

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

Contrôle de connaissance

Marc MASSOT

Durée 3 heures (*Les notes de cours et les documents distribués en cours sont autorisés ainsi que l'usage de calculatrices*).

Le contrôle de connaissance se compose de deux problèmes dont certaines parties sont des exercices de cours, qui peuvent être traitées de manière indépendante. Dans les deux problèmes, on considère des écoulements de gaz parfaits idéaux polytropiques (pas de phénomènes de dissipation, loi d'état de gaz idéal, $p = \rho r T$, $r = R/\mathcal{M}$ où \mathcal{M} est la masse molaire du gaz; c_p ainsi que γ sont des constantes données). Le contrôle de connaissance est volontairement long et il n'est pas forcément nécessaire de résoudre l'intégralité du contrôle pour obtenir une très bonne évaluation. Cette évaluation reposera aussi sur la clarté de la solution et des arguments proposés.

1 Problème I : Evaluation du Mach amont par Tube de Pitot

On considère un écoulement plan permanent autour d'un dièdre symétrique d'angle de déflexion $\varphi = 15$ degrés, représenté sur la Figure 1. Au bord d'attaque, on trouve un choc oblique d'angle σ par rapport à l'écoulement amont de nombre de Mach M_1 , de vitesse $V_1 = U_1 e_x$. La zone en amont du choc oblique est notée 1 et les grandeurs qui s'y réfèrent possèdent un indice 1.

La pression mesurée par le tube de Pitot est de 2.596 atm. Un capteur positionné au point A, dans la zone 3, derrière l'onde détente, détecte une pression de 0.1 atm. Le but du problème est la détermination du nombre de Mach amont M_1 .

1.1 Onde de choc oblique

(a) Rappeler la structure d'une onde de choc oblique ainsi que la relation qui relie l'angle de déflexion φ , l'angle du choc et la donnée de l'écoulement amont. Combien de solutions de cette relation sont envisageables, l'angle de déflexion φ étant donné? Qu'observe-t-on physiquement?

(b) Donner, vu l'angle de déflexion proposé, la gamme de nombre de Mach amont permettant l'existence d'un choc oblique. Préciser comment obtenir dans ce cas la valeur de σ , le nombre de Mach amont étant donné.

(c) Dans le cas du dièdre étudié dans ce problème, du fait de la présence d'un second changement de direction en O' , préciser le domaine spatial dans lequel la solution de type onde de choc oblique est valable.

(d) Pour un nombre de Mach amont fixé, donner l'expression de M_2 en fonction de M_1 , et des angles de l'onde de choc oblique σ et de déflexion φ .

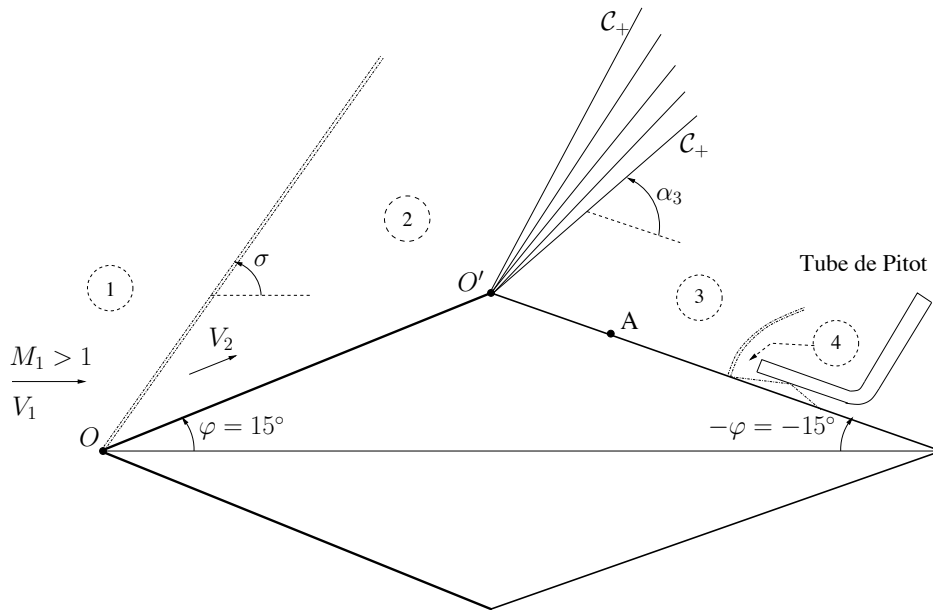


FIGURE 1 – Schéma de principe de la mesure de vitesse amont par utilisation d'un Tube de Pitot.

1.2 Onde de détente de Prandtl-Meyer

(a) Rappeler brièvement comment s'effectue la résolution de la détente centrée de Prandtl-Meyer à l'aide de la fonction du même nom.

(b) Présenter précisément la structure de la détente centrée de Prandtl-Meyer et donner l'étendue spatiale de validité de l'onde centrée dans le cas du dièdre considéré.

(c) Si l'on suppose connu le nombre de Mach M_3 , comment trouve-t-on α_3 , angle de Mach de la dernière C_+ caractéristique qui délimite l'éventail de détente centrée ?

(d) Par conservation de l'invariant de Riemann, quel est l'angle de Mach α_2 , angle de Mach de la première C_+ caractéristique qui délimite l'éventail de détente centrée en amont.

1.3 Onde de choc devant le Tube de Pitot

L'écoulement dans la zone 3 doit être supersonique, et par conséquent il se forme une onde de choc normale devant le tube de Pitot. L'écoulement juste derrière l'onde de choc est noté avec l'indice 4 comme indiqué sur la Figure 1. Le tube de Pitot permet la mesure de la pression d'arrêt ou pression génératrice $p_{04} = 2.596 \text{ atm}$.

(a) Justifier pourquoi l'écoulement dans la zone 3 doit être supersonique dans la configuration choisie (indépendamment de la présence du Tube de Pitot).

(b) En utilisant les tables de choc normal, et connaissant la pression p_3 au point A ainsi que la pression d'arrêt ci-dessus, donner la valeur du nombre de Mach M_3 (interpoler au besoin pour être précis).

(c) Expliciter les relations de saut impliquées pour tabuler p_{04}/p_3 en fonction de M_3 dans les tables de choc normal que vous venez d'utiliser. On donnera une formule finale.

1.4 Résolution du problème de départ

(a) Calculer les valeurs successives de α_3 , α_2 et finalement M_2 en utilisant les questions précédentes. On dispose d'une tabulation en degrés de la fonction de Prandtl-Meyer à la fin de ce document.

(b) En déduite l'équation qui lie M_1 , M_2 et l'angle de l'onde de choc oblique σ en utilisant les valeurs numériques évaluées.

(c) Démontrer que cela définit une solution unique pour le nombre de Mach amont.

(d) Résoudre l'équation implicite en M_1 en faisant des itérations successives à partir de $M_1 = 4$, et expliquer comment vous faites varier M_1 et pourquoi.

(e) Que conclure sur l'existence d'un choc oblique attaché en O ?

2 Problème II : Piston en mouvement dans un tube

Ce problème est très proche des questions traitées en cours. On s'intéresse à un tube infini à symétrie de révolution autour de son axe ($x'Ox$) de section constante, dans l'approximation d'un écoulement instationnaire monodimensionnel. On considère un état initial, à l'instant $t=0$, constitué de deux gaz au repos de chaque côté d'un piston auquel on va imposer un mouvement à partir de l'instant initial $t = 0$ (Voir Figure 2). Ces gaz sont des fluides parfaits idéaux polytropiques notés "état 4" en ce qui concerne l'état à gauche du piston (de température T_4 , de vitesse $u_4 = 0$ de masse molaire \mathcal{M}_4 et de coefficient γ_4) et "état 1" à droite du piston (de température $T_1 = T_4$, de vitesse $u_1 = 0$, de masse molaire \mathcal{M}_1 et de coefficient γ_1). Le mouvement imposé au piston est décrit par sa position $X(t)$ et le piston se trouve en $x = 0$ à l'instant $t = 0$ (on fait l'hypothèse simplificatrice que le piston est un piston d'épaisseur infiniment fine). L'expérimentateur applique à l'instant $t > 0$ une force sur le piston de manière à lui imposer la trajectoire $X(t) = at^n$, avec $a < 0$ et n un entier supérieur ou égal à un ($n \geq 1$).

2.1 Cas des deux gaz dans un tube infini avec accélération progressive

(1) Exprimer dans chaque gaz au repos les célérités du son c_{40} et c_{10} en fonction des grandeurs de l'énoncé.

On considère dans un premier temps le cas où $n = 2$.

(2) Effectuer, comme dans le cours, la résolution des propriétés de l'écoulement pour les deux gaz, pour tout temps $t < T^*$, pour lequel l'écoulement reste homoentropique dans chaque gaz. Proposer une synthèse des principes de base permettant de trouver l'état des deux gaz. Sur quelles grandeurs effectue-t-on la résolution ? Jusqu'à quel temps ce type de résolution basé sur le caractère homoentropique des deux écoulements est-il valable ? Que se passe-t-il ensuite ?

