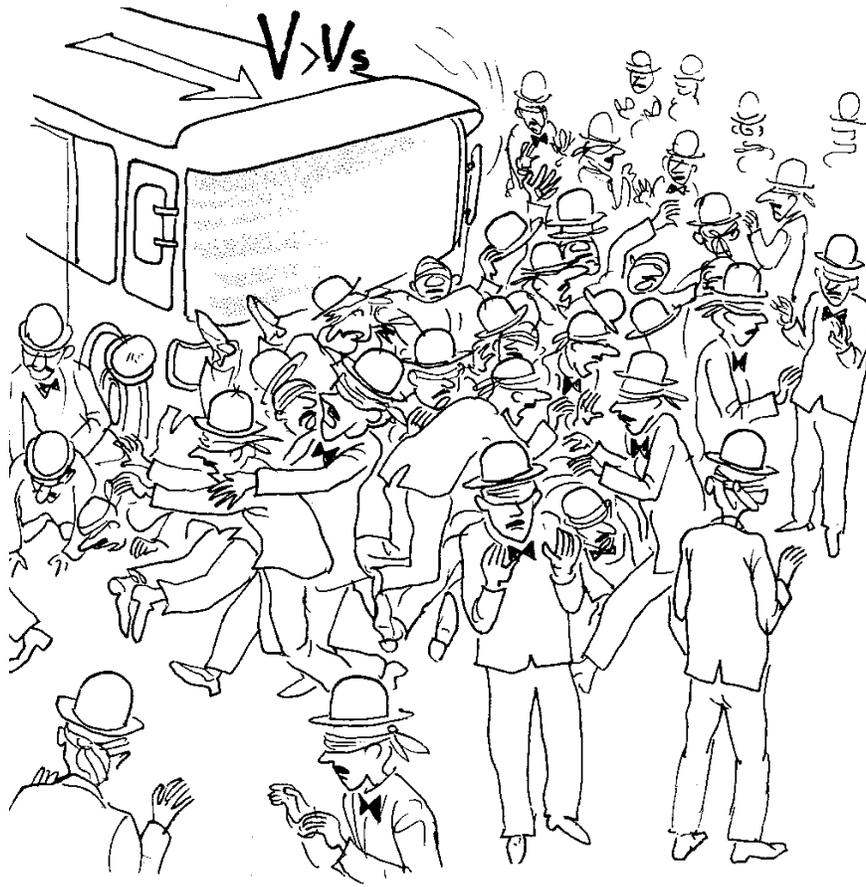


FIGURE 3.2 – No comment

Remarque 1 : il est inutile de définir un "Mach sonique" puisque par définition le nombre de Mach à l'état sonique vaut 1. On affecte donc la notation M_* à la quantité u/c_* .

Les variables soniques peuvent être calculées en fonction des variables réelles u, p, T, ρ, c, \dots , que l'on qualifie de statiques (p : pression statique, T : température statique) - par référence au fait qu'elles correspondent à l'état en lequel on se trouve (*stare* en latin). Ce calcul s'effectue tout simplement en appliquant les équations d'Euler (2.20) stationnaires entre l'état réel du fluide et l'état sonique. On va s'intéresser ici uniquement au calcul de la vitesse du son à l'état sonique afin d'en déduire une expression pour le nombre de Mach caractéristique. La conservation de l'énergie entre deux états donnés du fluide nous donne :

$$\rho u \mathcal{H} = \rho_* u_* \mathcal{H}_*$$

soit, compte tenu de la conservation de la masse ($\rho u = \rho_* u_*$),

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_*.$$

Autrement dit, $\mathcal{H} = cste = \mathcal{H}_*$ dans l'écoulement. En revenant à la définition de l'enthalpie, on peut exprimer \mathcal{H} en fonction de la vitesse et de la vitesse du son

$$\mathcal{H} = E + \frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} \quad (3.7)$$

La conservation de l'enthalpie peut donc aussi s'écrire :

$$\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{c_*^2}{\gamma - 1} + \frac{u_*^2}{2}$$

et comme $u_* = c_*$, par définition de l'état sonique, on a finalement :

$$c_*^2 = \frac{2}{\gamma + 1}c^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}u^2 \quad (3.8)$$

Remarque 2 : c_* est calculable par (3.8) en tout point d'un écoulement même si celui-ci n'est pas réellement adiabatique : l'état sonique, même virtuel, peut toujours servir d'état de référence.

En divisant (3.8) par u^2 , on obtient :

$$M^2 = \frac{2M_*^2}{\gamma + 1 - (\gamma - 1)M_*^2} \quad \text{ou encore} \quad M_*^2 = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad (3.9)$$

On remarque que si $M_* = 1$, alors $M = 1$, et de même, si $M_* < 1$ alors $M < 1$, et si $M_* > 1$ alors $M > 1$.

Relation de Prandtl : On considère maintenant un choc stationnaire séparant deux états (ρ_1, p_1, M_1, T_1) et (ρ_2, p_2, M_2, T_2) , comme illustré sur la Figure 3.3. Par intégration de



FIGURE 3.3 – Configurations d'écoulements *a priori* possibles de part et d'autre d'une onde de choc 1D

l'équation de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle rectangulaire \mathcal{C} centré sur la discontinuité, il vient :

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (3.10)$$

La transformation de l'état 1 à l'état 2 étant adiabatique, les états soniques à droite et à gauche sont donc égaux et

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \Rightarrow p = \frac{\rho c^2}{\gamma} = \frac{\rho}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} c_*^2 - \frac{\gamma-1}{2} u^2 \right)$$

d'où en réinjectant dans (3.10)

$$\rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) + \rho_1 \frac{\gamma+1}{2\gamma} c_*^2 = \rho_2 u_2^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) + \rho_2 \frac{\gamma+1}{2\gamma} c_*^2$$

soit

$$(\rho_2 - \rho_1) c_*^2 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2$$

En multipliant chacun des termes de cette dernière équation soit par $\frac{u_2}{\rho_1}$, soit par $\frac{u_1}{\rho_2}$, ces deux quantités étant égales par la conservation de la masse ($\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$), on en déduit la relation de Prandtl qui n'est vraie que si $\boxed{u_1 - u_2 \neq 0}$

$$c_*^2 = u_1 u_2 \tag{3.11}$$

En divisant par $u_1 u_2$, cette relation donne l'équation suivante régissant les Mach caractéristiques de part et d'autre du choc

$$(M_*)_1 = \frac{1}{(M_*)_2} \tag{3.12}$$

Cette relation est pleine d'intérêt puisqu'elle nous dit que si $(M_*)_1 > 1$, alors $(M_*)_2 < 1$ et similairement, si $(M_*)_1 < 1$, alors $(M_*)_2 > 1$. Comme on sait de plus que le Mach réel varie comme le Mach caractéristique, ceci est également vrai pour M_1 et M_2 . On a donc 2 cas de figures possibles *a priori*, illustrés sur la figure 3.3. Seul le premier cas est en fait **physiquement possible**, comme nous le justifierons par la suite.

3.1.3 Grandeurs d'arrêt

De la même manière que dans le paragraphe précédent nous avons créé un état abstrait dit "état sonique" en amenant virtuellement le fluide à la vitesse du son, on peut considérer l'état abstrait où l'on amène un élément de fluide aux propriétés statiques u, ρ, p, T, c à l'arrêt de façon isentropique. La température et la pression, virtuelles, de cet élément sont appelées température et pression totales (ou d'arrêt) et notées dans ce cours T_0, p_0 (elles sont parfois notées p_i, T_i dans la littérature).

Pour déterminer ces grandeurs d'arrêt en fonction des grandeurs statiques (ou réelles) on utilise à nouveau les équations d'Euler stationnaires entre ces deux états. On a donc pour la conservation de l'énergie :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$$

La particularité de l'enthalpie d'arrêt est que, par définition de l'état d'arrêt en lequel la vitesse de l'écoulement est nulle, elle ne dépend en fait que de la température à l'état d'arrêt T_0 . Par conséquent dire que l'enthalpie d'arrêt est une constante de l'écoulement adiabatique d'un fluide parfait est équivalent à dire que la température d'arrêt est une constante de cet écoulement. En utilisant la définition de l'enthalpie, on déduit de la relation ci-dessus l'égalité suivante :

$$\frac{u^2}{2} + C_p T = C_p T_0 \quad (3.13)$$

qui peut aussi se mettre sous la forme d'une relation entre température statique en un point de l'écoulement et nombre de Mach en ce même point, faisant également intervenir la température d'arrêt ou température totale constante dans cet écoulement :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (3.14)$$

Insistons sur le fait que cette importante relation est valable dans tout écoulement adiabatique, donc y compris dans un écoulement avec génération d'entropie du moment qu'il n'y a pas échange de chaleur. Ainsi, dans le cas d'un écoulement présentant une onde de choc la température totale T_0 reste constante à travers cette onde de choc.

Pour définir la pression et la densité totale (ou d'arrêt), l'hypothèse d'isentropie est indispensable. En utilisant les relations

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste} \quad \text{et} \quad p = \rho r T$$

on obtient aisément

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma \quad (3.15)$$

Soit

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.16)$$

et

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.17)$$

Remarque 3 : Un raisonnement similaire permet de montrer que les pression et densité d'arrêt, p_0 et ρ_0 sont aussi des constantes d'un écoulement isentropique. En revanche, cela n'est plus vrai lorsque l'écoulement n'est pas isentropique, comme dans le cas d'un onde de choc, comme nous le verrons plus loin. Dans ce cas précis, l'enthalpie d'arrêt et donc la température d'arrêt restent constante à travers la discontinuité, mais pas la pression d'arrêt, ni la densité.

Exercice 1 : Dans l'écoulement sur une aile d'avion, on effectue les mesures suivantes de Mach, pression et température : $M = 0.7$, $p = 0.9 \text{ atm}$, $T = 250 \text{ K}$. En supposant l'écoulement isentropique, calculer p_0 , T_0 , p_* , T_* et c_* . On prendra $r = 287 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\gamma = 1.4$.

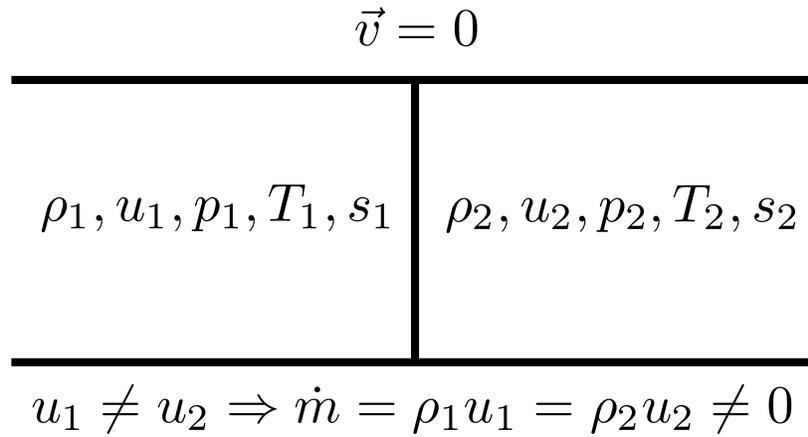


FIGURE 3.4 – Choc stationnaire séparant deux états W_1 et W_2 dans un écoulement 1D. Le choc est supposé stationnaire et les vitesses de part et d'autre du choc sont différentes : $u_1 \neq u_2$ pour justifier l'existence du choc.

3.1.4 Relations de Saut dans un Choc Droit

Nous allons maintenant commencer à étudier les relations qui lient les variables des états à gauche et à droite d'un choc droit. Pour cela nous commençons par le cas d'un choc droit monodimensionnel stationnaire. Nous verrons par la suite que ces relations se généralisent au cas du choc droit (de normale constante) et mobile en 2 ou 3 dimensions d'espace.

Cas du Choc Droit 1D Permanent

On considère un écoulement monodimensionnel et une discontinuité Σ séparant deux états $W_1 = (\rho_1, u_1, p_1, T_1, s_1)$ et $W_2 = (\rho_2, u_2, p_2, T_2, s_2)$. Sans perdre de généralité, on peut considérer que cette discontinuité est stationnaire, puisque dans le cas contraire, il suffit de se considérer dans le référentiel de Σ et de corriger les vitesses u_1 et u_2 en conséquence. Cette situation est illustrée sur la Figure 3.4.

Nombres de Mach : D'après la relation de Prandtl (3.12) et la formule reliant le nombre de Mach au Mach caractéristique (3.9), on a immédiatement

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (3.18)$$

Vitesses et Densités : D'après la conservation de la masse, il vient

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = (M_*)_1^2 = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \quad (3.19)$$

Ainsi, donc, lorsque $M_1 > 1$ la densité augmente et la vitesse diminue à travers le choc.

Pression : Par la conservation de la quantité de mouvement ($p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$), il vient assez aisément

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \quad (3.20)$$

Donc la pression augmente à travers le choc.

Température : La loi des Gaz Parfaits donne enfin

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} &= \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)\right) \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2}\right) \\ &= 1 + \frac{2(\gamma - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Entropie : Dans le cas des gaz idéaux polytropiques, l'entropie est donnée par

$$s = C_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma}$$

et on a donc

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= C_V \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma \\ &= C_V \ln \left\{ \left(\frac{1}{\gamma + 1}\right)^{\gamma+1} (2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) \left(\frac{2}{M_1^2} + \gamma - 1\right)^\gamma \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cette dernière relation est représentée graphiquement sur la figure 3.5. On y voit clairement que l'entropie ne croît à travers le choc que si $M_1 > 1$. Dans le cas $M_1 < 1$, l'entropie décroît à travers le choc ce qui est interdit par le second principe de la thermodynamique. On en déduit donc que les seuls chocs qui sont **physiquement admissibles** vérifient $M_1 > 1$ et $M_2 < 1$.

3.1.5 Relation de Hugoniot, Droite de Rayleigh

Dans le cas général, c'est-à-dire pour une loi d'état quelconque, les équations de conservation de part et d'autre du choc s'écrivent :

— **Masse :**

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = \dot{m} \quad (3.23)$$

où \dot{m} est un débit massique et surfacique ($kg.m^{-2}.s^{-1}$) et dont l'interprétation est simple : il s'agit de la quantité de matière qui passe à travers $\Sigma(t)$ dans le sens de \vec{n} , c'est à dire de (1) vers (2), par unité de surface et par unité de temps.

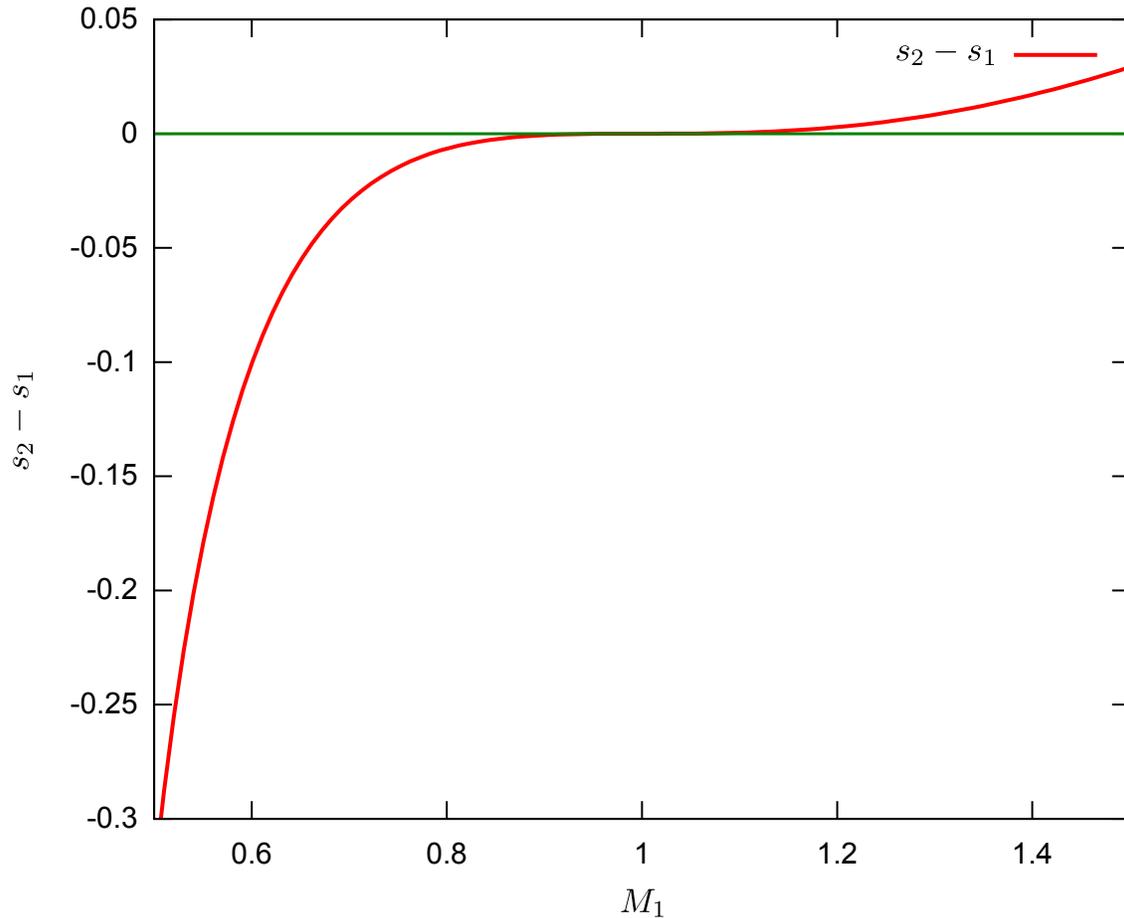


FIGURE 3.5 – Représentation graphique du saut d'entropie donné par la relation (3.22).

— **Quantité de mouvement :**

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (3.24)$$

— **Énergie :**

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} ; \quad h = e + \frac{p}{\rho} \quad (3.25)$$

— **Second Principe de la thermodynamique :**

$$s_2 \geq s_1 \quad (3.26)$$

Droite de Rayleigh : (3.23) et (3.24) permettent d'écrire le différentiel de pression

$$p_2 - p_1 = -\dot{m}^2(\tau_2 - \tau_1) \quad (3.27)$$

où τ_i représente le volume spécifique du gaz du côté i de la discontinuité ($\tau_i = \frac{1}{\rho_i}$).

Cette dernière relation est l'équation de la droite de Rayleigh dans le plan (τ, p) .

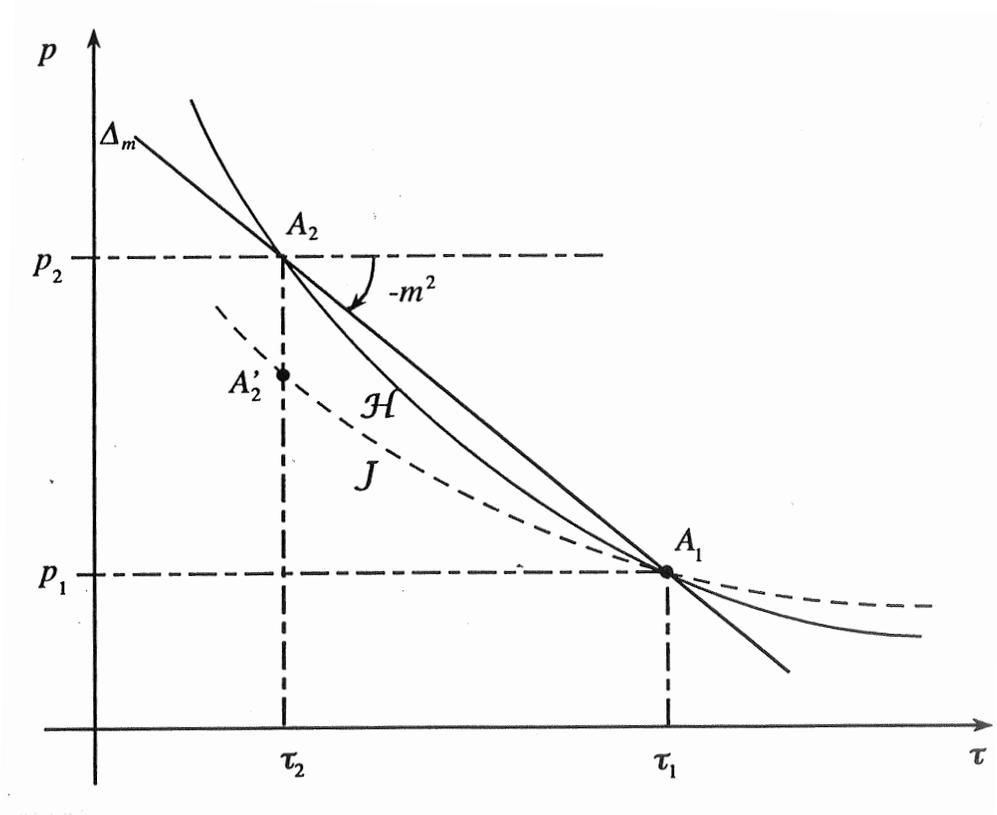


FIGURE 3.6 – Droite de Rayleigh, courbe de Hugoniot et isotrope dans le plan (τ, p) .

Courbe de Hugoniot : De même, par (3.24) et (3.25), il vient

$$h(\tau_2, p_2) - h(\tau_1, p_1) = h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1) \quad (3.28)$$

C'est l'équation de la courbe de Hugoniot (appelée aussi adiabatique dynamique) qui est convexe sous la seconde hypothèse de Weyl. Connaissant la loi d'état $h(p, \rho)$, on peut alors relier les états 1 et 2 en amont et en aval du choc comme l'intersection de la droite de Rayleigh et de la courbe de Hugoniot dans le plan (τ, p) . C'est l'objet de la Figure 3.6.

Remarque 5 : La pente de la droite de Rayleigh, associée au débit ne dépend pas de la nature du fluide mais uniquement du flux de masse au travers du choc.

Résolution explicite du choc droit dans le cas d'un gaz idéal polytropique : La loi d'état et l'expression de l'enthalpie sont

$$p = \rho r T, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \tau, \quad \left(\frac{C_p}{r} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)$$

La courbe de Hugoniot prend la forme :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(1 - \gamma)\tau_2 + (1 + \gamma)\tau_1}{(1 + \gamma)\tau_2 + (1 - \gamma)\tau_1} \quad (3.29)$$

C'est une branche d'hyperbole équilatère d'asymptotes : $\tau = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\tau_1$ et $p = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}p_1$. Les coordonnées du point $A'_2(\tau'_2, p'_2)$ sont reliées par la relation :

$$\frac{p'_2}{p_1} = \left(\frac{\tau'_2}{\tau_1} \right)^{-\gamma}$$

Exercice 1 : On pose $f(\tau_2) = \ln p_2/p'_2$:

1. Montrer que $\frac{df}{d\tau_2} > 0$ indiquant que f est une fonction croissante de τ_2 , pour $\tau_2 > \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\tau_1$.
2. En déduire la position de l'isentrope J par rapport à la courbe de Hugoniot.
3. Montrer que

$$\left. \frac{df}{d\tau_2} \right|_{\tau_1} = \left. \frac{d^2f}{d\tau_2^2} \right|_{\tau_1} = 0$$

et en déduire le positionnement des deux courbes J et \mathcal{H} au voisinage de A_1 .

4. Montrer que

$$\ln \frac{p_2}{p'_2} = \frac{s_2 - s_1}{C_v}.$$

Cas du choc infiniment faible : Lorsque la pente $-\dot{m}^2$ de la droite de Rayleigh tend vers $-(\rho_1 c_1)^2$ par valeurs supérieures, on arrive à une amplitude de choc infiniment faible :

$$0 < \frac{p_2 - p_1}{p_1} \ll 1, \quad 0 < \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \ll 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{u_1 - u_2}{u_1} \ll 1$$

Dans ce contexte, on peut montrer que

$$s_2 - s_1 = \frac{\rho_1^3}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial p^2} \right)_s (A_1) \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1} \right)^3 \quad (3.30)$$

ce qui montre que l'accroissement d'entropie à la traversée d'un choc très faible est du troisième ordre en $\frac{p_2 - p_1}{p_1}$. La courbe d'Hugoniot est donc non seulement tangente mais elle admet la même courbure que l'isentrope passant par A_1 (ce qui n'est pas vrai sur la Figure 3.6 par soucis de clarté). Pour des points plus éloignés, on note bien que la différence entre la pression du point A_2 et celle du point A'_2 placé sur l'isentrope J issue de A_1 est $p_2(A_2) > p_2(A'_2)$, montrant bien le caractère irréversible d'une onde de choc droite associée à $s_2 > s_1$.

3.1.6 Propriétés Fondamentales du Choc Droit

On résume ici les notions abordées dans cette section dans l'encadré suivant :

Propriétés Fondamentales 6 :

1. Le choc droit, ou encore choc normal, ne peut exister que si l'écoulement relatif amont est supersonique :

$$M_1 = \frac{u_1}{c_1} > 1$$

2. Cette condition nécessaire étant vérifiée, l'état aval présente les caractéristiques suivantes :

— L'écoulement relatif est subsonique

$$M_2^2 = \frac{u_2}{c_2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} < 1 \quad (3.31)$$

— Compression du fluide

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) > 1 \quad (3.32)$$

— Concentration du fluide

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} > 1 \quad (3.33)$$

— Ralentissement de l'écoulement aval

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} < 1 \quad (3.34)$$

— Augmentation de l'entropie spécifique

$$s_2 > s_1 \quad (3.35)$$

Une autre manière de prouver cette propriété : On ne détaille pas ici tous les calculs, mais on indique le chemin pour les faire. Étant fixé l'état (1) au niveau thermodynamique par A_1 , un point du plan (τ, p) , on fait varier \dot{m} et donc la position du point d'intersection $A_2(\tau_2, p_2)$ de la droite de Rayleigh et de la courbe d'Hugoniot.

La différentiation des relations (3.27) et (3.28), ainsi que la relation de Gibbs

$$dh = Tds + \tau dp$$

donnent :

$$dp_2 = -\dot{m}^2 d\tau_2 - (\tau_2 - \tau_1) d(\dot{m}^2)$$

$$2T_2 ds_2 = (\tau_1 - \tau_2) dp_2 - (p_2 - p_1) d\tau_2 = (\tau_1 - \tau_2) [dp_2 + \dot{m}^2 d\tau_2]$$

d'où

$$\frac{d(\dot{m}^2)}{ds_2} = \frac{2T_2}{(\tau_1 - \tau_2)^2} > 0.$$

Par conséquent le choc s'accompagne d'une augmentation d'entropie et il faut donc sélectionner la demi-courbe d'Hugoniot \mathcal{H} sur laquelle l'entropie s_2 est plus grande que s_1 . En tenant compte de la convexité de \mathcal{H} , la condition sur m^2 s'écrit :

$$-m^2 < \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_{\mathcal{H}} (A_1), \quad \text{pente de } \mathcal{H} \text{ en } A_1$$

D'autre part, on peut montrer que $\left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_{\mathcal{H}} (A_1) = -\rho_1^2 c_1^2$, par conséquent $M_1 = \frac{u_1}{c_1} > 1$.

À partir de là, on peut finaliser l'ensemble des propriétés données ci-dessus.

3.1.7 Généralisation aux dimensions supérieures

On considère une surface plane de l'espace, $\Sigma(t)$, de normale $\vec{\mathbf{n}}$, qui se déplace à la vitesse homogène \vec{W} et qui sépare l'espace en deux régions (1) et (2) d'états W_1 et W_2 , cf Figure 3.7.

On considère toujours une cellule de contrôle \mathcal{C} , centrée sur la discontinuité et se déplaçant également à la vitesse \vec{W} . Dans la suite, \vec{V} désigne la vitesse du fluide tandis que $\vec{U} = \vec{V} - \vec{W}$ est la vitesse relative du fluide par rapport à la discontinuité. On notera en particulier V_{in} , U_{in} , V_{it} , U_{it} , les composantes normales et tangentielles (possiblement multiples, en trois dimensions, par exemple) respectivement des vecteurs \vec{U} et \vec{V} , du côté i du fluide.

On détaille maintenant les relations de saut à travers la discontinuité par intégration des équations de conservation sur la cellule de contrôle \mathcal{C} . On découpera la surface extérieure de \mathcal{C} en trois parties : ν une des deux surfaces de \mathcal{C} parallèle à la discontinuité, τ_1 la partie tangentielle située dans la région (1) et τ_2 son jumeau de la région (2).

Conservation de la Masse : L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

Par intégration sur \mathcal{C} , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathcal{C}} \rho dx \right) + \int_{\nu} (\rho_2 \vec{U}_2 - \rho_1 \vec{U}_1) \cdot \vec{\mathbf{n}} ds + \int_{\tau_1} \rho_1 (\vec{U}_1 - \vec{U}_1) \cdot \vec{t} ds + \int_{\tau_2} \rho_2 (\vec{U}_2 - \vec{U}_2) \cdot \vec{t} ds = 0$$

Soit

$$\rho_2 U_{2n} = \rho_1 U_{1n} = \dot{m} \tag{3.36}$$

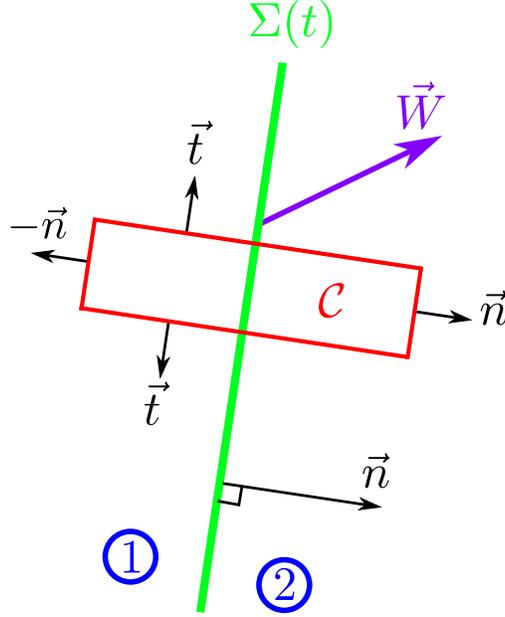


FIGURE 3.7 – Représentation du choc droit se déplaçant à la vitesse \vec{W} en deux dimensions d'espace. Définition de la cellule de contrôle \mathcal{C} .

Conservation de la Quantité de Mouvement : De même, l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le référentiel du choc droit est

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \text{div}(\rho U_i \vec{U} + p \vec{n}_i) = 0$$

où U_i est la composante du vecteur vitesse relatif \vec{U} dans la direction i et \vec{n}_i la normale dans la direction i . On considère maintenant les deux cas où la direction i est soit la normale \vec{n} à la surface Σ , soit une des direction tangentes. Par intégration de la composante normale sur la cellule \mathcal{C} , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathcal{C}} \rho U_{in} dx \right) + \int_{\nu} (\rho_2 U_{2n} \vec{U}_2 + p_2 \vec{n} - \rho_1 U_{1n} \vec{U}_1 - p_1 \vec{n}) \cdot \vec{n} ds \\ + \int_{\tau_1} \rho_1 U_{1n} (\vec{U}_1 - \vec{U}_1) \cdot \vec{t} ds + \int_{\tau_2} \rho_2 U_{2n} (\vec{U}_2 - \vec{U}_2) \cdot \vec{t} ds = 0 \end{aligned}$$

Soit

$$\rho_2 U_{2n} U_{2n} + p_2 = \rho_1 U_{1n} U_{1n} + p_1 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{m}[[V_n]] + [[p]] = 0, \text{ car } [[\vec{W}]] = 0 \quad (3.37)$$

et dans la direction tangentielle

$$\rho_2 U_{2t} U_{2n} = \rho_1 U_{1t} U_{1n} \quad \Leftrightarrow \quad [[V_t]] = 0 \quad (3.38)$$

Conservation de l'Énergie Totale : Enfin on effectue la même intégration de l'équation de conservation de l'énergie totale

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho H \vec{U}) = 0$$

et on obtient

$$\rho_2 H_2 U_{2n} = \rho_1 H_1 U_{1n} \quad \Leftrightarrow \quad \llbracket H \rrbracket = 0 \quad (3.39)$$

Second Principe de la thermodynamique :

$$ms_2 \geq ms_1 \quad (3.40)$$

En jouant sur le choix des numéros de domaine, on peut toujours se ramener au cas $\dot{m} \geq 0$. Deux cas de natures très différentes sont alors à distinguer.

- Si $\dot{m} = 0$, la surface n'est pas traversée par le fluide et on a continuité de la composante normale de la vitesse et donc de la pression :

$$V_{1n} = W = V_{2n}, \quad p_2 = p_1$$

Deux sous-cas sont encore à distinguer suivant la nature du saut de vitesse tangentielle (en effet, (3.38) ne donne plus aucune information sur le saut de vitesse tangentielle puisque $u_1 = u_2 = 0$). Si la vitesse tangentielle est continue, on parle de "surface de contact" ou de "discontinuité de contact", les densités de chaque côté de $\Sigma(t)$ étant différentes ainsi que l'entropie. Dans le cas où on trouve un saut de vitesse tangentielle, on parle de "surface de glissement".

- Dans le cas où $\dot{m} > 0$, on parle alors d'onde de choc. Les relations de saut prennent alors la forme :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = \dot{m} \quad (3.41)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (3.42)$$

$$\llbracket U_t \rrbracket = 0 = \llbracket V_t \rrbracket \quad (3.43)$$

$$\rho_1 U_1 H_1 = \rho_2 U_2 H_2 \quad (3.44)$$

Dans ce cas, on retrouve les relations de saut du choc 1D permanents étudié précédemment avec $u = (\vec{V} - \vec{W}) \cdot \vec{n}$, vitesse relative normale et on retrouve les relations entre les variables de part et d'autre du saut données dans la propriété fondamentale du choc droit énoncée précédemment avec $M_i = \frac{u_i}{c_i} = \frac{(\vec{V}_i - \vec{W}) \cdot \vec{n}}{c}$, le Mach normal.

3.2 Les écoulements dans l'approximation quasi-monodimensionnelle

3.2.1 Bases de l'approximation

On se place dans l'optique de résoudre un écoulement possédant une symétrie de révolution autour d'un axe $x'Ox$, voir Figure 3.8.

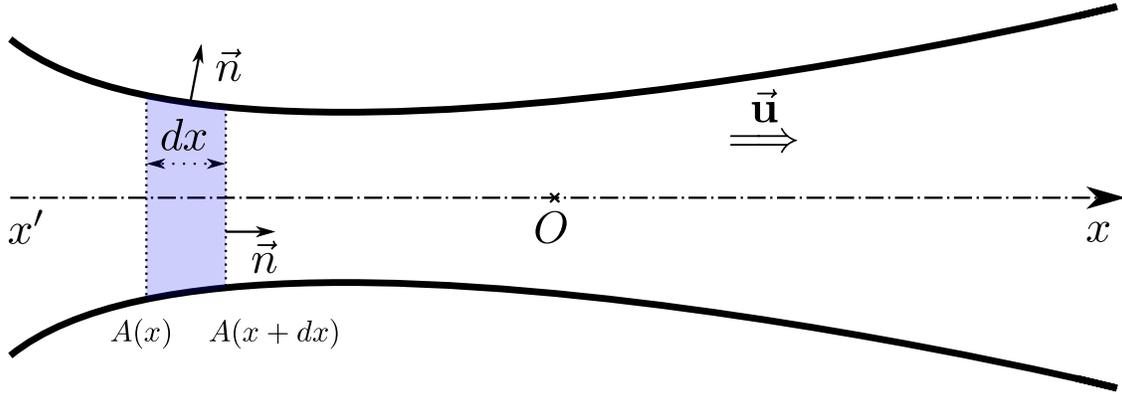


FIGURE 3.8 – Écoulement dans une tuyère axisymétrique.

À toute grandeur de l'écoulement $g(t, x, y, z)$ on associe sa moyenne dans une section de surface $A(x)$ que l'on la note $\bar{g}(t, x)$:

$$\bar{g}(t, x) = \frac{1}{A(x)} \int_y \int_z g(t, x, y, z) dy dz \quad (3.45)$$

On parlera d'écoulement quasi-monodimensionnel lorsque la différence entre g et sa moyenne sur une section A reste très faible. Plus précisément cela s'écrit :

$$\forall x \text{ fixé et } \forall y, z \text{ dans la section } A(x), \quad \frac{|\bar{g} - g|}{|\bar{g}|} \ll 1 \quad (3.46)$$

Le point important est que sous la condition (3.46) on a :

$$\overline{gg'} = \bar{g}\bar{g}' (1 + O(\varepsilon^2)) \quad \text{si} \quad \frac{|\bar{g} - g|}{|\bar{g}|} = O(\varepsilon) \ll 1.$$

Ainsi, au premier ordre en ε , l'équation d'état du gaz est satisfaite localement en x pour toutes les grandeurs thermodynamiques moyennes.

Remarques 7 :

1. L'hypothèse de la symétrie de révolution n'est pas indispensable mais fournit des simplifications pour le bilan de quantité de mouvement.
2. Dans le cadre d'une section $A(x)$ constante, l'approximation quasi monodimensionnelle va fournir une solution exacte.

3.2.2 Équations de bilan locales

Comme indiqué sur la Figure 3.8, on se place dans le domaine bleuté \mathcal{D} entre les sections $A(x)$ et $A(x + dx)$ et on travaille avec les formes intégrales des équations de conservation.

Masse :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \partial_t \rho \, d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, da$$

où $\partial\Omega$ désigne la frontière du domaine \mathcal{D} et da un élément de surface de cette frontière.

Dans l'approximation des fluides parfaits, on a $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ le long des bords de la tuyère et l'équation ci-dessus devient

$$dx A(x) \partial_t \bar{\rho} = - (\bar{\rho} \bar{u} A)(x + dx) + (\bar{\rho} \bar{u} A)(x)$$

et en passant à la limite sur dx :

$$A \partial_t \bar{\rho} + \partial_x (\bar{\rho} \bar{u} A) = 0 \quad (3.47)$$

Par mesure de simplicité, on enlève les barres indiquant les valeurs moyennes dans la suite.

Quantité de Mouvement :

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_t (\rho u) \, d\Omega = - \int_{A(x+dx)} \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, da + \int_{A(x)} \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, da - \int_{\partial\mathcal{D}} p \cdot \vec{n} \, da$$

Cette équation n'apporte de contribution que dans la direction x par symétrie, et à l'ordre dominant on approche la pression à la paroi par la pression moyenne pour obtenir

$$dx A(x) \partial_t (\rho u) = - (\rho u^2 A)(x + dx) + (\rho u^2 A)(x) + [p(x) - p(x + dx)] A(x)$$

et en passant à la limite sur l'épaisseur de \mathcal{D} et en utilisant la conservation de la masse (3.47) :

$$\rho \partial_t u + \rho u \partial_x u = - \partial_x p \quad (3.48)$$

Dans certains cas, on a besoin d'introduire un terme de frottement pariétal et l'on introduit alors f , une densité linéique de force. (3.48) devient alors :

$$\rho \partial_t u + \rho u \partial_x u = -\partial_x p + f \quad (3.49)$$

Il est important de bien noter que ce terme supplémentaire provient d'effets de viscosité à la paroi et ne peut donc pas, dans ces conditions, être obtenu à partir des équations de conservation sous forme intégrale pour un fluide parfait. Il apparaît donc (comme dans le cas des pertes de charge linéiques pour un fluide incompressible, cf livre de S. Candel [2]) comme un terme de frottement linéique "global" sur une section de la tuyère. C'est un terme algébrique négatif puisque le frottement ralentit l'écoulement.

Enthalpie Spécifique Totale : Par le même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$\partial_t \left(h + \frac{u^2}{2} \right) + u \partial_x \left(h + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \partial_t p + q - \frac{f \cdot u}{\rho} \quad (3.50)$$

où q désigne un taux moyen de chaleur dégagé par unité de masse. Il représente un terme source de chaleur lié au rayonnement ou à une source volumique au sein de l'écoulement.

La relation de Gibbs s'écrit aussi : $dh = \frac{1}{\rho} dp + T ds$ et en terme de dérivées matérielles on obtient :

$$\frac{Dh}{Dt} = -u \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \partial_t p + q - \frac{f \cdot u}{\rho} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$$

et finalement

$$T \frac{Ds}{Dt} = q - \frac{f \cdot u}{\rho}$$

est le taux de production d'entropie le long d'une trajectoire, qui pour une vitesse positive (et donc $f < 0$) et/ou une source positive de chaleur conduit à

$$T \frac{Ds}{Dt} > 0.$$

Propriété 8 : Dans le cas stationnaire et en anticipant un peu la suite, on obtient

- La conservation du débit : $\rho u A = \text{cste}$.
- La relation de Hugoniot généralisée :

$$\frac{1 - M^2}{u} Du + \frac{DA}{A} = \frac{1}{\rho c^2} \left[\frac{\kappa^2 q}{T} - \left(1 + \frac{\kappa^2}{\rho T} \right) f \cdot u \right] \quad (3.51)$$

où $\kappa^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho$ et $D\varphi = u \cdot \partial_x \varphi$ est la dérivée matérielle dans le cas stationnaire.

Démonstration.

$$\rho u Du + Dp = f \cdot u \quad \text{et} \quad dp = c^2 d\rho + \kappa^2 ds$$

d'où

$$\rho u Du + c^2 D\rho + \kappa^2 Ds = f \cdot u$$

Cependant la conservation du débit implique que $\frac{D\rho}{\rho} + \frac{Du}{u} + \frac{DA}{A} = 0$ et donc

$$\rho c^2 \left[\frac{M^2}{u} Du - \frac{Du}{u} - \frac{DA}{A} \right] + \kappa^2 \left(\frac{q}{T} - \frac{f \cdot u}{\rho T} \right) = f \cdot u$$

et (3.51) en découle. □

Remarque 9 : On trouve quelque fois l'écriture

$$T ds = \frac{df}{\rho} + dQ$$

où l'on ne sait pas forcément de quels accroissements on parle et la relation aux variables dépendant de x et t reste floue. Ce type d'écriture provient de la thermodynamique des systèmes homogènes à l'équilibre. Nous avons préféré travailler avec des dérivées matérielles et la relation avec l'écriture ci-dessus est dans ce cas :

$$ds = Ds dt = u \partial_x s dt = \frac{1}{T} \left(-\frac{df}{\rho} + dQ \right) = \frac{1}{T} \left(q dt - \frac{f \cdot u}{\rho} dt \right)$$

d'où $dQ = q dt$ est une quantité de chaleur déposée en un temps dt et $df = f \cdot u dt$ est le travail de la force de frottement. Voir polycopié de D. Thévenin par exemple.

3.2.3 Exemple d'écoulement stationnaire : la Tuyère de Laval

Le cas de l'écoulement continu

On se place ici dans le contexte de l'approximation 1D d'un écoulement continu. La conservation de la masse se traduit par la relation différentielle

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0, \quad (3.52)$$

celle de la quantité de mouvement par

$$\rho u du + dp = 0, \quad (3.53)$$

et l'écoulement est à la fois homoénergétique et homoentropique :

$$\mathcal{H} = h + \frac{u^2}{2} = \text{cste} \quad \text{et} \quad s = \text{cste}.$$

Cette dernière propriété combinée à la loi d'état indique

$$dp = c^2 d\rho$$

et en notant $M = \frac{u}{c}$, on arrive à

$$\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0 \quad (3.54)$$

en utilisant la conservation de la masse. Cette équation est appelée équation de Hugoniot. Elle s'écrit aussi

$$(M^2 - 1) \frac{dp}{p} + \frac{\rho u^2}{p} \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.55)$$

Ces équations permettent alors de relier l'évolution de u et p à celle de la section A en fonction du nombre de Mach local M .