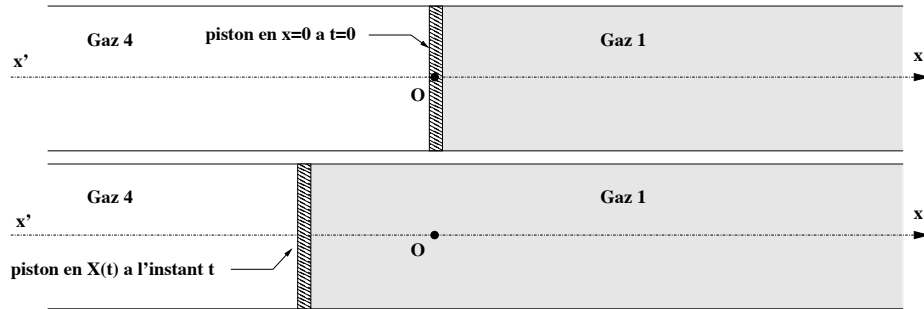


FIGURE 2 – Tube rempli de deux gaz séparés par un piston à deux instants successifs.

(3) Tracer le diagramme des caractéristiques dans le plan (x, t) . On fera une représentation précise jusqu'au temps T^* puis une représentation qualitative pour les temps supérieurs. Identifier les diverses zones d'écoulement de manière précise dans le diagramme. Une figure *claire* sera appréciée.

(4) Donner les expressions de la vitesse dans la direction x , de la vitesse du son c , de la pression et de la température de chaque côté du piston. Quelle est la force totale appliquée sur le piston par le gaz ? Si le piston est de masse M , trouver quelle est la force instantanée $F(t)$ appliquée par l'expérimentateur en appliquant la loi fondamentale de la dynamique.

(5) Préciser l'expression du temps et de la position de formation du choc et donner l'expression de la vitesse en tout point (x, t) pour tout temps inférieur au temps de formation du choc.

2.2 Cas de la détente dans une partie semi-infinie avec accélération immédiate

On se place alors dans le cas $n = 1$ et l'on se focalise uniquement sur le gaz 1 dans cette sous-partie. Comme dans le cas de l'onde simple de détente traité en cours, on considère une vitesse négative $u_f > -2c_0/(\gamma - 1)$ et l'on considère le cas limite où l'accélération du piston est infinie en $t = 0$ de telle manière que le piston se met immédiatement à la vitesse u_f pour tout $t > 0$.

(1) Montrer que l'écoulement dans le gaz 1, sous les hypothèses données, est homoentropique pour tout temps $t > 0$.

Dans la suite, on admet que le diagramme des caractéristiques a la forme donnée sur la Figure 3 de manière cohérente avec les propriétés d'invariance des équations d'Euler. Les domaines 1 et 3 sont des zones d'écoulement uniforme et les droites OA et OI les droites frontières de la région 2.

(2) Donner les propriétés de la région 2. En déduire les équations des deux droites OA et OI .

(3) Donner $(u, c/c_0, p/p_0)$ dans les domaines 1 et 3.

(4) Soit $M(t, x)$ un point de la région 2. Déterminer (u, c) en ce point en fonction de (t, x) .

(5) Pour un point $P(\tau, X)$ dans la région 2, vérifier que la \mathcal{C}_- de cette région qui passe par P admet pour équation :

$$x = -\frac{2c_0 t}{\gamma - 1} + \left[X + \frac{2c_0 \tau}{\gamma - 1} \right] \left[\frac{t}{\tau} \right]^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}. \quad (1)$$

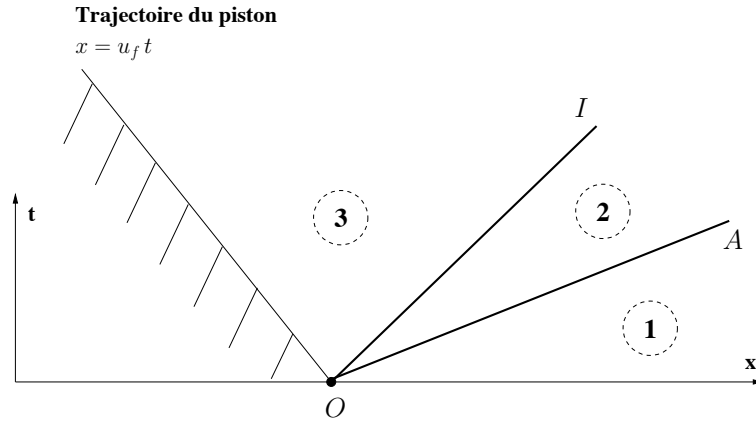


FIGURE 3 – Onde de détente centré au point O .

(Indice : pour cela on cherchera une équation sur la nouvelle variable $f = x/t$ comme une fonction du temps t et on écrira une équation différentielle sur cette variable. On montrera alors que la forme proposée est bien solution de cette équation différentielle du premier ordre.)

2.3 Bilan sur la présence des deux gaz (*Cette sous-partie aura un poids significatif dans le barème*)

On revient sur l'étude de la dynamique du piston en présence des deux gaz 1 et 4 de chaque côté du piston. On se place dans le cas où $X(t) = at^n$, $n = 1$, d'une accélération immédiate du piston et mise en vitesse à l'instant initial $t = 0$.

(1) Expliquer ce qui se passe dans le gaz 4 et effectuer une représentation précise et justifiée du diagramme des caractéristiques associé pour les deux gaz à partir des résultats de la sous-partie précédente.

(2) Ce type de diagramme est proche de celui du tube à choc. Expliquer quelle est la différence fondamentale entre le cas étudié dans cet exercice et le cas du tube à choc. Dans quel cas les deux diagrammes sont-ils équivalents ? Représenter dans un diagramme de phase pression-vitesse les deux cas, afin d'expliquer la différence de manière claire quand elle est présente. Quand les deux cas sont équivalents, que dire la force appliquée par l'expérimentateur ?

2.4 Cas d'un tube de longueur fini L dans le gaz 1 (Optionnel - difficile)

On considère une zone de gaz 1 dans un tube de longueur L représenté sur la Figure 4. On veut alors résoudre la question de la propagation et de la réflexion sur le bout du tube de l'onde de détente initiée par le mouvement du piston.

Ayant résolu le problème associé à l'onde simple de détente avant toute interaction, on se propose maintenant de considérer le problème de la réflexion de l'onde au bout du tube. Pour des temps relativement faibles, on suppose que le diagramme des caractéristiques prend la forme donnée sur la Figure 5.

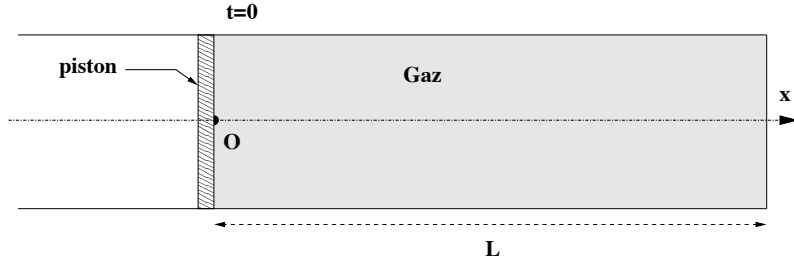


FIGURE 4 – Piston et gaz immobiles à l'instant $t = 0$ dans un tube de longueur L .

(a) Donner les propriétés de la région 5 de l'écoulement, quelle est la nature des courbes représentées dans cette zone de l'écoulement ? Donner leurs propriétés. Quelle est la nature des courbes AI et IB .

(b) En admettant éventuellement la relation (1), donner les coordonnées (x_I, t_I) du point I .

(c) Donner la valeur de la vitesse sur les demi-droites BB' et BB'' . En remarquant que deux courbes caractéristiques d'une même famille ne peuvent pas se couper, démontrer que le domaine 6 est une zone d'écoulement uniforme. Donner dans cette zone les grandeurs (u, c, p, T) en fonction des grandeurs de l'énoncé.

(d) On souhaite à présent donner l'évolution de la pression le long de la paroi au cours du temps. Si h désigne l'enthalpie spécifique du fluide et $\phi(t, x)$ un potentiel des vitesses de l'écoulement, on peut toujours introduire une fonction auxiliaire g , définie tout comme ϕ à une constante additive près, telle que

$$g(u, h) = \phi - ux + t \left(h + \frac{u^2}{2} \right), \quad (2)$$

ce qui permet d'obtenir les relations importantes :

$$t = \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)_u, \quad x = u \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)_u - \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)_h. \quad (3)$$

Montrer que dans le domaine 2, la fonction g est constante ; elle sera alors choisie nulle. Donner les conditions vérifiées dans le domaine 4 par g sur le tronçon AB et la courbe frontière AI . Le domaine 4 est-il un domaine d'onde simple ?