Théorème de Hugoniot : Dans une partie convergente de la tuyère, A est une fonction décroissante de x et $\frac{dA}{A} \leq 0$. Par conséquent :

1. L'écoulement voit sa vitesse augmenter et sa pression diminuer si $M < 1$; l'écoulement est subsonique.
2. L'écoulement voit sa vitesse diminuer et sa pression augmenter si $M > 1$; l'écoulement est supersonique.

En revanche, dans une partie divergente de la tuyère, $\frac{dA}{A} \geq 0$ et :

1. L'écoulement voit sa vitesse diminuer et sa pression augmenter si $M < 1$;
2. L'écoulement voit sa vitesse augmenter et sa pression diminuer si $M > 1$.

L'écoulement ne peut passer du régime subsonique au régime supersonique qu'en atteignant un point sonique ($M = 1$) au col de la tuyère.

Résolution. La résolution du problème de l'écoulement dans la tuyère utilise le caractère homoentropique de l'écoulement et la possibilité de travailler avec les conditions génératrices. L'expression du débit massique s'écrit :

$$\dot{m} = \rho u A = \rho c M A = p \sqrt{\frac{\gamma}{rT}} M A = \frac{p}{p_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}} M A p_0 \left(\frac{\gamma}{rT_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec des expressions connues pour $\frac{p}{p_0}$ et $\frac{T_0}{T}$ en fonction de M . Finalement

$$\dot{m} = p_0 \left(\frac{\gamma}{rT_0} \right)^{\frac{1}{2}} A(x) g[M(x)], \quad \text{avec } g(M) = M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.56)$$

La fonction g est représentée sur la Figure 3.9. On voit alors que, les conditions génératrices

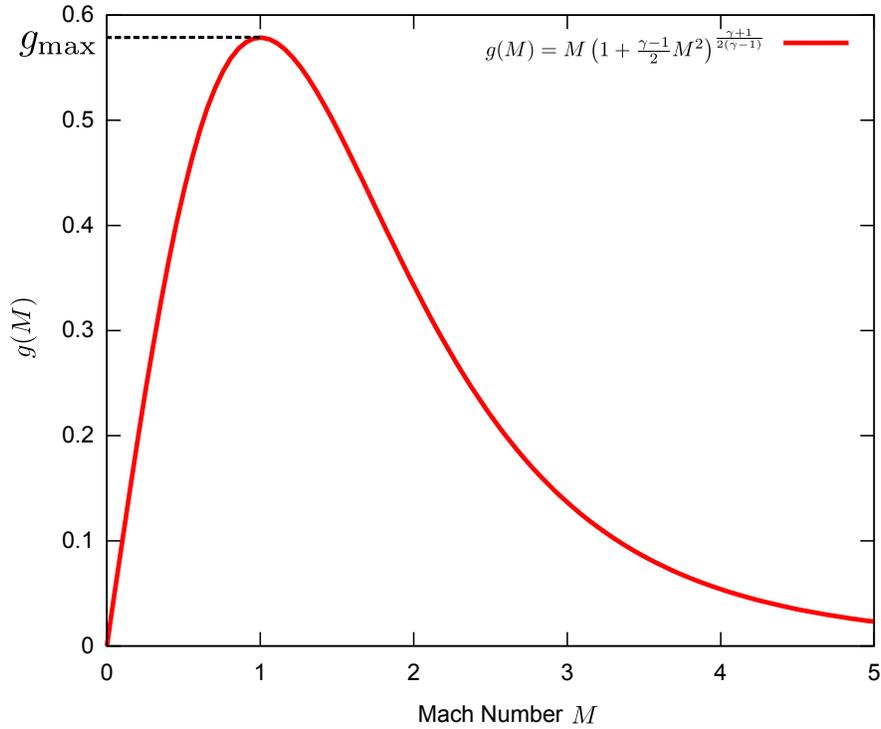


FIGURE 3.9 – Représentation graphique de la fonction $g(M)$ qui détermine le débit massique constant dans la tuyère en fonction du nombre de Mach aval.

étant fixées, il suffit de connaître la vitesse ou la pression en un point pour fixer le débit et donc l'écoulement dans toute la tuyère.

- Un cas intéressant est celui de la tuyère amorcée pour laquelle $M(x_c) = 1$ au col. Ceci fixe le débit indépendamment des conditions de sortie :

$$\dot{m} = p_0 \left(\frac{\gamma}{rT_0} \right)^{1/2} A(x_c) g_{\max}, \quad g_{\max} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

On parle alors de blocage sonique.

- Un second cas est celui où se forme un jet en sortie, tel que, les effets visqueux étant négligés, on a égalité de la pression de sortie et de la pression ambiante extérieure dans laquelle arrive le jet : $p_a = p_s$.

Trois cas se produisent alors :

- a) $p_s = p_0$, alors $\dot{m} = 0$.
- b) $p_s < p_0$, la différence $p_0 - p_a$ est moteur de l'écoulement. Si l'on note p_1 la pression de sortie correspondant à $M(x_c) = 1$, pour $p_s \in [p_1, p_0]$, l'écoulement est subsonique dans le convergent et dans le divergent, le nombre de Mach augmente jusqu'à sa valeur maximale en $x = x_c$ où l'on observe un minimum de la pression (dans le cas $M(x_c) = 1$, on a $p(x_c) = 0.528 p_0$ qui se trouve être la pression minimale possible que l'on peut atteindre au col). Puis la pression augmente dans le divergent pour atteindre p_s et le nombre de Mach diminue. Cette situation correspond aux cas a), b) et c) sur la Figure 3.10.
- c) $p_s < p_0$, la tuyère est amorcée et $M(x_c) = 1$, l'écoulement est subsonique dans le convergent et supersonique dans le divergent. L'écoulement ne fait qu'accélérer et la pression ne fait que diminuer. Le fait que la tuyère soit amorcée fixe en fait la pression de sortie à la valeur p_2 , cas d) sur la Figure 3.10.

□

Remarque 10 :

1. Dans le cas $M(x_c) = 1$, on a deux solutions c) et d) qui coexistent. À partir du point $M(x_c) = 1$, on peut soit décélérer jusqu'à $p_s = p_1$, soit accélérer jusqu'à $p_s = p_2$.
2. La modélisation en terme d'un écoulement permanent 1D continu ne permet de décrire que les pressions de sorties dans l'ensemble : $p_s \in \{p_2\} \cup [p_1, p_0]$.

Choc droit dans le divergent

On se place ici dans le cas où $p_s \in [p_2, p_1]$. Si $p_s = p_2$ alors on retrouve un cas supersonique dans le divergent mais continu et si $p_s = p_1$, on a la solution sonique au col, subsonique dans le divergent. La question se pose donc pour $p_s \in]p_2, p_1[$. On continue de supposer l'écoulement 1D, mais on s'autorise la présence d'une onde de choc. D'après ce que nous avons vu pour le choc droit, le choc droit ne peut avoir lieu que dans le divergent en régime supersonique. L'écoulement de l'autre côté du choc est nécessairement subsonique et interdit alors la présence d'un second choc.

Remarquons que l'écoulement avant le choc est déterminé par le caractère sonique de l'écoulement au col et comme le débit est conservé à travers une onde de choc, le débit est le même dans toute la tuyère, même en présence du choc (blocage sonique).

On peut montrer que la position du choc, lorsqu'elle passe de x_c à x_s augmente en amplitude et la pression de sortie diminue de p_1 (choc infiniment faible proche de x_c) vers p_3 (voir Figure 3.11) lorsque le choc atteint la sortie en x_s (la pression en amont du choc est alors p_2 !). Par conséquent, la présence d'un choc droit dans le divergent permet de

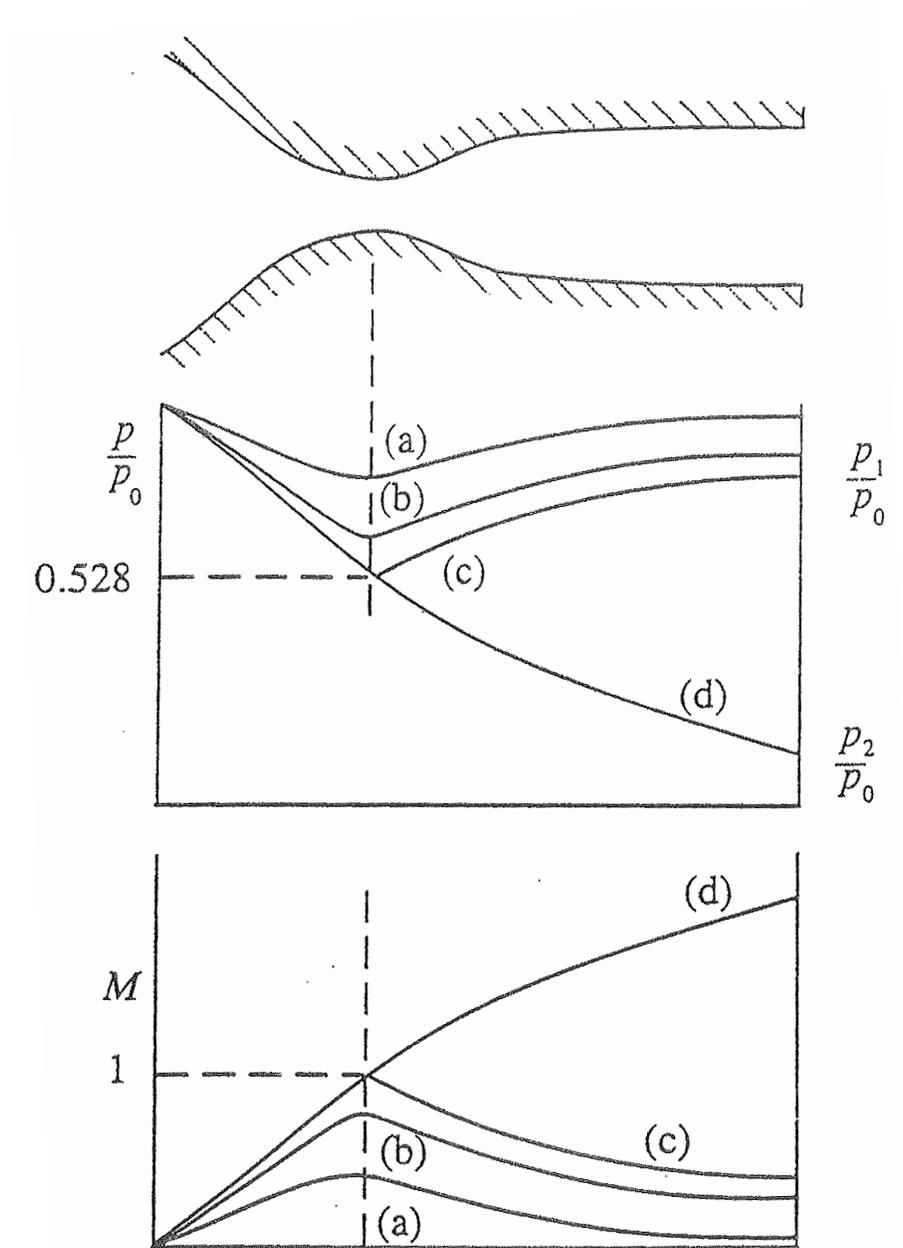


FIGURE 3.10 – Profils de p/p_0 et M pour une tuyère de Laval dans différentes configurations d'écoulements avals.

traiter des pressions de sortie entre p_3 et p_1 . Lorsque $p_s \in]p_2, p_3[$, ou $p_s < p_2$, le cadre de l'approximation 1D ne permet pas de résoudre l'écoulement. On donne dans la Figure 3.12 l'exemple de $p_s \in]p_2, p_3[$ où l'écoulement génère des ondes de choc obliques qui rompent le caractère monodimensionnel de l'écoulement.

Influence du frottement et du dégagement de chaleur sur l'écoulement

Frottement : L'équation de Hugoniot généralisée dans le cas $q = 0$ donne :

$$\frac{1 - M^2}{u} Du + \frac{DA}{A} = - \left(1 + \frac{\kappa}{\rho T} \right) \frac{f \cdot u}{\rho c^2}$$

Dans le cas où la section est constante, la présence du frottement avec $f < 0$ implique

$$\frac{1 - M^2}{u} Du > 0.$$

Donc, en régime subsonique, la présence de frottement peut être analysée comme l'effet d'un rétrécissement de section accompagné d'une accélération, ce qui peut sembler paradoxal. Pour comprendre ce qu'il se passe, examinons l'évolution de la pression, dans le cas $A = \text{cste}$. En utilisant l'équation sur la quantité de mouvement, on a

$$(1 - M^2)(-Dp + f \cdot u) = -f \cdot u M^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\rho T} \right)$$

soit finalement

$$Dp = f \cdot u \left(\frac{1 + M^2 \frac{\kappa}{\rho T}}{1 - M^2} \right) < 0.$$

Par conséquent, le frottement induit une diminution de pression indispensable pour que l'écoulement ait bien lieu. En régime supersonique, on peut aussi voir l'effet du frottement comme un rétrécissement de section, mais à A fixé, cela correspond à une diminution de vitesse et à une augmentation de pression.

Apport de chaleur : Pour comprendre l'influence d'un apport de chaleur, on se place dans le cas d'une section constante sans frottement et considère deux points de l'écoulement, (1) et (2). Les équations de conservation donnent :

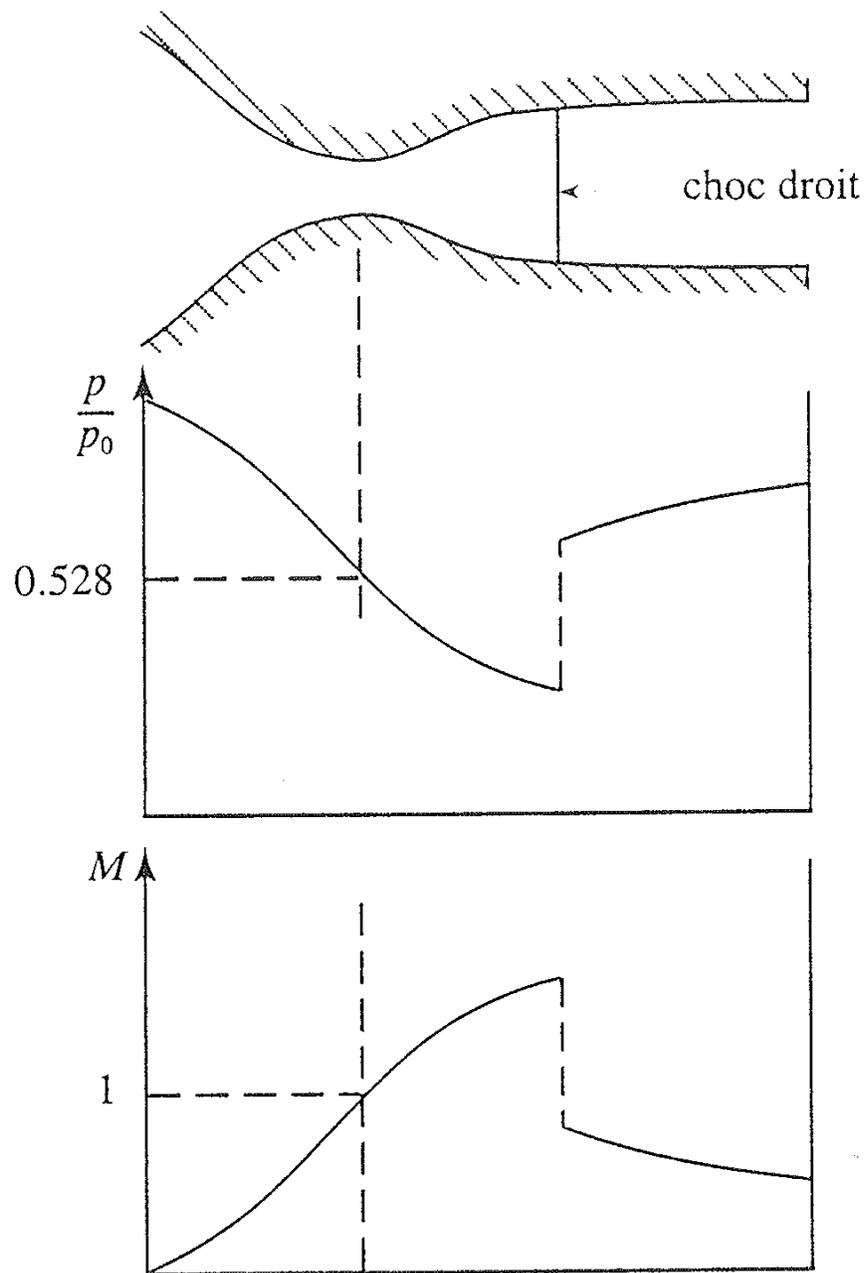
$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (3.57)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (\text{pas de frottement}) \quad (3.58)$$

$$C_p T_{01} + Q = C_p T_{02}, \quad \left(Q = \int_1^2 q dt \right) \quad (3.59)$$

où T_{0i} sont les températures génératrices et Q la quantité de chaleur fournie au système entre (1) et (2). On sait par ailleurs que

$$\frac{T_{0i}}{T_i} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_i^2 \quad \text{et} \quad \frac{p_i}{p_{0i}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_i^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

FIGURE 3.11 – Profils de p/p_0 et M dans le cas d'un régime discontinu dans le divergent.

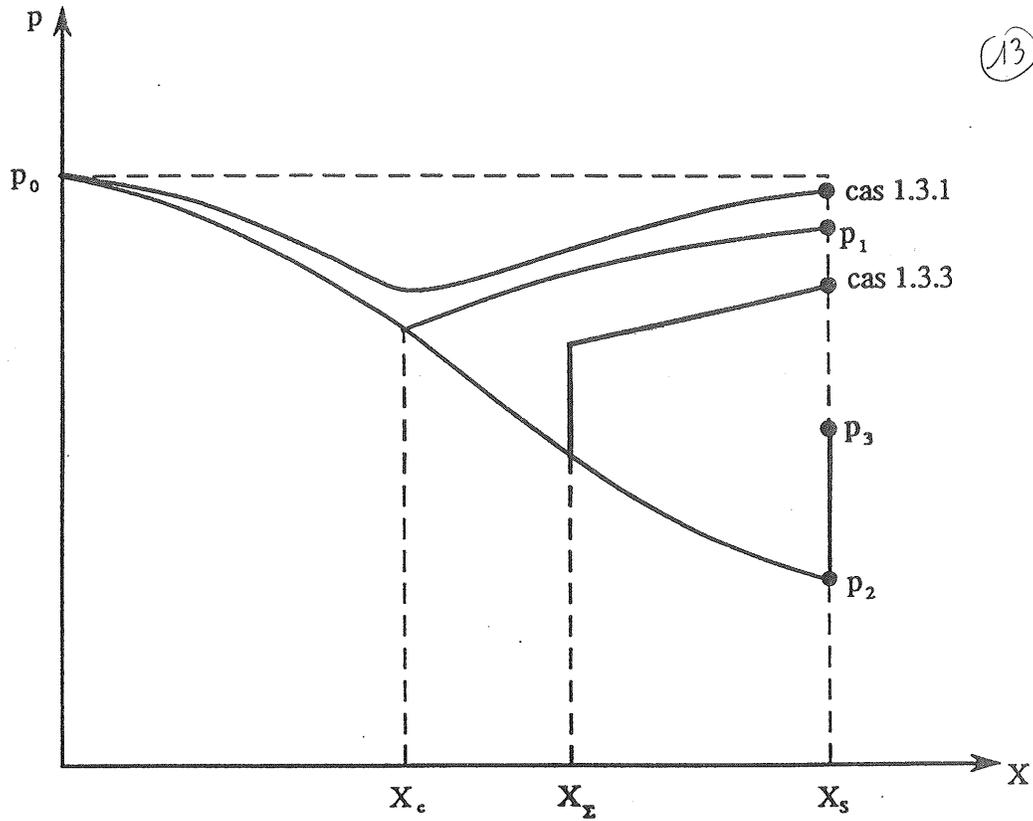


FIGURE 3.12 – Profils de p/p_0 en fonction de la pression de sortie p_s . Tant que $p_s < p_1$, l'écoulement reste subsonique. le col devient sonique à partir de p_1 . Entre p_1 et p_3 , le choc se déplace dans le divergent vers la sortie et il gagne en intensité. Pour p_s différent de p_2 mais $p_s < p_3$, l'analyse quasi monodimensionnelle ne suffit plus à caractériser l'écoulement, des chocs obliques apparaissent, voir Figure 3.13.

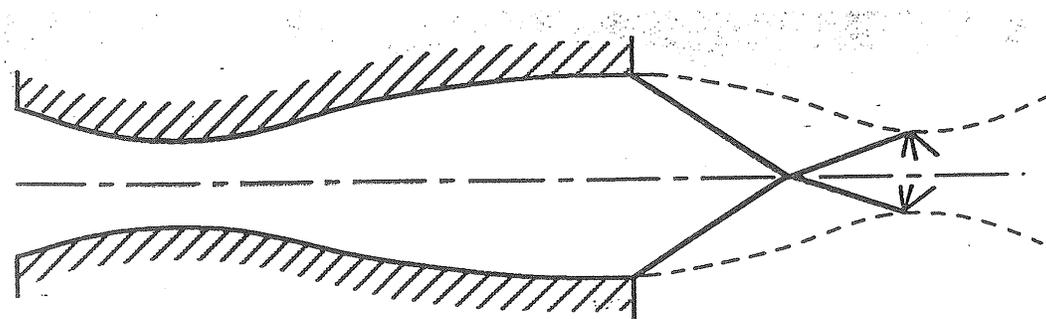


FIGURE 3.13 – Ondes de choc obliques à la sortie du divergent. $p_2 < p_s < p_3$.

Partant de la conservation du débit et en passant en variables p, T , on obtient

$$\frac{p_1}{rT_1} M_1 (\gamma r T_1)^{1/2} = \frac{p_2}{rT_2} M_2 (\gamma r T_2)^{1/2}$$

ou encore

$$p_1 \left(\frac{\gamma}{rT_{01}} \right)^{1/2} M_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{1/2} = p_2 \left(\frac{\gamma}{rT_{02}} \right)^{1/2} M_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{1/2}$$

Finalement, en utilisant

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

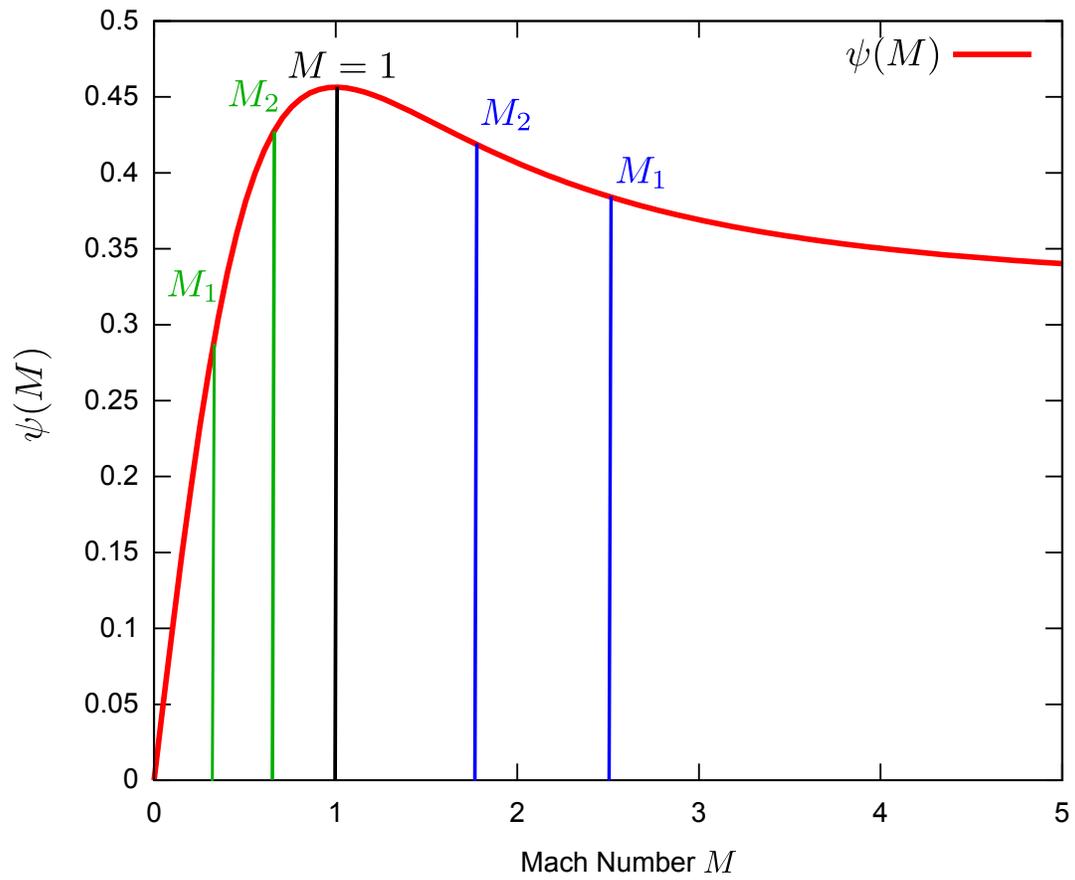
qui provient de la conservation de la quantité de mouvement, on arrive à :

$$\left(\frac{T_{01} + Q}{T_{01}} \right)^{1/2} \frac{M_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{1/2}}{1 + \gamma M_1^2} = \frac{M_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{1/2}}{1 + \gamma M_2^2}$$

Le lecteur se convaincra aisément par un petit calcul que la dérivée de la fonction

$$\alpha \rightarrow \psi(\alpha) = \frac{\alpha \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \alpha^2 \right)^{1/2}}{1 + \gamma \alpha^2}$$

est proportionnelle à $1 - \alpha^2$. La forme de cette fonction est donnée sur la Figure 3.14. Si l'écoulement initial est subsonique, $M_1 < 1$, alors on a $M_2 > M_1$; si par contre $M_1 > 1$, le résultat sur M_2 est inversé : $M_2 < M_1$.

FIGURE 3.14 – Profil de la fonction $\psi(M)$.

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

DEVOIR À LA MAISON II

3.3 Étude de la Tuyère de Laval

On s'intéresse à un écoulement isentropique stationnaire dans un conduit de section variable tel que celui représenté sur la partie gauche de la Figure 3.15. On suppose pour simplifier l'étude que les propriétés décrivant cet écoulement sont uniformes dans une section donnée. Pour établir les équations de l'écoulement, on peut appliquer les équations de conservation au volume de contrôle indiqué sur la partie droite de la Figure 3.15.

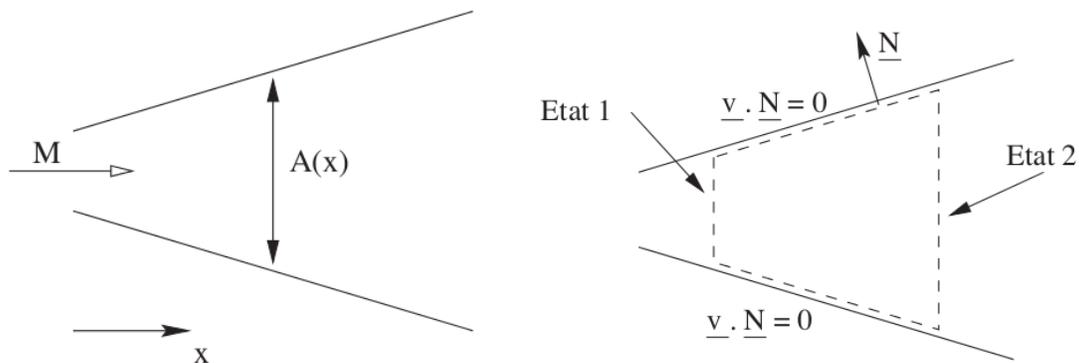


FIGURE 3.15 – Conduit de section variable dans lequel l'écoulement est supposé uniforme par section. La figure de droite représente le volume de contrôle utilisé pour exprimer les lois de conservation de la masse, la quantité de mouvement et l'énergie dans notre hypothèse d'écoulement quasi-1D.

Préliminaires

Les questions suivantes sont facultatives. Leurs résultats peuvent être admis pour le reste du problème. Il est cependant intéressant de les traiter pour bien comprendre les relations différentielles que nous utiliserons par la suite.

On pourra s'amuser avec l'applet disponible à l'adresse <http://www.engapplets.vt.edu/fluids/CDnozzle/index.html>

1. Intégrer les équations d'Euler sur le volume de contrôle représenté sur la Figure 3.15 et en déduire les relations reliant les états stationnaires (ρ_1, u_1, p_1) et (ρ_2, u_2, p_2) :

$$\begin{cases} \rho_2 u_2 A_2 - \rho_1 u_1 A_1 = 0 \\ p_2 A_2 - p_1 A_1 - \int_{A_1}^{A_2} p \, dA + \rho_2 u_2^2 A_2 - \rho_1 u_1^2 A_1 = 0 \\ \rho_2 u_2 A_2 H_2 - \rho_1 u_1 A_1 H_1 = 0 \end{cases}$$

où A_1 et A_2 sont respectivement les sections gauche et droite du volume de contrôle.

2. En écrivant l'état 2 comme une petite perturbation de l'état 1 :

$$\rho_2 = \rho_1 + d\rho, \quad u_2 = u_1 + du, \quad p_2 = p_1 + dp, \quad A_2 = A_1 + dA,$$

linéariser les équations obtenues à la question précédente au premier ordre et obtenir les relations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} d(\rho u A) = 0 \\ dp + \rho u du = 0 \\ dH = 0 \end{cases}$$

3. Dans le cas où l'écoulement est supposé isentropique, la différentielle de pression est proportionnelle à la différentielle de densité et le coefficient de proportionnalité est le carré de la vitesse du son : $dp = c^2 d\rho$. En combinant les deux premières équations du système précédent, en déduire la **relation section-vitesse** :

$$\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0. \quad (3.60)$$

On pourra également l'écrire sous la forme :

$$\frac{\rho u^2}{p} \frac{dA}{A} + (M^2 - 1) \frac{dp}{p} = 0. \quad (3.61)$$

La Tuyère de Laval

On considère un dispositif **convergent-divergent**, appelé Tuyère de Laval, représenté sur la Figure 3.16. Dans toute la suite nous allons paramétrer notre étude par le rapport entre la pression de sortie (p_s) et la pression du réservoir de pression (p_1) qui sont les deux quantités que l'on contrôle en pratique. On notera que puisque $u_1 = 0$ les quantités génératrices ρ_1 , p_1 et T_1 sont égales aux variables à l'arrêt du problème : ρ_0 , p_0 et T_0 .

4. On raisonne qualitativement sur les équations (3.60) et (3.61).
- Dans quelles sections peut-on avoir $M = 1$? Qu'en est-il dans le cas de la tuyère de Laval ?
 - Comment varient la vitesse et la pression dans le convergent et le divergent lorsque $M < 1$? Et lorsque $M > 1$?

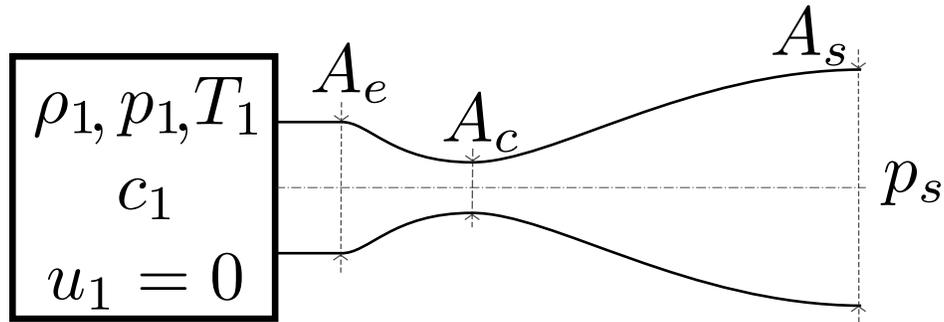


FIGURE 3.16 – Représentation schématique de la tuyère de Laval avec un réservoir de pression à gauche où la vitesse est supposée quasi-nulle, son col de section A_c , et la pression de sortie p_s , en général la pression atmosphérique.

c) Peut-on observer un régime supersonique dans le convergent ?

5. Quelles sont les distributions de vitesse et de pression dans la tuyère lorsque le rapport p_s/p_1 vaut 1 ?

On étudie maintenant l'écoulement dans la tuyère lorsque ce rapport diminue vers 0. Pour cela, nous allons considérer comme référence l'état sonique résultant de la transformation isentropique de l'état courant dans l'état où le Mach vaut 1 et les grandeurs de l'écoulement sont **les grandeurs soniques** (ρ_*, p_*, c_*, T_*). On note alors A_* **la section sonique** correspondante. Il est important de noter que cette section ne correspond pas nécessairement à une réalité mais qu'elle peut toujours être considérée, même conceptuellement. On rappelle que **le Mach caractéristique** est défini par $M_* = u/c_*$, cf Polycopié.

6. On se place dans un état quelconque ($\rho, u, p, c, T, M, \dots$) dans une section A . Exprimer l'égalité des débits à travers la section A considérée et la section sonique. En déduire une expression du rapport A/A_* en fonction de ρ, ρ_* et M_* .
7. Rappeler la relation qui relie le Mach caractéristique au Mach ainsi que le rapport ρ_0/ρ en fonction du nombre de Mach, ρ_0 étant la densité d'arrêt. En déduire que le rapport de la section courante à la section sonique s'exprime en fonction du Mach uniquement à travers la relation :

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M^2 \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (3.62)$$

8. Rappeler l'expression du rapport p_0/p en fonction du Mach. Sans l'expliciter, en déduire que le rapport de la section courante à la section sonique peut être exprimée en fonction du rapport p/p_0 uniquement. Cette relation ainsi que la relation (3.62) sont représentées graphiquement sur la Figure 3.17.
9. On suppose que $\gamma = 1.4$. Donner la valeur numérique du rapport p/p_0 pour laquelle la section courante est sonique. Comparer au graphique.

10. Plaçons nous dans le cas où le rapport entre la section de sortie A_s et la section au col A_c vaut 2. Quel est approximativement la valeur du rapport p_s/p_0 qui rend le col sonique ? Cette valeur vous semble-t-elle exagérée ?

On appelle désormais p_c la pression pour laquelle le col devient sonique. On dit alors que la tuyère est **amorcée**. Étudions les différents régimes de fonctionnement par rapport au signe de $p_s - p_c$.

11. Quel est le régime de l'écoulement dans la tuyère lorsque $0 < p_s < p_c$? Sur un graphique, représenter schématiquement l'évolution du rapport p/p_0 dans la tuyère en fonction de l'abscisse x . On placera l'origine du repère sur la section d'entrée A_c .
12. On se place maintenant au col. Nous avons déjà vu que dans cette section, le débit-masse est donné par $\dot{m} = \rho u A_c = \rho_* c_* A_*$. Justifier le fait que ρ_* et c_* sont fonction des grandeurs d'arrêt uniquement et pas du Mach local. Par le graphique de gauche de la Figure 3.17, en déduire qu'à section A_c fixée, la section sonique A_* est une fonction croissante du Mach en régime subsonique et qu'elle atteint un maximum pour $A_* = A_c$. Quel est donc l'évolution du débit dans la tuyère lorsque p_s/p_0 décroît de 1 à 0 ? Quelle est l'évolution de l'écoulement dans le convergent lorsque $p_c < p_s < 0$? Ce phénomène est appelé le **blocage sonique**.
13. Sur le même graphique que précédemment, représenter l'évolution de p/p_0 en fonction de x lorsque $p_s = p_c$ et que l'écoulement reste subsonique dans toute la tuyère sauf au col. Si l'on suppose au contraire que l'écoulement est maintenant supersonique et isentropique dans le divergent, quelle sera l'évolution du rapport p_s/p_0 dans ce dernier ? Représenter schématiquement cette évolution sur le même graphique. On notera p_3 la pression de sortie correspondante. Dans cette configuration, on dit que la tuyère est **adaptée**.

Lorsque $p_c < p_s < p_3$, on voit bien que l'écoulement ne peut être ni subsonique dans toute la tuyère, ni supersonique et isentropique dans le divergent. On remet donc en cause l'hypothèse d'isentropie et on autorise l'apparition de chocs droits dans le divergent.

14. Combien de chocs peut-il y avoir ? Comment évoluent leurs position et intensité en fonction de p_s ?
15. En déduire qu'il existe une configuration pour laquelle l'écoulement est supersonique dans toute la tuyère mais subsonique dès sa sortie. On appellera p_2 la valeur de p_s correspondante.
16. À votre avis, que se passe-t-il lorsque $p_2 > p_s > p_3$? Et lorsque $p_s < p_3$?

3.4 Application Numérique

Les conditions génératrice de l'écoulement dans la tuyère sont données par $p_0 = 30$ bar et $T_0 = 600$ K. Le col du système est amorcé et sa section A admet une surface de 10 cm². Comme dans le cours les valeurs de sortie sont indicées avec un s . La tuyère est adapté

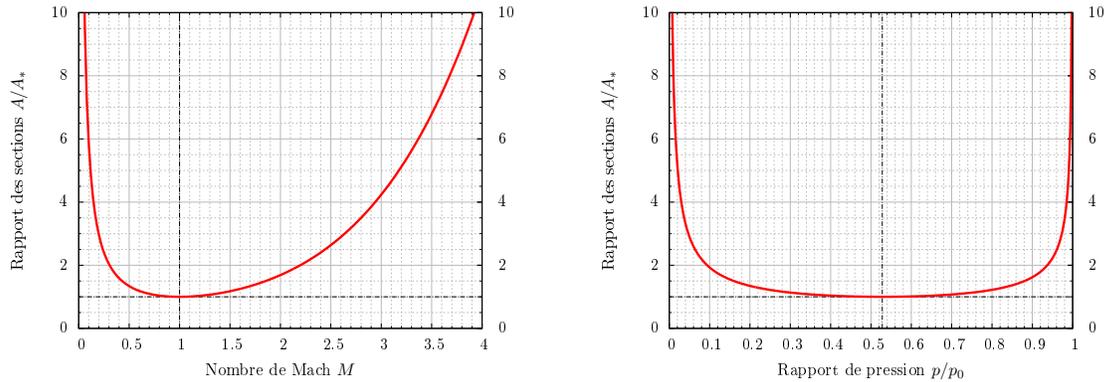


FIGURE 3.17 – Relation entre le rapport section locale sur section sonique A/A_* et (gauche) Mach, (droite) rapport pression locale et pression statique p/p_0 .

à la pression de sortie $p_{\text{ext}} = 1 \text{ bar}$, c'est à dire que $p_s = 1 \text{ bar}$. L'écoulement y est donc supersonique et sans choc dans le divergent. On néglige le frottement et on suppose que le gaz est un gaz parfait avec $\gamma = 1.4$. Pour l'air on rappelle que l'on a $r = 287 \text{ J/kg/K}$.

- I. Quelle est la valeur de la section de sortie A_s ?
- II. Quelles sont la température T_s et la vitesse v_s de sortie ?
- III. Donner la valeur du débit dans la tuyère amorcée.
- IV. Donner les caractéristiques de l'écoulement au col.
- V. La valeur de la section au col est parfois notée A_* , comme c'est le cas dans les tables données en cours issues du livre de Anderson. En utilisant ces tables et la valeur de A_s calculée précédemment, retrouver les diverses valeurs en sortie de tuyère.

3.5 Ré-entrée Atmosphérique

On considère le problème de la réentrée d'une navette spatiale comme indiqué sur la Figure 3.19. Pour simplifier et pouvoir obtenir des ordres de grandeur, on se place sur la ligne joignant les points A et B pour laquelle le choc peut être supposé droit et permanent pendant une phase de vol. Dans le repère lié à la navette, l'écoulement amont (noté 1) arrive à vitesse V .

À une distance d'environ 75 km de la terre, la pression est d'environ 2.5 Pa, la température de 205.3 K, la vitesse V est de 7181 m/s. On rappelle que la constante des gaz idéaux vaut $r = 287 \text{ J/kg/K}$ et on prendra $\gamma = 1.4$ pour les calculs.

- I. Calculer le nombre de Mach de l'écoulement amont. A partir des données fournies, évaluer la température juste derrière le choc.
- II. Calculer la température au point d'arrêt B

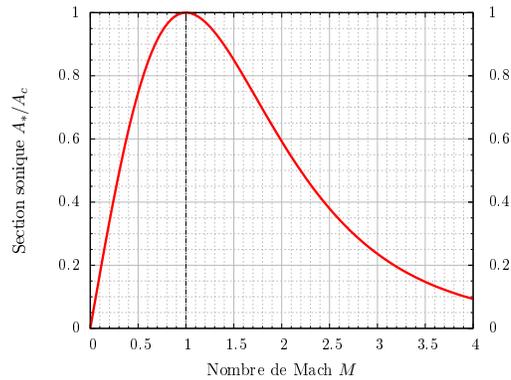


FIGURE 3.18 – Évolution de la section sonique (éventuellement abstraite) en fonction du Mach M pour une section locale fixée. Le débit local est directement proportionnel à cette section sonique. Il passe donc par un maximum lorsque la section locale est sonique.

III. Que penser de l'ordre de grandeur de la température? Discuter la validité du modèle et les extensions nécessaires pour décrire la physique du phénomène.

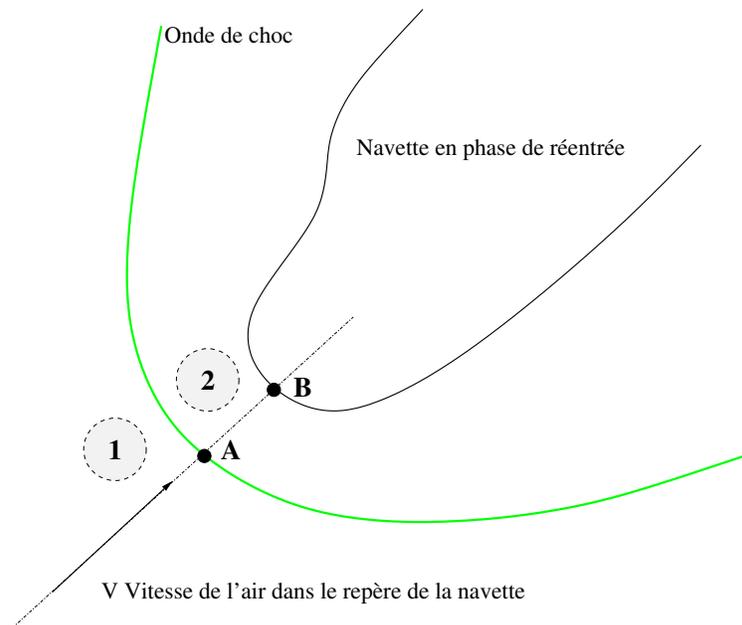


FIGURE 3.19 – Navette en phase de réentrée avec un choc courbe devant elle.

Chapitre 4

Les Écoulements Instationnaires de Fluides Parfaits 1D

Dans le Chapitre précédent, nous nous sommes restreint au cas des écoulement stationnaires, afin de bien comprendre la notion de compressibilité et de propagation du son, de définir par là le nombre de Mach local d'un écoulement et d'étudier le cas particulier du choc droit, d'abord en une dimension d'espace, puis en 2D et 3D dans un cadre plus général.

Dans ce Chapitre, nous nous intéressons au cas des écoulements monodimensionnels de fluides parfaits instationnaires. Dans le Chapitre 1, nous avons travaillé en dimension un d'espace, successivement sur une équation linéaire, une équation non-linéaire et finalement sur un système d'équations linéaires. Le problème des écoulements monodimensionnels instationnaires nous servira de modèle type pour aborder la résolution d'un système d'équations non-linéaires. Nous allons devoir combiner les outils introduits dans le cadre d'une équation non-linéaire (identification de la formation de singularités en temps fini, résolution des courbes caractéristiques, conditions de saut et vitesse de propagation) à ceux identifiés dans le cadre des systèmes linéaires (multiplicité de vitesses de propagation, conditions de sauts vectorielles et analyse dans l'espace des phases).

4.1 Écoulements instationnaires continus 1D

Le but de cette section est d'utiliser les outils et notions introduites dans au chapitre 1 afin de saisir les difficultés associées à la résolution des systèmes non-linéaires dans une seule dimension d'espace. Il nous faut pour cela rappeler les diverses formes des équations avec lesquelles nous allons travailler et montrer comment on introduit les courbes caractéristiques. La notion d'onde simple et son lien avec les courbes intégrales permettra de comprendre le double intérêt des invariants de Riemann et nous conduira à la résolution effective d'une configuration.

4.1.1 Formes Alternatives des Équations d'Euler - Conditions de Weyl

Comme nous l'avons détaillé au chapitre 2, les équations de fluides parfaits s'écrivent :

$$\partial_t U + \partial_x (F(U)) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (4.1)$$

mais dans ce paragraphe, les formules sont encore écrites et valables dans n'importe quelle dimension d'espace. Le vecteur des variables conservatives s'écrit :

$$U^t = (\rho, \rho v, \rho \mathcal{E}), \quad (4.2)$$

et le flux associé :

$$(F(U))^t = (\rho v, \rho v^2 + p, \rho \mathcal{E} v + p v). \quad (4.3)$$

L'énergie totale $\mathcal{E} = e + \frac{v^2}{2}$ se décompose en l'énergie interne (donnée par exemple par une loi d'état complète $e = e(\tau = 1/\rho, s)$ qui contient toute la thermodynamique) et l'énergie cinétique. Les variables du système de lois de conservation (4.1), que l'on appelle variables conservatives, vivent dans un ouvert convexe $U \in \mathcal{O}_U$ que l'on appelle ouvert des états admissibles (la densité du gaz doit être positive et l'énergie interne vérifie certaines contraintes).

Remarque 1 : Que l'on aborde ces équations par la mécanique des milieux continus ou par le biais de la théorie cinétique des gaz au moyen d'une équation de Boltzmann au niveau microscopique (dont les quantités ρ , ρv et $\rho \mathcal{E}$ sont les moments en vitesse de la fonction de distribution microscopique), c'est bien cette forme conservatrice qui apparaît naturellement. Nous avons vu dans la première partie du cours l'importance de la forme conservative des équations dans la détermination des solutions faibles et en particulier sur la vitesse de propagation des singularités. Cette forme est une forme intrinsèque du système d'équation. On pourra consulter [24, 8, 3].

Dans toute cette partie du cours, nous considérons un fluide parfait sous les conditions de Weyl :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_s < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right)_s > 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\tau > 0, \quad (4.4)$$

avec $e = e(\tau, s)$ et $p = - \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} \right)_s$. La loi d'état de gaz idéal vérifie alors automatiquement ces conditions.

Ces conditions, données par H. Weyl pour la première fois en 1944, puis étendues par la suite (on pourra consulter R. Menikoff et B. Plohr pour une étude complète [16]) avaient été aussi obtenue par Bethe en 1942. L'article de Weyl se trouve dans le classeur de la salle W213. Ces conditions sont liées à la stabilité des ondes de choc et assurent que la structure

thermodynamique ne vas pas introduire des comportements pathologiques (en particulier les isentropes sont convexes). En gros, on peut dire que ces conditions permettent d'identifier les lois d'état pour lesquelles la structure est similaire à celle des gaz idéaux. Une loi d'état de type Van der Wals par exemple, qui permet de décrire des transitions de phase, ne rentre pas le cadre des conditions de Weyl. Dans la suite du cours, nous serons souvent amenés, pour des questions de simplicité à présenter les concepts dans le cas des gaz idéaux polytropiques, mais les principes présentés restent valables dans le contexte de loi d'états plus générales dans la mesure de la vérification des hypothèses de Weyl (on parle parfois de fluide de Bethe-Weyl).

Pour les solutions régulières, le système (4.1) peut se mettre sous diverses formes non conservatives :

$$\begin{cases} \frac{Dp}{Dt} + \rho c^2 \partial_x v = 0, \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0, \\ \frac{Ds}{Dt} = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

avec

$$\begin{cases} \rho = \rho(p, s), \\ c^2 = c^2(p, s) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \end{cases} \quad (4.6)$$

en utilisant la relation de Gibbs pour obtenir l'équation sur l'entropie et

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds.$$

La notation $D\varphi/Dt = \partial_t \varphi + v \cdot \partial_x \varphi$ désigne la dérivée particulière du champ φ , appelée aussi dérivée matérielle car elle représente les variations du champ φ le long des trajectoires des particules fluides.

Une seconde forme du système d'équation sous forme non-conservative s'écrit dans les variables $(\rho, v, p)^t$, que l'on appelle parfois les variables primitives :

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \partial_x \cdot v = 0, \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0, \\ \frac{Dp}{Dt} + \rho c^2 \partial_x \cdot v = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

avec $c^2 = c^2(p, \rho)$. Finalement on peut tout simplement considérer la forme non-conservative obtenue en utilisant les variables conservatives (4.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \partial_x \cdot v = 0, \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0, \\ \frac{D(e + \frac{v^2}{2})}{Dt} + \frac{1}{\rho} \partial_x \cdot (pv) = 0, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

La troisième équation peut se réécrire :

$$\rho \frac{D\mathcal{H}}{Dt} = \partial_x p, \quad \mathcal{H} = e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}, \quad (4.9)$$

où \mathcal{H} désigne l'enthalpie spécifique (ou massique) totale.

Dans un écoulement permanent continue, l'enthalpie totale se conserve le long des trajectoires qui sont aussi les lignes de courant. Par ailleurs, dans (4.5), on voit que l'entropie se conserve le long des trajectoires, l'écoulement est dit isentropique (sous l'hypothèse qu'il n'y a pas d'apport de chaleur par l'extérieur, pas d'apport de chaleur par conduction ou rayonnement, ni de dissipation intrinsèque).

Bilan

- Dans ce cours, on considèrera souvent des gaz idéaux polytropiques, mais les propriétés et les principes présentés resteront valables dans le cadre des fluides de Bethe-Weyl.
- Dans un écoulement régulier, l'entropie s se conserve le long des trajectoires, pour des écoulements permanents ou non. Pour des écoulements permanents, l'enthalpie totale \mathcal{H} se conserve aussi le long des trajectoires.

4.1.2 Courbes caractéristiques et invariants de Riemann

Il nous faut maintenant voir dans quelle mesure la théorie des courbes caractéristiques est pertinente dans le cadre des systèmes d'équations non-linéaires. Cela va nous amener à définir les invariants de Riemann et nous aurons besoin des courbes intégrales afin de résoudre les ondes simples qui sont intimement liées aux invariants.

Les formes quasi-linéaires

Afin de se rapprocher du cadre d'étude dans le cas linéaire, nous donnons ici plusieurs forme quasi-linéaires, et donc non conservatives, des systèmes d'équations aux dérivées partielles présentés en 4.1. Lorsque l'on considère les variables conservatives, dans le cas d'un gaz idéal polytropique, on obtient :

$$\partial_t U + A_U(U) \partial_x U = 0, \quad (4.10)$$

avec

$$A_U(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)v^2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)v^3 - v\mathcal{H} & \mathcal{H} - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

dont on peut calculer les valeurs propres et les vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= v - c, & r_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ v - c \\ \mathcal{H} - vc \end{bmatrix}, & l_1 &= \frac{1}{2c} \left[\frac{\gamma - 1}{c} \frac{v^2}{2} + v, \frac{1 - \gamma}{c} v - 1, \frac{\gamma - 1}{c} \right] \\ \lambda_2 &= v, & r_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ \frac{v^2}{2} \end{bmatrix}, & l_2 &= \left[1 - \frac{(\gamma - 1)v^2}{2c^2}, \frac{(\gamma - 1)v}{c^2}, \frac{1 - \gamma}{c^2} \right] \\ \lambda_3 &= v + c, & r_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ v + c \\ \mathcal{H} + vc \end{bmatrix}, & l_3 &= \frac{1}{2c} \left[\frac{\gamma - 1}{c} \frac{v^2}{2} - v, \frac{1 - \gamma}{c} v + 1, \frac{\gamma - 1}{c} \right] \end{aligned}$$

le système est donc strictement hyperbolique si $c > 0$.

On retrouve la valeur propre v associée à la conservation de l'entropie le long des trajectoires et l'on peut alors interpréter les trajectoires comme des courbes caractéristiques le long desquelles l'entropie est constante. Les deux autres valeurs propres sont celles que nous avons trouvées dans le cadre de l'acoustique. Il faut noter que toutes ces valeurs propres et les vecteurs propres associés ne sont pas fixés mais sont maintenant des fonctions de l'état local et varient donc dans l'espace et le temps.

Remarque 2 : L'équivalence entre (4.1-4.3) et (4.10-4.11) est assurée par le fait que l'on ne considère que des solutions régulières.

Pour (4.7), si l'on note $V = (\rho, v, p)^t$, on trouve :

$$\partial_t V + A_V(V) \partial_x V = 0, \quad (4.12)$$

avec

$$A_V(V) = \begin{bmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & v \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés s'écrivent :

$$r_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{c} \\ 1 \\ -\rho c \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} +\frac{\rho}{c} \\ 1 \\ +\rho c \end{pmatrix}.$$

Une variable intéressante, comme nous l'avons vu dans le contexte de la linéarisation acoustique, provient du système sous forme (4.5), où l'on a noté $W = (p, v, s)^t$:

$$\partial_t W + A_W(W) \partial_x W = 0, \quad (4.13)$$

avec

$$A_W(W) = \begin{pmatrix} v & \rho c^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & v & 0 \\ \rho & 0 & v \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Les vecteurs propres à droite sont donnés par les expressions :

$$r_1 = \begin{pmatrix} -\rho c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} +\rho c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et les vecteurs propres à gauche (on se référera à l'étude des systèmes linéaires pour un rappel sur les vecteurs propres à gauche) :

$$l_1^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_2^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_3^t = \begin{pmatrix} 1 \\ +\rho c \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Définition des courbes caractéristiques

Pour la dynamique des gaz, nous avons trois familles de courbes caractéristiques associées aux trois valeurs propres de la matrice Jacobienne :

- Les deux courbes caractéristiques associées aux valeurs propres acoustiques $\lambda_1 = v - c$ et $\lambda_3 = v + c$:

$$(\mathcal{C}_\pm) : \quad \frac{dX(t)}{dt} = v(t, X(t)) \pm c(t, X(t)), \quad (4.16)$$

- Les trajectoires des particules fluides qui sont aussi les courbes caractéristiques associées à la valeur propre v

$$(\mathcal{C}_0) : \quad \frac{dX(t)}{dt} = v(t, X(t)), \quad (4.17)$$

En utilisant la forme quasi-linéaire dans la variable W (4.13), et en faisant une combinaison linéaire de l'équation sur p avec $\pm \rho c$ fois l'équation sur v , on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t p + (v + c) \partial_x p + \rho c [\partial_t v + (v + c) \partial_x v] = 0, \\ \partial_t p + (v - c) \partial_x p - \rho c [\partial_t v + (v - c) \partial_x v] = 0, \\ \partial_t s + v \partial_x s = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

La dernière équation a déjà fait l'objet d'une interprétation physique, il nous faut maintenant comprendre les deux autres et introduire un nouveau formalisme. Étant donnée une quantité régulière $\varphi(t, x)$ et une courbe régulière \mathcal{C} dans le plan (t, x) d'équation $x = y(t)$, la quantité $\partial_{\mathcal{C}}\varphi$ désigne la dérivée de la quantité φ le long de la courbe \mathcal{C} et vaut :

$$\partial_{\mathcal{C}}\varphi = \partial_t \varphi + \frac{dy}{dt} \partial_x \varphi,$$

ou peut encore s'écrire :

$$\partial_{\mathcal{C}}\varphi = \frac{d}{dt}(\varphi(t, y(t))).$$

On peut remarquer, en relation avec le cas linéaire que (4.18) s'écrit aussi :

$$l_p \cdot \partial_{\mathcal{C}_p} W = 0, \quad p \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.19)$$

où les l_p , donnés par (4.15), sont les vecteurs propres à gauche de la matrice Jacobienne et où $\partial_{\mathcal{C}_p}$ désigne la dérivée le long de la $p^{\text{ème}}$ courbe caractéristique, $\partial_{\mathcal{C}_-}$ pour $p = 1$, $\partial_{\mathcal{C}_0}$ pour $p = 2$ et $\partial_{\mathcal{C}_+}$ pour $p = 3$. On vérifiera que cette égalité est simplement obtenue en utilisant la forme quasi-linéaire et en multipliant à gauche par les éléments de la base de vecteurs propres. Les relations (4.18) s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \partial_{\mathcal{C}_{\pm}} p \pm \rho c \partial_{\mathcal{C}_{\pm}} v = 0, \\ \partial_{\mathcal{C}_0} s = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Cette formulation ne conduit à un invariant explicite que dans le cas du gaz idéal polytropic en écoulement homoentropique comme expliqué ci-dessous, alors que cet invariant est toujours explicite dans le cas linéaire car l_p ne dépend pas de l'état de la variable locale. On voit donc qu'il n'est pas aussi évident que dans le cadre linéaire d'obtenir des invariants le long des courbes caractéristiques du fait de la dépendance de la décomposition en sous-espaces propres de la matrice jacobienne en fonction de l'état du gaz (l_p dépend de W !). Nous allons voir qu'on peut s'en sortir dans le cas homoentropique (cela correspond à ce que l'on peut faire dans le cadre des équations de Saint-Venant [14]).

Résolution pour un écoulement homoentropique

En faisant l'hypothèse que l'état initial possède une entropie uniforme, comme l'écoulement reste régulier, l'entropie reste uniforme pour tout t . Dans ce cas on a

$$\rho = \rho(c), \quad dp = c^2 d\rho,$$

et donc

$$dv \pm \frac{dp}{\rho c} = dv \pm \frac{c(\rho)d\rho}{\rho}.$$

On peut alors intégrer les relations $\partial_{c_{\pm}} p \pm \rho c \partial_{c_{\pm}} v = 0$ le long des caractéristiques et cela conduit à la définition des invariants de Riemann :

$$J_{\pm} = v \pm \int^{\rho} \frac{c(\rho')}{\rho'} d\rho' = v \pm R(\rho) = v \pm \tilde{R}(c), \quad (4.21)$$

où $R(\rho)$ est une fonction univoque de ρ , de même que $\tilde{R}(c)$ comme fonction de c . Dans le cas où l'on continue à travailler avec les variables de départ W , on obtient

$$J_{\pm} = v \pm \int^p \frac{dp'}{\rho(p')c(p')}.$$

Il est intéressant de remarquer que l'on a créé les invariants de Riemann de telle manière que dans le cas homoentropique, si l'on définit $\tilde{W} = (p, v)^t$, les deux premières composantes de W ,

$$\partial_{\tilde{W}} J_{\pm} = \left(+\frac{1}{\rho c}, 1 \right)^t = \frac{1}{\rho c} \tilde{l}_3,$$

où \tilde{l}_3 est la projection sur les deux premières coordonnées de l_3 . On peut alors réinterpréter les choses de la manière suivante :

$$\partial_{c_{\pm}} J_{\pm} = \partial_{\tilde{W}} J_{\pm} \cdot \partial_{c_{\pm}} \tilde{W} = \frac{1}{\rho c} \tilde{l}_3 \cdot \partial_{c_{\pm}} \tilde{W} = 0,$$

c'est-à-dire en considérant $\tilde{l}_3/(\rho c)$ comme la dérivée d'une fonction $J_{\pm}(\tilde{W})$ par rapport à \tilde{W} . Il faut remarquer que le fait de travailler en écoulement entropique permet de se ramener à deux variables, mais que l'on peut aussi travailler directement dans ce cadre avec la variable W .

Pour le gaz idéal polytropique, c^2 est proportionnelle à $\rho^{\gamma-1}$ et dans ces conditions, on peut intégrer explicitement :

$$J_{\pm} = v \pm \frac{2}{\gamma-1} c. \quad (4.22)$$

Finalement, on voit que l'on a pu obtenir, dans le cadre des écoulements homoentropiques, la préservation d'un invariant le long des courbes caractéristiques comme dans le cadre linéaire. Avant de passer à la notion d'onde simple, intéressons nous à celle de courbe intégrale et faisons le lien avec les invariants de Riemann dans le contexte des écoulements homoentropiques.

4.1.3 Courbes Intégrales

Nous venons de voir qu'il existe une version non-linéaire de la notion de courbe caractéristique le long de laquelle l'information se propage dans le plan (x, t) , à ceci près que la pente de la courbe dépend de l'état local du gaz et varie donc en fonction du temps et de l'espace, ce qui fait que l'on obtient des courbes et non des droites en général.

On se rappelle que dans le cas linéaire nous avons introduit la notion de structure des sauts dans l'espace des phases, où la notion de sous-espace propre de la matrice Jacobienne joue un rôle prépondérant. Nous allons retrouver ces notions dans le cadre des courbes intégrales.

Définition : On appelle courbe intégrale pour le troisième champ caractéristique \mathcal{I}_+ , une courbe de l'espace des phases (p, v, s) tangente en tout point au vecteur propre $r_3(W) = (\rho c, 1, 0)^t$, courbe intégrale pour le second champ caractéristique \mathcal{I}_0 , une courbe de l'espace des phases (p, v, s) tangente en tout point au vecteur propre $r_2(W) = (0, 0, 1)^t$, courbe intégrale pour le premier champ caractéristique \mathcal{I}_- , une courbe de l'espace des phases (p, v, s) tangente en tout point au vecteur propre $r_1(W) = (-\rho c, 1, 0)^t$.

Dans ce que l'on vient de présenter, il faut bien noter qu'il est important de conserver la cohérence associée à la variable avec laquelle on travaille. Nous nous sommes focalisés sur la variable W et nous avons toujours utilisé les directions caractéristiques associées à la matrice $A_W(W)$. On aurait aussi pu travailler avec une autre variable, mais il aurait alors fallu utiliser la décomposition en sous-espaces propres de la matrice Jacobienne associée.

On travaille en général avec une paramétrisation des courbes intégrales, $W(\zeta) \in \mathcal{I}_+$, avec $d_\zeta W = \alpha(\zeta)r_3(W(\zeta))$, où $\alpha(\zeta)$ dépend de la paramétrisation de la courbe.

Dans la suite, on va surtout s'intéresser aux courbes intégrales \mathcal{I}_+ et \mathcal{I}_- , mais les courbes intégrales \mathcal{I}_0 représentent simplement des écoulements où la vitesse et la pression sont uniformes et où l'entropie peut varier d'une trajectoire à l'autre (comme dans une discontinuité de contact entre deux fluides de même pression et de même vitesse). Ce type de courbe intégrale correspond de très près à ce qui se passe dans le cas d'un système linéaire et on va voir que cela est dû au fait que le second champ caractéristique est linéairement dégénéré, c'est-à-dire que la valeur propre λ_2 est constante le long de la courbe intégrale (qui est alors une droite) alors que les valeurs propres λ_1 et λ_3 sont strictement monotones le long des courbes intégrales, ce qui correspond à un champ caractéristique vraiment non linéaire.

Propriété : Le premier et le troisième champs caractéristiques sont vraiment non linéaires. Le long de la \mathcal{I}_- courbe intégrale

$$d_\zeta \lambda_1(W(\zeta)) = \partial_W \lambda_1(W) \cdot \alpha(\zeta) r_1 \neq 0,$$

et λ_1 reste de signe constant. De même que le long de la \mathcal{I}_+ courbe intégrale

$$d_\zeta \lambda_3(W(\zeta)) = \partial_W \lambda_3(W) \cdot \alpha(\zeta) r_3 \neq 0,$$

et λ_2 reste de signe constant. Par contre, le deuxième champ caractéristique est linéairement dégénéré, c'est-à-dire que

$$d_\zeta \lambda_2(W(\zeta)) = \partial_W \lambda_2(W) \cdot \alpha(\zeta) r_2 = 0.$$

La valeur propre λ_2 est donc constante le long de la courbe intégrale \mathcal{I}_0 .

Il s'agit de voir quel est alors le lien entre les courbes intégrales et les invariants de Riemann. Tout d'abord pour les \mathcal{I}_+ et \mathcal{I}_- , on constate que l'entropie reste constante le long de ces courbes intégrales. Par ailleurs on prend une zone dans l'espace caractéristique (x, t) telle que tous les points de l'espace des phases associés soient sur une de ces courbes intégrales. On a alors la propriété suivante :

Propriété : Dans une \mathcal{I}_+ courbe intégrale, J_- est une constante le long de la courbe intégrale (et par conséquent dans toute la zone considérée) et d'autre part W est constant le long des \mathcal{C}_+ caractéristiques, qui sont alors des droites. Dans une \mathcal{I}_- courbe intégrale, J_+ est une constante le long de la courbe intégrale et d'autre part W est constant le long des \mathcal{C}_- caractéristiques, qui sont alors des droites.

Démonstration : En utilisant la paramétrisation, on a

$$d_\zeta J_-(W(\zeta)) = \partial_W J_-(W) \cdot \alpha(\zeta) r_3 = \frac{1}{\rho c} l_1 \cdot \alpha(\zeta) r_3 = 0.$$

car $l_1 \cdot r_3 = 0$. Ceci prouve que la \mathcal{I}_+ courbe intégrale est une ligne de niveau de J_- et que donc, sur la courbe intégrale, J_- est constant. Par ailleurs, si on choisit une paramétrisation correspondant à une \mathcal{C}_+ $(x(\tau), t(\tau))$, on a

$$d_\tau J_+(W(\tau)) = \partial_{\mathcal{C}_+} J_+ = 0$$

mais,

$$\partial_{\mathcal{C}_+} J_+ = \partial_W J_+(W) \cdot \alpha(\tau) r_3 = \frac{1}{\rho c} l_3 \cdot \alpha(\tau) r_3,$$

et ne peut donc être nul que si $\alpha(\tau) = 0$, c'est-à-dire que W doit être constante le long des \mathcal{C}_+ qui sont alors des droites.

On voit donc qu'il existe un lien étroit entre les courbes intégrales et les invariants de Riemann que l'on va finir d'illustrer dans le contexte des ondes simples.

4.1.4 Ondes simples : définitions et propriétés

Dans certain nombre de situation du problème de Cauchy, la donnée initiale comporte certaines zones au sein desquelles l'écoulement est uniforme. On peut penser à un tube à choc, à une onde de détente dans un tube semi-infini au bout duquel on tire un piston... Ce type de configuration possède un certain nombre de propriétés que nous allons exposer puis exploiter dans la suite de cette partie.

Définition : On désigne par onde simple toute région d'écoulement du plan $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ mitoyenne d'un écoulement uniforme.

Proposition :

- I. L'onde simple est une zone d'écoulement homoentropique
- II. La frontière entre l'écoulement uniforme et l'onde simple est forcément une \mathcal{C}_+ ou \mathcal{C}_- caractéristique de l'écoulement uniforme.
- III. Si cette frontière notée \mathcal{L} est une \mathcal{C}_+ (\mathcal{C}_-) alors, dans l'onde simple, les \mathcal{C}_+ (\mathcal{C}_-) sont rectilignes et l'écoulement est uniforme le long de ces droites.

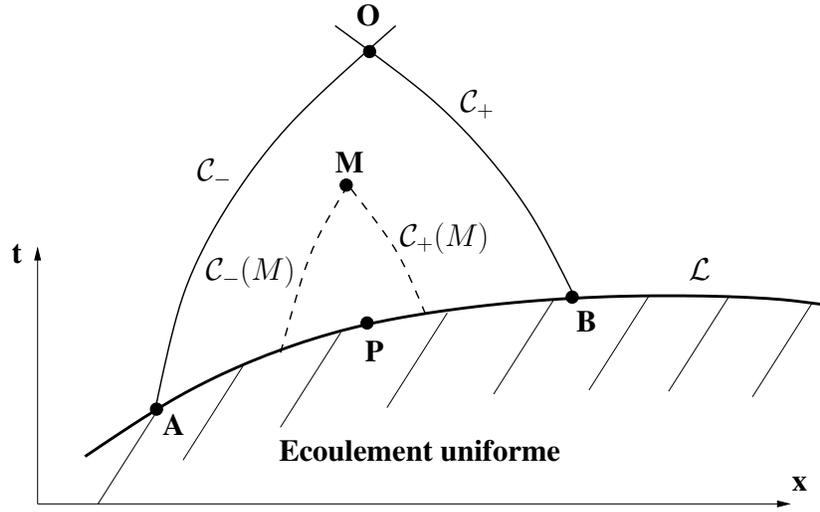


FIGURE 4.1 – Démonstration de la propriété I des ondes simples par l'absurde dans le plan des caractéristiques (x, t) .

Démonstration :

- I. Toutes les trajectoires qui peuplent l'onde simple prennent leur source dans la zone d'écoulement uniforme qui est d'entropie constante et par conséquent dans toute la zone d'onde simple l'entropie est constante
- II. Notons donc \mathcal{L} la courbe frontière entre l'écoulement uniforme et l'onde simple et faisons l'hypothèse qu'il ne s'agit ni d'une \mathcal{C}_- ni d'une \mathcal{C}_+ caractéristique. Soit P un point de \mathcal{L} . On peut trouver un morceau de \mathcal{L} au voisinage de P , avec un arc AB tel que la \mathcal{C}_+ issue de B coupe la \mathcal{C}_- issue de A en O comme indiqué sur la Figure 4.1. Alors pour tout M dans le secteur délimité par AB , et les \mathcal{C}_+ et \mathcal{C}_- issues de O , on a :

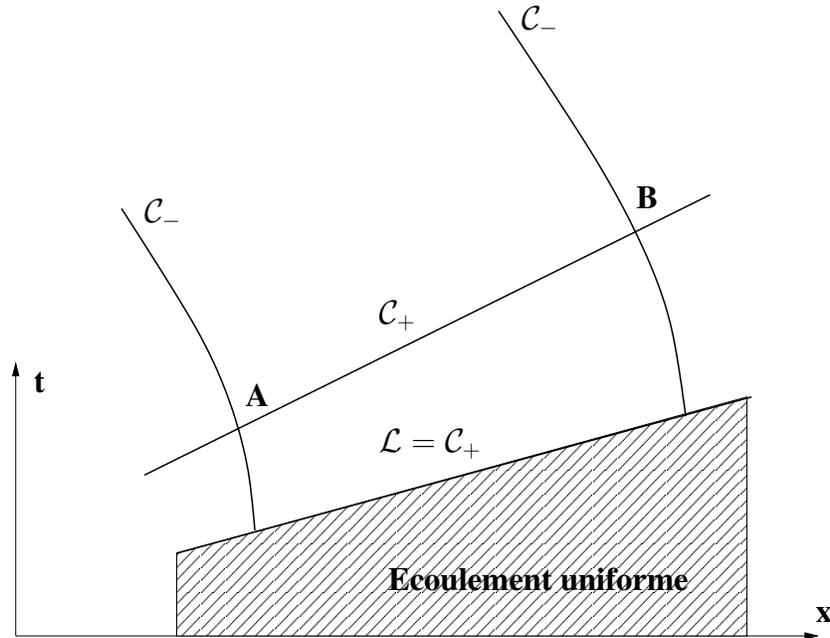
$$J_- = v - R(c) = v_0 - R(c_0), \quad J_+ = v + R(c) = v_0 + R(c_0),$$

sur les \mathcal{C}_- et \mathcal{C}_+ issues de M qui pénètrent dans la zone uniforme. Par conséquent, l'écoulement en M est l'écoulement uniforme ce qui est en contradiction avec les hypothèses que nous avons faites et achève la démonstration par l'absurde.

- III. Supposons que \mathcal{L} est une \mathcal{C}_+ comme sur la Figure 4.2. A et B sont sur une \mathcal{C}_+ , par conséquent, $v_A + R(c_A) = v_B + R(c_B)$. A et B sont sur une \mathcal{C}_- , chacun, qui plonge dans l'écoulement uniforme d'où $v_A - R(c_A) = v_B - R(c_B) = v_0 - R(c_0)$. En conclusion :

$$\begin{bmatrix} v_A + R(c_A) = v_B + R(c_B) \\ v_A - R(c_A) = v_B - R(c_B) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v_A = v_B \\ c_A = c_B \end{bmatrix},$$

cette \mathcal{C}_+ est une droite et l'écoulement y est uniforme; les \mathcal{C}_- par contre ne sont pas rectilignes.

FIGURE 4.2 – Structure d'onde simple dans le plan caractéristique (x, t) .

On voit donc que, pour une onde simple, l'écoulement est homoentropique, et que les diverses valeurs prises dans l'espace des phases est une courbe de dimension un (puisque l'écoulement est constant le long d'une famille de caractéristiques). Par ailleurs, le long de l'autre caractéristique, ce qui donne une paramétrisation de cette courbe dans l'espace des phases, l'autre invariant de Riemann est constant ce qui signifie que l'on se déplace sur une courbe intégrale. Dans ce contexte, on a la proposition suivante.

Proposition

- I. Dans une onde simple, le lieu des points parcourus dans l'espace des phases est une courbe intégrale.
- II. L'un des invariants de Riemann est constant dans toute la zone d'onde simple.

4.1.5 Exemple d'application pour un gaz idéal polytropique

On considère ici le cas d'un gaz polytropique, de constante γ , occupant un tube semi-infini de section constante et mis en mouvement par un piston imperméable de trajectoire connue. A $t = 0$, le gaz est au repos, à la pression p_0 et à l'entropie s_0 dans le domaine $x \geq 0$. La position du piston est donnée par une fonction de temps $t \mapsto X(t)$, de position $X(0) = 0$

et de dérivée $X'(0) = 0$ en zéro. Dans le cas $X'(t) < 0, t > 0$, on s'attend à observer une onde de détente et dans le cas $X'(t) > 0, t > 0$, on s'attend à observer une onde de compression.

Comme l'information se propage à vitesse finie, la zone d'écoulement correspondant aux x suffisamment positifs va rester uniforme au cours du temps et nous allons donc pouvoir observer une onde simple tant qu'il n'y a pas formation de discontinuités. L'écoulement va donc rester homoentropique tant que ne se sont pas formés des ondes de choc. On astreint bien sûr le gaz à une condition d'imperméabilité à la paroi du piston :

$$v(t, X(t)) = X'(t), \quad t \geq 0. \quad (4.23)$$

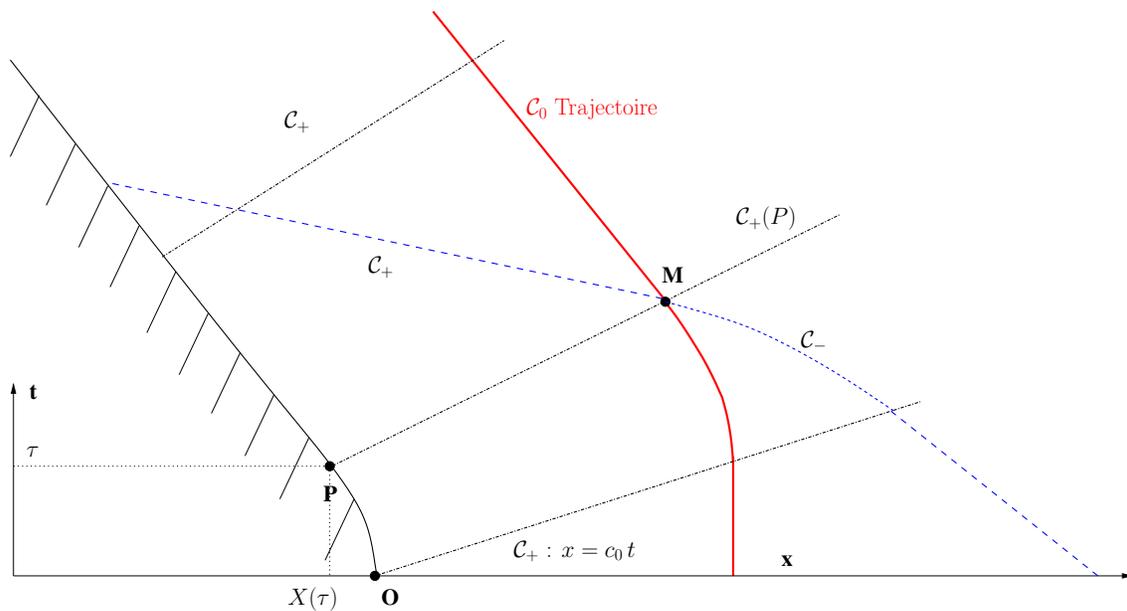


FIGURE 4.3 – Diagramme des caractéristiques pour l'onde simple de détente.

L'onde simple de détente

On fait donc l'hypothèse que le piston prend progressivement et de manière monotone sa vitesse négative finale v_f . Cette hypothèse s'exprime par $X''(t) < 0, t > 0$ et $X'(t) < 0$; la vitesse décroît donc de zéro à une valeur limite v_f pour les temps positifs. Dans le plan $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ nous allons donc trouver une onde simple où la zone des x "grands" ne sera pas perturbée par ce qui se passe autour du piston. Dans la région au repos à l'instant initial et à pression p_0 et entropie s_0 , correspondant à une vitesse de son c_0 , la ligne frontière est donc une \mathcal{C}_+ caractéristique, une droite de pente $c_0 : x = c_0 t$.

Étant donné un temps τ , la position du piston est $X(\tau)$. On note P le point de coordonnées $(X(\tau), \tau)$ dans le diagramme caractéristique (Voir Figure 4.3). Sur la \mathcal{C}_+ caractéristique issue de P , $\mathcal{C}_+(P)$, en utilisant la condition d'imperméabilité et le fait que, dans cette onde

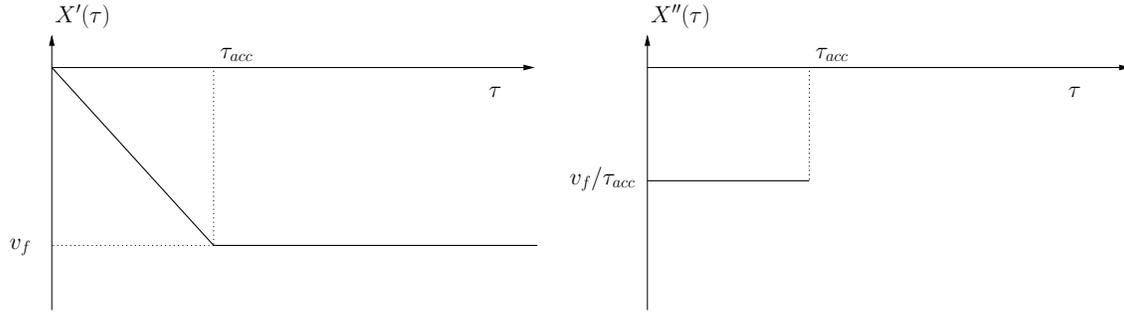


FIGURE 4.4 – Evolution possible de la vitesse du piston et de son accélération

simple, les C_+ caractéristiques sont des droites le long desquelles l'écoulement est uniforme, la pente vaut $v(M) + c(M) = X'(\tau) + c(P)$.

Utilisons l'invariant de Riemann sur la C_- issue du point M :

$$v(M) - \frac{2}{\gamma - 1}c(M) = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0 = X'(\tau) - \frac{2}{\gamma - 1}c(P),$$

où la $C_+(P)$ a pour équation $x - X(\tau) = (X'(\tau) + c)(t - \tau)$. Dans ces conditions on obtient :

$$\begin{cases} c(M) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}X'(\tau), \\ x = X(\tau) + [c_0 + \frac{\gamma+1}{2}X'(\tau)](t - \tau). \end{cases} \quad (4.24)$$

Cette dernière équation permet, étant donnés (t, x) les coordonnées du point M , de déterminer le pied de la C_+ caractéristique et le temps τ associé, $\tau = \tau(t, x)$. On connaît alors la vitesse du son associée $c(M) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}X'(\tau)$ et les caractéristiques locales de l'écoulement :

$$p(M) = p_0 \left(\frac{c(M)}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{X'(\tau)}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho(M) = \rho_0 \left(\frac{c(M)}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

Remarque 3 : La résolution précédente a pu se faire car $X''(\tau) < 0$ pour tout temps positif strictement inférieur à τ_{acc} . En effet, cette condition assure qu'aucune C_- n'en rencontre une autre et crée une onde choc qui viendrait briser le caractère homoentropique de l'écoulement.

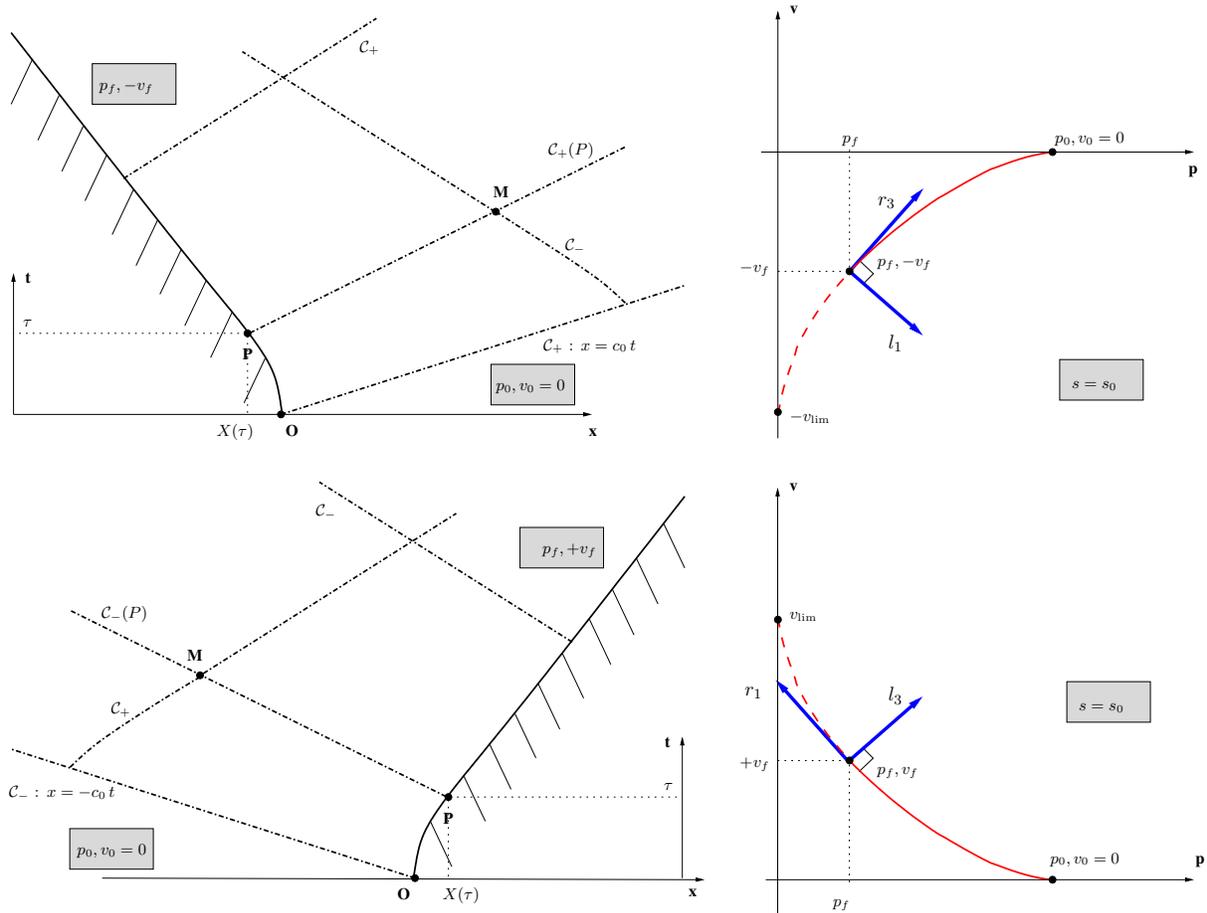


FIGURE 4.5 – Diagrammes commun des caractéristiques pour l’onde simple de détente et diagramme de phase, dans le cas d’un piston de vitesse négative en haut et dans le cas symétrique en bas. On voit que l’on passe d’une 3 courbe intégrale à une 1-courbe intégrale.

Remarque 4 : La résolution précédente fournit la vitesse Eulérienne $v(t, x)$ avec $v(t, x) = 0$ si $x \geq c_0 t$. Cette vitesse est continue mais non C^1 le long de la C_+ $x = c_0 t$. En effet la fonction X'' est discontinue en $t = 0$ et cette discontinuité initiale se traduit aux instants suivant par une discontinuité des dérivées partielles de la solutions (v, p) le long de cette C_+ , que l’on appelle discontinuité “faible”. Une fois résolue la vitesse Eulérienne, on peut trouver les trajectoires des particules fluides qui sont solutions de :

$$\frac{dX}{dt} = v(t, X(t)), \quad X(t = 0) = x_0. \quad (4.25)$$

Il s’agit bien d’une onde de détente, car on peut montrer que $X'(\tau)$ décroît le long d’une trajectoire et par conséquent la pression et la densité aussi d’après les relations données plus haut.

Remarque 5 : Afin de conserver une vitesse du son local strictement positive, il est nécessaire d'avoir $-X'(\tau) < \frac{2}{\gamma-1}c_0 = v_{\text{lim}}$. Dans le cas où le piston est trop rapide, une zone de vide se crée entre le piston et le fluide délimité par une C_+ associée au cas limite $c \rightarrow 0$. Dans ce cas limite, la modélisation adoptée n'est évidemment plus valable. On trouvera une visualisation de la vitesse limite en terme de courbe intégrale sur la Figure 4.5.

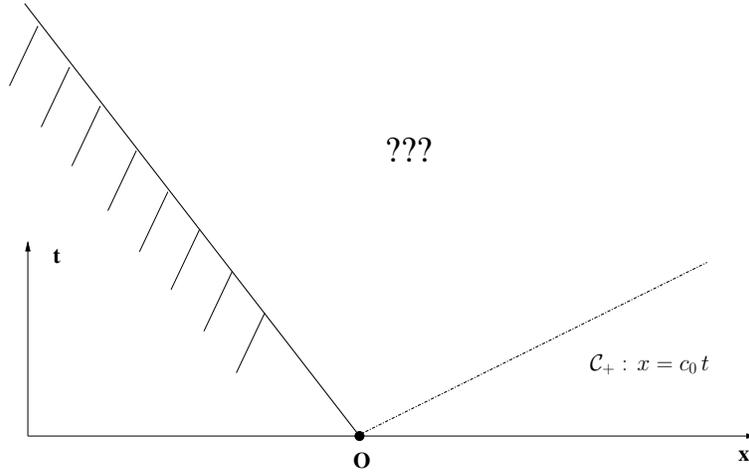
Retour aux courbes intégrales

Dans la cadre de la résolution précédente, on peut paramétrer l'évolution de la solution dans l'espace des phase par le temps, en se plaçant contre le piston pour un intervalle de temps $[0, \tau_{\text{acc}}]$. Ce temps joue le rôle que nous avons mentionné de ξ auparavant, $W = W(\tau)$. Dans ce contexte il est facile de calculer la dérivée de W par rapport à τ et le lecteur vérifiera bien que cette dérivée est bien colinéaire au vecteur $r_3(W(\tau))$. Il sera aussi aisé de se convaincre que J_- ne dépend pas de τ et que l'on obtient alors un arc de courbe dans l'espace des phases comme indiqué sur la Figure 4.5 joignant les points $(p_0, v_0 = 0)$ et $(p_f, -v_f)$, si l'on fait l'hypothèse que $v_f > 0$.