(e) Nous cherchons dans ce domaine 4 la fonction g . Nous admettons, juste pour cette dernière question que $\gamma = 5/3$ (gaz monoatomique) et que la fonction g prend, sous cette hypothèse, la forme générale suivante :

$$g(u, h) = \frac{1}{c} \left\{ F \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1} \right) + G \left(u - \frac{2c}{\gamma - 1} \right) \right\}. \quad (4)$$

En utilisant la question précédente, montrer que :

$$g(u, h) = g(u, c) = \frac{L}{(\gamma - 1)c} \left\{ \left(\frac{\gamma - 1}{2} u - c \right)^2 - c_0^2 \right\}, \quad (5)$$

dans le domaine 4. En déduire sur le tronçon AB l'équation reliant t/t_A à c/c_0 . Donner alors les coordonnées du point B et expliquer comment trouver $p(t)/p_0$ en $x = L$ au cours du temps t .

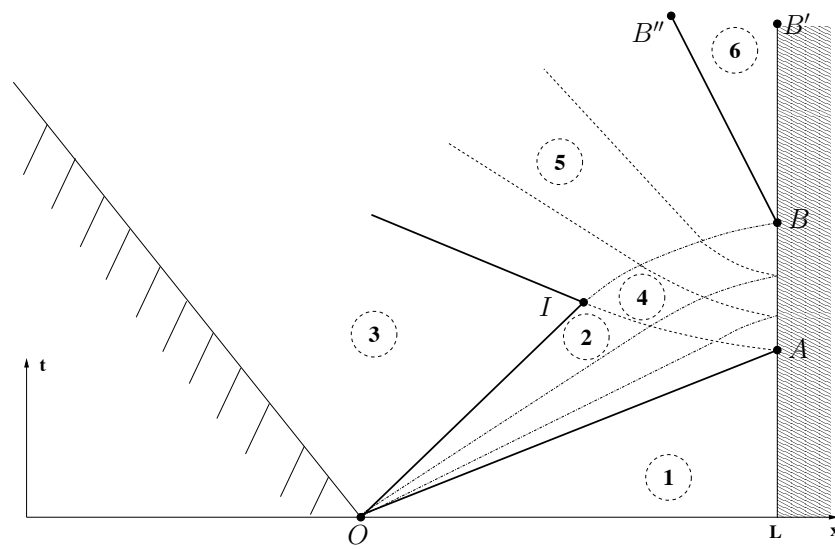


FIGURE 5 – Structure des caractéristiques dans le cas de la réflexion de l'onde de détente.

M	$f(M)$	M	$f(M)$	M	$f(M)$	M	$f(M)$	M	$f(M)$	M	$f(M)$
1.00	0.0000	1.40	8.9870	1.80	20.7251	2.40	36.7465	3.20	53.4703	4.00	65.7848
1.01	0.0447	1.41	9.2756	1.81	21.0139	2.42	37.2289	3.22	53.8261	4.05	66.4393
1.02	0.1257	1.42	9.5650	1.82	21.3021	2.44	37.7077	3.24	54.1791	4.10	67.0820
1.03	0.2294	1.43	9.8553	1.83	21.5898	2.46	38.1831	3.26	54.5294	4.15	67.7132
1.04	0.3510	1.44	10.1464	1.84	21.8768	2.48	38.6551	3.28	54.8770	4.20	68.3332
1.05	0.4874	1.45	10.4381	1.85	22.1633	2.50	39.1236	3.30	55.2220	4.25	68.9423
1.06	0.6367	1.46	10.7305	1.86	22.4492	2.52	39.5886	3.32	55.5643	4.30	69.5406
1.07	0.7973	1.47	11.0235	1.87	22.7344	2.54	40.0503	3.34	55.9040	4.35	70.1285
1.08	0.9680	1.48	11.3169	1.88	23.0190	2.56	40.5085	3.36	56.2411	4.40	70.7062
1.09	1.1479	1.49	11.6109	1.89	23.3029	2.58	40.9633	3.38	56.5756	4.45	71.2738
1.10	1.3362	1.50	11.9052	1.90	23.5861	2.60	41.4147	3.40	56.9075	4.50	71.8317
1.11	1.5321	1.51	12.1999	1.91	23.8687	2.62	41.8628	3.42	57.2369	4.55	72.3801
1.12	1.7350	1.52	12.4949	1.92	24.1506	2.64	42.3074	3.44	57.5639	4.60	72.9192
1.13	1.9445	1.53	12.7901	1.93	24.4318	2.66	42.7488	3.46	57.8883	4.65	73.4491
1.14	2.1600	1.54	13.0856	1.94	24.7123	2.68	43.1868	3.48	58.2102	4.70	73.9701
1.15	2.3810	1.55	13.3812	1.95	24.9920	2.70	43.6215	3.50	58.5298	4.75	74.4824
1.16	2.6073	1.56	13.6770	1.96	25.2711	2.72	44.0529	3.52	58.8469	4.80	74.9863
1.17	2.8385	1.57	13.9728	1.97	25.5494	2.74	44.4810	3.54	59.1616	4.85	75.4818
1.18	3.0743	1.58	14.2686	1.98	25.8269	2.76	44.9059	3.56	59.4739	4.90	75.9691
1.19	3.3142	1.59	14.5645	1.99	26.1037	2.78	45.3275	3.58	59.7838	4.95	76.4486
1.20	3.5582	1.60	14.8604	2.00	26.3798	2.80	45.7459	3.60	60.0915	5.00	76.9202
1.21	3.8060	1.61	15.1561	2.02	26.6295	2.82	46.1611	3.62	60.3968	5.05	77.3843
1.22	4.0572	1.62	15.4518	2.04	27.4762	2.84	46.5731	3.64	60.6998	5.10	77.8409
1.23	4.3117	1.63	15.7473	2.06	28.0197	2.86	46.9820	3.66	61.0005	5.15	78.2902
1.24	4.5694	1.64	16.0427	2.08	28.5600	2.88	47.3877	3.68	61.2990	5.20	78.7324
1.25	4.8299	1.65	16.3379	2.10	29.0971	2.90	47.7903	3.70	61.5953	5.25	79.1677
1.26	5.0931	1.66	16.6328	2.12	29.6308	2.92	48.1898	3.72	61.8893	5.30	79.5962
1.27	5.3590	1.67	16.9276	2.14	30.1613	2.94	48.5863	3.74	62.1812	5.35	80.0180
1.28	5.6272	1.68	17.2220	2.16	30.6884	2.96	48.9796	3.76	62.4709	5.40	80.4332
1.29	5.8977	1.69	17.5161	2.18	31.2121	2.98	49.3700	3.78	62.7584	5.45	80.8421
1.30	6.1703	1.70	17.8099	2.20	31.7325	3.00	49.7573	3.80	63.0438	5.50	81.2448
1.31	6.4449	1.71	18.1034	2.22	32.2494	3.02	50.1417	3.82	63.3271	5.55	81.6413
1.32	6.7213	1.72	18.3964	2.24	32.7629	3.04	50.5231	3.84	63.6083	5.60	82.0319
1.33	6.9995	1.73	18.6891	2.26	33.2730	3.06	50.9016	3.86	63.8874	5.65	82.4166
1.34	7.2794	1.74	18.9814	2.28	33.7796	3.08	51.2771	3.88	64.1645	5.70	82.7956
1.35	7.5607	1.75	19.2732	2.30	34.2828	3.10	51.6497	3.90	64.4395	5.75	83.1689
1.36	7.8435	1.76	19.5646	2.32	34.7825	3.12	52.0195	3.92	64.7125	5.80	83.5368
1.37	8.1276	1.77	19.8554	2.34	35.2787	3.14	52.3864	3.94	64.9836	5.85	83.8993
1.38	8.4130	1.78	20.1458	2.36	35.7715	3.16	52.7505	3.96	65.2526	5.90	84.2565
1.39	8.6995	1.79	20.4357	2.38	36.2607	3.18	53.1118	3.98	65.5197	5.95	84.6085

TABLE 1 – Tabulation de la fonction de Prandtl-Meyer, notée ici $f(M)$. ATTENTION : le résultat est donné en degré et non en radian.