Exercice 1 : Dans le cas de l'onde simple de détente, la condition d'adhérence du fluide à la paroi du piston impose une limite sur la vitesse de déplacement du piston (on rappelle que l'on doit avoir $-X'(\tau) < 2c_0/(\gamma - 1) = v_{\text{lim}}$). Peut-on avoir un écoulement supersonique dans ce contexte ? Cela est-il surprenant ? Tracer le diagramme des caractéristiques dans ce cas et commenter.

Exercice 2 : Dans le cas de l'onde simple de détente, on considère une vitesse négative $v_f > -2c_0/(\gamma - 1) = v_{\text{lim}}$ et l'on considère le cas limite où l'accélération du piston est infinie en $t = 0$ de telle manière que le piston se met immédiatement à la vitesse v_f pour tout $t > 0$.

- I. L'onde simple mitoyenne de l'état constant de départ est toujours délimitée par une C_+ issue du point $O(0,0)$ d'équation $x = c_0 t$ comme indiqué sur la Figure 4.6. Quelle est la nature de l'autre C_+ qui délimite l'autre bord de la zone d'onde simple ? Quelle est sa pente et quelle est la nature de l'écoulement entre le piston et cette C_+ ? Sa pente peut-elle être négative et pourquoi ?
- II. Pourquoi parle-t-on de détente centrée dans ce cas ? Montrer que la structure du diagramme des caractéristiques que l'on tracera dans ce cas est compatible avec l'invariance du système d'équation de la dynamique des gaz par la transformation $x \mapsto \lambda x$ et $t \mapsto \lambda t$.
- III. Faire le lien avec le cas traité en cours et expliquer.
- IV. (Facultatif) Quelle est la nature de la solution au point O ?

FIGURE 4.6 – Structure d’onde simple centrée dans le le plan caractéristique (x, t) .

L’onde simple de compression

On repart avec les même hypothèses qu’au paragraphe précédent mais cette fois la vitesse du piston est positive. On a donc $X'(t) > 0$ et $X''(t) > 0$ pour tout temps t positif.

Sous l’hypothèse d’un écoulement continu, la solution reste identique à ce que nous avons obtenu :

$$\begin{cases} c(M) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} X'(\tau), \\ x = X(\tau) + [c_0 + \frac{\gamma+1}{2} X'(\tau)] (t - \tau), \end{cases} \quad (4.26)$$

en se reportant à la Figure 4.7 et les relations donnant p/p_0 et ρ/ρ_0 sont toujours valables.

Cette fois la pression d’une particule le long de sa trajectoire augmente d’où le nom d’onde de compression. Pourtant si l’on observe l’évolution de la pente des \mathcal{C}_+ caractéristiques (des droites dans cette onde simple de compression), on voit que cette pente augmente au cours du temps. La fonction $(\frac{dx}{dt})_{\mathcal{C}_+} = v(M) + c(M) = c_0 + \frac{\gamma+1}{2} X'(\tau)$ est croissante en τ .

On voit alors que les \mathcal{C}_+ caractéristiques se croisent et conduisent, comme nous l’avons vu dans le cas simplifié de Burgers, à la formation d’une onde de choc. Déterminons le premier point de croisement de deux \mathcal{C}_+ caractéristiques.

Dans un premier temps on cherche l’intersection entre deux \mathcal{C}_+ à des instants successifs, celle associée à la position initiale du piston, $x(\tau) = c_0 t(\tau)$, et celle associée à la position du piston à l’instant τ , $x(\tau) - X(\tau) = [c_0 + \frac{\gamma+1}{2} X'(\tau)](t(\tau) - \tau)$. On peut montrer que la position de l’intersection est une fonction croissante de τ et dans ces conditions, pour déterminer le temps de formation de l’onde de choc, il s’agit de trouver le premier point d’intersection qui correspond à la limite du point d’intersection quand τ tend vers zéro.

Dans la limite $\tau \rightarrow 0$, on a les équivalents suivants :

$$\begin{aligned} X(\tau) &= O(\tau^2), \\ X'(\tau) &= \tau X''(0) + O(\tau^2), \end{aligned}$$

comme un développement de Taylor l'indique.

En reportant dans le système de deux équations donnant le point d'intersection, on obtient :

$$c_0 t(\tau) = c_0 t(\tau) - c_0 \tau + \frac{\gamma+1}{2} \tau X''(0) t(\tau) - \frac{\gamma+1}{2} \tau^2 X''(0) + O(\tau^2),$$

où l'on peut simplifier et enlever les termes d'ordre supérieur dans la limite où τ tend vers zéro. On arrive finalement à

$$\begin{cases} t_c = \frac{2}{\gamma+1} \frac{c_0}{X''(0)}, \\ x_c = \frac{2}{\gamma+1} \frac{c_0^2}{X''(0)}, \end{cases} \quad (4.27)$$

où t_c et x_c sont le temps et la position de formation du choc.

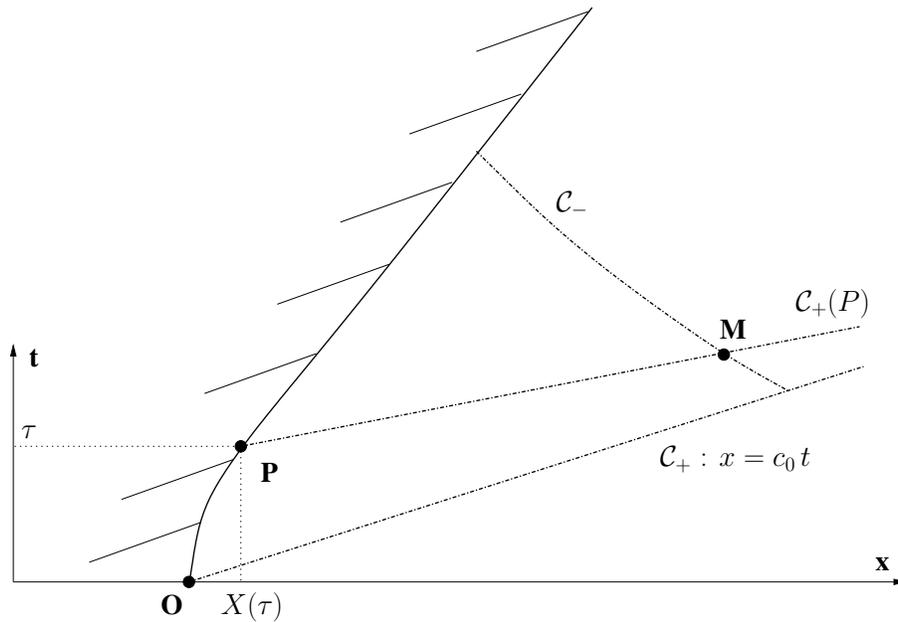


FIGURE 4.7 – Diagramme des caractéristiques pour l'onde simple de compression.

Exercice 3 : Dans le cas de l'onde simple de compression, on considère une vitesse positive v_f et l'on considère le cas limite où l'accélération du piston est infinie en $t = 0$ de telle manière que le piston se met immédiatement à la vitesse v_f pour tout $t > 0$.

- I. Quelle est la limite du point de formation du choc? Justifier la réponse.
- II. Montrer que la structure du diagramme des caractéristiques, que l'on tracera, dans ce cas est compatible avec l'invariance du système d'équation de la dynamique des gaz par la transformation $x \mapsto \lambda x$ et $t \mapsto \lambda t$.
- III. Déterminer l'écoulement en aval de l'onde de choc.
- IV. (Facultatif) Quelle est la nature de la solution au point O ?

4.2 Le Problème de Riemann 1D pour les Équations d'Euler

On s'intéresse ici au problème de Riemann associé aux équations d'Euler en une dimension d'espace :

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x (F(U)) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ U(0, x) = \begin{cases} U_G, & \text{si } x < 0, \\ U_D, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.28)$$

La forme conservative des équations d'Euler ainsi que le vecteur des variables conservatives U et le flux $F(U)$ associé sont détaillés dans la sous-section 4.1.1, page 108. Nous supposons de plus que le fluide est un fluide parfait régi par la loi des gaz polytropiques :

$$p = (\gamma - 1)\rho e.$$

Afin de résoudre le problème de Riemann (4.28), il est toutefois plus simple de considérer la forme quasi-linéaire en variables primitives $V = (\rho, v, p)^t$, donnée en (4.12). On vérifie aisément que la matrice Jacobienne A_V est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1 = v - c$, $\lambda_2 = v$, $\lambda_3 = v + c$ et que les champs caractéristiques associés aux valeurs propres 1 et 3 sont vraiment non linéaires, tandis que celui associé à la valeur propre 2 est linéairement dégénéré.

De la même manière qu'au paragraphe 1.2.2, la donnée initiale et l'équation du problème étant invariantes par contraction, la solution ne dépend que de la variable $\xi = x/t$. Comme dans le cas du système linéaire, on peut montrer que la solution est constituée de trois ondes centrées qui séparent quatre états constants. On en déduit alors la forme qualitative de la solution illustrée sur la Figure 4.8. En effet, la solution est composée de quatre états constants U_G, U_1, U_2, U_D , séparés par les trois ondes associées aux trois valeurs propres. L'état U_1 est séparé de l'état à gauche par une 1-onde qui est soit une détente, soit un choc. Il en va de

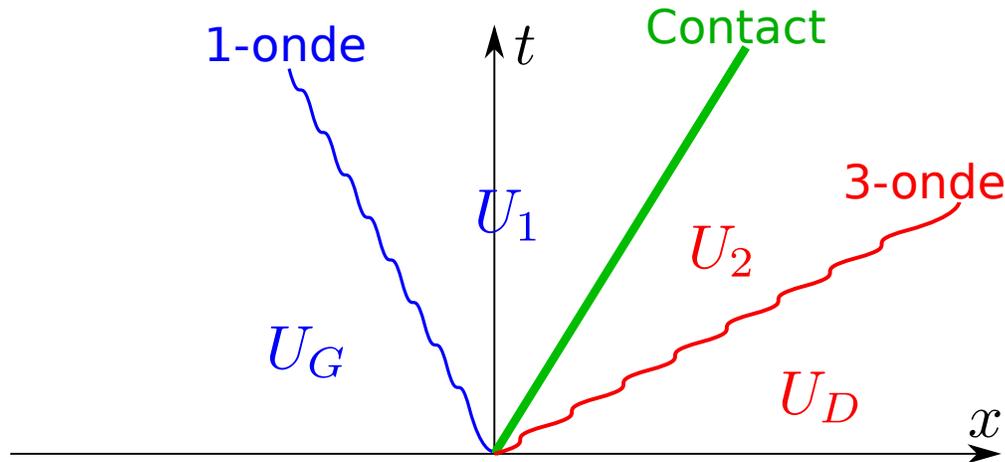


FIGURE 4.8 – Forme qualitative de la solution du problème de Riemann pour les équations d'Euler 1D. Puisqu'aucune matière ne la traverse, la discontinuité de contact sépare les deux fluides initialement aux états U_G et U_D . La vitesse et la pression sont identiques de part et d'autre de cette discontinuité. La nature des 1- et 3-ondes est déterminée par les états initiaux U_G et U_D .

même pour la 3-onde séparant U_2 et l'état droit. Puisque le champ caractéristique de la valeur propre 2 est linéairement dégénéré, $\lambda_2 = v$ est un invariant de Riemann pour la 2-onde qui est nécessairement une discontinuité de contact, d'après l'étude menée dans le paragraphe 3.1.7. La valeur propre $\lambda_2 = v$ étant par ailleurs égale de part et d'autre de la discontinuité, celle-ci est une droite dans le plan (x, t) . De plus, au vue du vecteur propre $r_2 = (1, 0, 0)^t$, la pression est également un invariante de Riemann pour cette onde et la composante de pression est donc également continue à travers cette discontinuité. Seule la densité connaît un saut. On note alors p^* et v^* , la pression et la vitesse des états U_1 et U_2 .

Nous allons maintenant déterminer quelles sont les relations entre U_G et U_1 et U_D et U_2 en fonction des natures de la 1-onde et de la 3-onde. La résolution du problème de Riemann se réduit alors à déterminer le point d'intersection dans le plan (p, v) de deux courbes dépendant des états gauche et droit.

4.2.1 Cas de la 1-onde

Onde simple de détente reliée à l'état gauche U_G

On cherche l'ensemble des états constants $U_1 = (\rho_1, p_1, v_1)^t$ pouvant être connectés/reliés à U_G par une 1-onde de détente, voir Figure 4.9. La structure d'onde simple assure que les \mathcal{C}_- dans l'onde simple sont des droites et que la solution est constante le long de ces droites (la valeur de l'entropie de départ est maintenue constante dans toute la partie associée au gaz à gauche et l'écoulement y est homoentropique). Par ailleurs, l'invariance des équations d'Euler et de la donnée initiale par le groupe de transformation habituel assurent que la

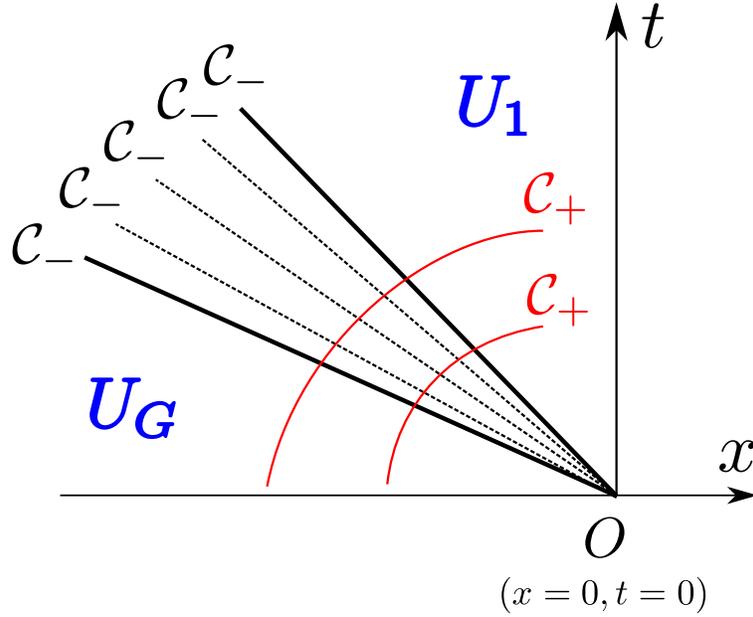


FIGURE 4.9 – Représentation schématique de la 1-détente.

solution est constante le long des droites $x/t = cste$. La structure d'onde simple est donc centrée en 0. L'éventail d'onde est délimité par une \mathcal{C}_- inférieure, d'équation $x = (v_G - c_G)t$ (c_G étant la vitesse du son dans l'état U_G) et par une \mathcal{C}_- supérieure d'équation $x = (v_1 - c_1)t$.

Pour estimer les diverses quantités qui caractérisent l'écoulement dans l'éventail, on utilise le fait que l'invariant de Riemann J_+ est constant le long des \mathcal{C}_+ :

$$v + \frac{2c}{\gamma_G - 1} = v_G + \frac{2c_G}{\gamma_G - 1} \quad (4.29)$$

On remarquera que puisque aucun flux de matière ne traverse la discontinuité de contact 2, si les fluides à droite et à gauche sont différents à l'état initial, ils restent de part et d'autre de la 2-onde dans le temps. Ainsi $\gamma_1 = \gamma_G$ et $\gamma_2 = \gamma_D$. On en déduit donc

$$\frac{c}{c_G} = 1 + \frac{\gamma_G - 1}{2} \frac{v_G - v}{c_G}, \quad \frac{T}{T_G} = \left(\frac{c}{c_G}\right)^2, \quad \frac{p}{p_G} = \left(\frac{\rho}{\rho_G}\right)^{\gamma_G} = \left(\frac{T}{T_G}\right)^{\frac{\gamma_G}{\gamma_G - 1}}.$$

Soit

$$v_1 = v_G - \frac{2c_G}{\gamma_G - 1} \left(\left(\frac{p_1}{p_G} \right)^{\frac{\gamma_G - 1}{2\gamma_G}} - 1 \right) \quad (4.30)$$

On peut exprimer v en fonction de x et de t , en utilisant l'équation des \mathcal{C}_- dans l'onde simple :

$$\frac{dx}{dt} = v - c = v - c_G - \frac{\gamma_G - 1}{2} (v_G - v)$$

et comme il s'agit de droites :

$$v = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} + c_G + \frac{\gamma - 1}{2} v_G \right)$$

Il est important de noter que v est une fonction croissante de x/t et on a donc nécessairement $v_1 > v_G$ pour ne pas contredire l'hypothèse d'onde de détente. De manière équivalente on a donc que $p_1 < p_G$ par (4.30).

Choc droit relié à l'état gauche U_G

On cherche maintenant l'ensemble des états constants U_1 connectés à U_G par une onde de choc de vitesse σ . La conservation du débit dans le repère lié au choc s'écrit alors :

$$\rho_1(v_1 - \sigma) = \rho_G(v_G - \sigma) \quad (4.31)$$

d'où on tire la vitesse du choc

$$\sigma = \frac{\rho_G v_G - \rho_1 v_1}{\rho_G - \rho_1}$$

et le nombre de Mach relatif du milieu gauche dans le référentiel du choc

$$M_\sigma = \frac{v_G - \sigma}{c_G} = \frac{\rho_1}{\rho_G - \rho_1} \frac{v_1 - v_G}{c_G} \quad (4.32)$$

La relation de saut (3.32) obtenue dans le cadre de l'étude générale des chocs droits, paragraphe 3.1.6 page 82, qui s'applique ici, permet d'exprimer le Mach relatif M_σ en fonction du rapport de pression p_1/p_G

$$M_\sigma = \sqrt{\frac{\gamma_G + 1}{2\gamma_G} \left(\frac{p_1}{p_G} - 1 \right) + 1}$$

Grâce à (4.32), on peut alors exprimer la vitesse v_1

$$v_1 - v_G = c_G \left(\frac{\rho_G}{\rho_1} - 1 \right) M_\sigma$$

que l'on peut simplifier en

$$v_1 = v_G - \frac{\sqrt{2}c_G}{\sqrt{\gamma p_G}} \frac{p_1 - p_G}{\sqrt{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_G}} \quad (4.33)$$

Enfin, pour que l'onde de choc soit entropique il est requis que les caractéristiques associées à λ_1 pénètrent la courbe de choc, de part et d'autre, soit

$$v_1 - c_1 < \sigma < v_G - c_G.$$

La résolution complète de toutes les inconnues montrerait que cette condition est équivalente à

$$p_1 > p_G \quad (4.34)$$

soit encore, d'après (4.33), que la vitesse décroît de U_G à U_1 .

4.2.2 Cas de la 3-onde

On peut maintenant reprendre les raisonnements précédents dans le cas de la 3-onde. Ils sont très similaires : il suffit de considérer que la détente est maintenant un cône de \mathcal{C}_+ traversé par des \mathcal{C}_- sur lesquelles J_- est constant, et, dans le cas d'un choc, il faut bien faire attention que le Mach relatif vaut maintenant $M_\sigma = \frac{\sigma - v_D}{c_D}$. Après le même type de calculs, on obtient les résultats suivants :

- L'ensemble des états U_2 reliés à l'état constant U_D par une 3-détente ont une pression p_2 et une vitesse v_2 inférieures à p_D et v_D

$$p_2 < p_D \quad \text{et} \quad v_2 < v_D \quad (4.35)$$

et le saut en vitesse est relié au rapport des pressions par

$$v_2 = v_D + \frac{2c_D}{\gamma_D - 1} \left(\left(\frac{p_2}{p_D} \right)^{\frac{\gamma_D - 1}{2\gamma_D}} - 1 \right) \quad (4.36)$$

- L'ensemble des états U_2 reliés à l'état constant U_D par un 3-choc ont une pression p_2 et une vitesse v_2 supérieures à p_D et v_D

$$p_2 > p_D \quad \text{et} \quad v_2 > v_D \quad (4.37)$$

et le saut en vitesse est relié au rapport des pressions par

$$v_2 = v_D + \frac{\sqrt{2}c_D}{\sqrt{\gamma p_D}} \frac{p_2 - p_D}{\sqrt{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_D}} \quad (4.38)$$

4.2.3 Cas de la 2-onde

Comme nous avons vu au début de cette section, la 2-onde est une discontinuité de contact où la vitesse et la pression des états constants de part et d'autre de l'onde sont égales. On a donc

$$p_1 = p_2 = p^* \quad \text{et} \quad v_1 = v_2 = v^*.$$

On se place alors dans le plan (p, v) où l'on constate que

- Les deux demi-courbes d'équations (4.30) et (4.33) sont monotones décroissantes et se raccordent par continuité en U_G ;
- Les deux demi-courbes d'équations (4.36) et (4.38) sont monotones croissantes et se raccordent par continuité en U_D .

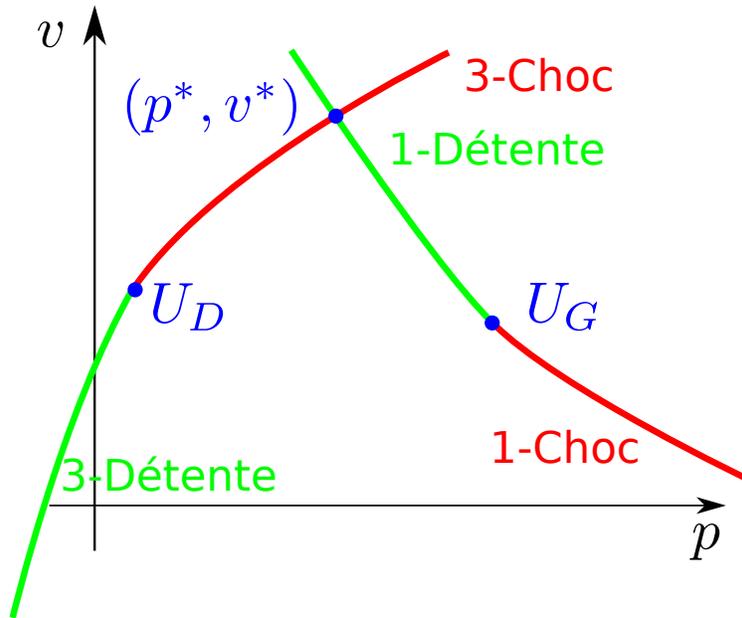


FIGURE 4.10 – Détermination de la nature des 1- et 3-ondes et de l'état intermédiaire (p^*, v^*) par intersection des courbes de choc et de détente issues des états initiaux U_G et U_D dans le plan (p, v) .

Remarque 6 : On remarque par ailleurs que les raccords des courbes sont dérivables, c'est-à-dire que les courbes de choc et de détente ont même tangente en U_G et U_D . Outre l'anecdote mathématique, cette remarque est d'une importance capitale pour la résolution numérique du problème de Riemann 1D pour la dynamique des gaz polytropiques puisqu'on peut alors employer la méthode de Newton-Raphson, méthode qui converge très rapidement (convergence quadratique) mais qui nécessite le calcul de la tangente à la courbe en chaque itéré. Dans la méthode de Godunov [9], à l'origine de la famille des méthodes numériques de type "Volumes-Finis", un très grand nombre de problèmes de Riemann monodimensionnels locaux sont résolus pour chaque pas de temps physique. L'existence d'une méthode itérative efficace pour déterminer l'état U^* est une des raisons qui a fait le succès de Godunov à l'époque. En outre, à titre anecdotique, on peut également noter que le raccord est même de classe \mathcal{C}^2 mais non \mathcal{C}^3 .

Remarque 7 : La courbe décrite par (4.36) est une fonction puissance. L'exposant vaut $\frac{\gamma-1}{2\gamma} < 1$. Ainsi la courbe est concave. De même la courbe (4.38) se comporte comme une racine carrée et elle est partout concave. Par symétrie, les courbes de 1-onde sont donc convexe, ce qui est respecté dans la Figure 4.10. Pour se convaincre, calculer les dérivées première et seconde de chacune de ces courbes et retrouver les points principaux des deux précédentes remarques.

Il s'en suit que ces courbes s'intersectent en un unique point du plan (p^*, v^*) qui sont donc les pressions et vitesses des états U_1 et U_2 , voir Figure 4.10. En fonction de la valeur relative de p^* (resp. v^*) par rapport à p_G et p_D (resp. v_G et v_D), on en déduit la nature des ondes 1 et 3 (choc ou détente). On calcule alors les valeurs manquantes de ρ_1 et ρ_2 en faisant attention à la nature de ces ondes (nous traitons ici le cas de la 1-onde. Le cas de la 3-onde est laissé au lecteur.)

— si $p^* < p_G$, on a une détente. L'entropie est un invariant de Riemann et

$$\rho_1 = \left(\frac{p^*}{p_G} \right)^{\frac{1}{\gamma_G}} \rho_G$$

— si $p^* > p_G$, on a un choc. Le rapport des densités est reliés aux pressions de part et d'autre de la discontinuité par

$$\rho_1 = \rho_G \frac{(\gamma + 1)p^* + (\gamma - 1)p_G}{(\gamma - 1)p^* + (\gamma + 1)p_G}$$

4.2.4 Cas de l'apparition du vide

To be Done!!!

4.2.5 Résolution complète du problème du tube à chocs

À la traversée d'une onde de choc intense, le rapport de température et donc l'élévation de température peut être très conséquent lorsque le nombre de Mach amont devient très grand devant 1. Cette propriété permet de porter facilement des gaz à des températures très élevées, d'exciter ainsi certains degrés de liberté interne de molécules complexes et d'analyser alors spectralement l'émission de lumière qui s'en suit, de manière à avoir accès à des propriétés fines de ces gaz.

Exercice 4 : On se place au nez d'un corps en rentrée atmosphérique devant lequel se forme une onde de choc que l'on assumera droite, avec $p_1 = 2.5\text{Pa}$, $T_1 = 205.3\text{K}$, $V_1 = 7.81\text{m.s}^{-1}$, $\gamma = 1.4$ et $r = 287\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Évaluer le nombre de Mach amont et les caractéristiques en aval de l'onde de choc. On s'intéressera en particulier à la température. Conclure.

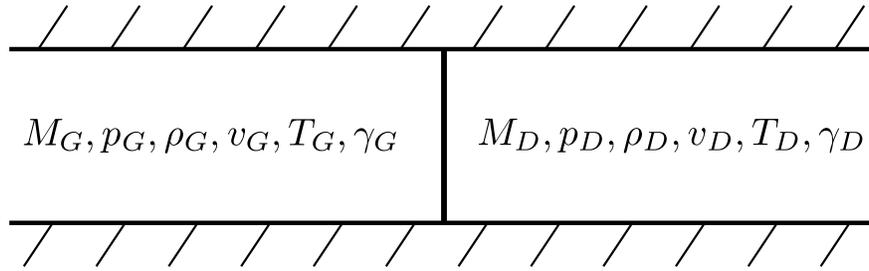


FIGURE 4.11 – Représentation schématique de l'état initial dans un tube à choc.

Le dispositif expérimental est celui du tube à choc : un tube de section constante rempli de deux gaz, l'un léger à gauche et l'autre plus lourd, à droite, celui à étudier. Les deux gaz sont non miscibles et séparés à $t = 0$ par une membrane destinée à disparaître à $t > 0$. L'état du gaz léger sera noté $p_4, c_4, T_4, \gamma_4, M_4$ et celui du gaz lourd $p_1, c_1, T_1, \gamma_1, M_1$, avec $p_4 \gg p_1$.

À $t = 0$ la membrane séparatrice est brisée et on cherche l'évolution temporelle du système sous l'hypothèse monodimensionnelle. Il s'agit de résoudre le problème de Riemann pour la dynamique des gaz idéaux polytropiques dans le cas où les deux fluides sont initialement au repos et $p_G \gg p_D$. Dans ce cas, voir Figure 4.12, on montre que la 1-onde est toujours une détente et la 3-onde est toujours un choc.

Pour illustrer cela, on considère en particulier l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \rho_G &= 1.0, & e_G &= 0.26, & v_G &= 0 \\ \rho_G &= 0.5, & e_G &= 0.26, & v_G &= 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

et l'on observe la structure des quatre champs : densité, vitesse, pression et énergie interne à un instant ultérieur. Le résultat de la Figure 4.14 correspond à une solution numérique obtenue avec un schéma de type WENO5 sur 500 points de discrétisation.

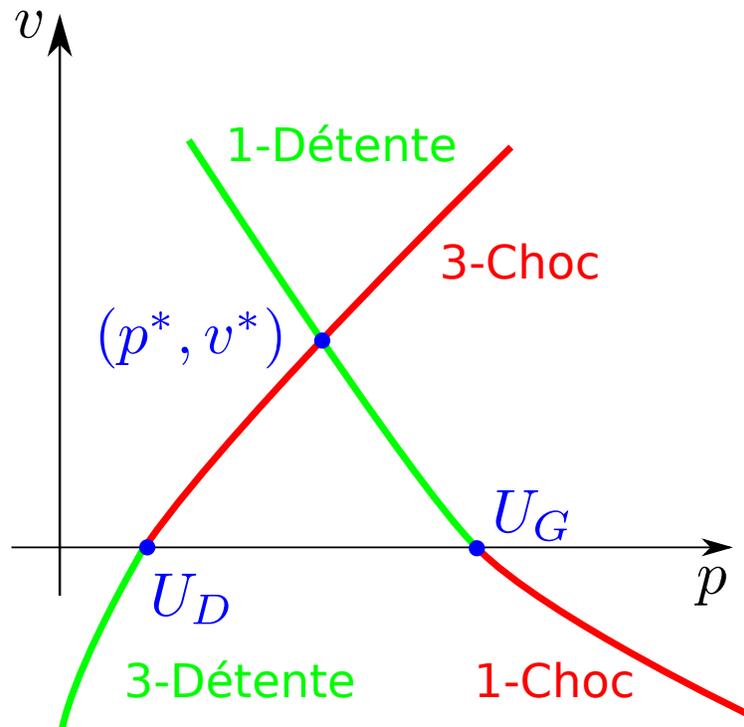


FIGURE 4.12 – Résolution du problème de Riemann dans le plan (p, v) dans la cas du tube à choc où les deux fluides sont initialement au repos ($v_G = v_D = 0$).

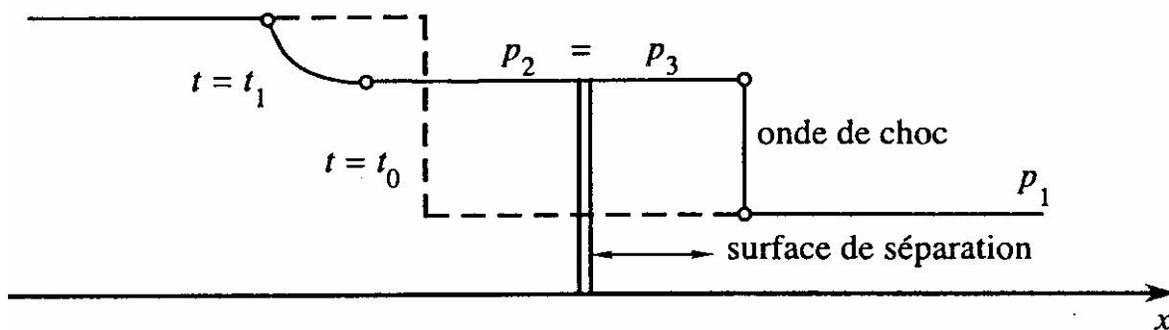


FIGURE 4.13 – Solution exacte du problème du tube à choc au temps $t = t_1$ pour des états initiaux $U_G = U_4$ et $U_D = U_1$.

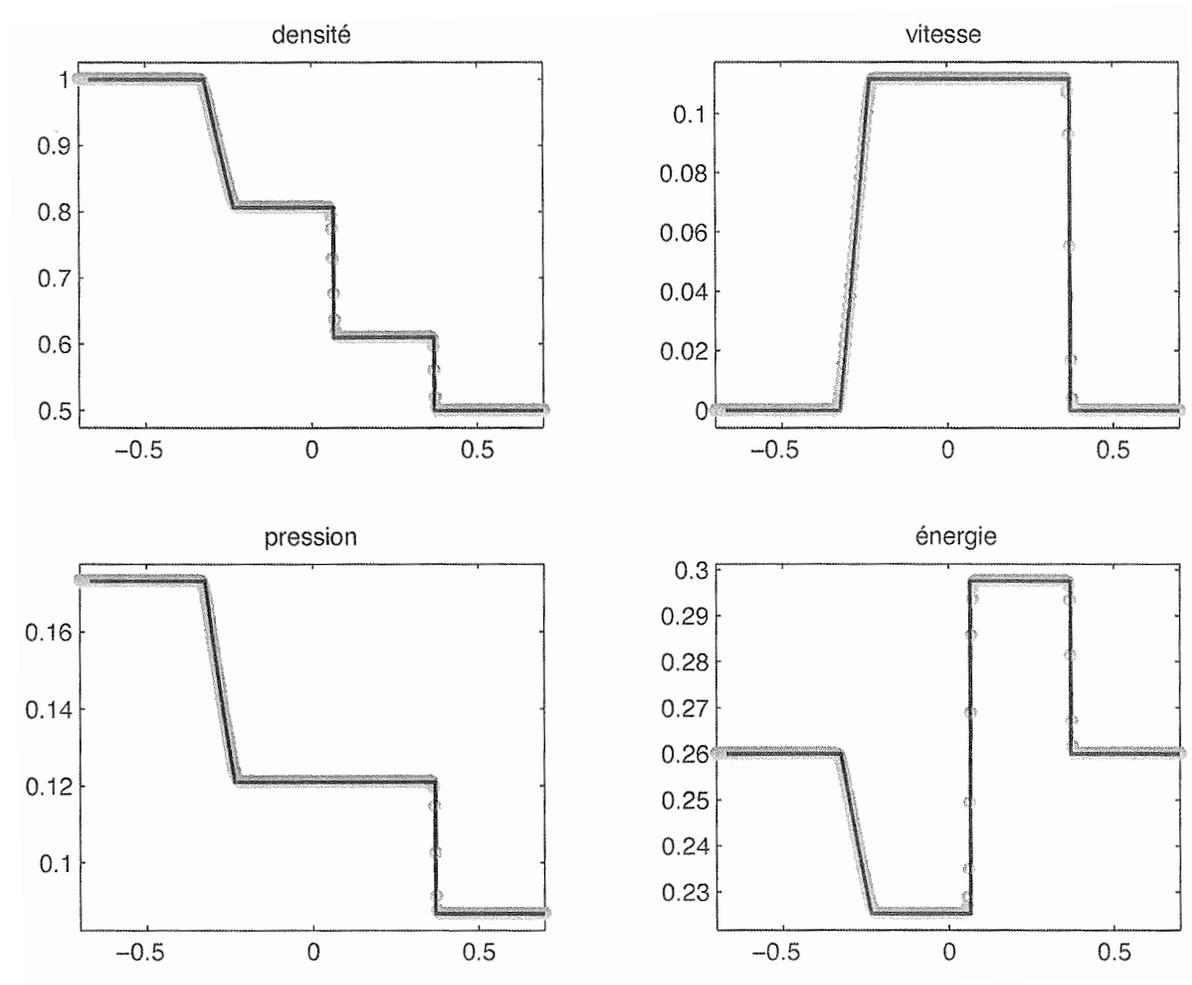


FIGURE 4.14 – Solution numérique du problème du tube à choc à un temps strictement positif quelconque pour les conditions initiales (4.39).

4.3 FEUILLE D'EXERCICES II

Onde Simples

Dans ce chapitre sur les écoulements de fluides parfaits monodimensionnels, on considère l'onde simple de détente et l'onde simple de compression par un piston dont la résolution a été faite en cours.

Exercice 1 : Dans le cas de l'onde simple de détente, la condition d'adhérence du fluide à la paroi du piston impose une limite sur la vitesse de déplacement du piston (on rappelle que l'on doit avoir $-X'(\tau) < 2c_0/(\gamma - 1)$ afin que la vitesse du son reste strictement positive en utilisant la formule (16) du cours). Peut-on avoir un écoulement supersonique dans ce contexte ? Cela est-il surprenant ? Tracer le diagramme des caractéristiques dans ce cas et commenter.

Exercice 2 : Dans le cas de l'onde simple de détente, on considère une vitesse négative $u_f > -2c_0/(\gamma - 1)$ et l'on considère le cas limite où l'accélération du piston est infinie en $t = 0$ de telle manière que le piston se met immédiatement à la vitesse u_f pour tout $t > 0$.

- I. L'onde simple mitoyenne de l'état constant de départ est toujours délimitée par une \mathcal{C}_+ issue du point $O(0, 0)$ d'équation $x = c_0 t$ comme indiqué sur la Figure 4.6. Quelle est la nature de l'autre \mathcal{C}_+ qui délimite l'autre bord de la zone d'onde simple ? Quelle est sa pente et quelle est la nature de l'écoulement entre le piston et cette autre \mathcal{C}_+ ? La pente peut-elle être négative et pourquoi ?
- II. Pourquoi parle-t-on de détente centrée dans ce cas ? Montrer que la structure du diagramme des caractéristiques que l'on tracera dans ce cas est compatible avec l'invariance du système d'équation de la dynamique des gaz par la transformation $x \mapsto \lambda x$ et $t \mapsto \lambda t$.
- III. Faire le lien avec le cas traité en cours et expliquer.
- IV. (Facultatif) Quelle est la nature de la solution au point O ?

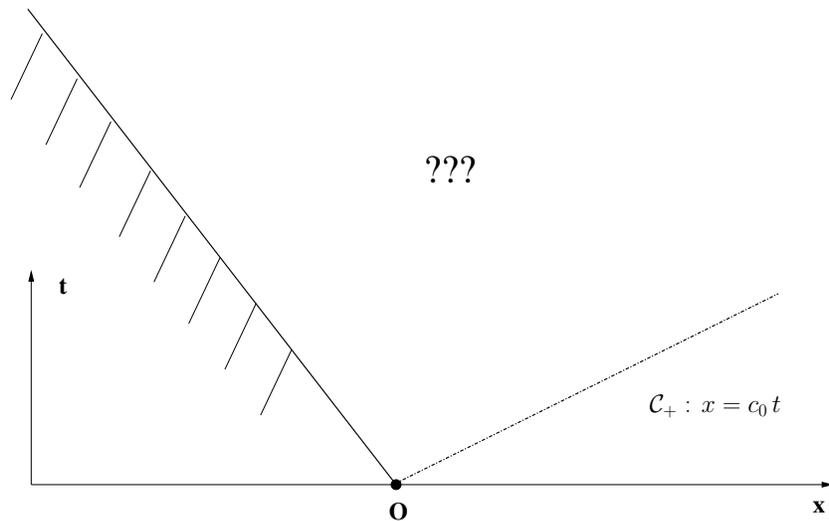


FIGURE 4.15 – Onde de détente centrée.

Exercice 3 : Dans le cas de l'onde simple de compression, on considère une vitesse positive u_f et l'on considère le cas limite où l'accélération du piston est infinie en $t = 0$ de telle manière que le piston se met immédiatement à la vitesse u_f pour tout $t > 0$.

- I. Quelle est la limite du point de formation du choc ? Justifier la réponse.
- II. Montrer que la structure du diagramme des caractéristiques, que l'on tracera, dans ce cas est compatible avec l'invariance du système d'équation de la dynamique des gaz par la transformation $x \mapsto \lambda x$ et $t \mapsto \lambda t$.
- III. Déterminer l'écoulement en aval de l'onde de choc.
- IV. (Facultatif) Quelle est la nature de la solution au point O ?

Onde de choc droite en fluide parfait - Navette

On considère le problème de la réentrée d'une navette spatiale comme indiqué sur la Figure 4.16. Pour simplifier et pouvoir obtenir des ordres de grandeur, on se place sur la ligne joignant les points A et B pour laquelle le choc peut être supposé droit et permanent pendant une phase de vol. Dans le repère lié à la navette, l'écoulement amont (noté 1) arrive à vitesse V .

Exercice 4 : A une distance d'environ 75 km de la terre, la pression est d'environ 2,5 Pa, la température de 205.3 K, la vitesse V est de 7181 m/s. On rappelle que la constante des gaz idéaux vaut 287 J/kg/K et on prendra $\gamma = 1,4$ pour les calculs.

- I. Calculer le nombre de Mach de l'écoulement amont. A partir des données fournies, évaluer la température juste derrière le choc. Que penser de l'ordre de grandeur de la température? Discuter la validité du modèle et les extensions nécessaires pour décrire la physique du phénomène.
- II. Utiliser les tables de choc pour vérifier que, le nombre de Mach étant calculé, les rapports de température et pression sont bien cohérents (utiliser une interpolation linéaire au besoin).
- III. Calculer la température au point d'arrêt B sur la protection thermique de la navette. Conclure.

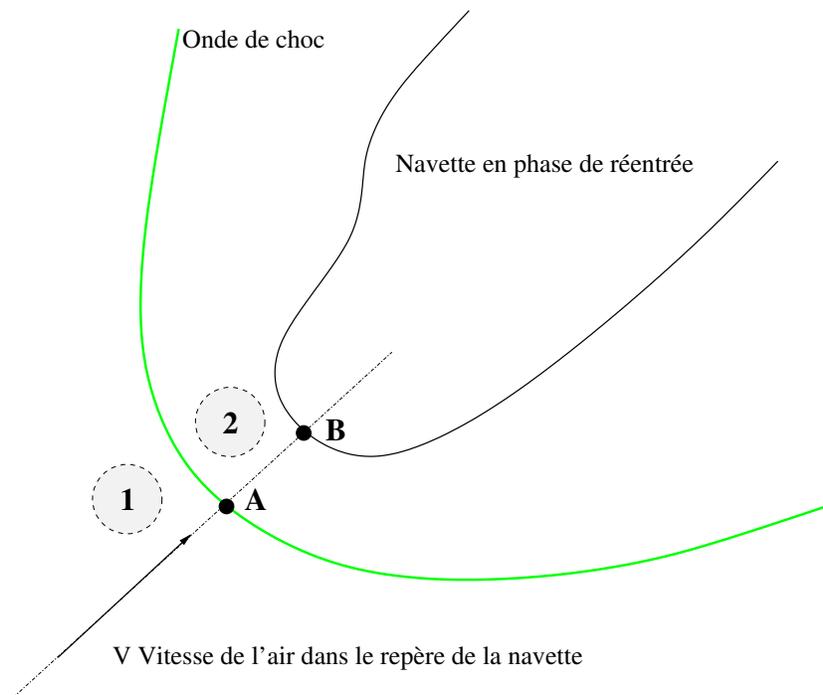


FIGURE 4.16 – Navette en phase de réentrée avec un choc courbe devant elle.

Onde de choc droite en fluide parfait

Dans le contexte de l'étude générale des ondes de choc droites, nous avons obtenu dans le cours une expression pour la courbe de Hugoniot associée à un point A_1 du plan (τ, p) (la donnée du volume spécifique $\tau = 1/\rho$ et de la pression définissent l'état thermodynamique

en amont du choc) dont l'intersection, un débit étant fixé, avec la droite de Rayleigh fournit l'état thermodynamique en aval du choc (τ_2, p_2) .

On cherche ici à quantifier la distance entre la courbe de Hugoniot et l'isentropique associée à l'état amont dans le cas d'un gaz idéal polytropique.

Exercice 5 : On note $f(\tau_2) = \log(p_2/p'_2)$, p'_2 étant la pression associée au volume spécifique τ_2 le long de l'isentrope associée à l'état amont 1 (on a donc $f(\tau_1) = 0$).

- I. Montrer que $df/d\tau_2 < 0$ indiquant que f est une fonction décroissante de τ_2 pour $\tau_2 > \tau_1(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ (on rappelle que la courbe de Hugoniot est alors une hyperbole équilatère dont une branche est associée à la valeur précédente de τ_2).
- II. En déduire la position de l'isentrope \mathcal{I} par rapport à la courbe de Hugoniot \mathcal{H} .
- III. Montrer que la dérivée première et seconde de f au point τ_1 sont nulles et en déduire le positionnement géométrique des courbes \mathcal{I} et \mathcal{H} au voisinage du point A_1 .
- IV. Montrer que

$$\log \frac{p_2}{p'_2} = \frac{s_2 - s_1}{c_v}.$$

Tuyère de Laval

Exercice 6 : Les conditions génératrice de l'écoulement dans la tuyère sont données par $p_0 = 30 \text{ bar}$ et $T_0 = 600 \text{ K}$. Le col du système est amorcé et sa section A admet une surface de 10 cm^2 . Comme dans le cours les valeurs de sortie sont indicées avec un s . La tuyère est adaptée à la pression de sortie $p_{\text{ext}} = 1 \text{ bar}$, c'est à dire que $p_s = 1 \text{ bar}$. L'écoulement y est donc supersonique et sans choc dans le divergent. On néglige le frottement et on suppose que le gaz est un gaz parfait avec $\gamma = 1.4$. Pour l'air on rappelle que l'on a $r = 287 \text{ J/kg/K}$.

- I. Quelle est la valeur de la section de sortie A_s ?
- II. Quelles sont la température T_s et la vitesse v_s de sortie ?
- III. Donner la valeur du débit dans la tuyère amorcée.
- IV. Donner les caractéristiques de l'écoulement au col.
- V. La valeur de la section au col est parfois notée A_* , comme c'est le cas dans les tables données en cours issues du livre de Anderson. En utilisant ces tables et la valeur de A_s calculée précédemment, retrouver les diverses valeurs en sortie de tuyère.

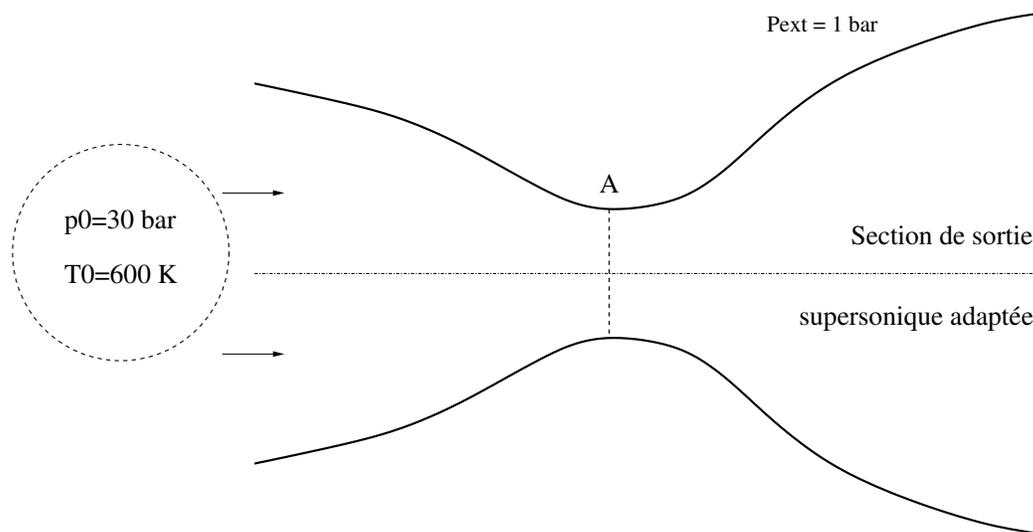


FIGURE 4.17 – Écoulement dans une tuyère de Laval.

4.4 FEUILLE D'EXERCICES II – CORRECTION

Rappels Une onde simple est une région de l'espace (x, t) où la solution est régulière mitoyenne d'un écoulement uniforme. Il a été vu en cours que

- Les ondes simples sont homoentropiques
- La frontière entre l'écoulement uniforme et l'onde simple est soit une \mathcal{C}_+ (resp. \mathcal{C}_-) de l'écoulement uniforme.
- Dans ce cas les \mathcal{C}_+ (resp. \mathcal{C}_-) de l'onde plane sont des droites le long desquelles l'écoulement est uniforme. De plus \mathcal{J}_- (resp. \mathcal{J}_+) est constant.

4.4.1 Exercice 1

On considère la situation représentée en Figure 4.18. L'écoulement étant uniforme le long des \mathcal{C}_+ , on a

$$V(M) = V(P) \qquad c(M) = c(P)$$

En $P(X(\tau), \tau)$, la vitesse du fluide est celle de la paroi,

$$V(P) = X'(\tau)$$

La vitesse du son locale est obtenue en utilisant le fait que \mathcal{J}_- est constant le long des \mathcal{C}_- , ce qui donne

$$V(M) - \frac{2c(M)}{\gamma - 1} = -\frac{2c_0}{\gamma - 1} = X'(\tau) - \frac{2c(P)}{\gamma - 1}$$

La vitesse du son devant être positive en dans tout l'écoulement, et en particulier en P on obtient

$$\frac{2c_0}{\gamma - 1} + X'(\tau) \geq 0$$

Le nombre de Mach local est donné par

$$\text{Ma} = \frac{-X'(\tau)}{c_0 + \frac{\gamma-1}{2}X'(\tau)}$$

on a donc un écoulement localement supersonique si

$$\frac{2c_0}{\gamma + 1} \leq -X'(\tau) \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}$$

- Bien que la vitesse du piston soit plus faible que celle du son dans le fluide au repos, l'écoulement est supersonique du fait de la baisse de pression.
- Dans la région supersonique, les \mathcal{C}_+ ainsi que les \mathcal{C}_- ont une pente négative ($u \pm c \leq 0$).
- Comme le montre cet exemple, le fait que l'écoulement soit supersonique ne signifie pas qu'il y a formation d'un choc.

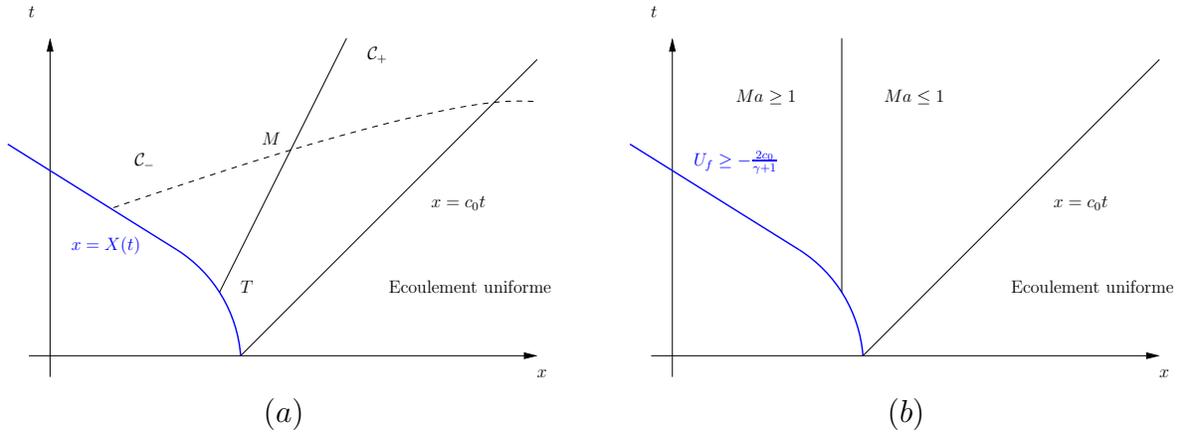


FIGURE 4.18 – Onde simple de détente. La trajectoire du piston est donnée en trait gras bleu. En (b), l'écoulement est localement supersonique.

4.4.2 Exercice 2

Dans le cas où la trajectoire du piston est une droite, $X(\tau) = U_f \tau$, l'onde simple va être limitée à droite par la \mathcal{C}_+ de l'écoulement au repos passant par l'origine. À gauche, sa limite peut être vue comme la limite des \mathcal{C}_+ issues de $(X(\tau), \tau)$ pour $\tau \rightarrow 0$. L'équation de cette \mathcal{C}_+ sera ainsi

$$x = (U_f + c_f)t$$

où la vitesse du son est donnée comme dans la question précédente par

$$c_f = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} U_f$$

Tout comme dans le cas précédent, la pente de la caractéristique limitant la gauche de la détente peut être négative si

$$\frac{2c_0}{\gamma + 1} \leq |U_f| \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}$$

Notons que les équations d'Euler, la condition initiale et la condition sur le piston sont invariantes par le changement de coordonnées

$$t \rightarrow \lambda t$$

$$x \rightarrow \lambda x$$

La solution ne dépend donc que de $\xi = x/t$. En particulier dans la détente, caractérisée par

$$U_f + c_f \leq \xi \leq c_0$$

on a

$$u(\xi) = \frac{2}{\gamma + 1} (\xi - c_0)$$

$$c(\xi) = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u(\xi)$$

La valeur de la solution n'est pas déterminée à l'origine. Ceci est lié aux deux idéalizations faites pour parvenir à ce problème :

- L'hypothèse que l'accélération du piston est infinie à $t = 0$,
- Le fait que l'on a négligé les dissipations visqueuses.

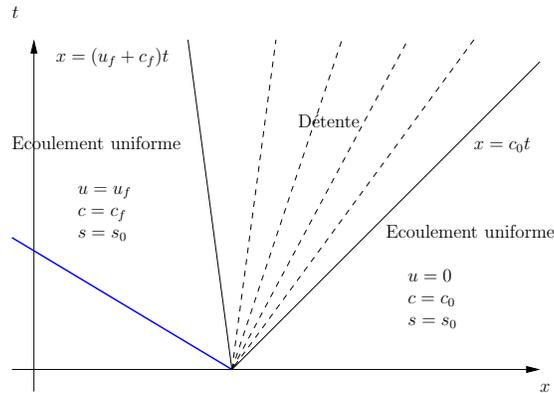


FIGURE 4.19 – Onde de détente centrée dans le cas d'un piston de vitesse constante.

4.4.3 Exercice 3

Comme dans l'exercice précédent, l'invariance des équations et des conditions aux bords par le changement de variable

$$t \rightarrow \lambda t$$

$$x \rightarrow \lambda x$$

fait que la solution ne dépend que de $\xi = x/t$. Comme il a été vu en cours, dans le cas d'un mouvement régulier du piston le choc se forme à partir du point (x_c, t_c) tel que

$$t_c = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_0}{X''(0)}$$

$$x_c = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_0^2}{X''(0)}$$

Une première manière de voir le problème est de considérer que le cas $X = U_f t$ est la limite d'une trajectoire pour laquelle $X''(0) \rightarrow \infty$. Une autre manière est de voir que les \mathcal{C}_+ issues de $(\varepsilon, 0)$ et de $(X(\varepsilon/c_0), \varepsilon/c_0)$ se coupent après un temps

$$t_\varepsilon = O(\varepsilon)$$

, et donc à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ on voit que le choc se forme à partir de l'origine.

On rappelle que si une solution des équations d'Euler passe d'un état (ρ_1, u_1, p_1) à un état (ρ_2, u_2, p_2) au travers d'un choc droit se déplaçant à la vitesse W , la conservation de la masse impose

$$\rho_1(u_1 - W) = \rho_2(u_2 - W) \quad (4.40)$$

La conservation de la quantité de mouvement donne quant à elle

$$\rho_1(u_1 - W)^2 + p_1 = \rho_2(u_2 - W)^2 + p_2 \quad (4.41)$$

et enfin la conservation de l'énergie donne

$$h_1 + \frac{1}{2}\rho_1(u_1 - W)^2 = h_2 + \frac{1}{2}\rho_2(u_2 - W)^2 \quad (4.42)$$

Appliquons cela au problème de la compression :

$$\begin{array}{lll} u_1 = U_f & \rho_1 = \rho_f & p_1 = p_f \\ u_2 = 0 & \rho_2 = \rho_0 & p_2 = p_0 \end{array} \quad c_0^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

(4.40) donne

$$\rho_f(U_f - W) = -\rho_0 W$$

que l'on peut reporter dans (4.41) :

$$-\rho_0 W(U_f - W) + p_f = \rho_0 W^2 + p_0$$

On en déduit

$$\frac{p_f}{\rho_f} = -\frac{p_0 + \rho_0 W U_f}{\rho_0 W} (U_f - W)$$

que l'on peut maintenant reporter dans (4.42) :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\{ \frac{c_0^2 U_f}{\gamma W} + (U_f^2 - W U_f) \right\} = \frac{1}{2} (U_f^2 - 2W U_f)$$

ce qui donne finalement

$$\frac{\gamma + 1}{2} U_f = W \left(1 - \frac{c_0^2}{W^2} \right)$$

soit

$$W = \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4} U_f \right)^2 + c_0^2} + \frac{\gamma + 1}{4} U_f$$

On vérifie aisément que

$$W \geq c_0$$

Enfin on voit que

$$W \leq c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} U_f$$

car la fonction racine carrée est concave. On prouve ainsi que les \mathcal{C}_+ rentrent dans la discontinuité.

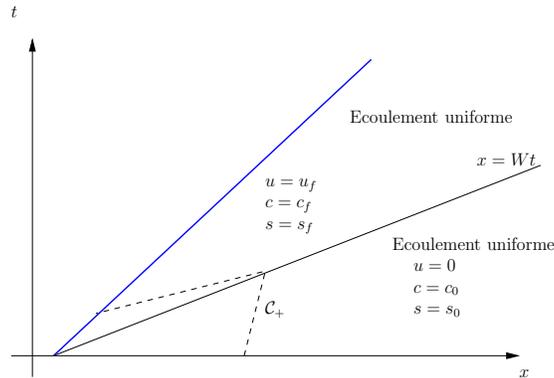


FIGURE 4.20 – Onde de compression dans le cas d'un piston de vitesse constante.

4.4.4 Exercice 4

La vitesse du son en amont du choc est donnée par $c_1 = \sqrt{\gamma r T}$, ce qui donne

$$Ma_1 = \frac{v_1}{c_1} \approx 25$$

De la relation

$$\frac{Ma_1^2(2 + (\gamma - 1)Ma_1^2)}{(1 + \gamma Ma_1^2)} = \frac{Ma_2^2(2 + (\gamma - 1)Ma_2^2)}{(1 + \gamma Ma_2^2)}$$

on trouve numériquement que

$$Ma_2 \approx 0.38$$

on a ainsi

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_2^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}$$

soit $T_2 \approx 122T_1$. De la même manière on trouve, $P_2 = 730P_1$. De l'aval du choc à la navette, on peut supposer que l'écoulement est isentropique, auquel cas la température à proximité de la navette serait donnée par la température d'arrêt isentropique

$$T_i = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_2^2 \right) \approx 26000K$$

A cette température, il faudrait prendre en compte les phénomènes d'ionisation et de dissociation, les réactions chimiques ainsi que les transferts radiatifs.

4.4.5 Exercice 5

Comme indiqué dans le cours, on a

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(1 - \gamma)\tau_2 + (1 + \gamma)\tau_1}{(1 + \gamma)\tau_2 + (1 - \gamma)\tau_1} \equiv \frac{N}{D}$$

ce qui donne

$$f(\tau_2) = \ln \frac{p_2}{p'_2} = \ln \left(\frac{p_2 p_1}{p_1 p'_2} \right)$$

La transformation qui mène de p_1 à p'_2 est isentropique, donc

$$\ln \frac{p_1}{p'_2} = \gamma \ln \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

d'où

$$f(\tau_2) = \gamma \ln \frac{\tau_2}{\tau_1} + \ln \frac{N}{D}$$

En dérivant cette équation par rapport à τ_2 on obtient

$$\begin{aligned} f'(\tau_2) &= \frac{\gamma}{\tau_2} + \frac{N'D - ND}{D^2} \frac{D}{N} = \frac{\gamma}{\tau_2} + \frac{N'D - ND}{DN} \\ &= \frac{\gamma}{\tau_2} + \frac{-4\gamma\tau_1}{DN} = -\frac{\gamma(\gamma^2 - 1)(\tau_2 - \tau_1)^2}{\tau_2 ND} \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{N}{D} \geq 0$$

on a $ND \geq 0$, ce qui prouve que

$$f'(\tau) \leq 0$$

Au fur et à mesure que τ_2 s'éloigne de τ_1 , l'écart entre p_2 et p'_2 augmente. Notons aussi que quand $\varepsilon = \tau_2 - \tau_1 \rightarrow 0$ on a $ND = O(1)$ donc

$$f'(\tau_2) = O(\varepsilon^2)$$

ce qui montre que

$$f'(\tau_1) = f''(\tau_1) = 0$$

On voit ainsi que non seulement l'isentrope est tangente à la courbe d'Hugoniot en τ_1 , mais elles ont aussi la même courbure. On a

$$f(\tau_2) = O(\varepsilon^3)$$

La relation de Gibbs pour une évolution à volume spécifique constant donne

$$dS = C_v \frac{dp}{p}$$

soit

$$S_2 - S'_2 = S_2 - S_1 = C_v \int_{p'_2}^{p_2} \frac{dp}{p} = C_v \ln \frac{p_2}{p'_2}$$

On voit ainsi que la production d'entropie est du troisième ordre en $(p_1 - p_2)/p_1$.

4.4.6 Exercice 6

L'écoulement est isentropique dans la tuyère de Laval. La pression d'arrêt isentropique en sortie est donc égale à la pression génératrice, ce qui donne

$$\frac{P_0}{P_s} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_s^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

d'où $Ma_s \approx 2.87$. La température génératrice étant également la température d'arrêt isentropique, on obtient $T_s \approx 227K$ et donc

$$V_s = Ma_s \sqrt{\gamma r T_s} \approx 867 m.s^{-1}$$

L'aire de la section de sortie s'obtient au moyen de la formule suivante :

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{Ma_s} \left\{ \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_s^2\right) \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

soit $A_s \approx 37.10^{-4} m^2$. Le débit de masse est donné par

$$\dot{m} = \frac{\Psi^* A^* P_i}{\sqrt{\gamma r T_i}} = \frac{\Psi^* A^* P_0}{\sqrt{\gamma r T_0}} \approx 4.95 kg.s^{-1}$$

Pour finir, en utilisant les mêmes formules on obtient au col $T_c \approx 500K$ et $P_c = 15.8.10^5 Pa$.

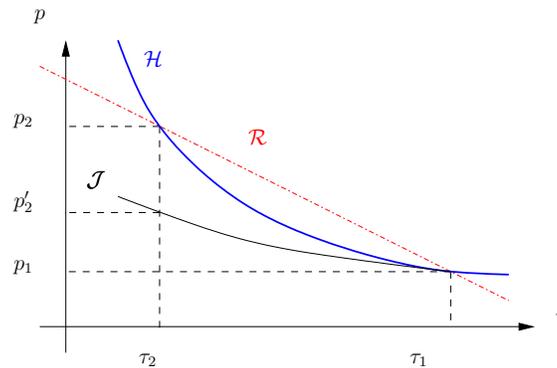


FIGURE 4.21 – Droite de Rayleigh \mathcal{R} (en pointillés rouges), courbe de Hugoniot \mathcal{H} (en trait gras bleu) et courbe isentropique (en trait fin noir).

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

DEVOIR À LA MAISON III

Le Tube à Choc

On considère un tube infini transparent, séparé en deux en $x = 0$ par une membrane imperméable infiniment rigide; c'est-à-dire que la pression peut être différente de part et d'autre. Chaque demi-tube infini est rempli par un fluide homogène. Le fluide de gauche est dans l'état $\rho_G, v_G = 0, p_G, T_G, \gamma_G$, celui de droite dans l'état $\rho_D, v_D = 0, p_D, T_D, \gamma_D$. On suppose que chacun de ces fluides est parfait et qu'aucun processus de diffusion n'intervient à l'interface des deux fluides. À $t=0$, on éclate la membrane centrale et on observe l'évolution

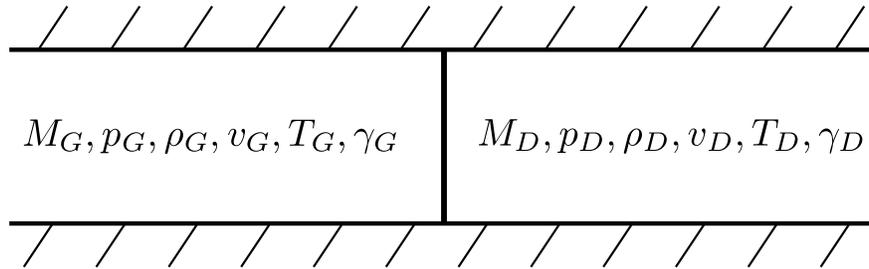


FIGURE 4.22 – Représentation schématique de l'état initial dans un tube à choc.

du système au cours du temps. Le problème est donc modélisé par un problème de Riemann pour les équations d'Euler instationnaires monodimensionnelles pour des lois d'état de gaz parfaits polytropiques :

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x (F(U)) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ U(0, x) = \begin{cases} U_G, & \text{si } x < 0, \\ U_D, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.43)$$

Ici U désigne le vecteur des **variables conservatives** $(\rho, \rho u, \rho E)$.

1. En utilisant le cours, rappeler la forme quasi-linéaire des équations d'Euler instationnaires dans les variables non conservatives $W = (p, v, s)$ que nous utiliserons dans le cours de ce TD. On explicitera en particulier la Jacobienne de la forme quasi-linéaire associée, ainsi que ses valeurs propres et ses bases de vecteurs propres et formes linéaires propres respectives.

2. Observer que l'EDP considérée ainsi que les conditions initiales sont invariantes par la transformation

$$(x, t) \longrightarrow (\lambda x, \lambda t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Qu'en déduisez vous quand à la forme de la solution ?

3. Combien d'ondes pourra-t-on observer pour tout $t > 0$? Quelle est la nature des champs caractéristiques associés à chacune de ces ondes ? De quel type peuvent être chacune de ces ondes ?

Cas de la 2-onde

4. Quelle forme ont les courbes intégrales pour le 2-champs caractéristique ? Quelles sont donc les quantités conservées à travers la 2-onde ? En déduire la vitesse de propagation de la 2-onde dans le plan (x, t) .
5. Justifier que le fait que le rapport des capacités calorifiques γ est une constante de part et d'autre de la 2-onde et qu'il prend respectivement les valeurs γ_D et γ_G à droite et à gauche.
6. Quelles sont maintenant les inconnues du problème ? Représenter schématiquement la solution dans le plan (x, t) . Les ondes associées aux champs **vraiment non-linéaires** seront représentées de manière "floues".

Cas de la 1-onde : l'onde simple

La 1-onde relie W_G à un état $W_1 = (p_1, v_1, s_1)$ que l'on va déterminer. Dans cette sous-partie, on suppose que la 1-onde est une onde simple.

7. a) Sous l'hypothèse d'onde simple, que vaut s_1 ?
 b) Pour quelle raison la quantité $v + \frac{2c}{\gamma_G - 1}$ est-elle conservée à travers cette onde ?
 c) Exprimer le rapport $\frac{p_1}{p_G}$ en fonction de $\frac{c_1}{c_G}$. En déduire une relation entre v_1 et p_1 .
 d) Comment est dirigée la concavité de la courbe $v_1(p_1)$ dans le plan (p, v) ?
 e) Quelle contrainte sur le signe de v_1 impose l'hypothèse d'onde simple ? Quelle répercussion sur le signe de $p_1 - p_G$?

1-onde : cas du choc

On suppose maintenant que la 1-onde est un choc.

8. a) Par la relation de Rankine-Hugoniot sur la densité, exprimer la vitesse du choc σ en fonction de la vitesse derrière la 1-onde, v_1 et du rapport des densités $\frac{\rho_1}{\rho_G}$.
 b) On se place dans le référentiel du choc. À quel **Mach relatif** M_σ le fluide à l'état gauche "pénètre-t-il" dans le choc ? Quelle est la contrainte sur ce Mach relatif pour que l'hypothèse d'onde de choc soit valide ?

- c) Rappeler les relations de choc droit qui lient les rapports $\frac{p_1}{p_G}$ et $\frac{p_1}{p_G}$ au Mach relatif M_σ . Comment se traduit l'hypothèse de validité traitée à la question précédente sur le rapport des pressions ?
- d) En déduire $v_1(M_\sigma)$ puis

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}c_G}{\sqrt{\gamma_G p_G}} \frac{p_G - p_1}{\sqrt{(\gamma_G + 1)p_1 + (\gamma_G - 1)p_G}}. \quad (4.44)$$

- e) On admet que cette fonction ne change pas de concavité. Dans quelle direction est elle orientée ?
- f) Une question subsidiaire, mais néanmoins intéressante porte sur la nature du raccord en $p_1 = p_G$ des deux fonctions $v_1(p_1)$ trouvée. Montrer que ce raccord est \mathcal{C}^1 .

Cas de la 3-onde

On souhaite réitérer le raisonnements précédent mais ne pas avoir à refaire tous les calculs. L'état à gauche de la 3-onde est noté $W_2 = (p_2, v_2, s_2)$.

9. a) Quelle est l'invariant de Riemann dans le cas **onde simple** ? Que vaut maintenant le nombre de Mach relatif, dans l'hypothèse d'un choc ?
- b) Propager les changements de signes dans les calculs précédents et en déduire les expressions de v_2 en fonction de p_2 , les conditions de validité associées et les directions des concavités.

Résolution Complète

On suppose $p_G < p_D$. Dans le plan (p, v) , représenter W_G, W_D et une idée des courbes intégrales les reliant respectivement à W_1 et W_2 .

10. Dans quelle direction se propage l'**onde de contact** (la 2-onde) ?
11. Quelle est finalement la nature de la 1-onde et de la 3-onde dans ce cas précis ?
12. Que se passe-t-il si l'on intervertit les deux états gauche et droits ?

En fait, on peut réaliser la même étude dans un cadre plus général où les vitesses v_G et v_D ne sont pas forcément nulles. Les courbes intégrales obtenues sont les mêmes, simplement translatées de manière à passer respectivement par les points (p_G, v_G) et (p_D, v_D) dans le plan (p, v) . Toutes les combinaisons entre 1-détente, 1-choc, 3-détente et 3-choc sont possibles. Cf Polycopié. En utilisant le fait que les raccords en (p_G, v_G) et (p_D, v_D) sont \mathcal{C}^1 et que les dérivées $v'(p)$ sont définies partout le long des courbes intégrales, comment résout-on numériquement le problème de Riemann étant donnés W_G et W_D ? Historiquement, cette méthode correspond à une énorme avancée scientifique dans le domaine du calcul numérique ; elle fut publiée en 1959. C'est le schéma de Godunov, du nom du mathématicien russe qui l'inventa, et c'est la brique de base des schémas aux volumes finis.

Chapitre 5

Les écoulements de gaz parfaits bidimensionnels permanents

5.1 Introduction

Dans le cours, nous avons commencé par un grand chapitre d'introduction permettant de comprendre les divers niveaux de modélisation et de montrer pourquoi on modélise les écoulements à forts nombre de Reynolds par les équations de fluide parfait ou encore équations d'Euler "compressible". Ce système d'équations permet aussi la description de la dynamique des discontinuités, encore appelées ondes de choc. Dans un grand chapitre deux, nous avons abordé la dynamique de la formation et de la propagation de ces discontinuités, en abordant successivement les équations scalaires linéaires en dimension 1, les équations scalaires non linéaires en dimension 1, les systèmes d'équations linéaires en dimension 1 et finalement les systèmes d'équations non-linéaires en dimension 1, dont le prototype est le système des équations de fluide parfait. Nous avons aussi traité des écoulements monodimensionnels permanents. Ayant assimilé des notions telles que les courbes caractéristiques, les invariants de Riemann, la résolution des conditions de saut pour les diverses formes de discontinuités, nous nous proposons dans ce chapitre de traiter des écoulements plans (bidimensionnels) permanents de fluides parfaits. Les grandeurs thermomécaniques de l'écoulement ne dépendent donc plus de la variable temporelle mais des deux coordonnées spatiales x et y . On pourra se reporter aux diverses formes des équations établies au chapitre 4, en pensant que la dérivée particulière devient $\frac{\mathcal{D}\varphi}{\mathcal{D}t} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}(\varphi)$, produit scalaire du champ de vecteurs vitesses et du vecteur gradient du champ scalaire φ . On rappelle à toutes fins utiles que, pour un champ de vecteur $\psi = (\psi_1, \psi_2)$

$$\frac{\mathcal{D}\psi}{\mathcal{D}t} = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \text{grad})\psi = \begin{pmatrix} u_1 \partial_x \psi_1 + u_2 \partial_y \psi_1 \\ u_1 \partial_x \psi_2 + u_2 \partial_y \psi_2 \end{pmatrix}$$

qui n'est autre que l'opérateur différentiel $\vec{\mathbf{u}}.\text{grad}$ appliqué au champ de vecteur ψ . Utilisant une notation tensorielle, on peut réécrire

$$(\vec{\mathbf{u}}.\text{grad})\psi = \underline{\underline{\text{grad}(\psi)}}.\vec{\mathbf{u}}$$

où le $.$ désigne ici la contraction d'un tenseur d'ordre 2 avec un tenseur d'ordre 1 ; on a noté $\underline{\underline{\text{grad}(\psi)}}$ avec une double barre pour souligner le fait qu'il s'agit d'un tenseur d'ordre deux. Dans toute la suite, on considère un gaz divariant dont l'équation d'état satisfait aux conditions de Weyl. Rappelons enfin que pour un écoulement permanent les trajectoires et les lignes de courant sont confondues.

5.2 Les équations d'Euler en régime permanent

Dans le cas où les forces extérieures massiques sont nulles, on peut montrer que les équations d'Euler se ramènent à :

$$\vec{\mathbf{u}}.\text{grad}(\rho) + \rho \text{div}(\vec{\mathbf{u}}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\text{rot } \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \text{grad}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}}^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) = 0 \quad (5.2)$$

$$\vec{\mathbf{u}}.\text{grad}(s) = 0 \quad (5.3)$$

avec par exemple $\rho = \rho(p, s)$ pour loi d'état.

Justification. La première et la dernière équations sont des conséquences directes de leur homologues en instationnaire. En particulier,

$$\text{rot } \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \text{rot } \vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x u_2 - \partial_y u_1 \end{pmatrix} \implies \text{rot } \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -u_2(\partial_x u_2 - \partial_y u_1) \\ u_1(\partial_x u_2 - \partial_y u_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on considère donc $\text{rot } \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{u}}$ comme un élément de \mathbb{R}^2 . Par ailleurs,

$$\text{grad}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}}^2}{2}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \partial_x u_1 + u_2 \partial_x u_2 \\ u_1 \partial_y u_1 + u_2 \partial_y u_2 \end{pmatrix}$$

et finalement

$$\text{rot } \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \text{grad}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}}^2}{2}\right) = (\vec{\mathbf{u}}.\text{grad})\vec{\mathbf{u}}$$

□

On rappelle qu'en introduisant $h(p, s)$, l'enthalpie spécifique du fluide et $\mathcal{H} = h(p, s) + \frac{\vec{\mathbf{u}}^2}{2}$ l'enthalpie totale spécifique, on peut obtenir la relation de Crocco :

$$\text{rot } \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \text{grad}(\mathcal{H}) = T \text{grad}(s) \quad (5.4)$$

Démonstration.

$$dh = \frac{dp}{\rho} + T ds \implies \text{grad}(h) = \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + T \text{grad}(s)$$

et on obtient directement (5.4) à partir de (5.2). \square

En prenant le produit scalaire de la relation (5.4) avec $\vec{\mathbf{u}}$, on obtient

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}(\mathcal{H}) = 0 \quad (5.5)$$

Donnons pour finir l'expression de la conservation de la masse sous une autre forme :

$$c^2 \text{div}(\vec{\mathbf{u}}) - \text{grad}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}}^2}{2}\right) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.6)$$

Démonstration. On fait le produit scalaire de (5.2) avec $\vec{\mathbf{u}}$ et on utilise

$$\text{grad}(p) = c^2 \text{grad}(\rho) + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \text{grad}(s)$$

Il vient alors

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}}^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho} c^2 \text{grad}(\rho) \cdot \vec{\mathbf{u}} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \vec{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}(s) = 0$$

(5.1) et (5.3) permettent alors de conclure. \square

Les équations ayant été obtenues, interprétons-les. Nous avons donc conservation de l'enthalpie totale \mathcal{H} le long des trajectoires (5.5), ainsi que de l'entropie pour les écoulements permanents réguliers. L'écoulement est donc isoentropique et isoénergétique. Si l'on note \mathcal{C}_0 une trajectoire de particule fluide, en réutilisant les notations du chapitre précédent on obtient :

$$\partial_{\mathcal{C}_0} \mathcal{H} = 0, \quad \partial_{\mathcal{C}_0} s = 0 \quad (5.7)$$

ou encore

$$\frac{1}{\rho} \partial_{\mathcal{C}_0} p + |\vec{\mathbf{u}}| \cdot \partial_{\mathcal{C}_0} |\vec{\mathbf{u}}|$$

qui peut être obtenue en multipliant l'équation de quantité de mouvement par un vecteur $\vec{\mathbf{e}}$ colinéaire à $\vec{\mathbf{u}}$.

On voit donc que les trajectoires sont des \mathcal{C}_0 caractéristiques du système différentiel du premier ordre en $(\vec{\mathbf{u}}, p, s)$, associées aux invariants \mathcal{H} et s en écoulement régulier. La raison pour laquelle il y a deux invariants le long des \mathcal{C}_0 caractéristiques vient du fait qu'en dimension 2 la valeur propre $\vec{\mathbf{u}}$ de la matrice Jacobienne associée au flux (voir chapitre 4) est de multiplicité 2.

Exercice1 : Écrire la matrice Jacobienne dans les variables (p, \vec{u}, s) et la diagonaliser en exhibant les valeurs propres et les vecteurs propres en dimension deux d'espace.

L'équation (5.4) est particulièrement intéressante car, projetée dans le repère associé aux particules fluides (le long de la vitesse et son orthogonale) elle procure la variation d'entropie d'une trajectoire à l'autre. Un point particulièrement intéressant est le lien entre le caractère homoentropique, homoénergétique et irrotationnel de l'écoulement. En effet, dans un écoulement homoentropique et homoénergétique, on obtient immédiatement le caractère irrotationnel de celui-ci. Par ailleurs, dans le cas d'un écoulement irrotationnel, l'homoentropie est équivalente à l'homoénergétique.

Attention : Pour un écoulement 3D, le caractère homoentropique et homoénergétique d'un écoulement ne garantit plus le caractère irrotationnel ! Cette propriété est une particularité des écoulements 2D et de la forme du rotationnel associé.

5.3 Choc permanent dans un écoulement permanent

5.3.1 Formes générales des conditions de saut

Les relations suivantes sont illustrées sur la Figure 5.1. On considère une surface de discontinuité $\Sigma(t)$ séparant le plan en deux régions d'états constants (1) et (2). Comme dans le Chapitre 3 page 83, on pourra éventuellement supposer que le choc se déplace à la vitesse \vec{w} mais on se placera alors dans le référentiel du choc et on considèrera alors le vecteur vitesse relative $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$.

Relations de saut :

$$\rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2} = \dot{m} \quad (\text{Conservation du débit}) \quad (5.8)$$

Comme dans le Chapitre 3 page 85, on considère deux cas :

- $\dot{m} = 0$: Pas de saut de vitesse normale, ni de pression, mais discontinuité possible de la vitesse tangentielle et de la densité. On a vu au chapitre 2 qu'on a soit une surface de glissement si les vitesses tangentielles sont différentes, soit une discontinuité de contact, si elles sont identiques.
- $\dot{m} > 0$: Onde de choc :

$$\begin{cases} p_1 + \rho_1 v_{n1} u_{n1} = p_2 + \rho_2 v_{n2} u_{n2} \\ u_{t1} = u_{t2} \\ h_1 + \frac{1}{2} v_{n1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_{n2}^2 \\ s_2 > s_1 \end{cases} \quad (5.9)$$

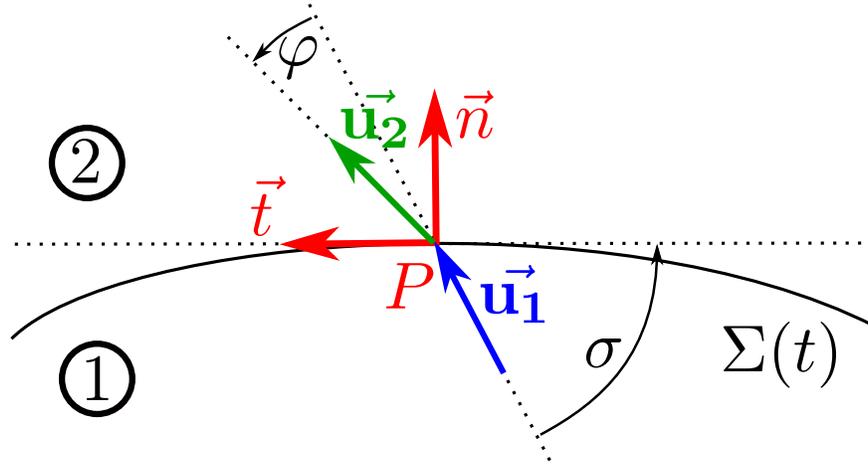


FIGURE 5.1 – Illustration d’un choc bidimensionnel permanent

La continuité de la vitesse tangentielle implique $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. Par conséquent, si l’écoulement initial est homoénergétique, il le reste même si l’on a présence d’ondes de chocs. Par ailleurs la présence d’un choc courbe implique que si l’écoulement aval est homoentropique, il ne le reste pas à la traversée du choc : il devient isoentropique.

5.3.2 Le choc oblique permanent

Un cas particulier, celui où Σ est une droite, revêt un intérêt dans beaucoup de cas, comme on le voit sur la Figure 5.2. Cette solution est cependant parfois remplacée par une onde de choc courbe comme sur la Figure 5.8.

Nous nous intéressons maintenant aux conditions de sauts dans un choc oblique permanent et nous servons pour cela de la Figure 5.3. Sur cette Figure, on a respecté $u_{t1} = u_{t2}$ avec une déflexion de la vitesse d’un angle φ . L’inclinaison de la surface de choc par rapport à la vitesse incidente est notée σ . À travers le choc oblique Σ , la conservation de la masse, quantité de mouvement, enthalpie totale et la condition d’entropie s’expriment de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m} = \rho_1 u_1 \sin(\sigma) = \rho_2 u_2 \sin(\sigma - \varphi) \\ u_1 \cos \sigma = u_2 \cos(\sigma - \varphi) \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 \sin^2 \sigma = p_2 + \rho_2 u_2^2 \sin^2(\sigma - \varphi) \\ h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \sin^2 \sigma = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \sin^2(\sigma - \varphi) \\ s_2 > s_1 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

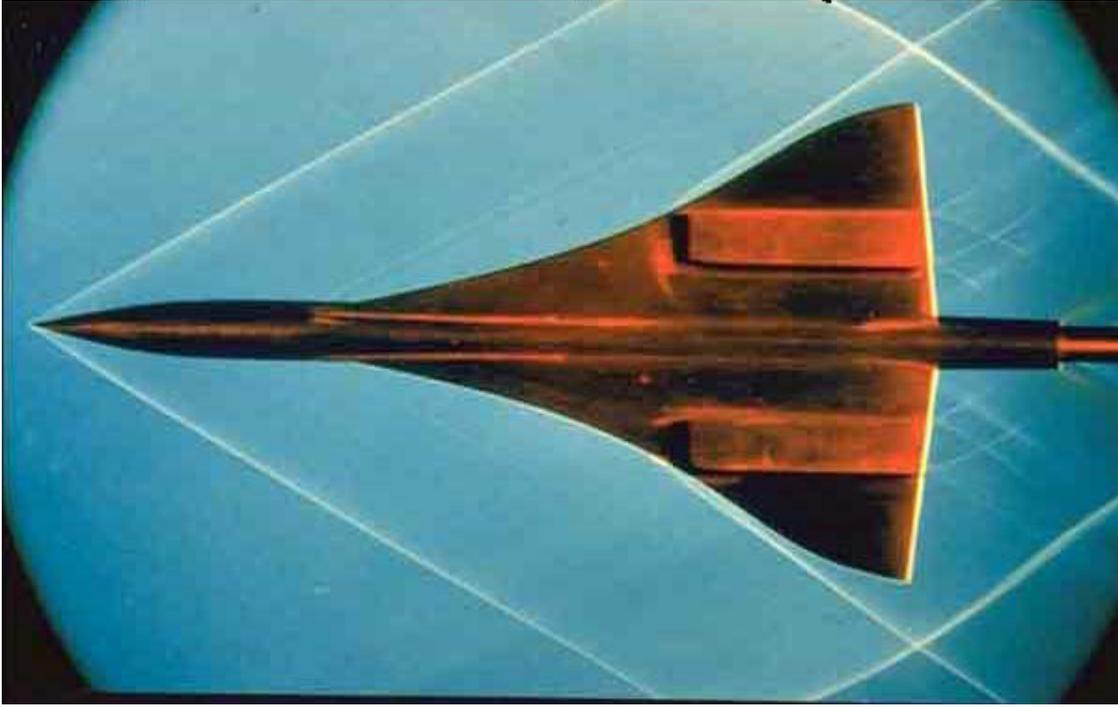


FIGURE 5.2 – Ondes de choc obliques bien droites attachées à une maquette d’avion supersonique.

En terme de nombres de Mach normaux, on a

$$\begin{cases} M_{n1} = \frac{u_{n1}}{c_1} = \frac{u_1 \sin \sigma}{c_1} = M_1 \sin \sigma > 1 \\ M_{n2} = \frac{u_{n2}}{c_2} = \frac{u_2 \sin(\sigma - \varphi)}{c_2} = M_2 \sin(\sigma - \varphi) < 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

En particulier, si l’on note $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right)$, on voit que

$$0 < \alpha(M_1) < \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

Dans ce contexte, étant donnés u_1 , ρ_1 et p_1 caractérisant l’écoulement amont, nous avons cinq inconnues u_2 , ρ_2 , p_2 et σ ou φ , mais on ne dispose que de quatre relations de saut. La donnée de σ ou φ permet donc de résoudre, ce que nous allons faire dans le cas du gaz idéal polytropic.