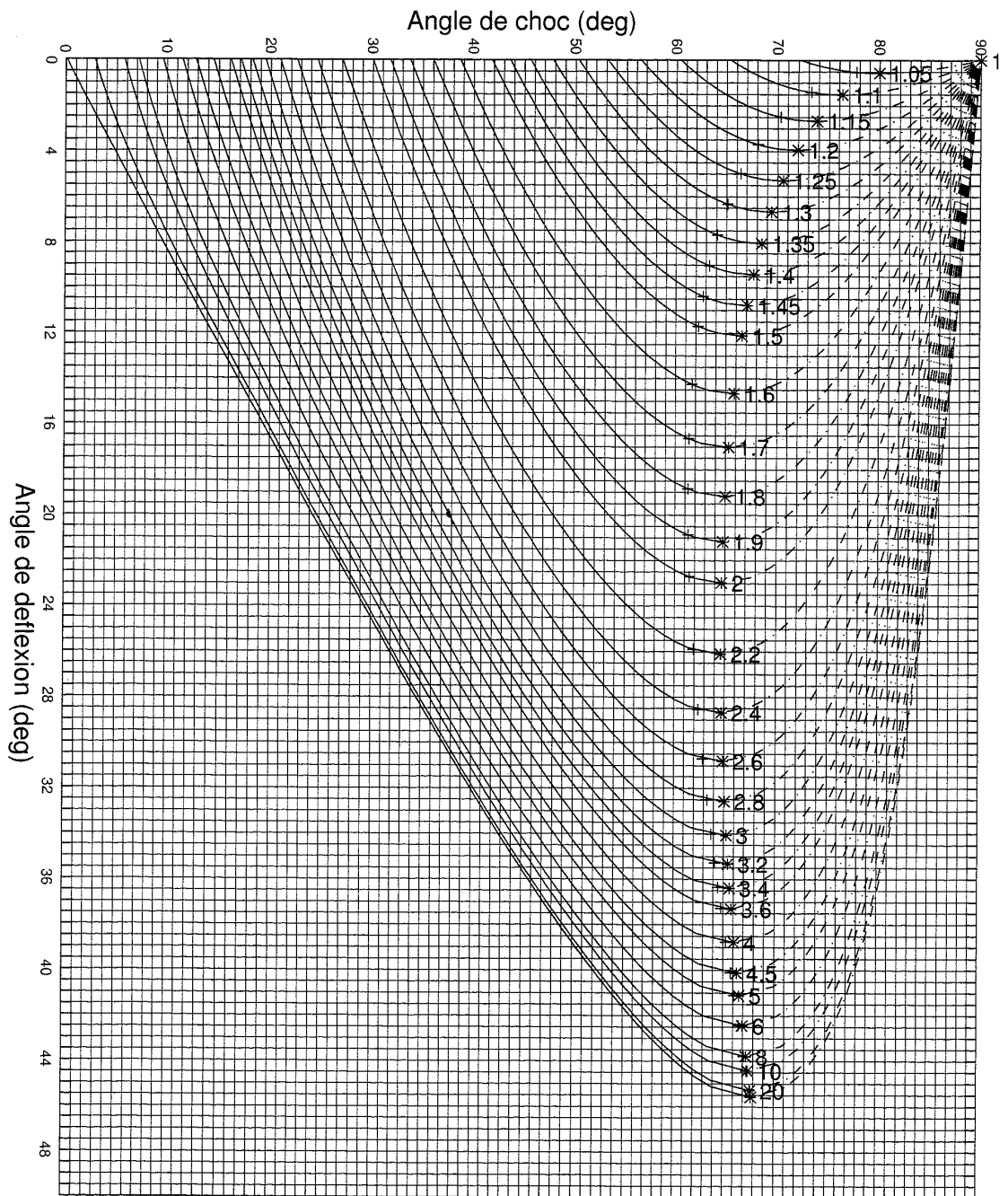


FIGURE 6 – Abaque de choc oblique.

Tables du Livre de ANDERSON

Table A.1 - Table d'écoulement isentropique (p. 691–695)

Les colonnes sont : M , $\frac{p_0}{p}$, $\frac{\rho_0}{\rho}$, $\frac{T_0}{T}$, $\frac{A}{A_*}$

Table A.2 - Table de choc normal (p. 696–699)

Les colonnes sont : M_1 , $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, $\frac{T_2}{T_1}$, $\frac{p_{02}}{p_{01}}$, $\frac{p_{02}}{p_1}$, M_2

APPENDIX A

Table A.11 Isentropic flow properties

M	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{T}{T^*}$	A^*
0.2000 - 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.2894 + 02
0.4000 - 01	0.1001 + 01	0.1001 + 01	0.1000 + 01	0.1448 + 02
0.6000 - 01	0.1003 + 01	0.1002 + 01	0.1001 + 01	0.9666 + 01
0.8000 - 01	0.1004 + 01	0.1003 + 01	0.1001 + 01	0.7262 + 01
0.1000 + 00	0.1007 + 01	0.1005 + 01	0.1002 + 01	0.5822 + 01
0.1200 + 00	0.1010 + 01	0.1007 + 01	0.1003 + 01	0.4864 + 01
0.1400 + 00	0.1014 + 01	0.1010 + 01	0.1004 + 01	0.4182 + 01
0.1600 + 00	0.1018 + 01	0.1013 + 01	0.1005 + 01	0.3673 + 01
0.1800 + 00	0.1023 + 01	0.1016 + 01	0.1006 + 01 ^b	0.3278 + 01
0.2000 + 00	0.1028 + 01	0.1020 + 01	0.1008 + 01	0.2964 + 01
0.2200 + 00	0.1034 + 01	0.1024 + 01	0.1010 + 01	0.2708 + 01
0.2400 + 00	0.1041 + 01	0.1029 + 01	0.1012 + 01	0.2496 + 01
0.2600 + 00	0.1048 + 01	0.1034 + 01	0.1014 + 01	0.2317 + 01
0.2800 + 00	0.1056 + 01	0.1040 + 01	0.1016 + 01	0.2166 + 01
0.3000 + 00	0.1064 + 01	0.1046 + 01	0.1018 + 01	0.2035 + 01
0.3200 + 00	0.1074 + 01	0.1052 + 01	0.1020 + 01	0.1922 + 01
0.3400 + 00	0.1083 + 01	0.1059 + 01	0.1023 + 01	0.1823 + 01
0.3600 + 00	0.1094 + 01	0.1066 + 01	0.1026 + 01	0.1736 + 01
0.3800 + 00	0.1105 + 01	0.1074 + 01	0.1029 + 01	0.1659 + 01
0.4000 + 00	0.1117 + 01	0.1082 + 01	0.1032 + 01	0.1590 + 01
0.4200 + 00	0.1129 + 01	0.1091 + 01	0.1035 + 01	0.1529 + 01
0.4400 + 00	0.1142 + 01	0.1100 + 01	0.1039 + 01	0.1474 + 01
0.4600 + 00	0.1156 + 01	0.1109 + 01	0.1042 + 01	0.1425 + 01
0.4800 + 00	0.1171 + 01	0.1119 + 01	0.1046 + 01	0.1380 + 01
0.5000 + 00	0.1186 + 01	0.1130 + 01	0.1050 + 01	0.1340 + 01
0.5200 + 00	0.1202 + 01	0.1141 + 01	0.1054 + 01	0.1303 + 01
0.5400 + 00	0.1219 + 01	0.1152 + 01	0.1058 + 01	0.1270 + 01
0.5600 + 00	0.1237 + 01	0.1164 + 01	0.1063 + 01	0.1240 + 01
0.5800 + 00	0.1256 + 01	0.1177 + 01	0.1067 + 01	0.1213 + 01
0.6000 + 00	0.1276 + 01	0.1190 + 01	0.1072 + 01	0.1188 + 01

Continued

Table A1.1 | Continued

M	$\frac{p_0}{\rho}$	$\frac{p_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
0.6200 + 00	0.1296 + 01	0.1203 + 01	0.1077 + 01	0.1166 + 01
0.6400 + 00	0.1317 + 01	0.1218 + 01	0.1082 + 01	0.1172 + 01
0.6600 + 00	0.1340 + 01	0.1232 + 01	0.1087 + 01	0.1177 + 01
0.6800 + 00	0.1363 + 01	0.1247 + 01	0.1092 + 01	0.1180 + 01
0.7000 + 00	0.1387 + 01	0.1263 + 01	0.1098 + 01	0.1184 + 01
0.7200 + 00	0.1412 + 01	0.1280 + 01	0.1104 + 01	0.1188 + 01
0.7400 + 00	0.1439 + 01	0.1297 + 01	0.1110 + 01	0.1192 + 01
0.7600 + 00	0.1466 + 01	0.1314 + 01	0.1116 + 01	0.1196 + 01
0.7800 + 00	0.1493 + 01	0.1331 + 01	0.1122 + 01	0.1200 + 01
0.8000 + 00	0.1524 + 01	0.1351 + 01	0.1128 + 01	0.1204 + 01
0.8200 + 00	0.1555 + 01	0.1371 + 01	0.1134 + 01	0.1208 + 01
0.8400 + 00	0.1587 + 01	0.1391 + 01	0.1141 + 01	0.1212 + 01
0.8600 + 00	0.1621 + 01	0.1412 + 01	0.1148 + 01	0.1216 + 01
0.8800 + 00	0.1655 + 01	0.1433 + 01	0.1155 + 01	0.1220 + 01
0.9000 + 00	0.1691 + 01	0.1456 + 01	0.1162 + 01	0.1224 + 01
0.9200 + 00	0.1729 + 01	0.1478 + 01	0.1169 + 01	0.1228 + 01
0.9400 + 00	0.1767 + 01	0.1502 + 01	0.1177 + 01	0.1232 + 01
0.9600 + 00	0.1808 + 01	0.1526 + 01	0.1184 + 01	0.1236 + 01
0.9800 + 00	0.1850 + 01	0.1552 + 01	0.1192 + 01	0.1240 + 01
1.0000 + 01	0.1893 + 01	0.1577 + 01	0.1200 + 01	0.1244 + 01
0.1020 + 01	0.1938 + 01	0.1604 + 01	0.1208 + 01	0.1248 + 01
0.1040 + 01	0.1985 + 01	0.1632 + 01	0.1216 + 01	0.1252 + 01
0.1060 + 01	0.2033 + 01	0.1660 + 01	0.1223 + 01	0.1256 + 01
0.1080 + 01	0.2083 + 01	0.1689 + 01	0.1231 + 01	0.1260 + 01
0.1100 + 01	0.2135 + 01	0.1719 + 01	0.1242 + 01	0.1264 + 01
0.1120 + 01	0.2189 + 01	0.1750 + 01	0.1251 + 01	0.1268 + 01
0.1140 + 01	0.2245 + 01	0.1782 + 01	0.1260 + 01	0.1272 + 01
0.1160 + 01	0.2303 + 01	0.1814 + 01	0.1269 + 01	0.1276 + 01
0.1180 + 01	0.2363 + 01	0.1848 + 01	0.1278 + 01	0.1280 + 01
0.1200 + 01	0.2425 + 01	0.1883 + 01	0.1288 + 01	0.1284 + 01
0.1220 + 01	0.2489 + 01	0.1918 + 01	0.1298 + 01	0.1288 + 01
0.1240 + 01	0.2556 + 01	0.1955 + 01	0.1308 + 01	0.1292 + 01
0.1260 + 01	0.2625 + 01	0.1992 + 01	0.1318 + 01	0.1296 + 01
0.1280 + 01	0.2697 + 01	0.2031 + 01	0.1328 + 01	0.1300 + 01
0.1300 + 01	0.2771 + 01	0.2071 + 01	0.1338 + 01	0.1304 + 01
0.1320 + 01	0.2847 + 01	0.2112 + 01	0.1348 + 01	0.1308 + 01
0.1340 + 01	0.2927 + 01	0.2153 + 01	0.1359 + 01	0.1312 + 01
0.1360 + 01	0.3009 + 01	0.2197 + 01	0.1370 + 01	0.1316 + 01
0.1380 + 01	0.3094 + 01	0.2241 + 01	0.1381 + 01	0.1320 + 01
0.1400 + 01	0.3182 + 01	0.2286 + 01	0.1392 + 01	0.1324 + 01
0.1420 + 01	0.3273 + 01	0.2333 + 01	0.1403 + 01	0.1328 + 01
0.1440 + 01	0.3368 + 01	0.1445 + 01	0.1415 + 01	0.1332 + 01
0.1460 + 01	0.3465 + 01	0.2480 + 01	0.1426 + 01	0.1336 + 01
0.1480 + 01	0.3566 + 01	0.2532 + 01	0.1438 + 01	0.1340 + 01
0.1500 + 01	0.3671 + 01	0.2585 + 01	0.1450 + 01	0.1344 + 01
0.1520 + 01	0.3779 + 01	0.2639 + 01	0.1462 + 01	0.1348 + 01
0.1540 + 01	0.3891 + 01	0.2695 + 01	0.1474 + 01	0.1352 + 01
0.1560 + 01	0.4007 + 01	0.2752 + 01	0.1487 + 01	0.1356 + 01
0.1580 + 01	0.4127 + 01	0.2811 + 01	0.1499 + 01	0.1360 + 01
0.1600 + 01	0.4250 + 01		0.1512 + 01	0.1364 + 01

Table A1.1 | Continued

M	$\frac{p_0}{\rho}$	$\frac{p_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
0.1620 + 01	0.4378 + 01	0.1620 + 01	0.1525 + 01	0.1267 + 01
0.1640 + 01	0.4511 + 01	0.1640 + 01	0.1538 + 01	0.1284 + 01
0.1660 + 01	0.4648 + 01	0.1660 + 01	0.1551 + 01	0.1301 + 01
0.1680 + 01	0.4790 + 01	0.1680 + 01	0.1564 + 01	0.1319 + 01
0.1700 + 01	0.4936 + 01	0.1700 + 01	0.1578 + 01	0.1337 + 01
0.1720 + 01	0.5087 + 01	0.1720 + 01	0.1592 + 01	0.1356 + 01
0.1740 + 01	0.5244 + 01	0.1740 + 01	0.1606 + 01	0.1375 + 01
0.1760 + 01	0.5406 + 01	0.1760 + 01	0.1620 + 01	0.1394 + 01
0.1780 + 01	0.5573 + 01	0.1780 + 01	0.1634 + 01	0.1413 + 01
0.1800 + 01	0.5746 + 01	0.1800 + 01	0.1648 + 01	0.1432 + 01
0.1820 + 01	0.5924 + 01	0.1820 + 01	0.1662 + 01	0.1451 + 01
0.1840 + 01	0.6109 + 01	0.1840 + 01	0.1677 + 01	0.1470 + 01
0.1860 + 01	0.6300 + 01	0.1860 + 01	0.1692 + 01	0.1489 + 01
0.1880 + 01	0.6497 + 01	0.1880 + 01	0.1707 + 01	0.1508 + 01
0.1900 + 01	0.6701 + 01	0.1900 + 01	0.1722 + 01	0.1527 + 01
0.1920 + 01	0.6911 + 01	0.1920 + 01	0.1737 + 01	0.1546 + 01
0.1940 + 01	0.7128 + 01	0.1940 + 01	0.1753 + 01	0.1565 + 01
0.1960 + 01	0.7353 + 01	0.1960 + 01	0.1768 + 01	0.1584 + 01
0.1980 + 01	0.7585 + 01	0.1980 + 01	0.1784 + 01	0.1603 + 01
0.2000 + 01	0.7824 + 01	0.2000 + 01	0.1800 + 01	0.1622 + 01
0.2050 + 01	0.8458 + 01	0.2050 + 01	0.1840 + 01	0.1661 + 01
0.2100 + 01	0.9145 + 01	0.2100 + 01	0.1882 + 01	0.1700 + 01
0.2150 + 01	0.9888 + 01	0.2150 + 01	0.1924 + 01	0.1739 + 01
0.2200 + 01	0.1069 + 01	0.2200 + 01	0.1968 + 01	0.1778 + 01
0.2250 + 01	0.1156 + 01	0.2250 + 01	0.2012 + 01	0.1817 + 01
0.2300 + 01	0.1250 + 01	0.2300 + 01	0.2058 + 01	0.1856 + 01
0.2350 + 01	0.1352 + 01	0.2350 + 01	0.2104 + 01	0.1895 + 01
0.2400 + 01	0.1462 + 01	0.2400 + 01	0.2152 + 01	0.1934 + 01
0.2450 + 01	0.1581 + 01	0.2450 + 01	0.2200 + 01	0.1973 + 01
0.2500 + 01	0.1709 + 01	0.2500 + 01	0.2250 + 01	0.2012 + 01
0.2550 + 01	0.1847 + 01	0.2550 + 01	0.2300 + 01	0.2051 + 01
0.2600 + 01	0.1995 + 01	0.2600 + 01	0.2352 + 01	0.2090 + 01
0.2650 + 01	0.2156 + 01	0.2650 + 01	0.2404 + 01	0.2129 + 01
0.2700 + 01	0.2328 + 01	0.2700 + 01	0.2458 + 01	0.2168 + 01
0.2750 + 01	0.2514 + 01	0.2750 + 01	0.2512 + 01	0.2207 + 01
0.2800 + 01	0.2714 + 01	0.2800 + 01	0.2568 + 01	0.2246 + 01
0.2850 + 01	0.2929 + 01	0.2850 + 01	0.2624 + 01	0.2285 + 01
0.2900 + 01	0.3159 + 01	0.2900 + 01	0.2682 + 01	0.2324 + 01
0.2950 + 01	0.3407 + 01	0.2950 + 01	0.2740 + 01	0.2363 + 01
0.3000 + 01	0.3673 + 01	0.3000 + 01	0.2800 + 01	0.2402 + 01
0.3050 + 01	0.3959 + 01	0.3050 + 01	0.2860 + 01	0.2441 + 01
0.3100 + 01	0.4265 + 01	0.3100 + 01	0.2922 + 01	0.2480 + 01
0.3150 + 01	0.4593 + 01	0.3150 + 01	0.2984 + 01	0.2519 + 01
0.3200 + 01	0.4944 + 01	0.3200 + 01	0.3048 + 01	0.2558 + 01
0.3250 + 01	0.5320 + 01	0.3250 + 01	0.3112 + 01	0.2597 + 01
0.3300 + 01	0.5722 + 01	0.3300 + 01	0.3178 + 01	0.2636 + 01
0.3350 + 01	0.6152 + 01	0.3350 + 01	0.3244 + 01	0.2675 + 01
0.3400 + 01	0.6612 + 01	0.3400 + 01	0.3312 + 01	0.2714 + 01
0.3450 + 01	0.7103 + 01	0.3450 + 01	0.3380 + 01	0.2753 + 01
0.3500 + 01	0.7627 + 01	0.3500 + 01	0.3450 + 01	0.2792 + 01