En utilisant la conservation du débit et de la vitesse tangentielle, on a :

$$\frac{\tan \sigma}{\tan(\sigma - \varphi)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} \quad (5.13)$$

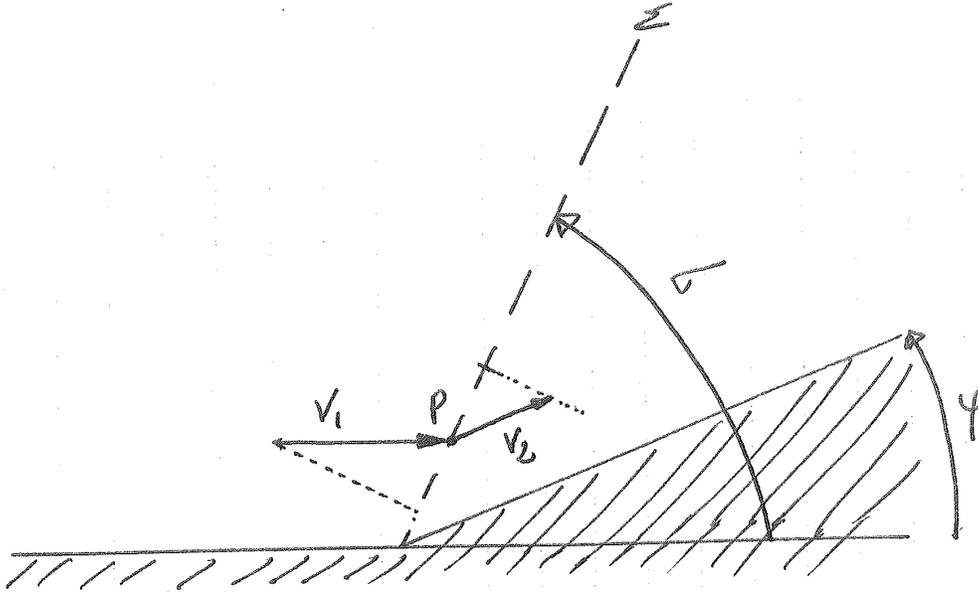


FIGURE 5.3 – Représentation schématique de l'apparition d'un choc oblique lorsqu'un écoulement supersonique attaque une rampe d'inclinaison φ .

mais $\tan(\sigma - \varphi) = \frac{\tan \sigma - \tan \varphi}{1 + \tan \sigma \tan \varphi}$, d'où

$$\tan \sigma = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} \frac{\tan \sigma - \tan \varphi}{1 + \tan \sigma \tan \varphi}$$

c'est à dire

$$\tan \varphi \left(\tan^2 \sigma + \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} \right) = \tan \sigma \left(\frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} - 1 \right)$$

ou encore

$$\tan \varphi \left(1 + \frac{(\gamma + 1)M_1^2 (1 - \sin^2 \sigma)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} \right) = \frac{1}{\tan \sigma} \left(\frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} - 1 \right)$$

soit

$$\tan \varphi = \frac{1}{\tan \sigma} \frac{2(M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{2 - 2M_1^2 \sin^2 \sigma + (\gamma + 1)M_1^2} \quad (5.14)$$

et en inversant

$$\frac{1}{\tan \varphi} = \tan \sigma \left[\frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1} - 1 \right] \quad (5.15)$$

Par conséquent, étant donné M_1 et par exemple φ , on en déduit immédiatement σ . Il est intéressant de regarder la valeur du nombre de Mach en aval du choc

$$M_2^2 \sin^2(\sigma - \varphi) = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma + 1 - \gamma} \quad (5.16)$$

Il est alors possible de représenter ces résultats sur la polaire de choc, comme sur la Figure 5.4 dans le cas $\gamma = 1.4$. Cette courbe, ou plutôt cet ensemble de courbes, nécessite un ensemble

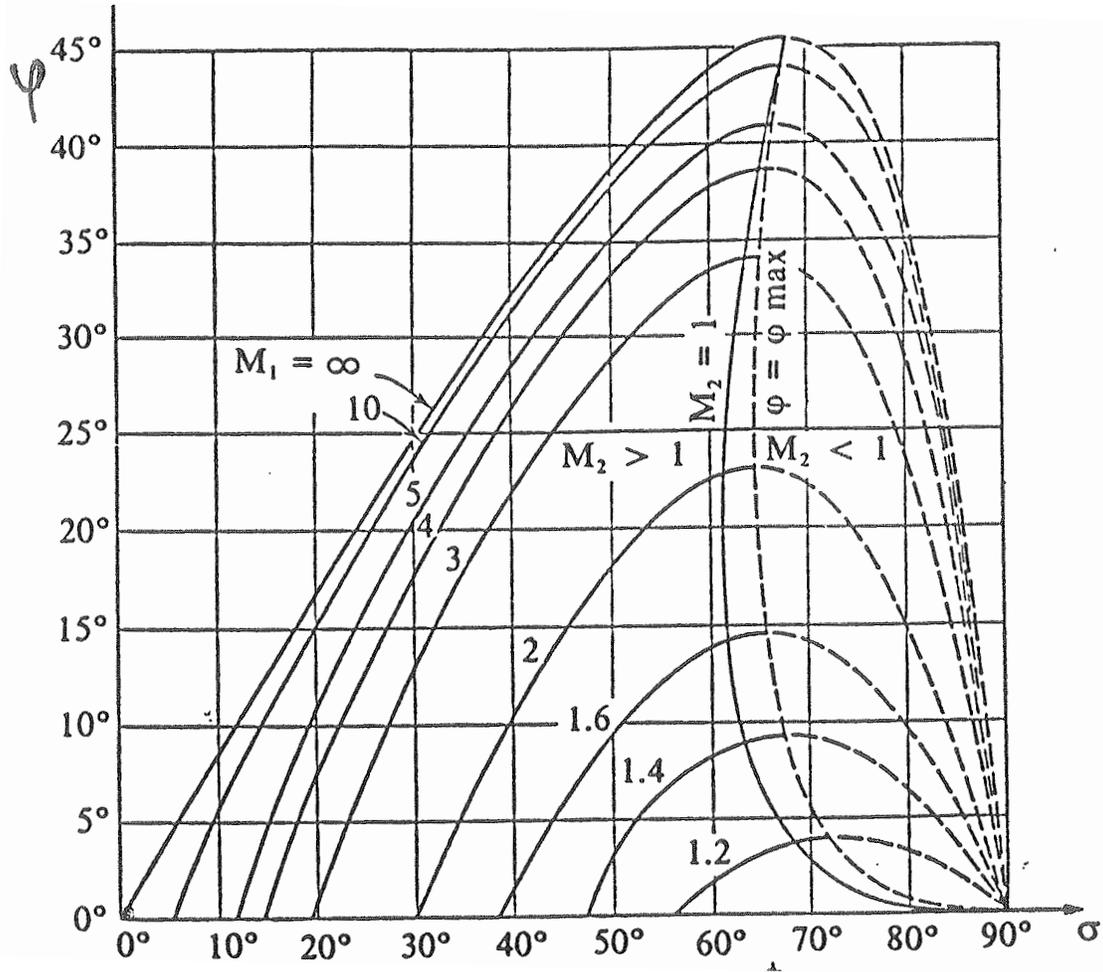


FIGURE 5.4 – Abaque de choc oblique.

de commentaires :

- Étant donné M_1 et conformément à (5.12), $\sigma \in [\alpha(M_1), \frac{\pi}{2}]$ où la borne inférieure correspond à un nombre de Mach normal de l'unité, c'est à dire à l'absence de discontinuité. Pour chaque $\sigma \in [\alpha(M_1), \frac{\pi}{2}]$, il existe un unique angle φ variant entre zéro pour le choc droit et pour l'onde de Mach (la limite $\sigma \rightarrow \alpha(M_1)$ et une amplitude de choc infiniment faible) et $\varphi_{\max}(M_1)$.
- Dans la pratique, on connaît plutôt l'angle de déflexion φ , comme par exemple le long d'un bord d'attaque quelconque, comme illustré sur la Figure 5.5. Dans ce cas, pour φ fixé entre 0° et $\varphi_{\max}(M_1)$, on trouve deux solutions pour σ

$$\alpha(M_1) \leq \sigma_- < \sigma_+ \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.17)$$

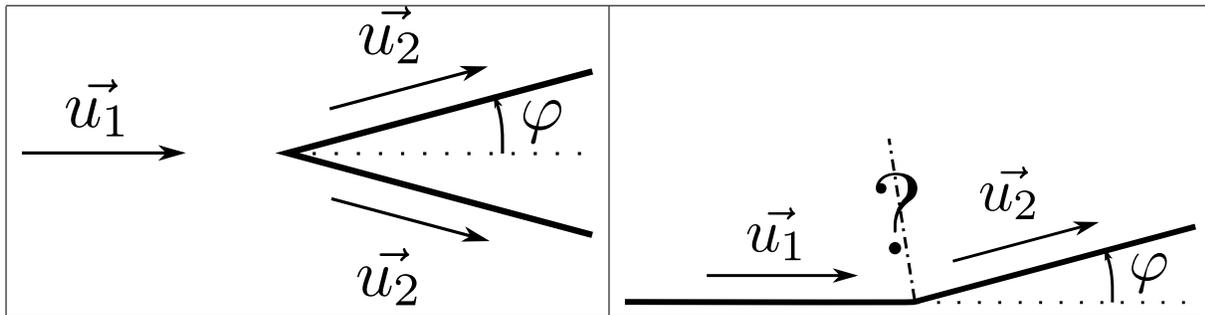


FIGURE 5.5 – Gauche : Illustration d'un problème de bord d'attaque pour un objet supersonique pointu (par exemple le nez d'un avion) pour lequel l'angle de déflexion φ est fixé. Droite : Problème type pour le choc oblique permanent ; la rampe supersonique.

avec $\sigma_- = \sigma_+$ dans le cas $\varphi = \varphi_{\max}(M_1)$. La solution σ_+ correspond à une onde de choc la "plus droite" et donc la plus forte des deux (le rapport p_2/p_1 y est par exemple plus grand). On dit que la solution pour σ_- est la solution de choc faible.

- L'ensemble des solutions étant caractérisée, il est instructif de tracer la courbe $M_2 = 1$, correspondant à la limite d'un écoulement subsonique. On voit alors que dans la majeure partie des cas, les solutions de choc faibles conduisent à un écoulement aval supersonique, alors que l'écoulement aval est systématiquement subsonique pour la solution σ_+ de choc fort. Notons tout de même qu'il existe une petite zone pour les chocs faibles où l'écoulement aval est subsonique.
- Avant d'observer l'ensemble des configurations possibles se pose la question de la stabilité des configurations, dans le cas où l'on se donne $M_1, \varphi \in]0, \varphi_{\max}(M_1)[$ et où l'on a donc existence de deux solutions possibles, un choc oblique faible et un choc oblique fort. La plupart du temps, la solution physique observée est celle du choc faible. Une explication plausible est liée au caractère supersonique (pour φ assez loin de $\varphi_{\max}(M_1)$ et $M_2 > 1$) de l'écoulement aval en choc faible. En effet, les perturbations provenant de l'aval de l'écoulement ne peuvent pas remonter ce dernier ; dans le cas du choc fort ces perturbations (par exemple issues du dièdre plus loin en aval, ou de la couche limite turbulente) remonte l'écoulement dans la zone subsonique et ont tendance à faire transiter l'écoulement vers la solution de type choc faible. C'est le danger avec le calcul des solutions stationnaires : encore faut-il qu'elles soient stables pour qu'on puisse les observer !
- Finalement, pour M_1 fixé, si $\varphi > \varphi_{\max}(M_1)$ ou même si $\varphi > \varphi_{\text{sub}}(M_1)$ correspondant à la solution de choc faible pour laquelle $M_2 = 1$, la configuration de choc oblique n'existe pas, on est instable et on voit s'installer une configuration de choc détaché, voir Figure 5.6. Cette configuration permet de faire le lien entre une zone de choc fort reliée à un choc droit détaché et une zone plus lointaine de choc faible retrouvant un écoulement aval supersonique. Sur la Figure 5.8, on a un objet dont l'angle d'attaque est de 10° . D'après l'abaque de la Figure 5.4, cet angle d'attaque est supérieur à φ_{\max} pour un écoulement amont de nombre de Mach 1.32. On observe bien que le choc

est maintenant détaché du profil, bien que celui-ci soit droit. Enfin, dans le cas d'un profil "rond", l'angle d'attaque étant égal à $\frac{\pi}{2}$, le choc sera toujours détaché, comme le montre la Figure 5.7.

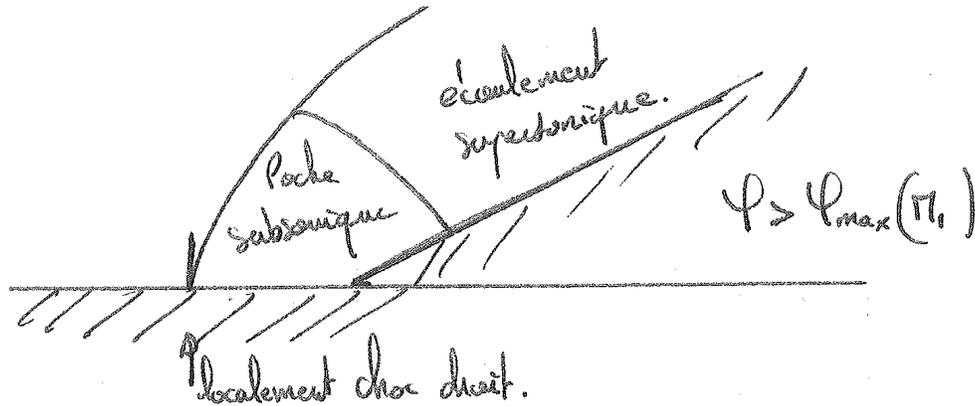


FIGURE 5.6 – Lorsque l'angle de la rampe avec l'horizontale dépasse une certaine pente φ_{\max} , le choc se détache.

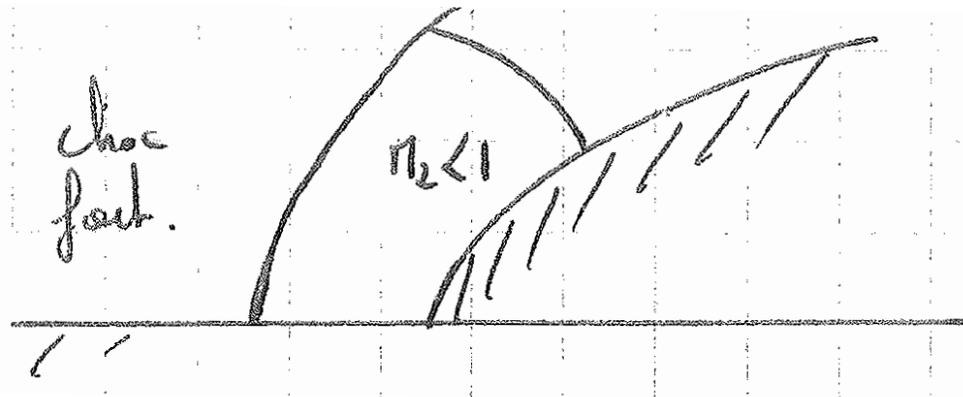


FIGURE 5.7 – Dans le cas d'un profil rond, on observe une poche subsonique au "nez" du profil.

Pour M_1 fixé, si $\varphi < \varphi_{\text{sub}}(M_1)$ deux solutions stationnaires existent correspondant à deux angles σ_- et σ_+ , sachant que la configuration associée à σ_+ est instable ($M_2 < 1$) et c'est donc la configuration de type choc faible qui est observée (Figure 5.9). Tous ces résultats peuvent se retrouver sur ce que l'on appelle la polaire de choc, Figure 5.10. On choisit de mettre u_1 sur l'axe des abscisses, la polaire de choc donnant la position des points u_2 . Pour chaque σ donné (on construit la droite faisant un angle σ avec u_1 , σ variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$), u_1 et u_2 ont la même projection orthogonale sur cette droite! On reporte alors l'angle φ

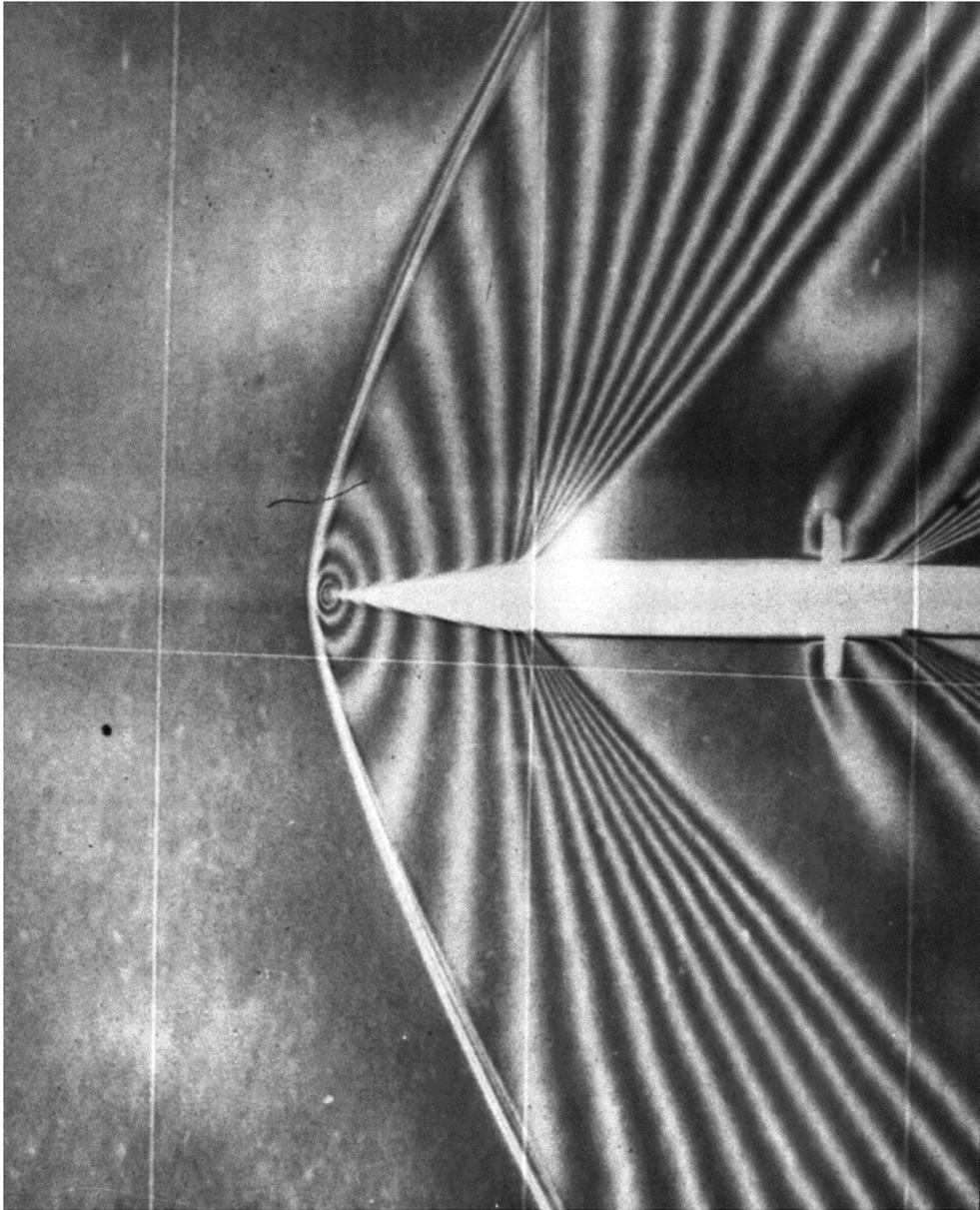


FIGURE 5.8 – Choc détaché lorsque, pour un Mach de 1.32 et un angle de 10° , le choc attaché ne peut plus être maintenu ($\varphi > \varphi_{\max}$ comme on verra par la suite).

correspondant. On retrouve que à la limite $\varphi \rightarrow 0$, σ doit tendre vers $\alpha(M_1) = \arcsin \frac{1}{M_1}$ et la pente de la polaire au point de choc infiniment faible est donnée. Quand σ tend vers $\frac{\pi}{2}$, φ tend vers zéro et la position de u_2 est fixée par la condition de choc droit et M_1 . On a aussi tracé la limite pour laquelle l'écoulement 2 est subsonique, la polaire de choc croisant ce cercle en un point proche du point de tangence associé à φ_{\max} .

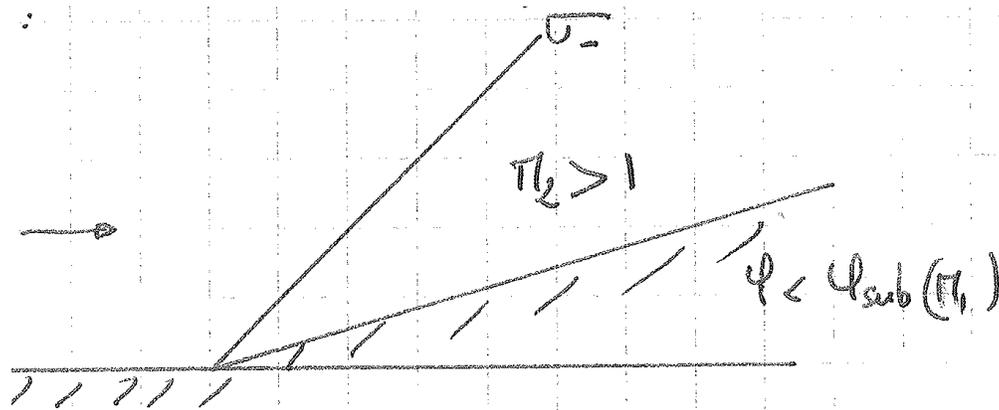
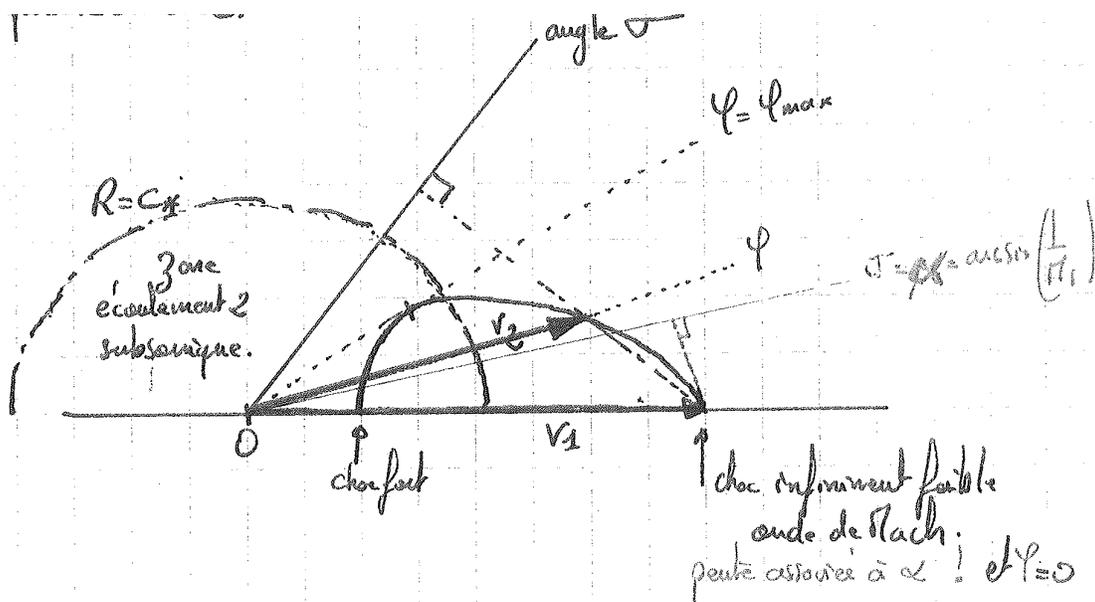


FIGURE 5.9 – Cas du choc faible

FIGURE 5.10 – Polaire de choc pour un écoulement supersonique sur un rampe de pente φ .

5.3.3 Ondes de Mach

Nous avons entièrement résolu le cas des ondes de choc obliques dans un dièdre mais avant de terminer cette section, nous allons étudier d'un peu plus près le cas des chocs infiniment faibles que l'on appelle aussi : ondes de Mach. On se place donc dans le cas φ proche de zéro et l'on étudie les relations établies précédemment au premier ordre en φ . En particulier, on

montre rapidement qu'on a

$$\sigma = \alpha + \mathcal{O}(\varphi) = \arcsin \frac{1}{M_1} + \mathcal{O}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \sin \sigma = \frac{1}{M_1} + \mathcal{O}(\varphi) \quad \text{et} \quad \tan \sigma = \frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} + \mathcal{O}(\varphi) \quad (5.18)$$

Ensuite, à partir de (5.14), vient

$$\tan \varphi = \varphi + o(\varphi) = \frac{1}{\tan \sigma} \frac{2(M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{2 - 2M_1^2 \sin^2 \sigma + (\gamma + 1)M_1^2}$$

expression que l'on peut réécrire sous la forme

$$M_1^2 \sin^2 \sigma - 1 \approx \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \tan \sigma \right) \varphi - (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1) \varphi \tan \sigma + o(\varphi)$$

ce qui fait que $(M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)$ est un $\mathcal{O}(\varphi)$ et finalement

$$M_1^2 \sin^2 \sigma - 1 = \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \tan \sigma \right) \varphi + o(\varphi).$$

D'après (5.18), on a donc

$$M_1^2 \sin^2 \sigma - 1 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2 \varphi}{\sqrt{M_1^2 - 1}} + o(\varphi)$$

et ce contexte, on a au premier ordre :

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \approx \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \varphi$$

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} \approx -\tan \alpha \varphi = \frac{-\varphi}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$

Les variations des grandeurs thermomécaniques sont donc proportionnelles à l'angle φ . Sur la Figure 5.11, les lignes de Mach ou ondes de Mach de pente $\sigma \approx \arcsin \frac{1}{M_1}$ sont observables expérimentalement quand on a des rugosités sur la paroi (comme les rubans adhésifs utilisés dans la Figure 5.11). Ces ondes de choc ont une amplitude extrêmement faible.

Le raisonnement précédent supposait que φ est l'angle de déflexion de l'écoulement aval imposé par une rampe. De manière plus générale, φ représente l'angle de déflexion de l'écoulement aval et celui-ci devient très faible avec l'amplitude du choc. C'est le cas lorsque se trouve suffisamment loin d'un objet supersonique (comme un avion) pour que l'amplitude du choc soit devenue faible. Le choc oblique suit donc l'angle de Mach et la discontinuité décrit alors ce qu'on appelle le cône de Mach. Sur la Figure 5.8 on devine ce phénomène. Près du bord d'attaque, l'écoulement est fortement défléchi et le choc est quasi-droit et détaché. La pente du choc diminue avec son intensité au fur et à mesure que l'on s'éloigne du profil vers la limite "angle de Mach/amplitude nulle" où la discontinuité transite vers une perturbation sonore.

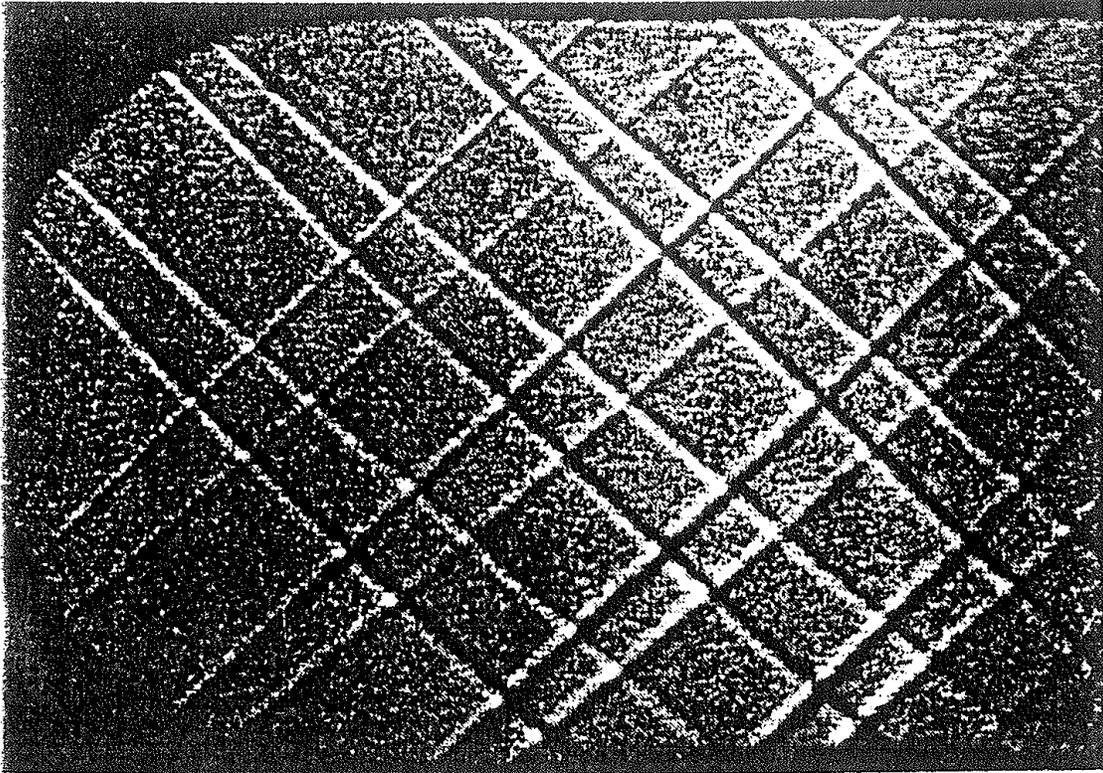
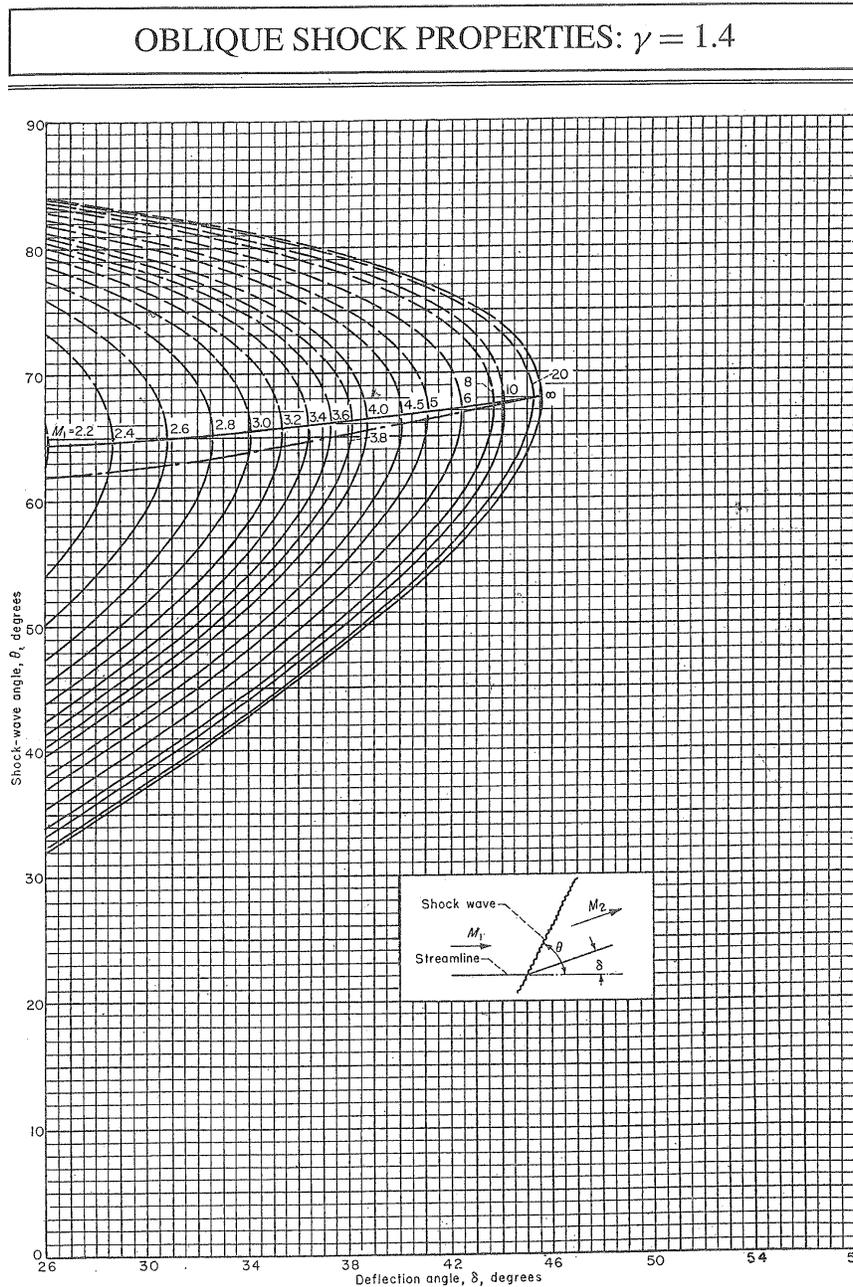


FIGURE 5.11 – Les lignes de Mach (ondes de choc obliques extrêmement faibles) sont observées ici expérimentalement à Mach 1.5 en plaçant des morceaux de ruban adhésif sur la paroi.

5.4 La méthode des caractéristiques en écoulement permanent

5.4.1 Introduction

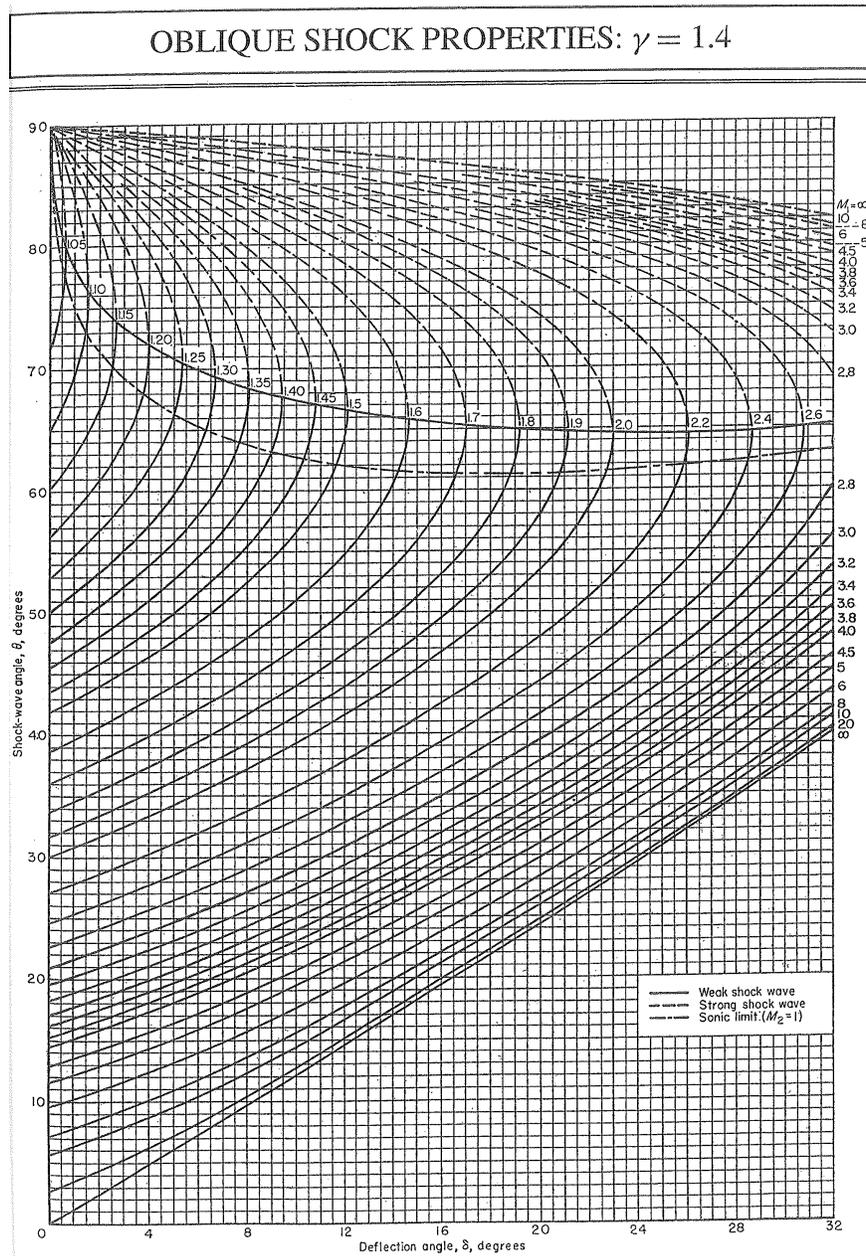
Dans le contexte des écoulements instationnaires, nous avons pu constater que les équations d'Euler des écoulements de gaz parfaits étaient des équations hyperboliques (le terme consacré est "système hyperbolique de lois de conservation"), pour lesquels on peut toujours construire les courbes caractéristiques. Ces notions que nous avons étudiées en dimension un d'espace s'étendent sans problème au dimensions supérieures (2 et 3), à condition que l'écoulement soit instationnaire. Dans le contexte des écoulements bidimensionnels stationnaires (ou permanents), nous allons voir que la construction de la solution par la méthode des caractéristiques demande des précautions et ne sera valable que dans le contexte des écoulements supersoniques. Pour bien comprendre l'origine de cette difficulté et avant de travailler sur les écoulements de fluides parfaits, nous revenons sur la notion de système différentiel du premier ordre en régime permanent.



5.4.2 Notion de système différentiel elliptique, parabolique et hyperbolique en un point. Caractéristiques

Pour comprendre, on se propose de travailler avec le système modèle suivant :

$$\begin{cases} A_1 \partial_x u + B_1 \partial_y u + C_1 \partial_x v + D_1 \partial_y v = E_1 \\ A_2 \partial_x u + B_2 \partial_y u + C_2 \partial_x v + D_2 \partial_y v = E_2 \end{cases} \quad (5.19)$$



décrivant l'évolution de (u, v) dans la région \mathcal{D} du plan (x, y) où (u, v) sont continûment différentiables.

Les fonctions A_i , B_i , C_i , D_i et E_i sont des fonction continues de (x, y, u, v) . Le système est dit sous forme quasi-linéaire et peut se réécrire

$$\mathcal{A} \partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathcal{B} \partial_y \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathcal{E}, \quad \text{avec } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

La solution de ce problème et son existence même dépendent des conditions aux limites. On

se rappelle la question des conditions aux limites pour le problème instationnaire, Chapitre 2, page 67. Dans le cas présent, les conditions aux limites sont définies le long de certaines courbes du plan (x, y) .

La première question que nous nous posons est, connaissant la solution au point $P(x, y)$, construire la solution dans un voisinage de P . On se donne une direction du plan et la courbe \mathcal{L} du plan passant par P et supportée par cette direction. On note $t(P)$ la pente

$$t(P) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mathcal{L}}$$

(on inverse les coordonnées x et y si $t(P)$ est infini !). Dans ces conditions, on a

$$\begin{cases} \partial_{\mathcal{L}}u(P) = \partial_x u + t(P)\partial_y u \\ \partial_{\mathcal{L}}v(P) = \partial_x v + t(P)\partial_y v \end{cases} \quad (5.20)$$

Si l'on suppose connue la solution sur la courbe \mathcal{L} , le membre de gauche, dans la mesure où la solution sur \mathcal{L} est régulière, est connu. On veut alors connaître l'ensemble des deux gradients de u et v afin de construire une approximation locale de la solution. Or, on peut réécrire le système vérifié par les dérivées partielles de u et v :

$$\begin{cases} A_1 \partial_x u + B_1 \partial_y u + C_1 \partial_x v + D_1 \partial_y v = E_1 \\ A_2 \partial_x u + B_2 \partial_y u + C_2 \partial_x v + D_2 \partial_y v = E_2 \\ \partial_x u + t(P)\partial_y u + 0 + 0 = \partial_{\mathcal{L}}u(P) \\ 0 + 0 + \partial_x v + t(P)\partial_y v = \partial_{\mathcal{L}}v(P) \end{cases} \quad (5.21)$$

On voit alors que le déterminant de ce système linéaire au point P est un polynôme d'ordre 2 en $t(P)$ et que trois cas se produisent :

cas elliptique : quelque soit la pente $t(P)$ choisie, le déterminant de la matrice associée au système linéaire est non nul. Pour toute donnée de la pente et de $\partial_{\mathcal{L}}u$ et $\partial_{\mathcal{L}}v$, on peut résoudre et obtenir la valeur des deux gradients de u et v permettant de construire une approximation locale de la solution.

cas parabolique : le déterminant, polynôme du second degré en $t(p)$, admet une seule racine double. C'est le cas de la transition du domaine elliptique au domaine hyperbolique. Ce cas dépasse le cadre de ce cours ; il sera laissé de côté.

cas hyperbolique : le déterminant admet deux racines réelles distinctes, $t_-(P)$ et $t_+(P)$, qui constituent deux valeurs particulières de la pente de la courbe \mathcal{L} au point P . Dans ce contexte, pour $t = t_-(P)$ ou $t = t_+(P)$, la matrice du système linéaire est singulière et le système admet soit une infinité de solutions, soit zéro solution. Pour qu'une infinité de solutions existent, il faut que le second membre de (5.21) soit dans l'image de l'endomorphisme associé à la matrice du système linéaire. Cette condition, que l'on peut voir sous la forme de la nullité du déterminant constitué de trois colonnes indépendantes de la matrice et du second membre, débouche sur une relation affine entre $\partial_{\mathcal{L}}u$ et $\partial_{\mathcal{L}}v$ au point P .

$$\mathcal{U}_P[t(P)] \partial_{\mathcal{L}}u + \mathcal{V}_P[t(P)] \partial_{\mathcal{L}}v = \mathcal{W}_P \quad (5.22)$$

où les coefficients $\mathcal{U}_P[t(P)]$ et $\mathcal{V}_P[t(P)]$ dépendent de la pente et \mathcal{W}_P vaut zéro si $E_1 = E_2 = 0$. Cette relation est une relation de compatibilité des dérivées de u et v le long des courbes \mathcal{L} de pentes particulières $t_-(P)$ et $t_+(P)$. Cela permet de définir des familles de courbes \mathcal{L} le long desquelles la résolution du système linéaire local en P (5.21) conduit à une indétermination de la valeur des gradients de u et v .

Attention 1 : Il s'agit de bien comprendre les deux points suivants :

1. Toute l'étude que nous venons de présenter est une étude locale. Tout dans ce problème dépend des valeurs des coefficients au point P .
2. La conséquence directe de 1) est que dans un domaine \mathcal{D} donné, le système peut passer du caractère elliptique au caractère hyperbolique d'un point à un autre. Ceci montre la difficulté d'une résolution générale et par ailleurs laisse augurer des difficultés rencontrées aux points où le système est parabolique. Toutefois, par continuité du déterminant, si le système est hyperbolique au point P , il le reste dans un voisinage de P .