Continued

Table A.11 Continued

<i>W</i>	$\frac{P_c}{P}$	$\frac{\rho_c}{\rho}$	$\frac{T_c}{T}$	$\frac{A_c}{A}$
0.3550 + 01	0.8187 + 02	0.2325 + 02	0.3520 + 01	0.7113 + 01
0.3600 + 01	0.8784 + 02	0.2445 + 02	0.3592 + 01	0.7450 + 01
0.3650 + 01	0.9420 + 02	0.2571 + 02	0.3664 + 01	0.7802 + 01
0.3700 + 01	0.1010 + 03	0.2701 + 02	0.3738 + 01	0.8169 + 01
0.3750 + 01	0.1082 + 03	0.2838 + 02	0.3812 + 01	0.8552 + 01
0.3800 + 01	0.1159 + 03	0.2981 + 02	0.3888 + 01	0.8951 + 01
0.3850 + 01	0.1241 + 03	0.3129 + 02	0.3964 + 01	0.9366 + 01
0.3900 + 01	0.1328 + 03	0.3285 + 02	0.4042 + 01	0.9799 + 01
0.3950 + 01	0.1420 + 03	0.3446 + 02	0.4120 + 01	0.1025 + 02
0.4000 + 01	0.1518 + 03	0.3615 + 02	0.4200 + 01	0.1072 + 02
0.4050 + 01	0.1623 + 03	0.3791 + 02	0.4280 + 01	0.1121 + 02
0.4100 + 01	0.1733 + 03	0.3974 + 02	0.4362 + 01	0.1171 + 02
0.4150 + 01	0.1851 + 03	0.4164 + 02	0.4444 + 01	0.1224 + 02
0.4200 + 01	0.1975 + 03	0.4365 + 02	0.4528 + 01	0.1279 + 02
0.4250 + 01	0.2108 + 03	0.4569 + 02	0.4612 + 01	0.1336 + 02
0.4300 + 01	0.2247 + 03	0.4784 + 02	0.4698 + 01	0.1395 + 02
0.4350 + 01	0.2396 + 03	0.5007 + 02	0.4784 + 01	0.1457 + 02
0.4400 + 01	0.2553 + 03	0.5239 + 02	0.4872 + 01	0.1521 + 02
0.4450 + 01	0.2719 + 03	0.5480 + 02	0.4960 + 01	0.1587 + 02
0.4500 + 01	0.2894 + 03	0.5731 + 02	0.5050 + 01	0.1656 + 02
0.4550 + 01	0.3080 + 03	0.5991 + 02	0.5140 + 01	0.1728 + 02
0.4600 + 01	0.3276 + 03	0.6261 + 02	0.5232 + 01	0.1802 + 02
0.4650 + 01	0.3483 + 03	0.6542 + 02	0.5324 + 01	0.1879 + 02
0.4700 + 01	0.3702 + 03	0.6835 + 02	0.5418 + 01	0.1958 + 02
0.4750 + 01	0.3933 + 03	0.7135 + 02	0.5512 + 01	0.2041 + 02
0.4800 + 01	0.4177 + 03	0.7448 + 02	0.5608 + 01	0.2126 + 02
0.4850 + 01	0.4434 + 03	0.7772 + 02	0.5704 + 01	0.2215 + 02
0.4900 + 01	0.4705 + 03	0.8109 + 02	0.5802 + 01	0.2307 + 02
0.4950 + 01	0.4990 + 03	0.8457 + 02	0.5900 + 01	0.2402 + 02
0.5000 + 01	0.5291 + 03	0.8818 + 02	0.6000 + 01	0.2500 + 02
0.5100 + 01	0.5941 + 03	0.9579 + 02	0.6202 + 01	0.2707 + 02
0.5200 + 01	0.6661 + 03	0.1109 + 03	0.6408 + 01	0.2928 + 02
0.5300 + 01	0.7457 + 03	0.1127 + 03	0.6618 + 01	0.3165 + 02
0.5400 + 01	0.8353 + 03	0.1220 + 03	0.6832 + 01	0.3417 + 02
0.5500 + 01	0.9304 + 03	0.1320 + 03	0.7050 + 01	0.3687 + 02
0.5600 + 01	0.1037 + 04	0.1426 + 03	0.7272 + 01	0.3974 + 02
0.5700 + 01	0.1154 + 04	0.1539 + 03	0.7498 + 01	0.4280 + 02
0.5800 + 01	0.1283 + 04	0.1660 + 03	0.7728 + 01	0.4605 + 02
0.5900 + 01	0.1424 + 04	0.1789 + 03	0.7962 + 01	0.4951 + 02
0.6000 + 01	0.1579 + 04	0.1925 + 03	0.8200 + 01	0.5318 + 02
0.6100 + 01	0.1748 + 04	0.2071 + 03	0.8442 + 01	0.5708 + 02
0.6200 + 01	0.1933 + 04	0.2225 + 03	0.8688 + 01	0.6121 + 02
0.6300 + 01	0.2133 + 04	0.2388 + 03	0.8938 + 01	0.6559 + 02
0.6400 + 01	0.2353 + 04	0.2562 + 03	0.9192 + 01	0.7023 + 02
0.6500 + 01	0.2594 + 04	0.2745 + 03	0.9450 + 01	0.7513 + 02
0.6600 + 01	0.2855 + 04	0.2939 + 03	0.9712 + 01	0.8052 + 02
0.6700 + 01	0.3138 + 04	0.3145 + 03	0.9978 + 01	0.8580 + 02
0.6800 + 01	0.3445 + 04	0.3362 + 03	0.1025 + 02	0.9159 + 02
0.6900 + 01	0.3779 + 04	0.3591 + 03	0.1052 + 02	0.9770 + 02
0.7000 + 01	0.4140 + 04	0.3833 + 03	0.1080 + 02	0.1041 + 03

Table A.11 Continued

<i>W</i>	$\frac{P_c}{P}$	$\frac{\rho_c}{\rho}$	$\frac{T_c}{T}$	$\frac{A_c}{A}$
0.7100 + 01	0.4531 + 04	0.4088 + 03	0.1108 + 02	0.1109 + 03
0.7200 + 01	0.4933 + 04	0.4357 + 03	0.1137 + 02	0.1181 + 03
0.7300 + 01	0.5410 + 04	0.4640 + 03	0.1166 + 02	0.1256 + 03
0.7400 + 01	0.5903 + 04	0.4939 + 03	0.1195 + 02	0.1335 + 03
0.7500 + 01	0.6434 + 04	0.5252 + 03	0.1225 + 02	0.1418 + 03
0.7600 + 01	0.7006 + 04	0.5582 + 03	0.1255 + 02	0.1506 + 03
0.7700 + 01	0.7623 + 04	0.5928 + 03	0.1286 + 02	0.1596 + 03
0.7800 + 01	0.8285 + 04	0.6292 + 03	0.1317 + 02	0.1694 + 03
0.7900 + 01	0.8998 + 04	0.6674 + 03	0.1348 + 02	0.1795 + 03
0.8000 + 01	0.9763 + 04	0.7075 + 03	0.1380 + 02	0.1901 + 03
0.9000 + 01	0.2110 + 05	0.1227 + 04	0.1720 + 02	0.3272 + 03
0.1000 + 02	0.4244 + 05	0.2021 + 04	0.2100 + 02	0.5359 + 03
0.1100 + 02	0.8053 + 05	0.3188 + 04	0.2520 + 02	0.8419 + 03
0.1200 + 02	0.2980 + 06	0.4848 + 04	0.2980 + 02	0.1276 + 04
0.1300 + 02	0.2486 + 06	0.7144 + 04	0.3480 + 02	0.1876 + 04
0.1400 + 02	0.4119 + 06	0.1025 + 05	0.4020 + 02	0.2685 + 04
0.1500 + 02	0.6602 + 06	0.1435 + 05	0.4600 + 02	0.3755 + 04
0.1600 + 02	0.1028 + 07	0.1969 + 05	0.5220 + 02	0.5145 + 04
0.1700 + 02	0.1559 + 07	0.2651 + 05	0.5880 + 02	0.6921 + 04
0.1800 + 02	0.2311 + 07	0.3512 + 05	0.6580 + 02	0.9159 + 04
0.1900 + 02	0.3356 + 07	0.4584 + 05	0.7320 + 02	0.1195 + 05
0.2000 + 02	0.4783 + 07	0.5905 + 05	0.8100 + 02	0.1538 + 05
0.2200 + 02	0.9251 + 07	0.9459 + 05	0.9780 + 02	0.2461 + 05
0.2400 + 02	0.1691 + 08	0.1456 + 06	0.1162 + 03	0.3783 + 05
0.2600 + 02	0.2949 + 08	0.2165 + 06	0.1362 + 03	0.5624 + 05
0.2800 + 02	0.4936 + 08	0.3128 + 06	0.1578 + 03	0.8121 + 05
0.3000 + 02	0.7978 + 08	0.4408 + 06	0.1810 + 03	0.1144 + 06
0.3200 + 02	0.1250 + 09	0.6075 + 06	0.2038 + 03	0.1576 + 06
0.3400 + 02	0.1908 + 09	0.8216 + 06	0.2322 + 03	0.2131 + 06
0.3600 + 02	0.2842 + 09	0.1092 + 07	0.2602 + 03	0.2832 + 06
0.3800 + 02	0.4143 + 09	0.1430 + 07	0.2898 + 03	0.3707 + 06
0.4000 + 02	0.5926 + 09	0.1846 + 07	0.3210 + 03	0.4785 + 06
0.4200 + 02	0.8330 + 09	0.2254 + 07	0.3538 + 03	0.6102 + 06
0.4400 + 02	0.1153 + 10	0.2969 + 07	0.3882 + 03	0.7694 + 06
0.4600 + 02	0.1572 + 10	0.4242 + 07	0.4242 + 03	0.9603 + 06
0.4800 + 02	0.2116 + 10	0.4583 + 07	0.4618 + 03	0.1187 + 07
0.5000 + 02	0.2815 + 10	0.5618 + 07	0.5010 + 03	0.1455 + 07