Dans le cas où l'on suppose le système hyperbolique au point P et donc dans un voisinage noté \mathcal{D} de P , on obtient localement deux familles de courbes dites caractéristiques \mathcal{C}_- et \mathcal{C}_+ , de pentes respectives $t_-(P)$ et $t_+(P)$, le long desquelles la relation de compatibilité (5.22) est vérifiée. En résumé :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathcal{C}_+} = t_+(P) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_P[t_+(P)] \partial_{\mathcal{C}_+} u + \mathcal{V}[t_+(P)] \partial_{\mathcal{C}_-} v = \mathcal{W}(P)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mathcal{C}_-} = t_-(P) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_P[t_-(P)] \partial_{\mathcal{C}_-} u + \mathcal{V}[t_-(P)] \partial_{\mathcal{C}_+} v = \mathcal{W}(P)$$

Parfois ces équations sont intégrables, comme on le verra dans le cas de certains écoulements de fluides parfaits et conduisent à l'obtention d'**Invariants de Riemann**.

Pour la résolution effective, deux solutions se présentent suivant le statut de la courbe \mathcal{L} au point P :

1. \mathcal{L} n'est tangente en aucun point contenu dans \mathcal{D} aux courbes caractéristiques. On peut alors construire la solution dans un voisinage de \mathcal{L} comme nous allons le voir ci-après.
2. Dans le cas où \mathcal{L} est tangente en un point P à une courbe caractéristique, il y a alors indétermination dans la résolution des dérivées de u et v et le problème admet soit une infinité de solution, soit aucune !

Dans le cas 1, en utilisant une approximation linéaire locale de la solution en M (voir Figure 5.12) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_M - y_{P_-} = t_-(P_-)(x_M - x_{P_-}) \\ y_M - y_{P_+} = t_+(P_+)(x_M - x_{P_+}) \\ \mathcal{U}_{P_-}[t_-(P_-)](U_M - U_{P_-}) + \mathcal{V}_{P_-}[t_-(P_-)](V_M - V_{P_-}) = \mathcal{W}(P)(x_M - x_{P_-}) \\ \mathcal{U}_{P_+}[t_+(P_+)](U_M - U_{P_+}) + \mathcal{V}_{P_+}[t_+(P_+)](V_M - V_{P_+}) = \mathcal{W}(P)(x_M - x_{P_+}) \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Notons que la résolution est exacte dans le cas de caractéristiques rectilignes.

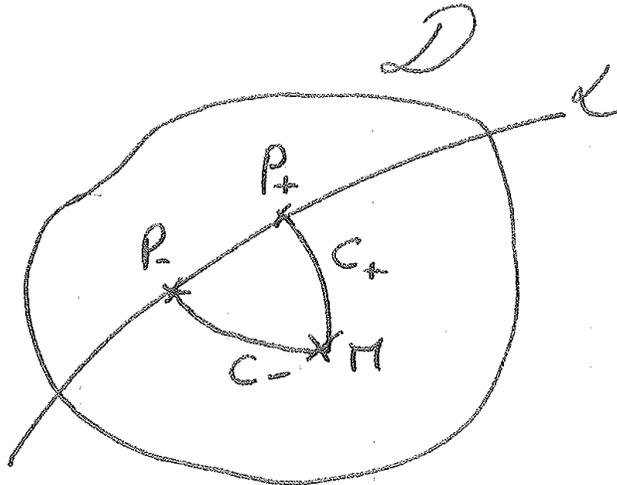


FIGURE 5.12 – Construction de la solution dans le voisinage d'un point hyperbolique lorsque \mathcal{L} n'est jamais tangente à une courbe caractéristique.

Remarque 2 : Dans une région d'hyperbolicité, le lecteur est invité à généraliser la notion de domaine de dépendance et de domaine d'influence que nous avons vues dans le cas instationnaire, à l'aide des courbes caractéristiques. On définira en particulier le domaine d'influence d'un point P de \mathcal{L} (dans le cas où \mathcal{L} n'est tangente en aucun point de \mathcal{D} à des courbes caractéristiques) et le domaine de dépendance du point M et son intersection avec la courbe \mathcal{L} .

Remarque 3 : Même pour les écoulements de fluides continus, les dérivées partielles peuvent admettre des points/lignes de discontinuité (on reprendra en particulier l'onde simple de détente en instationnaire et on pourra montrer que le long de la \mathcal{C}_+ caractéristique, $x = c_0 t$, on a discontinuité des dérivées de la vitesse, ce qui fait que les trajectoires des particules sont continues et de dérivées continues à la traversée de la \mathcal{C}_+ caractéristique, mais leurs dérivées secondes y sont discontinues !)

On appelle ces discontinuités des discontinuités faibles, par opposition aux discontinuités fortes associées aux discontinuités de la solution (u, v) elle-même. On peut alors montrer que les sauts des gradients le long d'une courbe \mathcal{L} vérifient le système

$$\begin{cases} A_1[\partial_x u] + B_1[\partial_y u] + C_1[\partial_x v] + D_1[\partial_y v] = 0 \\ A_2[\partial_x u] + B_2[\partial_y u] + C_2[\partial_x v] + D_2[\partial_y v] = 0 \\ [\partial_x u] + t(P)[\partial_y u] + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + [\partial_x v] + t(P)[\partial_y v] = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

ce qui permet d'affirmer que si \mathcal{L} n'est pas tangente à une courbe caractéristique, alors tous les sauts sont nuls, mais que dans le cas où \mathcal{L} est tangente, on peut avoir une infinité de solutions. Ainsi, seules les courbes caractéristiques peuvent présenter des sauts des dérivées partielles de u et v . Notons juste que (5.24) implique que la dérivée de u ou v reste continue le long de \mathcal{L} tangente à une courbe caractéristique; les discontinuités sont telles que $[\text{grad}(u)]$ et $[\text{grad}(v)]$ sont orthogonales à \mathcal{L} dans ce cas.

Remarque 4 : Dans le cas où l'on prend x comme variable temporelle et que l'on suppose alors que $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ et $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, c'est à dire $\mathcal{A} = \mathbf{I}_2$, on voit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & B_1 & 0 & D_1 \\ 0 & B_2 & 1 & D_2 \\ 1 & t(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t(P) \end{vmatrix} = 0 = -t(P)^2 + t(P)(B_1 + D_2) + B_2 D_1 - B_1 D_2$$

est exactement le polynôme caractéristique de la matrice $B = \begin{pmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{pmatrix}$ et nous avons bien une application de l'analyse précédente au cas instationnaire et une cohérence de la notion d'hyperbolicité puisque le fait que B soit diagonalisable à valeurs propres réelles distinctes est équivalent à la condition d'hyperbolicité que nous avons introduite ici.

5.4.3 Écoulement de fluide parfait permanent et continu plan. Application de la méthode des caractéristiques

Cas général

Étant donné un point P , le vecteur vitesse $\vec{u}(P)$ peut être représenté par ses coordonnées cartésiennes

$$\vec{u}(P) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x, y) = U \cos \theta \\ v(x, y) = U \sin \theta \end{cases} \quad (5.25)$$

où U est la norme du vecteur vitesse \vec{u} et θ l'angle qu'il fait avec l'axe des abscisses.

Les équations peuvent alors se mettre sous la forme (pour la masse on part de la forme (5.6))

$$\begin{cases} (u^2 - c^2)\partial_x u + uv\partial_y u + uv\partial_x v + (v^2 - c^2)\partial_y v = 0 \\ \rho u\partial_x u + \rho v\partial_y u + \partial_x p = 0 \\ \rho u\partial_x v + \rho v\partial_y v + \partial_y p = 0 \\ u.\partial_x s + v.\partial_y s = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Dans ce contexte, la matrice (avec $a(P) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)(P)$, pente d'une éventuelle caractéristique) est donnée par

$$\begin{vmatrix} u^2 - c^2 & uv & uv & v^2 - c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho u & \rho v & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & \rho v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & v \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

dont on doit évaluer le déterminant. On voit tout de suite que la partie entropie se découple du reste avec

$$\det \begin{vmatrix} u & v \\ 1 & a \end{vmatrix} = au - v$$

qui, s'il est nul, indique une \mathcal{C}_0 caractéristique, c'est à dire une trajectoire. La relation de compatibilité est alors la conservation de l'entropie le long de cette \mathcal{C}_0 caractéristique.

L'autre partie (facteur) du déterminant vaut :

$$(au - v)[(u^2 - c^2)a^2 - 2auv + v^2 - c^2] \quad (5.27)$$

dont la nullité, si l'on exclut la \mathcal{C}_0 caractéristique, nous donne une équation polynomiale d'ordre 2 en a dont le discriminant réduit est

$$\Delta = c^2(U^2 - c^2),$$

où U est la norme de la vitesse. Ainsi, cette équation possède deux racines distinctes si et seulement si $U^2(P) > c^2(P)$ (écoulement supersonique) et on a

$$a_{\pm}(P) = \frac{uv \pm c^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - c^2} \quad (5.28)$$

Il est toutefois bien plus pratique de supposer sans perdre de généralité que $\vec{u}(P)$ est non nul et colinéaire à \vec{e}_x . Il suffit pour cela de considérer la bonne rotation de repère d'angle θ . Dans un tel repère, on a simplement

$$(U^2 - c^2)a^2 = c^2$$

soit :

$$a_{\pm}(P) = \pm \frac{c}{\sqrt{U^2 - c^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2(P) - 1}} = \pm \tan(\alpha(P)) \quad (5.29)$$

où $\alpha(P) = \arcsin\left(\frac{1}{M(P)}\right)$ et $M(P)$ est le nombre de Mach local en P .

En résumé, nous avons une seconde multiplicité de la \mathcal{C}_0 caractéristique et dans le cas d'un écoulement supersonique, le système différentiel est de nature hyperbolique autorisant ainsi l'utilisation de deux courbes caractéristiques \mathcal{C}_- et \mathcal{C}_+ , faisant un angle local avec la trajectoire de $\pm\alpha(P)$, où $\alpha(P)$ est appelé angle de Mach. Ces courbes caractéristiques sont aussi appelées courbes de Mach ou lignes de Mach. Voir Figure 5.13.

Il s'agit alors de déterminer les invariants à travers les relations de compatibilité pour un domaine d'écoulement supersonique. Sur les trajectoires, on obtient une relation déjà connue :

$$\rho U \partial_{c_0} U + \partial_{c_0} p = 0 \quad (5.30)$$

que l'on peut encore interpréter comme la conservation de l'enthalpie totale le long des trajectoires, mais ici nous travaillons en variables (p, u, v, s) .

En supposant $au - v \neq 0$, ce qui écarte le cas de la trajectoire, on peut former l'équation locale de la condition de compatibilité en utilisant le vecteur variation $(0, 0, 0, du, dv, dp)^t$:

$$\begin{vmatrix} u^2 - c^2 & uv & uv & v^2 - c^2 & 0 & 0 \\ \rho u & \rho v & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & \rho v & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & du \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & dv \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & dp \end{vmatrix} = 0$$

Soit

$$(au - v) [(a(u^2 - c^2) - uv) dp - \rho v c^2 du + \rho u c^2 dv] = 0 \quad (5.31)$$

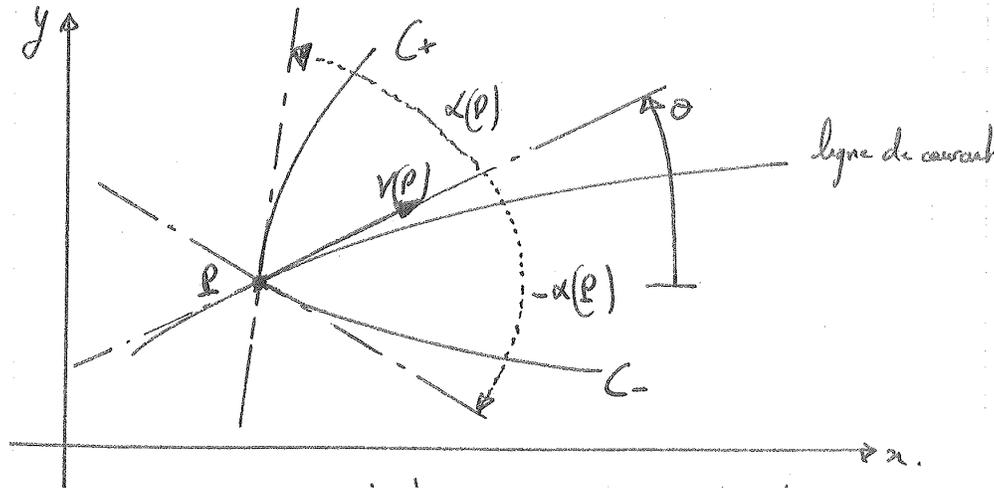


FIGURE 5.13 – Allure des courbes caractéristiques dans un domaine d'écoulement supersonique.

Remarque 5 :

1. Le lecteur vérifiera que la condition $au \neq v$ suffit à assurer que les cinq premières colonnes sont des vecteurs indépendants.
2. Pour alléger les notations, $\partial_{c_{\pm}}u$, $\partial_{c_{\pm}}v$ et $\partial_{c_{\pm}}p$ ont été notés du , dv et dp .

On utilise alors

$$a_{\pm} = \frac{uv \pm c^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - c^2}$$

d'où

$$(u^2 - c^2)a_{\pm} - uv = \pm c^2 \sqrt{M^2 - 1}$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned} -pvdu + pudv &= -\rho U \sin \theta (-U \sin \theta d\theta + \cos \theta dU) + \rho U \cos \theta (U \cos \theta d\theta + \sin \theta dU) \\ &= \rho U^2 d\theta \end{aligned}$$

On obtient alors finalement :

$$d\theta \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} dp = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C}_\pm \quad (5.32)$$

avec une pente donnée par

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mathcal{C}_\pm} = \frac{uv \pm c^2 \sqrt{M^2 - 1}}{U^2 - c^2} = \frac{M^2 \cos \theta \sin \theta \pm \sqrt{M^2 - 1}}{M^2 \cos^2 \theta - 1} \quad (5.33)$$

$$\left(= \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad \text{en repère adapté, } \theta = 0 \right)$$

On peut réécrire les relations de compatibilité sous la forme :

$$\pm \tan(\alpha) d\theta - \frac{dU}{U} - \frac{T ds - d\mathcal{H}}{U^2} = 0, \quad \text{sur } \mathcal{C}_\pm \quad (5.34)$$

$$\text{avec } \tan[\alpha(P)] = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Tableau Récapitulatif :

$$\left. \begin{array}{l} \partial_{c_0} p + \rho U \partial_{c_0} U = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C}_0 \text{ trajectoire} \\ \partial_{c_0} s = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C}_0 \text{ trajectoire} \end{array} \right\} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mathcal{C}_0} = \frac{v}{u}$$

$$\partial_{c_\pm} \theta \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} \partial_{c_\pm} p = 0$$

ou

$$\pm \tan(\alpha) \partial_{c_\pm} \theta - \frac{\partial_{c_\pm} U}{U} - \frac{T \partial_{c_\pm} s - \partial_{c_\pm} \mathcal{H}}{U^2} = 0,$$

sur les \mathcal{C}_\pm caractéristiques de pente locale a_\pm faisant un angle $\pm\alpha$ avec la direction de l'écoulement.

La connaissance de l'écoulement supersonique sur une courbe \mathcal{L} du plan (x, y) non tangente aux courbes caractéristiques permet alors de construire de proche en proche la solution dans un domaine d'hyperbolicité, voir Figure 5.14.

En un point P proche de \mathcal{L} situé dans le domaine de dépendance du segment d'arc AB (ce domaine est le triangle curviligne ABQ), les relations de compatibilité

$$d\theta \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} dp = 0$$

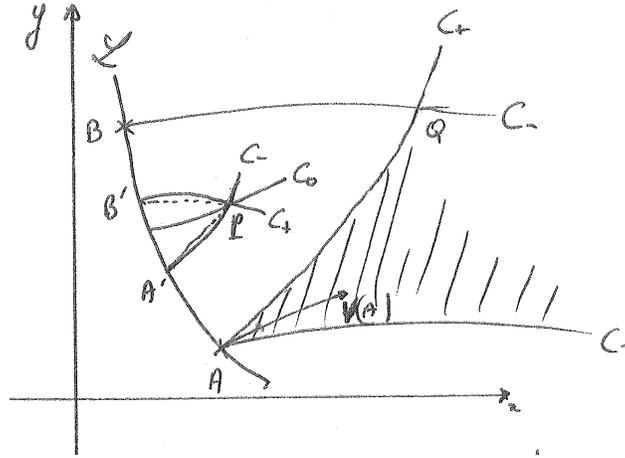


FIGURE 5.14 – Construction de la solution de proche en proche dans le domaine d'hyperbolicité du problème.

permettent de trouver $\theta(P)$ et $p(P)$ en fonction de (ρ, s, U, θ) en A' et B' . L'utilisation de la trajectoire C_0 passant par P donne ensuite $s(P)$ et $U(P)$ via (5.30). Le cône d'influence du point A a été représenté en hachuré sur la Figure 5.14.

Écoulement permanent de gaz idéal polytropique homoénergétique et homoentropique

Le fluide est ici supposé continu homoénergétique et homoentropique. Ces propriétés sont vérifiées par exemple quand il passe par une zone de l'espace (x, y) où l'écoulement est homoénergétique et homoentropique. (Le cas d'un écoulement uniforme dans une telle région fera l'objet des écoulements par onde simple et rentre dans ce cadre.) Dans ce cas, l'écoulement est potentiel et la seule détermination de ce potentiel Φ défini à une constante près, fourni le champ de vitesse $\vec{u} = \text{grad}(\Phi)$.

Propriétés générales de l'écoulement : En utilisant le caractère homoentropique et homoénergétique, on obtient sur les C_{\pm} caractéristiques

$$\pm \partial_{c_{\pm}} \theta - \sqrt{M^2 - 1} \frac{\partial c_{\pm} U}{U} = 0$$

Remarquons dès à présent que comme $s = s_0$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 = \frac{U^2}{2} + h(c, s_0)$, la vitesse du son locale est une fonction de U uniquement :

$$c = c(U), \quad \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{U} = G(U)$$

De même que dans le cas 1D stationnaire, afin d'exprimer les relations de compatibilité sous la forme d'une quantité invariante, on introduit la fonction $\chi(U)$, dite fonction de Prandtl-Meyer (qui dépend de la nature du fluide, de s_0 et de \mathcal{H}_0) qui se trouve être une primitive de la fonction $G(U)$ et vérifie donc :

$$d\chi(U) = G(U)dU = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{U}dU = \cotan \alpha \frac{dU}{U}$$

Cette fonction conduit à la définition des deux invariants de Riemann

$$J_{\pm} = \pm\theta - \chi(U) = \text{constante}, \quad \text{sur } \mathcal{C}_{\pm} \quad (5.35)$$

ce qui procure localement sur les \mathcal{C}_{\pm} caractéristiques une relation entre θ et U . On peut aussi trouver une relation entre θ et M , le nombre de Mach local ($M = U/c(U)$). En utilisant

$$\frac{dM}{M} = \frac{dU}{U} - \frac{dc}{c} = \frac{dU}{U} \left[1 - M \frac{dc}{dU} \right]$$

on introduit $f(M)$, la fonction dont la dérivée est

$$\frac{1}{M} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 - M \frac{dc}{dU}}$$

et on obtient les deux invariants :

$$R_{\pm} = \pm\theta - f(M) = \text{constante}, \quad \text{sur } \mathcal{C}_{\pm} \quad (5.36)$$

Notons bien que f et χ sont deux fonctions qui dépendent localement de s_0 et \mathcal{H}_0 .

Explication dans le cas du gaz idéal polytropique : Dans le cas du gaz idéal polytropique, $h = \frac{c^2}{\gamma-1}$ et comme $\mathcal{H}_0 = \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{U^2}{2}$, on voit que

$$\frac{dc}{dU} = \frac{(1-\gamma)M}{2}$$

d'où

$$df = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]}$$

et en choisissant $f(1) = 0$:

$$f(M) = \int_1^M \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} x^2} \frac{dx}{x}$$

On utilise alors le changement de variable $y = \sqrt{(x^2 + 1)}$ pour transformer l'intégrande en une somme de fraction rationnelle qu'on intègre. En utilisant $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$ et $\tan[\alpha(M)] = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 f(M) &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right] - \arctan \left[\sqrt{M^2 - 1} \right] \\
 &= \alpha(M) - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.37}$$

dont une représentation graphique est donnée sur la Figure 5.15. Notons que dans le cas particulier du gaz idéal polytropique, $f(M)$ ne dépend que de γ et pas de s_0 , ni de \mathcal{H}_0 .

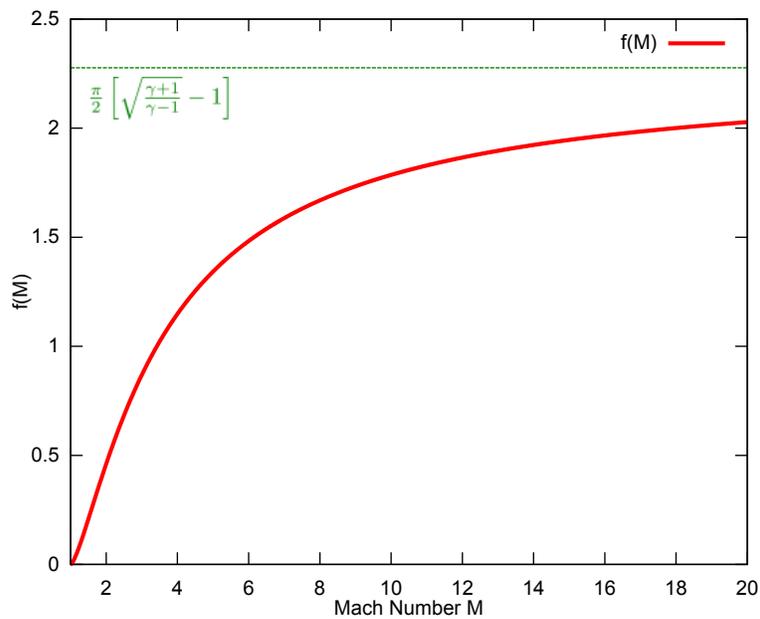


FIGURE 5.15 – Représentation graphique de la fonction de Prandtl-Meyer (5.37)

Exercice 2 :

1. Montrer que l'on peut choisir de travailler ni avec U , ni avec M , dans le cas général, mais avec la pression p et que la relation de compatibilité s'écrit alors :

$$\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial_{\mathcal{C}_{\pm}} p}{p} \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \partial_{\mathcal{C}_{\pm}} \theta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\gamma} \frac{\partial_{\mathcal{C}_{\pm}} p}{p} + \partial_{\mathcal{C}_{\pm}} \theta = 0$$

2. Montrer qu'en introduisant le nombre de pression $P(\alpha)$ (qui n'est autre qu'une intégrale de $\frac{2 \cos^2 \alpha}{\gamma - \cos 2\alpha}$), on peut résoudre le cas d'un écoulement homoentropique et homoénergétique et que l'on obtient

$$P(\alpha) \pm \theta = \text{constante}, \quad \text{sur les } \mathcal{C}_{\pm}$$

$$P(\alpha) = -\alpha - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \cotan \alpha \right] + \text{cste}$$

donnant ainsi une relation locale entre α et θ .

Remarque 8 : C'est l'approche proposée en exercice qui est adoptée par D. Thévenin dans son cours photocopié. On engage le lecteur à poursuivre le parallèle entre les diverses approches possibles tout au long de la fin de ce cours.

Écoulement de type onde simple : La définition d'une onde simple est identique à la définition dans le cas instationnaire. Il s'agit d'un écoulement mitoyen d'une zone d'écoulement uniforme, mais la différence ici est que l'on suppose que cet écoulement est supersonique. On peut démontrer trois propriétés :

Propriété 9 :

1. La courbe frontière \mathcal{L} est rectiligne et c'est une courbe caractéristique de l'écoulement uniforme.
2. Cette courbe caractéristique est une \mathcal{C}_{\pm} caractéristique, \mathcal{H} et s admettent des dérivées partielles nulles dans tout l'écoulement et \mathcal{L} ne peut pas être une \mathcal{C}_0 caractéristique.
3. Si \mathcal{L} est une \mathcal{C}_+ caractéristique de l'écoulement uniforme, l'écoulement (\vec{u}, p, s) est constant dans l'onde simple le long des \mathcal{C}_+ caractéristiques qui sont rectilignes dans le domaine supersonique de dépendance de \mathcal{L} .

Exercice 3 : Reprendre la démonstration point par point de ces propriétés.

Nous allons maintenant appliquer ces notions sur divers exemples.

5.4.4 Écoulement supersonique le long d'une paroi

La grande majorité des quantités introduites dans cette sous-section sont illustrées sur la Figure 5.16.

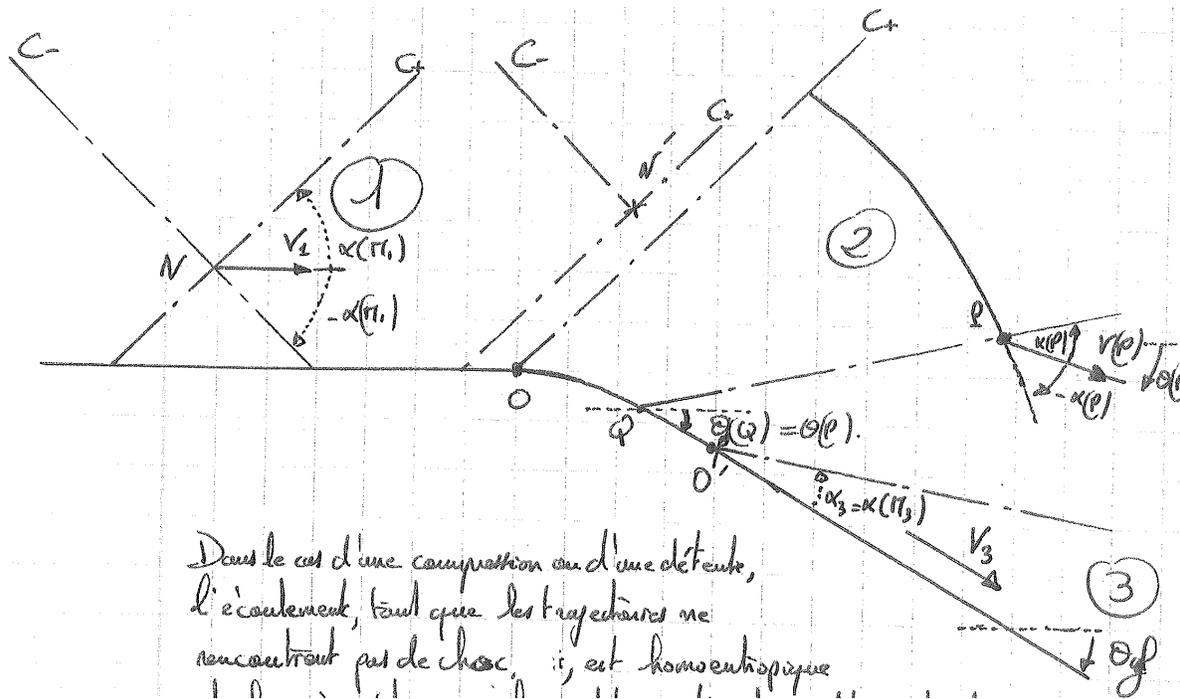


FIGURE 5.16 – Écoulement supersonique le long d'une paroi. À refaire !

Dans le cas d'une compression ou d'une détente, l'écoulement, tant que les trajectoires ne rencontrent pas de choc, est homoentropique et homoénergétique. Les conditions d'existence d'une structure d'onde simple sont donc remplies. Dans le domaine (1), voir Figure 5.16, l'écoulement est uniforme et déterminé par (u_1, M_1, p_1, s_1) connus. Les C_{\pm} caractéristiques sont alors des droites faisant un angle $\alpha_1 = \alpha(M_1) = \pm \arcsin \frac{1}{M_1}$ avec le vecteur vitesse $\vec{u} = (u_1, 0)$. La notion de domaine d'influence des points de l'écoulement amont montre que la séparation entre (1) et l'onde simple se fait forcément via une C_+ caractéristique issue de O . Il en est de même pour le domaine (3) avec $\alpha_3 = \alpha(M_3) = \pm \arcsin \frac{1}{M_3}$. On note $\theta_p(Q)$ l'angle que fait la paroi avec l'horizontale entre O et O' , $\theta_p(Q)$ variant de zéro en O à θ_f en O' . La structure d'onde simple impose que l'angle $\theta(P)$ que fait la vitesse $\vec{u}(P)$

avec l'horizontale soit égal à l'angle $\theta_p(Q)$ que fait cette paroi avec cette même horizontale. L'utilisation des invariants de Riemann conduit à :

$$\begin{cases} \theta(P) + \chi[U(P)] = \chi(U_1) \\ \theta(P) + f[M(P)] = f(M_1) \end{cases} \quad (5.38)$$

Ces deux relations permettent de déterminer entièrement l'écoulement au point P en fonction de la géométrie de la paroi au point Q . Supposons que l'évolution de la paroi soit décrite par une fonction du plan :

$$(\tau, Y(\tau)) = Q, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0.$$

La \mathcal{C}_+ passant par Q a pour pente $\tan(\theta(Q) + \alpha(Q))$, d'où son équation

$$y = Y(\tau) + \tan \left[\arctan(Y'(\tau)) + \arcsin \left(\frac{1}{M(\tau)} \right) \right] (x - \tau)$$

Si $Y'(\tau)$ est une fonction décroissante de τ alors la relation définition peut être inversée partout, c'est-à-dire que la donnée de la position du pied de la caractéristique $(\tau, Y(\tau))$ peut être calculée pour tout point (x, y) du plan. Les relations (5.38) peuvent alors être inversées, puisque les fonctions de Prandtl-Meyer χ et f sont strictement monotones, et on a alors :

$$M(P) = M(\tau) = f^{-1} [f(M_1) - \arctan Y'(\tau)] \quad (5.39)$$

$$U(P) = \chi^{-1} [\chi(U_1) - \arctan Y'(\tau)] \quad (5.40)$$

$$\theta(P) = \theta(\tau) = \arctan [Y'(\tau)] \quad (5.41)$$

Les autres variables thermodynamiques sont obtenues en se rappelant que

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 = \frac{U^2}{2} + h(p(P), s_1) \\ s_1 = s(p(P), \rho(p)) \end{cases}$$

On sait que (5.39) et (5.40) sont deux façons d'obtenir une même information, U et M étant en effet reliés puisque :

$$U(P) = U_1 \frac{M(P)}{M_1} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M^2(P)}}$$

et on a

$$\frac{p(P)}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2(P)}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Le cas d'une paroi convexe :

Le cas présenté sur la Figure 5.16 page 179 est celui où $Y''(\tau) \leq 0$ avec une déviation négative de $\theta_f \leq 0$. On montre aisément que f et χ sont des fonction croissantes et par conséquent le nombre de Mach et le module de la vitesse croissent avec τ . Par ailleurs, la relation de compatibilité le long des trajectoires (5.30) montre que l'accélération du fluide s'accompagne d'une chute de pression, d'où le nom d'onde simple de détente. On peut aussi montrer que θ et α diminuent avec τ . Les caractéristiques ne se croisent donc jamais, ce qui interdit l'apparition d'ondes de choc.

Il faut noter que la structure de la fonction de Prandtl-Meyer montre que l'on doit avoir

$$0 \leq f(M_1) - \theta(P) \leq \theta_{\lim}(\gamma) = \frac{\pi}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right\}$$

Dans le cas $Y''(\tau) \leq 0$, on doit donc avoir $-\theta_f \leq \theta_{\lim}(\gamma) - f(M_1)$. Si θ_f est supérieur à cette valeur limite, il se forme une poche de vide entre la dernière \mathcal{C}_+ caractéristique prédite (qui correspond à $c = 0$) et la paroi aval. Le modèle d'onde simple cesse alors d'être valable dans la zone de vide.

Cas Particulier de la Détente de Prandtl-Meyer : Comme nous l'avions proposé en exercice, dans le cas 1D instationnaire, nous abordons le cas où la paroi prend immédiatement la déviation θ_f en O avec une discontinuité de la pente. Dans ce cas, l'onde simple est un secteur angulaire de centre O et délimité par les demi-droites OE et OF , qui ne sont autres que les deux \mathcal{C}_+ caractéristiques qui relient l'onde simple aux écoulements uniformes aval (1) et amont (3), voir Figure 5.17.

On repère le point P par l'angle φ . Puisque le pied de la \mathcal{C}_+ passant par P est O , on a

$$\varphi = \theta(P) + \alpha(P) \quad \Rightarrow \quad \alpha(\varphi) = \arcsin \frac{1}{M(P)} = \varphi - \theta(P).$$

Par ailleurs $\theta(P) = \theta(\varphi)$ est tel que $\theta(\varphi) + f[M(\varphi)] = f(M_1)$, ou encore :

$$f[M(\varphi)] - \alpha(\varphi) = f(M_1) - \varphi$$

Dans le cas d'un gaz idéal polytropique, l'expression de f donnée en (5.37), page 177 permet d'inverser très simplement l'expression ci-dessus en :

$$M(\varphi) = \left(1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tan^2 \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \left(f(M_1) + \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.42)$$

On peut alors remonter à $\theta(\varphi)$, puis à $U(\varphi)$ et $p(\varphi)$. Finalement, on a bien sûr

$$f(M_3) = f(M_1) - \theta_f$$

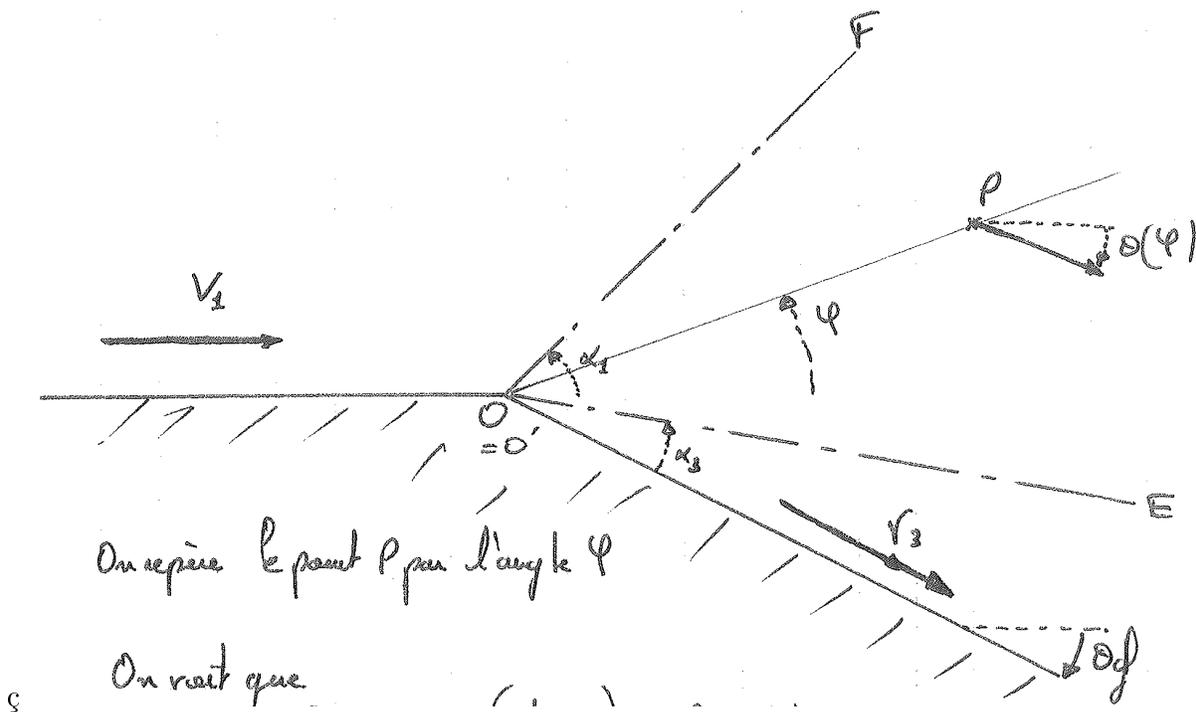


FIGURE 5.17 – Illustration de la détente de Prandtl-Meyer. À refaire !

Remarque 10 :

1. On doit toujours avoir $f(M_1) - \theta_f \leq \theta_{\text{lim}}(\gamma)$,
2. Dans le cas limite du dièdre, la solution n'est pas définie en O où les effets visqueux vont jouer un rôle,
3. On peut également résoudre ce problème en coordonnées polaires,
4. L'invariance de la géométrie de la paroi et des équations d'Euler par la transformation $x \rightarrow \lambda x$ et $y \rightarrow \lambda y$ permet de prédire la structure en "éventail" des caractéristiques ainsi que l'uniformité de l'écoulement pour $\frac{x}{y}$ fixé.

Le cas d'une paroi concave - onde de compression :

Comme dans le cas stationnaire, une paroi telle que $Y''(\tau) \geq 0$ conduit à l'intersection des caractéristiques C_+ et à la formation d'une onde de choc éventuellement courbe qui brise la structure d'onde simple.

On peut également montrer sous certaines contraintes sur la forme de la paroi que toute C_+ issue de la paroi intersecte d'abord $C_+(O)$ avant de rencontrer une autre C_+ caractéristique.

Ainsi le pied de la courbe de choc est nécessairement sur cette $\mathcal{C}_+(O)$ issue du début de la paroi courbe. Calculons ainsi le point d'intersection entre cette $\mathcal{C}_+(O)$ et une caractéristique issue de $P = (\tau, Y(\tau))$ quelconque pour $\tau \rightarrow 0$.

La \mathcal{C}_+ issue de O a pour équation :

$$y(\tau) = \tan [\alpha(0)] x(\tau)$$

tandis que celle de P :

$$y(\tau) - Y(\tau) = \tan [\arctan (Y'(\tau)) + \alpha(\tau)] (x(\tau) - \tau)$$

Dans la limite $\tau \rightarrow 0$, on a les développements suivants (voir section 5.3.3 page 162 pour plus de détail)

$$Y'(\tau) = \tau Y''(0) + \mathcal{O}(\tau^2), \quad Y(\tau) = \mathcal{O}(\tau^2) \quad \text{et} \quad \alpha(\tau) = \alpha(0) + \mathcal{O}(\tau)$$

$$y(\tau) - Y(\tau) = \frac{Y'(\tau) + \tan \left(\arcsin \frac{1}{M} \right)}{1 - Y'(\tau) \tan \left(\arcsin \frac{1}{M} \right)} (x(\tau) - \tau) = \frac{Y'(\tau) + \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}}{1 - Y'(\tau) \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}} (x(\tau) - \tau)$$

d'où

$$y(\tau) - y(\tau) Y'(\tau) \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} - Y(\tau) \left(1 - Y'(\tau) \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right) = Y'(\tau) (x(\tau) - \tau) + \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} x(\tau) - \frac{\tau}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Or à la limite $\tau \rightarrow 0$, on a les développements à l'ordre 2 suivants et en utilisant le fait que $y(\tau) = \frac{x(\tau)}{\sqrt{M^2 - 1}}$, on a à l'ordre 1 :

$$-y(\tau) \tau Y''(0) \tan \alpha = \tau Y''(0) x(\tau) - \tau \tan \alpha,$$

soit

$$x(\tau) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{Y''(0)} \quad \text{et} \quad y(\tau) = \frac{\sin^2 \alpha}{Y''(0)} \quad (5.43)$$

5.5 FEUILLE D'EXERCICES IV – COMPLÉMENTS SUR LES ONDES DE CHOC OBLIQUES

5.5.1 Réflexion d'une onde de choc oblique

On considère la réflexion d'un choc oblique permanent pour un gaz idéal polytropique de constante $\gamma = 1.4$ initialement généré par la déflexion d'un angle $\varphi_A = 16^\circ$ d'un écoulement à Mach $M_1 = 2.8$. Voir Figure 5.18.

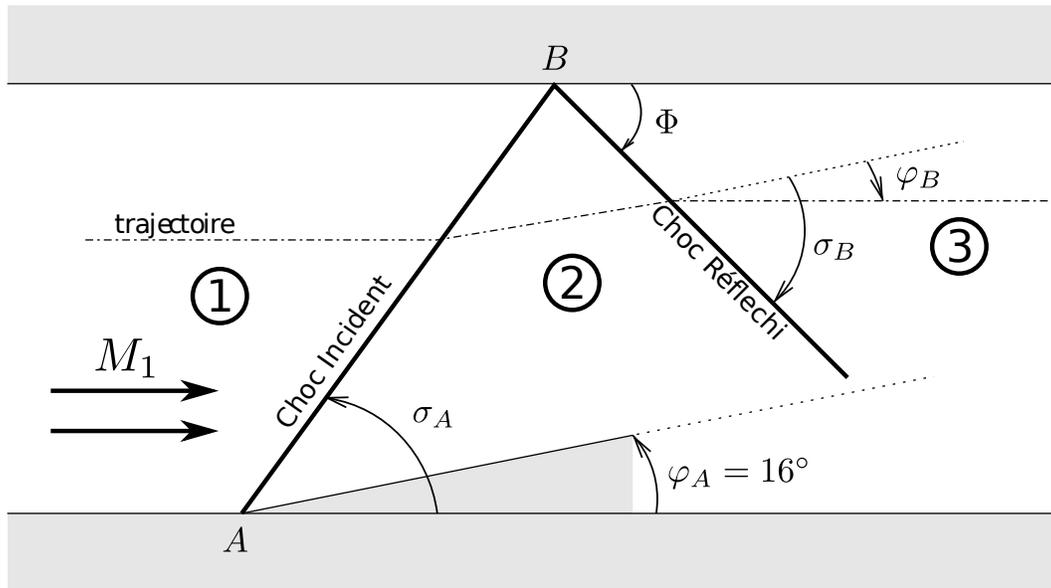


FIGURE 5.18 – Réflexion d'un choc oblique.

1. À l'aide de l'abaque de choc fournie, calculer l'angle de choc oblique : σ_A .
2. Calculer les propriétés de l'écoulement dans la zone 2, zone aval du choc incident. On calculera en particulier le nombre de Mach M_2 , les rapports de pressions et de températures.
3. On suppose que le choc initié en A atteint la paroi supérieure au point B et se réfléchit au sens où l'écoulement dans la partie aval, la zone 3, est redevenu parallèle à la paroi. Déterminer σ_B et en déduire Φ , l'angle que forme le choc réfléchi avec la paroi.
4. De la même manière que pour 2), calculer les propriétés de l'écoulement dans la zone 3.
5. Représenter graphiquement la réflexion à l'aide de la polaire de choc dans le plan $(\log(p/p_1), \varphi)$.

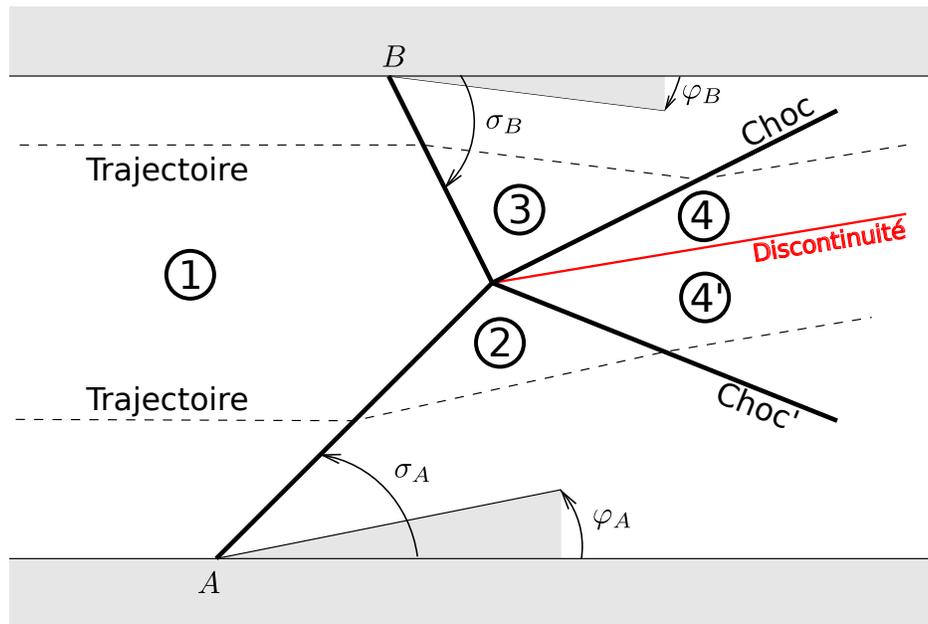


FIGURE 5.19 – Intersection de deux chocs obliques.