Table A.2 | Normal shock properties

M	P_2/P_1	P_2/P_1	P_2/P_1	T_2/T_1	P_2/P_1	P_2/P_1	P_2/P_1	M_2
0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01
0.1020 + 01	0.1047 + 01	0.1033 + 01	0.1013 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1893 + 01	0.1000 + 01	0.9805 + 00
0.1040 + 01	0.1095 + 01	0.1067 + 01	0.1026 + 01	0.1000 + 01	0.9999 + 00	0.1984 + 01	0.9944 + 00	0.9444 + 00
0.1060 + 01	0.1144 + 01	0.1101 + 01	0.1039 + 01	0.9998 + 00	0.2032 + 01	0.2032 + 01	0.9277 + 00	0.9118 + 00
0.1080 + 01	0.1194 + 01	0.1135 + 01	0.1052 + 01	0.9994 + 00	0.2082 + 01	0.2183 + 01	0.9113 + 00	0.8820 + 00
0.1100 + 01	0.1245 + 01	0.1169 + 01	0.1065 + 01	0.9989 + 00	0.2133 + 01	0.2382 + 01	0.8966 + 00	0.8682 + 00
0.1120 + 01	0.1297 + 01	0.1203 + 01	0.1078 + 01	0.9982 + 00	0.2183 + 01	0.2582 + 01	0.8820 + 00	0.8682 + 00
0.1140 + 01	0.1350 + 01	0.1238 + 01	0.1090 + 01	0.9973 + 00	0.2234 + 01	0.2782 + 01	0.8682 + 00	0.8682 + 00
0.1160 + 01	0.1403 + 01	0.1272 + 01	0.1103 + 01	0.9961 + 00	0.2284 + 01	0.2982 + 01	0.8549 + 00	0.8549 + 00
0.1180 + 01	0.1458 + 01	0.1307 + 01	0.1115 + 01	0.9946 + 00	0.2334 + 01	0.3182 + 01	0.8422 + 00	0.8422 + 00
0.1200 + 01	0.1513 + 01	0.1342 + 01	0.1128 + 01	0.9928 + 00	0.2384 + 01	0.3382 + 01	0.8300 + 00	0.8300 + 00
0.1220 + 01	0.1570 + 01	0.1376 + 01	0.1141 + 01	0.9907 + 00	0.2434 + 01	0.3582 + 01	0.8183 + 00	0.8183 + 00
0.1240 + 01	0.1627 + 01	0.1411 + 01	0.1153 + 01	0.9884 + 00	0.2484 + 01	0.3782 + 01	0.8071 + 00	0.8071 + 00
0.1260 + 01	0.1686 + 01	0.1446 + 01	0.1166 + 01	0.9857 + 00	0.2534 + 01	0.3982 + 01	0.7963 + 00	0.7963 + 00
0.1280 + 01	0.1745 + 01	0.1481 + 01	0.1178 + 01	0.9827 + 00	0.2584 + 01	0.4182 + 01	0.7860 + 00	0.7860 + 00
0.1300 + 01	0.1805 + 01	0.1516 + 01	0.1191 + 01	0.9794 + 00	0.2634 + 01	0.4382 + 01	0.7760 + 00	0.7760 + 00
0.1320 + 01	0.1866 + 01	0.1551 + 01	0.1204 + 01	0.9758 + 00	0.2684 + 01	0.4582 + 01	0.7664 + 00	0.7664 + 00
0.1340 + 01	0.1928 + 01	0.1585 + 01	0.1216 + 01	0.9718 + 00	0.2734 + 01	0.4782 + 01	0.7572 + 00	0.7572 + 00
0.1360 + 01	0.1991 + 01	0.1620 + 01	0.1229 + 01	0.9676 + 00	0.2784 + 01	0.4982 + 01	0.7483 + 00	0.7483 + 00
0.1380 + 01	0.2055 + 01	0.1655 + 01	0.1242 + 01	0.9632 + 00	0.2834 + 01	0.5182 + 01	0.7397 + 00	0.7397 + 00
0.1400 + 01	0.2120 + 01	0.1690 + 01	0.1255 + 01	0.9582 + 00	0.2884 + 01	0.5382 + 01	0.7314 + 00	0.7314 + 00
0.1420 + 01	0.2186 + 01	0.1724 + 01	0.1268 + 01	0.9531 + 00	0.2934 + 01	0.5582 + 01	0.7235 + 00	0.7235 + 00
0.1440 + 01	0.2253 + 01	0.1759 + 01	0.1281 + 01	0.9476 + 00	0.2984 + 01	0.5782 + 01	0.7157 + 00	0.7157 + 00
0.1460 + 01	0.2320 + 01	0.1793 + 01	0.1294 + 01	0.9420 + 00	0.3034 + 01	0.5982 + 01	0.7081 + 00	0.7081 + 00
0.1480 + 01	0.2389 + 01	0.1828 + 01	0.1307 + 01	0.9360 + 00	0.3084 + 01	0.6182 + 01	0.6941 + 00	0.6941 + 00
0.1500 + 01	0.2458 + 01	0.1862 + 01	0.1320 + 01	0.9298 + 00	0.3134 + 01	0.6382 + 01	0.6874 + 00	0.6874 + 00
0.1520 + 01	0.2529 + 01	0.1896 + 01	0.1334 + 01	0.9233 + 00	0.3184 + 01	0.6582 + 01	0.6809 + 00	0.6809 + 00
0.1540 + 01	0.2600 + 01	0.1930 + 01	0.1347 + 01	0.9166 + 00	0.3234 + 01	0.6782 + 01	0.6746 + 00	0.6746 + 00
0.1560 + 01	0.2673 + 01	0.1964 + 01	0.1361 + 01	0.9097 + 00	0.3284 + 01	0.6982 + 01	0.6684 + 00	0.6684 + 00
0.1580 + 01	0.2746 + 01	0.1998 + 01	0.1374 + 01	0.9026 + 00	0.3334 + 01	0.7182 + 01	0.6625 + 00	0.6625 + 00
0.1600 + 01	0.2820 + 01	0.2032 + 01	0.1388 + 01	0.8952 + 00	0.3384 + 01	0.7382 + 01	0.6568 + 00	0.6568 + 00
0.1620 + 01	0.2895 + 01	0.2066 + 01	0.1402 + 01	0.8877 + 00	0.3434 + 01	0.7582 + 01	0.6512 + 00	0.6512 + 00
0.1640 + 01	0.2971 + 01	0.2100 + 01	0.1416 + 01	0.8799 + 00	0.3484 + 01	0.7782 + 01	0.6458 + 00	0.6458 + 00
0.1660 + 01	0.3048 + 01	0.2132 + 01	0.1430 + 01	0.8720 + 00	0.3534 + 01	0.7982 + 01	0.6405 + 00	0.6405 + 00
0.1680 + 01	0.3126 + 01	0.2165 + 01	0.1444 + 01	0.8639 + 00	0.3584 + 01	0.8182 + 01	0.6355 + 00	0.6355 + 00
0.1700 + 01	0.3205 + 01	0.2198 + 01	0.1458 + 01	0.8557 + 00	0.3634 + 01	0.8382 + 01	0.6305 + 00	0.6305 + 00
0.1720 + 01	0.3285 + 01	0.2230 + 01	0.1473 + 01	0.8474 + 00	0.3684 + 01	0.8582 + 01	0.6257 + 00	0.6257 + 00
0.1740 + 01	0.3366 + 01	0.2263 + 01	0.1487 + 01	0.8389 + 00	0.3734 + 01	0.8782 + 01	0.6210 + 00	0.6210 + 00
0.1760 + 01	0.3447 + 01	0.2295 + 01	0.1502 + 01	0.8302 + 00	0.3784 + 01	0.8982 + 01	0.6165 + 00	0.6165 + 00
0.1780 + 01	0.3530 + 01	0.2327 + 01	0.1517 + 01	0.8215 + 00	0.3834 + 01	0.9182 + 01	0.6121 + 00	0.6121 + 00
0.1800 + 01	0.3613 + 01	0.2359 + 01	0.1532 + 01	0.8127 + 00	0.3884 + 01	0.9382 + 01	0.6078 + 00	0.6078 + 00
0.1820 + 01	0.3698 + 01	0.2391 + 01	0.1547 + 01	0.8038 + 00	0.3934 + 01	0.9582 + 01	0.6036 + 00	0.6036 + 00
0.1840 + 01	0.3783 + 01	0.2422 + 01	0.1562 + 01	0.7948 + 00	0.3984 + 01	0.9782 + 01	0.5995 + 00	0.5995 + 00
0.1860 + 01	0.3870 + 01	0.2452 + 01	0.1577 + 01	0.7859 + 00	0.4034 + 01	0.9982 + 01	0.5956 + 00	0.5956 + 00
0.1880 + 01	0.3957 + 01	0.2483 + 01	0.1592 + 01	0.7765 + 00	0.4084 + 01	1.0182 + 01	0.5918 + 00	0.5918 + 00
0.1900 + 01	0.4045 + 01	0.2514 + 01	0.1608 + 01	0.7674 + 00	0.4134 + 01	1.0382 + 01	0.5880 + 00	0.5880 + 00
0.1920 + 01	0.4134 + 01	0.2544 + 01	0.1624 + 01	0.7581 + 00	0.4184 + 01	1.0582 + 01	0.5844 + 00	0.5844 + 00
0.1940 + 01	0.4224 + 01	0.2574 + 01	0.1639 + 01	0.7488 + 00	0.4234 + 01	1.0782 + 01	0.5808 + 00	0.5808 + 00
0.1960 + 01	0.4315 + 01	0.2607 + 01	0.1655 + 01	0.7395 + 00	0.4284 + 01	1.0982 + 01	0.5773 + 00	0.5773 + 00
0.1980 + 01	0.4407 + 01	0.2637 + 01	0.1671 + 01	0.7302 + 00	0.4334 + 01	1.1182 + 01	0.5739 + 00	0.5739 + 00