5.5.2 Étude qualitative de l'interaction de deux ondes de choc obliques

Sur la figure 5.19, on considère maintenant l'interaction de deux chocs obliques issus de la déflexion d'un écoulement à Mach $M_1 > 1$ d'un angle φ_2 pour la partie inférieure et d'un angle φ_3 pour la partie supérieure. On suppose que ces deux chocs collisionnent en E et que leur interaction donne naissance à deux chocs réfléchis et une discontinuité de contact de type ligne de glissement faisant un angle Φ avec l'horizontale. On a également représenté deux trajectoires issues de deux points de l'écoulement amont qui passent de chaque côté du point E . On note φ_4 la déflexion de l'écoulement de la zone 3 vers la zone 4 et φ_4' la déflexion de la zone 2 à la zone 4'. On rappelle que par définition, le long de la ligne de glissement on a continuité de l'angle de l'écoulement et continuité des pressions.

Question : En vous aidant du dernier résultat de l'exercice précédent, faire l'analyse qualitative de la situation dans un diagramme $(\log(p/p_1), \varphi)$.

5.5.3 Problème : Plaque infiniment fine dans un écoulement supersonique

On considère un écoulement plan permanent autour d'une plaque plane de longueur finie L , dans la limite d'une épaisseur infiniment faible. Cet écoulement est représenté sur la Figure 5.20. Au bord d'attaque, la plaque engendre deux écoulements classiques, une détente de Prandtl-Meyer et une onde de choc oblique, que nous avons étudiées en cours. La structure de l'écoulement engendre alors une force sur la plaque, induisant portance et

trainée ; c'est l'objet de la première sous-partie. Le but de la seconde sous-partie est le raccord des écoulements au bord de fuite. Tout au long de cette étude, on se considérera suffisamment près de la plaque pour négliger les possibles interactions entre les différentes ondes provenant des bords d'attaque et de fuite.

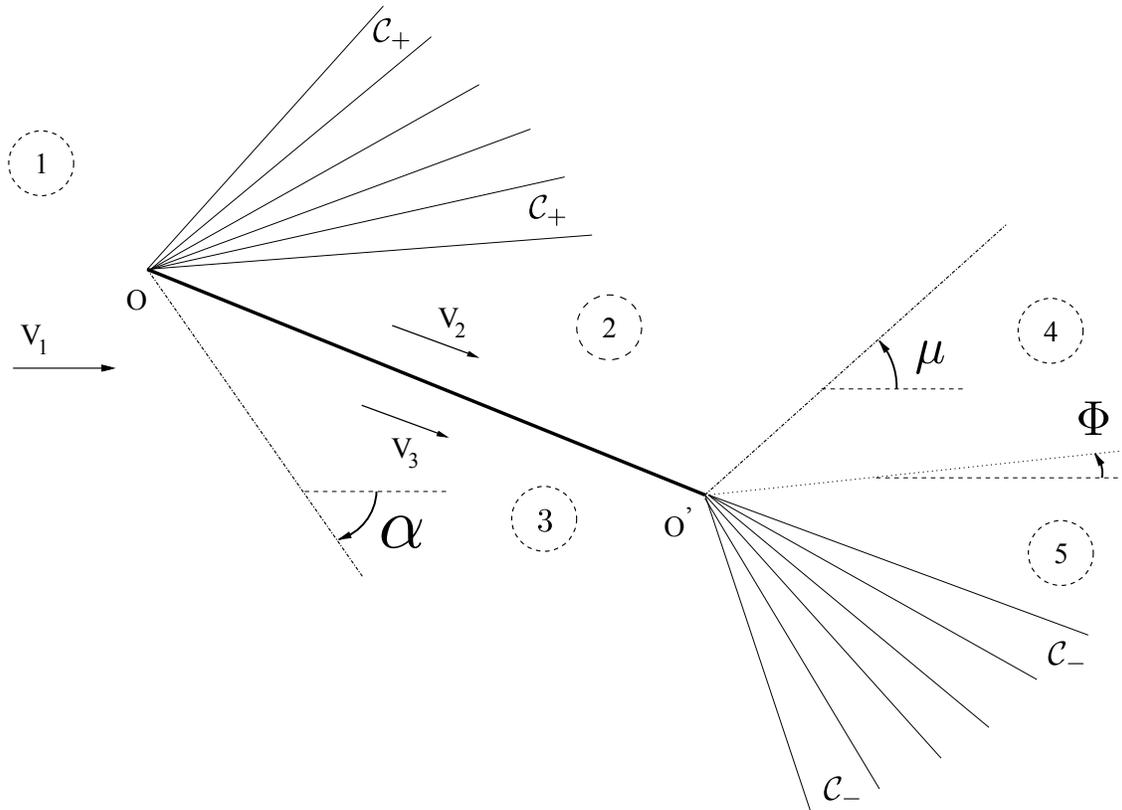


FIGURE 5.20 – Ondes de choc obliques et détente de Prandtl-Meyer sur une plaque de longueur finie et d'épaisseur nulle faisant un angle de 20 degrés avec l'écoulement amont.

Forces s'exerçant sur la plaque

A l'amont du dispositif, l'écoulement est supersonique, de nombre de Mach M_1 , de vitesse $V_1 = U_1 e_x$. Dans cette question, l'écoulement est supposé partout supersonique, et pour les applications numériques, on prendra $\gamma = 1.4$ et $M_1 = 3$. On va analyser les principales lignes caractéristiques de l'écoulement autour de la plaque.

Détente de Prandtl-Meyer

1. Rappeler brièvement comment s'effectue la résolution de la détente centrée de Prandtl-Meyer à l'aide de la fonction du même nom.

2. L'angle φ vaut 20° . En utilisant la tabulation de la fonction de Prandtl-Meyer donnée en annexe et issue du livre de Anderson, calculer le nombre de Mach aval M_2 .
3. En déduire le rapport de pression p_2/p_1 en utilisant le caractère homoentropique de l'écoulement et la pression génératrice (pression d'arrêt).
4. Evaluer les angles que font les deux C_+ caractéristiques, qui délimitent la structure d'onde simple de détente, avec la direction de l'écoulement amont.

Onde choc oblique

5. En utilisant les abaques de choc oblique (courbes correspondant à un nombre de Mach amont donné dans le diagramme $\varphi - \alpha$) donnés en annexe, évaluer l'angle de l'onde de choc oblique α correspondant à l'angle de déflexion φ .
6. Exprimer le nombre de Mach normal amont et en déduire le Mach aval M_3 ainsi que le rapport de pression p_3/p_1 .
7. Représenter qualitativement les points correspondant aux zones 2 et 3 sur un diagramme $(\varphi, \log(p/p_1))$ en traçant la polaire de choc oblique et la courbe correspondant à la détente de Prandtl-Meyer.

Trainée et portance d'onde ("wave drag and lift")

8. Donner la force de trainée \mathcal{T} et de portance \mathcal{P} par unité d'envergure de la plaque (c'est-à-dire par unité de longueur dans la direction orthogonale au plan de la Figure 5.20) issue du différentiel de pression entre p_2 et p_3 sur la plaque de longueur L .
9. Calculer les coefficients de trainée $c_{\mathcal{T}}$ et de portance $c_{\mathcal{P}}$ définis par

$$c_{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{T}}{L q_1}, \quad c_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}}{L q_1}, \quad (5.44)$$

où la pression dynamique q_1 vaut $\frac{\gamma}{2} p_1 M_1^2$.

Raccords des écoulements en O'

On fait l'hypothèse qu'en O' , la structure de l'écoulement retrouve sa symétrie, c'est à dire que Φ vaut 0 et les vitesses V_4 et V_5 sont colinéaires à e_x .

10. Expliquez pourquoi, dans la mesure où l'écoulement en centré, il est nécessaire d'avoir la présence d'une onde de choc oblique et d'une onde de détente de Prandtl-Meyer qui relie les états 2 et 3 aux états 4 et 5 respectivement.
11. Quelle doit être la structure de l'écoulement dans les zones 4 et 5 ainsi que les conditions de saut à l'interface entre ces deux zones? Quelle est la nature de cette interface?
12. Dans la mesure où l'on se donne la direction de l'écoulement aval via l'angle Φ , donnez la valeur du champ de pression dans les zones 4 et 5. Faites l'application numérique pour $\Phi = 0$. Qu'en déduisez-vous?

13. L'angle Φ est-il un degré de liberté du problème ou bien est-il déterminé par l'écoulement amont ? Dans le second cas, expliquez comment il doit être obtenu.
14. Calculer une approximation de Φ . On procédera par approximation successives en partant de $\Phi = 0$, on expliquera si l'on doit augmenter ou diminuer Φ pour converger vers la bonne solution. On calculera en particulier la solution pour laquelle la valeur absolue de Φ vaut 1 degré et on en déduira par interpolations successives une valeur raisonnablement précise de Φ . Commentez le résultat obtenu.
15. Calculer les rapports de pressions p_4/p_1 et p_5/p_1 dans les zones 4 et 5, puis donner l'angle μ que fait la seconde onde de choc oblique issue de O' avec l'écoulement amont, ainsi que les nombres de Mach dans ces zones.
16. Tracer la structure des différentes ondes obtenues dans un diagramme $(\varphi, \log(p/p_1))$ de polaire de choc et situer en particulier les zones 4 et 5 sur ce diagramme.

5.6 FEUILLE D'EXERCICES IV – CORRECTION

Rappels

Chocs obliques

Les relations de saut pour un choc oblique s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 u_{1,n} = \rho_2 u_{2,n} \\ u_{1,t} = u_{2,t} \\ p_1 + \rho_1 u_{1,n}^2 = p_2 + \rho_1 u_{2,n}^2 \\ h_1 + \frac{1}{2} u_{1,n}^2 = h_2 + \frac{1}{2} \rho_1 u_{2,n}^2 \\ s_1 \leq s_2 \end{array} \right. \quad (5.45)$$

ou $u_{i,n}$ et $u_{i,t}$ désignent respectivement les composantes de la vitesse normales et tangentielles à la discontinuité. Ces relations sont les mêmes que celles obtenues pour le choc droit en remplaçant u_i par $u_{i,n}$. On a donc dans le cas du gaz parfait

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2 + (\gamma - 1)M_{1,n}^2)(1 - \gamma + 2\gamma M_{n,1}^2)}{(\gamma + 1)^2 M_{n,1}^2} \quad (5.46)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_{2,n}}{u_{1,n}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_{n,1}^2} \quad (5.47)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_{n,1}^2}{1 + \gamma} \quad (5.48)$$

$$M_{n,2}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{n,1}^2}{1 - \gamma + 2\gamma M_{n,1}^2} \quad (5.49)$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma} \right] \quad (5.50)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{i,n} = M_i \sin(\sigma) \\ M_{i,t} = M_i \cos(\sigma) \end{array} \right. \quad (5.51)$$

Il faut rajouter à cela une relation provenant de la conservation de la vitesse tangentielle. Comme cela a été vu en cours, cela donne

$$\tan(\varphi) = \frac{1}{\tan(\sigma)} \frac{2(M_1^2 \sin^2(\sigma) - 1)}{2 - 2M_1^2 \sin^2(\sigma) + (\gamma + 1)M_1^2}$$

Polaires Il est intéressant de tracer des polaires de choc représentant le saut de pression en fonction du nombre de Mach amont et l'angle de déviation φ . Comme cela a été vu en

cours, pour $\varphi \leq \varphi_m(M_1)$ une valeur de l'angle de déviation correspond à deux angles de choc possibles, et donc à deux valeurs possibles pour le saut de pression. On obtient donc qualitativement le type de diagramme représenté en Figure 5.21.

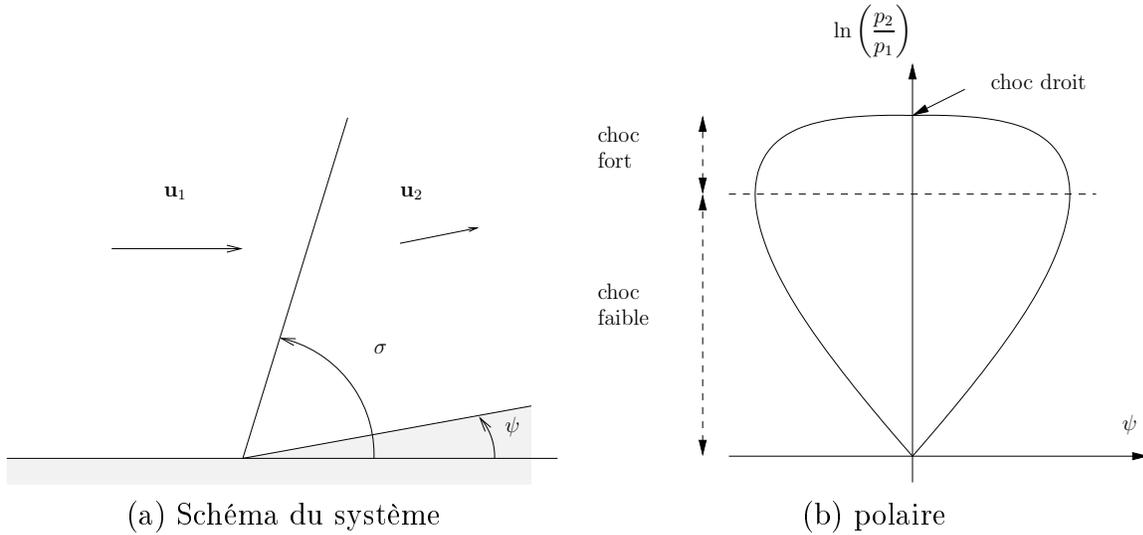


FIGURE 5.21 – Allure d'une polaire ($p - \varphi$).

Détente

Caractéristiques Dans le cas d'un écoulement 2D permanent et supersonique, le système d'équations obtenues est hyperbolique. On a ainsi 3 familles de caractéristiques :

- Les trajectoires, le long desquelles l'enthalpie totale et l'entropie se conservent. Ces trajectoires font localement un angle θ avec une direction de référence.
- Les \mathcal{C}^\pm , qui font localement un angle de $\pm\alpha(M)$ avec les trajectoires. Cet angle est donné par

$$\tan(\alpha(M)) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Le long de ces caractéristiques on a conservation de

$$R_\pm = \pm\theta - \underbrace{\left[\alpha(M) - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right) \right]}_{f(M)}$$

Onde simple De la même manière que dans le cas 1D instationnaire, on peut définir la notion d'onde simple, qui est une région mitoyenne à une région d'écoulement uniforme. On note \mathcal{L} la séparation entre l'écoulement uniforme et l'onde simple. On a alors

pour les gaz parfaits polytropiques en écoulement homoénergétique et homoentropique

- \mathcal{L} est une \mathcal{C}^\pm
- L'enthalpie totale et l'entropie sont constantes
- Si \mathcal{L} est une \mathcal{C}^+ (resp. \mathcal{C}^-) alors l'écoulement est constant le long des \mathcal{C}^+ (resp. \mathcal{C}^-) et les \mathcal{C}^+ (resp. \mathcal{C}^-) sont des droites.

Détente On considère la situation représentée en Figure 5.22. On s'intéresse à l'écoulement au point P .

- On sait que l'écoulement est uniforme le long de la \mathcal{C}^+ . En particulier, cela nous indique que l'angle que fait le vitesse $\mathbf{u}(P)$ avec l'horizontale est donné par l'angle que fait la frontière au pied de la caractéristique. Cela nous donne la valeur de θ
- On sait que R_- se conserve le long de la \mathcal{C}^- passant par P , qui provient de l'écoulement amont. On a donc

$$-\theta - f(M(P)) = -f(M_1)$$

On remarque que l'on doit avoir

$$f(M_1) - \theta_f = f(M(P)) \leq \max_M F(M) = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

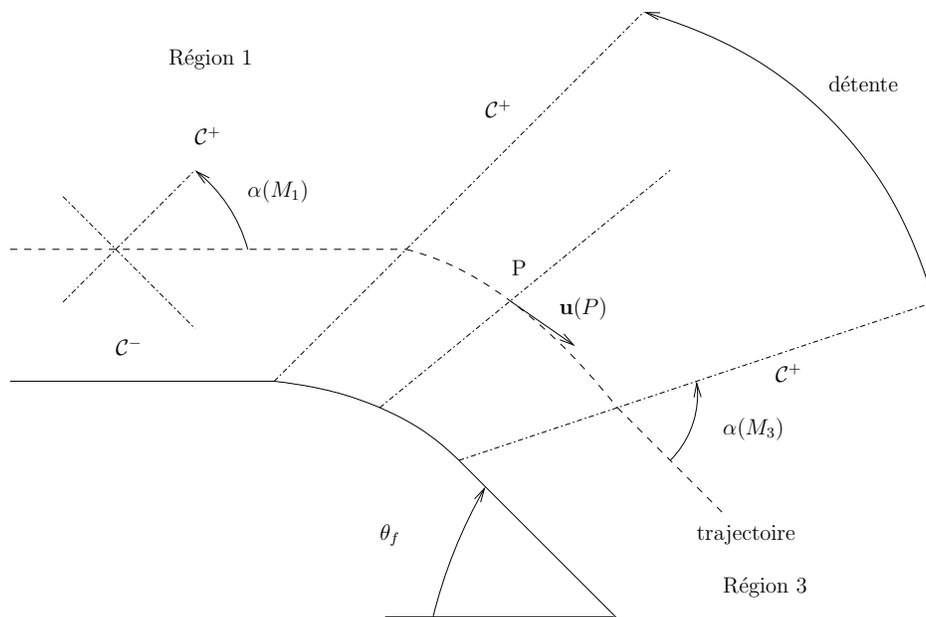


FIGURE 5.22 – Caractéristiques pour une détente.

5.6.1 Réflexion d'un choc oblique

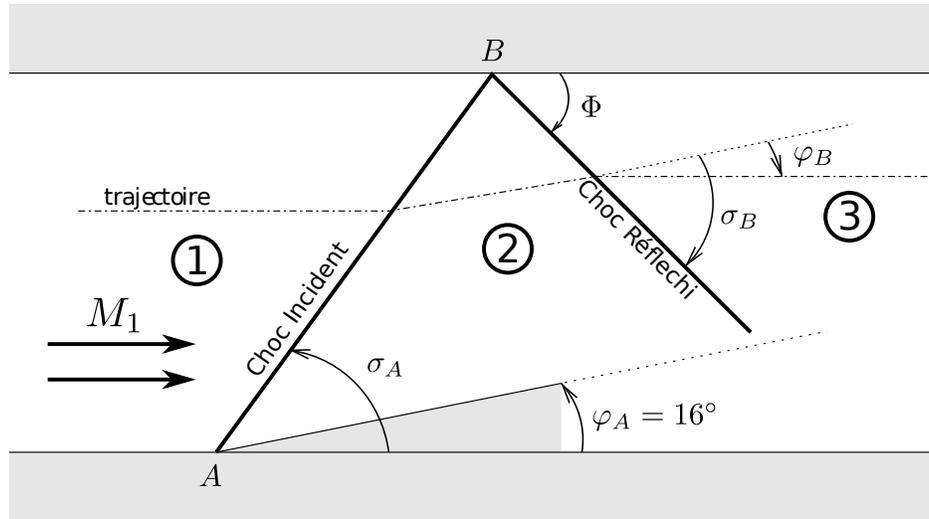


FIGURE 5.23 – Réflexion d'un choc oblique.

Formation du premier choc On se place au voisinage du point A. Pour $M_1 = 2.8$ et $\varphi_A = 16^\circ$ on obtient $\sigma_A = 35^\circ$ pour un choc faible. On obtient ainsi le nombre de Mach normal

$$M_{n,1} = M_1 \sin(\sigma_A) = 1.6$$

Les tables de choc droit ou les formules ci-dessus donnent donc

$$\frac{p_2}{p_1} = 2.82 \qquad \frac{T_2}{T_1} = 1.4 \qquad M_{n,2} = 0.67$$

On en déduit finalement le nombre de Mach en aval

$$M_2 = \frac{M_{2,n}}{\sin(\sigma_A - \varphi_A)} \approx 2.05$$

Réflexion du choc En amont du choc réfléchi, le vitesse du fluide fait en angle $\varphi_A = 16^\circ$ avec l'horizontale. En aval la vitesse est horizontale. On a donc une déflexion de $\varphi_B = \varphi_A$. Etant donné le nombre de Mach calculé précédemment, on obtient

$$\sigma_B = 45.4^\circ$$

pour un choc faible. Le choc réfléchi fait donc un angle $\Phi = \sigma_B - \varphi_B \approx 30^\circ$ avec l'horizontale. De même que précédemment, on a

$$M_{n,2}^B = M_2 \sin(\sigma_B) = 1.46$$

ce qui donne

$$\frac{p_3}{p_2} = 2.32 \qquad \frac{T_3}{T_2} = 1.3 \qquad M_{n,2} = 0.72$$

soit finalement

$$M_3 = \frac{M_{3,n}}{\sin(\sigma_B - \varphi_B)} \approx 1.45$$

Représentation au moyen des polaires de choc On peut utiliser les diagrammes $(p-\varphi)$ introduits précédemment pour représenter la réflexion d'un choc. Pour cela, on trace tout d'abord la polaire associée au nombre de Mach amont M_1 , comme indiqué en Figure 5.24. On trace ensuite la polaire associée au nombre de Mach M_2 en prenant comme origine le point $(\varphi_A, \ln(p_2/p_1))$. La pression en aval du second choc est ainsi visualisée par l'intersection de l'axe des ordonnées avec cette seconde polaire.

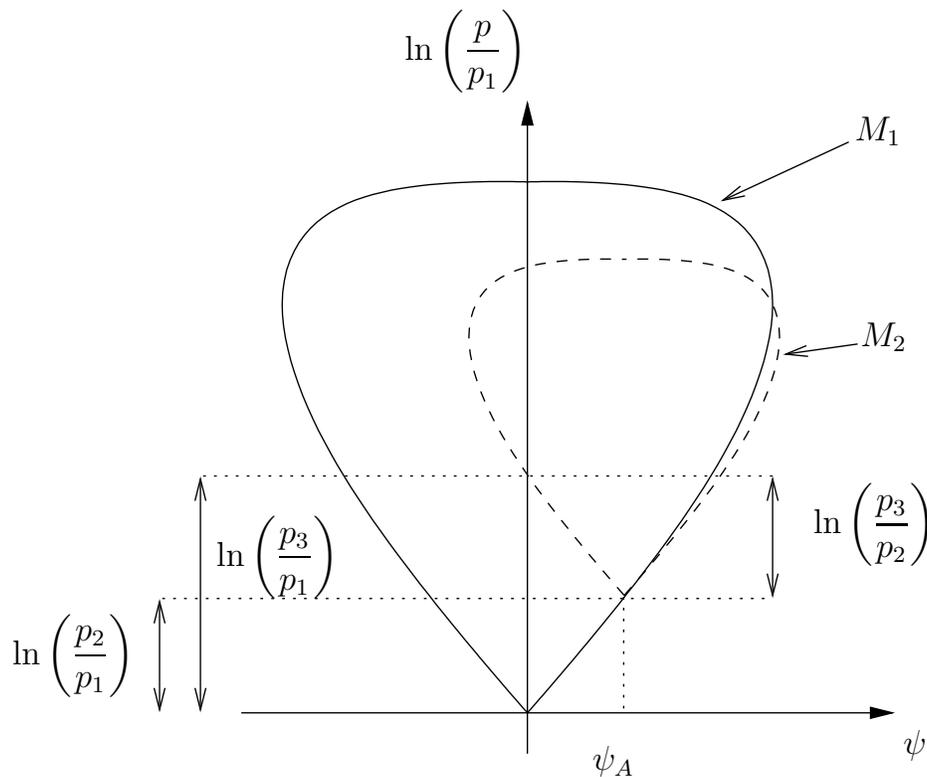


FIGURE 5.24 – Polaires de choc pour la réflexion d'un choc oblique.

5.6.2 Intersection de deux chocs obliques – résolution graphique

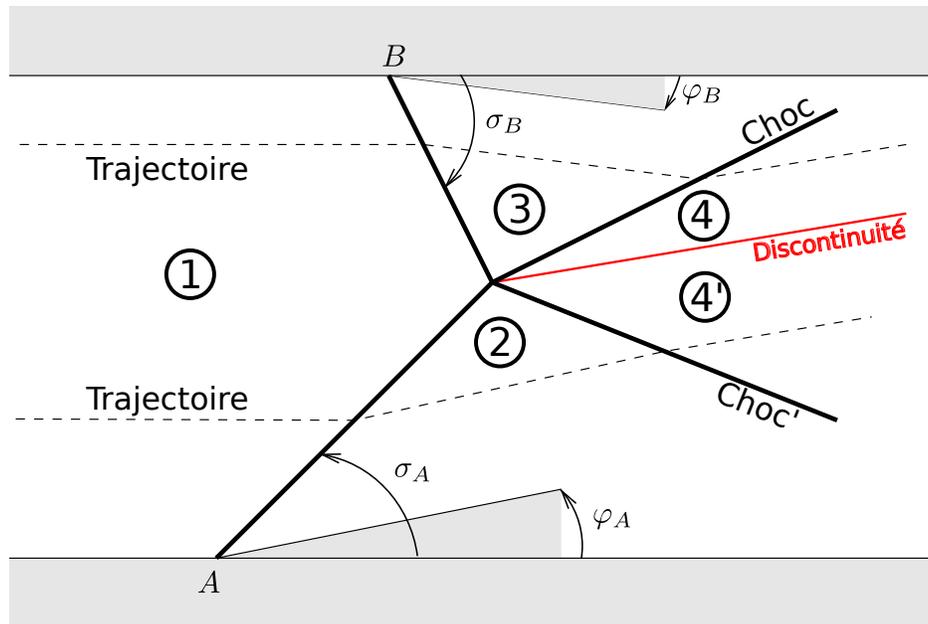


FIGURE 5.25 – Intersection de deux chocs obliques.

On cherche ici à utiliser les polaires introduites précédemment pour étudier l'intersection de deux chocs.

- On commence ainsi par tracer la polaire associée à M_1 .
- Étant donné les angles de déflexion φ_2 et φ_3 , on peut procéder comme précédemment pour calculer les angles σ_2 et σ_3 ainsi que les nombres de Mach M_2 et M_3 .
- On représente alors les polaires \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 associées à M_2 et M_3 en prenant respectivement comme origine $(\varphi_2, \ln(p_2/p_1))$ et $(\varphi_3, \ln(p_3/p_1))$.
- De part et d'autre de la ligne de glissement, la pression doit être égale et les vitesses doivent être parallèles. Ceci montre que les deux polaires \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 doivent se croiser. On considère l'intersection correspondant à un choc faible : cette intersection donne l'angle que la vitesse fait avec l'horizontale (φ) et la pression en 4 et 4'.

La démarche est représentée en Figure 5.26.

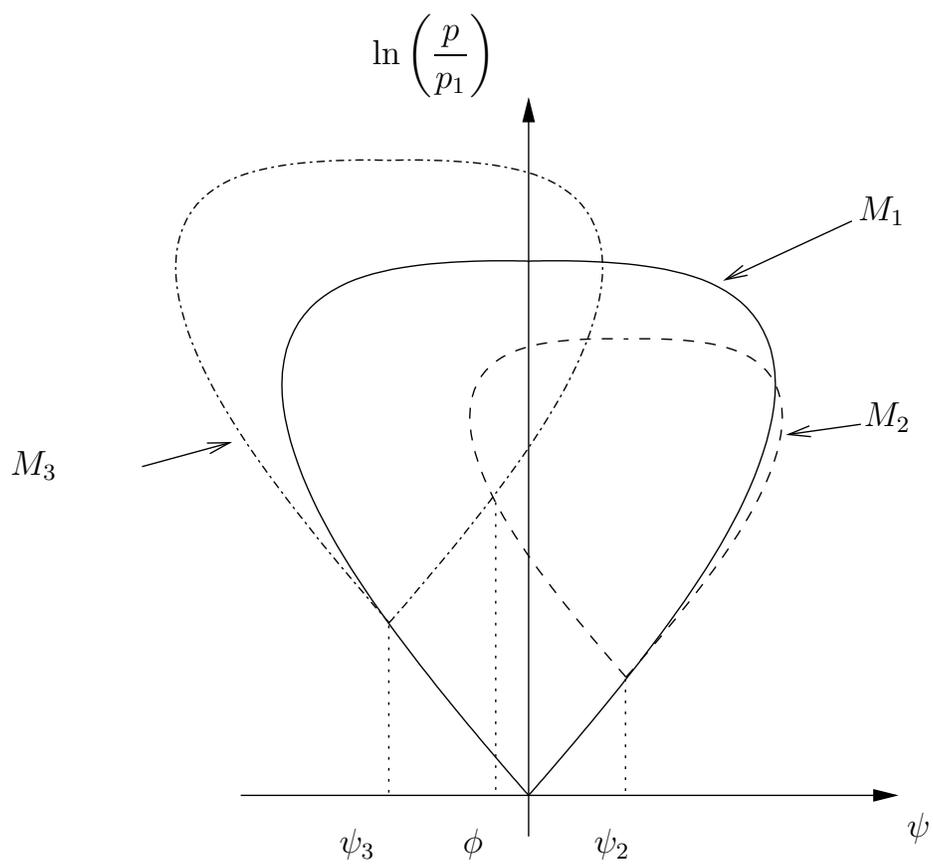


FIGURE 5.26 – Polaires de choc pour l'intersection de deux chocs obliques.

Formulaire

Équations d'Euler :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{U}) \right) = 0, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{u} \\ \rho E \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mathcal{F}} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2), \text{ avec } \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i \vec{u} + p \delta_i \\ (\rho E + p) u_i \end{pmatrix}$$

Équation d'état des Gaz Parfaits : $p = \rho r T$. **Gaz idéaux polytropiques :** $p = (\gamma - 1) \rho e$

Vitesse du son : $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T}$ **Nombre de Mach :** $M = u/c$.

Variables soniques : $c_*^2 = \frac{2}{\gamma + 1} c^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u^2$; $M^2 = \frac{2M_*^2}{\gamma + 1 - (\gamma - 1)M_*^2}$; $M_*^2 = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}$

Relation de Prandtl : $(M_*)_1 = \frac{1}{(M_*)_2}$;

Grandeurs d'arrêt : $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$; $\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma$

Relation de saut dans un choc droit :

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}}; \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1); \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}; \quad s_2 - s_1 = C_V \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma; \quad s_2 > s_1$$

Équation de Hugoniot : $\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0$

Écoulement 1D instationnaires. Invariants de Riemann : $J_0 = s$, $J_\pm = v \pm \frac{2c}{\gamma - 1}$

1-Détente : $v_1 > v_G$, $p_1 < p_G$, $v_1 = v_G - \frac{2c_G}{\gamma_G - 1} \left(\left(\frac{p_1}{p_G} \right)^{\frac{\gamma_G - 1}{2\gamma_G}} - 1 \right)$

1-Choc : $v_1 < v_G$, $p_1 > p_G$, $v_1 = v_G - \frac{\sqrt{2}c_G}{\sqrt{\gamma p_G}} \frac{p_1 - p_G}{\sqrt{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_G}}$

3-Détente : $v_1 < v_D$, $p_1 < p_D$, $v_1 = v_D + \frac{2c_D}{\gamma_D - 1} \left(\left(\frac{p_1}{p_D} \right)^{\frac{\gamma_D - 1}{2\gamma_D}} - 1 \right)$

3-Choc : $v_1 > v_D$, $p_1 > p_D$, $v_1 = v_D + \frac{\sqrt{2}c_D}{\sqrt{\gamma p_D}} \frac{p_1 - p_D}{\sqrt{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_D}}$

2-Onde : $v_1 = v_2$, $p_1 = p_2$

Écoulement 2D permanents :

Chocs Obliques :

$$\frac{1}{\tan \varphi} = \tan \sigma \left[\frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1} - 1 \right]; \quad M_2^2 \sin^2(\sigma - \varphi) = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma + 1 - \gamma}$$

Ondes de Mach : $\frac{p_2 - p_1}{p_1} \approx \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \varphi$; $\frac{v_2 - v_1}{v_1} \approx -\tan \alpha \varphi = \frac{-\varphi}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$

Angle de Mach : $\alpha(M) = \arcsin(1/M)$; **Pente des \mathcal{C}_\pm caractéristiques :** $\theta \pm \alpha(M)$.

Tableau Récapitulatif :

$$\left. \begin{array}{l} \partial_{c_0} p + \rho U \partial_{c_0} U = 0 \quad \text{sur } \mathcal{C}_0 \text{ trajectoire} \\ \partial_{c_0} s = 0 \quad \quad \quad \text{sur } \mathcal{C}_0 \text{ trajectoire} \end{array} \right\} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{c_0} = \frac{v}{u}$$

$$\partial_{c_\pm} \theta \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} \partial_{c_\pm} p = 0$$

ou

$$\pm \tan(\alpha) \partial_{c_\pm} \theta - \frac{\partial_{c_\pm} U}{U} - \frac{T \partial_{c_\pm} s - \partial_{c_\pm} \mathcal{H}}{U^2} = 0,$$

sur les \mathcal{C}_\pm caractéristiques de pente locale a_\pm faisant un angle $\pm\alpha$ avec la direction de l'écoulement.

Écoulement homoentropique et homoénergétique :

$$J_\pm = \pm\theta - \chi(U) = \text{constante}, \Leftrightarrow R_\pm = \pm\theta - f(M) = \text{constante}, \quad \text{sur } \mathcal{C}_\pm$$

Fonction de Prandtl-Meyer :

$$\begin{aligned} f(M) &= \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} (M^2 - 1) \right] - \arctan \left[\sqrt{M^2 - 1} \right] \\ &= \alpha(M) - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} (M^2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

M	$\nu(M)$										
1.00	0.0000	1.40	8.9870	1.80	20.7251	2.40	36.7465	3.20	53.4703	4.00	65.7848
1.01	0.0447	1.41	9.2756	1.81	21.0139	2.42	37.2289	3.22	53.8261	4.05	66.4393
1.02	0.1257	1.42	9.5650	1.82	21.3021	2.44	37.7077	3.24	54.1791	4.10	67.0820
1.03	0.2294	1.43	9.8553	1.83	21.5898	2.46	38.1831	3.26	54.5294	4.15	67.7132
1.04	0.3510	1.44	10.1464	1.84	21.8768	2.48	38.6551	3.28	54.8770	4.20	68.3332
1.05	0.4874	1.45	10.4381	1.85	22.1633	2.50	39.1236	3.30	55.2220	4.25	68.9423
1.06	0.6367	1.46	10.7305	1.86	22.4492	2.52	39.5886	3.32	55.5643	4.30	69.5406
1.07	0.7973	1.47	11.0235	1.87	22.7344	2.54	40.0503	3.34	55.9040	4.35	70.1285
1.08	0.9680	1.48	11.3169	1.88	23.0190	2.56	40.5085	3.36	56.2411	4.40	70.7062
1.09	1.1479	1.49	11.6109	1.89	23.3029	2.58	40.9633	3.38	56.5756	4.45	71.2738
1.10	1.3362	1.50	11.9052	1.90	23.5861	2.60	41.4147	3.40	56.9075	4.50	71.8317
1.11	1.5321	1.51	12.1999	1.91	23.8687	2.62	41.8628	3.42	57.2369	4.55	72.3801
1.12	1.7350	1.52	12.4949	1.92	24.1506	2.64	42.3074	3.44	57.5639	4.60	72.9192
1.13	1.9445	1.53	12.7901	1.93	24.4318	2.66	42.7488	3.46	57.8883	4.65	73.4491
1.14	2.1600	1.54	13.0856	1.94	24.7123	2.68	43.1868	3.48	58.2102	4.70	73.9701
1.15	2.3810	1.55	13.3812	1.95	24.9920	2.70	43.6215	3.50	58.5298	4.75	74.4824
1.16	2.6073	1.56	13.6770	1.96	25.2711	2.72	44.0529	3.52	58.8469	4.80	74.9863
1.17	2.8385	1.57	13.9728	1.97	25.5494	2.74	44.4810	3.54	59.1616	4.85	75.4818
1.18	3.0743	1.58	14.2686	1.98	25.8269	2.76	44.9059	3.56	59.4739	4.90	75.9691
1.19	3.3142	1.59	14.5645	1.99	26.1037	2.78	45.3275	3.58	59.7838	4.95	76.4486
1.20	3.5582	1.60	14.8604	2.00	26.3798	2.80	45.7459	3.60	60.0915	5.00	76.9202
1.21	3.8060	1.61	15.1561	2.02	26.9295	2.82	46.1611	3.62	60.3968	5.05	77.3843
1.22	4.0572	1.62	15.4518	2.04	27.4762	2.84	46.5731	3.64	60.6998	5.10	77.8409
1.23	4.3117	1.63	15.7473	2.06	28.0197	2.86	46.9820	3.66	61.0005	5.15	78.2902
1.24	4.5694	1.64	16.0427	2.08	28.5600	2.88	47.3877	3.68	61.2990	5.20	78.7324
1.25	4.8299	1.65	16.3379	2.10	29.0971	2.90	47.7903	3.70	61.5953	5.25	79.1677
1.26	5.0931	1.66	16.6328	2.12	29.6308	2.92	48.1898	3.72	61.8893	5.30	79.5962
1.27	5.3590	1.67	16.9276	2.14	30.1613	2.94	48.5863	3.74	62.1812	5.35	80.0180
1.28	5.6272	1.68	17.2220	2.16	30.6884	2.96	48.9796	3.76	62.4709	5.40	80.4332
1.29	5.8977	1.69	17.5161	2.18	31.2121	2.98	49.3700	3.78	62.7584	5.45	80.8421
1.30	6.1703	1.70	17.8099	2.20	31.7325	3.00	49.7573	3.80	63.0438	5.50	81.2448
1.31	6.4449	1.71	18.1034	2.22	32.2494	3.02	50.1417	3.82	63.3271	5.55	81.6413
1.32	6.7213	1.72	18.3964	2.24	32.7629	3.04	50.5231	3.84	63.6083	5.60	82.0319
1.33	6.9995	1.73	18.6891	2.26	33.2730	3.06	50.9016	3.86	63.8874	5.65	82.4166
1.34	7.2794	1.74	18.9814	2.28	33.7796	3.08	51.2771	3.88	64.1645	5.70	82.7956
1.35	7.5607	1.75	19.2732	2.30	34.2828	3.10	51.6497	3.90	64.4395	5.75	83.1689
1.36	7.8435	1.76	19.5646	2.32	34.7825	3.12	52.0195	3.92	64.7125	5.80	83.5368
1.37	8.1276	1.77	19.8554	2.34	35.2787	3.14	52.3864	3.94	64.9836	5.85	83.8993
1.38	8.4130	1.78	20.1458	2.36	35.7715	3.16	52.7505	3.96	65.2526	5.90	84.2565
1.39	8.6995	1.79	20.4357	2.38	36.2607	3.18	53.1118	3.98	65.5197	5.95	84.6085

TABLE 5.1 – Tabulation de la fonction de Prandtl-Meyer, notée ici $\nu(M)$. Le résultat est donné en degré et non en radian.

Bibliographie

- [1] Burgers. *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. Adv. in Applied Mechanics, 1 :171–199, 1948.
- [2] Sébastien Candel. *Mécanique des Fluides - Cours. Sciences Sup. Dunod, 2ème edition, 2001.*
- [3] Sydney Chapman and T. G. Cowling. *The mathematical theory of nonuniform gases. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases, In co-operation with D. Burnett, With a foreword by Carlo Cercignani.*
- [4] P. Cinella. *Roe-type schemes for dense gas flow computations*. Computers and Fluids, 35 :1264–1281, 2006.
- [5] P. Cinella and E.A. Luke. *Numerical simulations of mixtures of fluids using upwind algorithms*. Computers and Fluids, 36 :1547–1566, 2007.
- [6] Grossman B. Cinnella P. *Computational methods for chemically reacting flows*. Handbook of fluid dynamics and fluid machineries, pages 1541–1590, 1996.
- [7] Constantine M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics, volume 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [8] S. R. de Groot and P. Mazur. *Nonequilibrium thermodynamics*. Dover Publications Inc., New York, 1984. Reprint of the 1962 original.
- [9] S.K. Godunov. *A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics*. Math. Sbornik, 47(3) :271–306, 1959. <http://mi.mathnet.ru/msb4873>.
- [10] P. Gray and S. K. Scott. *Chemical oscillations and instabilities*. Oxford University Press, 1994.
- [11] H. Guillard and R. Abgrall. *Modélisation numérique des fluides compressibles. Series in Applied Mathematics. Gauthier-Villars, 2001. Series Editor P.G. Ciarlet et P.L. Lions.*
- [12] A. Kolmogorov, I. Petrovskii, and N. Piskounov. *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème de biologie*. Moscow Univ. Bull. Math., 1 :1–25, 1937.

- [13] Randall J. LeVeque. Numerical methods for conservation laws. *Lectures in Mathematics ETH Zürich*. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 1992.
- [14] Randall J. LeVeque. Finite volume methods for hyperbolic problems. *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [15] Marc Massot and Stéphane Descombes. Approximation de problèmes d'évolution : Modélisation, analyse numérique et mise en œuvre, 2003-2004. *Cours de DEA Analyse Numérique, Équations aux Dérivées Partielles et Calcul Scientifique*, Ecole Normale Supérieure de Lyon.
- [16] Ralph Menikoff and Bradley J. Plohr. The Riemann problem for fluid flow of real materials. *Rev. Modern Phys.*, 61(1) :75–130, 1989.
- [17] Lafitte Pauline. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, 2013. *Cours de l'École Centrale de Paris*.
- [18] P.A. Raviart and Thomas. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. *Dunod*, 2004.
- [19] P. Cinella R.W. Walters and D.C. Slack. Characteristic-based algorithms for flows in thermochemical nonequilibrium. *AIAA Journal*, 30(5) :1304–1313, 1992.
- [20] Denis Serre. Systèmes de lois de conservation. I. *Foundations*. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. *Hyperbolicité, entropies, ondes de choc*. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].
- [21] Joel Smoller. Shock waves and reaction-diffusion equations, volume 258 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, New York, second edition, 1994.
- [22] J.D. Van Der Waals. On the Continuity of the Gaseous and Liquid States. *PhD thesis, Universiteit Leiden, The Netherlands*, 1873.
- [23] R.F. Probstein W.D. Hayes. Hypersonic Inviscid Flow. *Lavoisier*, 2004. 2nd edition.
- [24] L.C. Woods. The Thermodynamics of Fluid Systems. *Oxford Engineering Science*. Clarendon Press, Oxford, 1985.