Table A.2 | Continued

M	P_2/P_1	P_2/P_1	P_2/P_1	T_2/T_1	P_2/P_1	P_2/P_1	P_2/P_1	M_2
0.2000 + 01	0.4500 + 01	0.4500 + 01	0.4500 + 01	0.4500 + 01	0.4500 + 01	0.4500 + 01	0.4500 + 01	0.4500 + 01
0.2050 + 01	0.4736 + 01	0.2740 + 01	0.4736 + 01	0.4736 + 01	0.2740 + 01	0.1687 + 01	0.7209 + 00	0.5640 + 01
0.2100 + 01	0.4978 + 01	0.2812 + 01	0.4978 + 01	0.4978 + 01	0.2812 + 01	0.1779 + 01	0.6975 + 00	0.5900 + 01
0.2150 + 01	0.5226 + 01	0.2882 + 01	0.5226 + 01	0.5226 + 01	0.2882 + 01	0.1871 + 01	0.6742 + 00	0.6163 + 01
0.2200 + 01	0.5480 + 01	0.2951 + 01	0.5480 + 01	0.5480 + 01	0.2951 + 01	0.1887 + 01	0.6511 + 00	0.6438 + 01
0.2250 + 01	0.5740 + 01	0.3019 + 01	0.5740 + 01	0.5740 + 01	0.3019 + 01	0.1901 + 01	0.6281 + 00	0.5471 + 00
0.2300 + 01	0.6005 + 01	0.3086 + 01	0.6005 + 01	0.6005 + 01	0.3086 + 01	0.1919 + 01	0.6055 + 00	0.5406 + 00
0.2350 + 01	0.6276 + 01	0.3149 + 01	0.6276 + 01	0.6276 + 01	0.3149 + 01	0.1947 + 01	0.5833 + 00	0.5344 + 00
0.2400 + 01	0.6553 + 01	0.3212 + 01	0.6553 + 01	0.6553 + 01	0.3212 + 01	0.1993 + 01	0.5615 + 00	0.5286 + 00
0.2450 + 01	0.6836 + 01	0.3273 + 01	0.6836 + 01	0.6836 + 01	0.3273 + 01	0.2040 + 01	0.5401 + 00	0.5231 + 00
0.2500 + 01	0.7125 + 01	0.3333 + 01	0.7125 + 01	0.7125 + 01	0.3333 + 01	0.2088 + 01	0.5208 + 01	0.5179 + 00
0.2550 + 01	0.7420 + 01	0.3392 + 01	0.7420 + 01	0.7420 + 01	0.3392 + 01	0.2137 + 01	0.4990 + 00	0.5130 + 00
0.2600 + 01	0.7720 + 01	0.3449 + 01	0.7720 + 01	0.7720 + 01	0.3449 + 01	0.2187 + 01	0.4793 + 00	0.5083 + 00
0.2650 + 01	0.8026 + 01	0.3505 + 01	0.8026 + 01	0.8026 + 01	0.3505 + 01	0.2238 + 01	0.4601 + 00	0.5039 + 00
0.2700 + 01	0.8338 + 01	0.3559 + 01	0.8338 + 01	0.8338 + 01	0.3559 + 01	0.2290 + 01	0.4416 + 00	0.5000 + 00
0.2750 + 01	0.8656 + 01	0.3612 + 01	0.8656 + 01	0.8656 + 01	0.3612 + 01	0.2343 + 01	0.4236 + 00	0.4956 + 00
0.2800 + 01	0.8980 + 01	0.3664 + 01	0.8980 + 01	0.8980 + 01	0.3664 + 01	0.2397 + 01	0.4062 + 00	0.4918 + 00
0.2850 + 01	0.9316 + 01	0.3714 + 01	0.9316 + 01	0.9316 + 01	0.3714 + 01	0.2451 + 01	0.3895 + 00	0.4882 + 00
0.2900 + 01	0.9664 + 01	0.3763 + 01	0.9664 + 01	0.9664 + 01	0.3763 + 01	0.2507 + 01	0.3733 + 00	0.4847 + 00
0.2950 + 01	1.0024 + 01	0.3811 + 01	1.0024 + 01	1.0024 + 01	0.3811 + 01	0.2563 + 01	0.3577 + 00	0.4814 + 00
0.3000 + 01	1.0396 + 01	0.3857 + 01	1.0396 + 01	1.0396 + 01	0.3857 + 01	0.2621 + 01	0.3428 + 00	0.4782 + 00
0.3050 + 01	1.0780 + 01	0.3902 + 01	1.0780 + 01	1.0780 + 01	0.3902 + 01	0.2679 + 01	0.3283 + 00	0.4752 + 00
0.3100 + 01	1.1174 + 01	0.3947 + 01	1.1174 + 01	1.1174 + 01	0.3947 + 01	0.2738 + 01	0.3145 + 00	0.4723 + 00
0.3150 + 01	1.1578 + 01	0.3990 + 01	1.1578 + 01	1.1578 + 01	0.3990 + 01	0.2798 + 01	0.3012 + 00	0.4695 + 00
0.3200 + 01	1.2000 + 01	0.4031 + 01	1.2000 + 01	1.2000 + 01	0.4031 + 01	0.2860 + 01	0.2883 + 00	0.4669 + 00
0.3250 + 01	1.2440 + 01	0.4072 + 01	1.2440 + 01	1.2440 + 01	0.4072 + 01	0.2922 + 01	0.2762 + 00	0.4643 + 00
0.3300 + 01	1.2896 + 01	0.4112 + 01	1.2896 + 01	1.2896 + 01	0.4112 + 01	0.2985 + 01	0.2645 + 00	0.4619 + 00
0.3350 + 01	1.3368 + 01	0.4151 + 01	1.3368 + 01	1.3368 + 01	0.4151 + 01	0.3049 + 01	0.2533 + 00	0.4596 + 00
0.3400 + 01	1.3856 + 01	0.4188 + 01	1.3856 + 01	1.3856 + 01	0.4188 + 01	0.3114 + 01	0.2425 + 00	0.4573 + 00
0.3450 + 01	1.4350 + 01	0.4225 + 01	1.4350 + 01	1.4350 + 01	0.4225 + 01	0.3180 + 01	0.2322 + 00	0.4551 + 00
0.3500 + 01	1.4860 + 01	0.4261 + 01	1.4860 + 01	1.4860 + 01	0.4261 + 01	0.3247 + 01	0.2224 + 00	0.4531 + 00
0.3550 + 01	1.5384 + 01	0.4296 + 01	1.5384 + 01	1.5384 + 01	0.4296 + 01	0.3315 + 01	0.2129 + 00	0.4512 + 00
0.3600 + 01	1.5922 + 01	0.4330 + 01	1.5922 + 01	1.5922 + 01	0.4330 + 01	0.3384 + 01	0.2039 + 00	0.4492 + 00
0.3650 + 01	1.6474 + 01	0.4363 + 01	1.6474 + 01	1.6474 + 01	0.4363 + 01	0.3454 + 01	0.1953 + 00	0.4474 + 00

Table A.2.1 Continued

M	$\frac{D_2}{D_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$	M_2
0.4500 + 01	0.2346 + 02	0.4812 + 01	0.4875 + 01	0.9170 - 01	0.2654 + 02	0.4236 + 00
0.4550 + 01	0.2399 + 02	0.4853 + 01	0.4963 + 01	0.8806 - 01	0.2712 + 02	0.4226 + 00
0.4600 + 01	0.2452 + 02	0.4893 + 01	0.5052 + 01	0.8459 - 01	0.2771 + 02	0.4217 + 00
0.4650 + 01	0.2506 + 02	0.4873 + 01	0.5142 + 01	0.8126 - 01	0.2831 + 02	0.4208 + 00
0.4700 + 01	0.2560 + 02	0.4893 + 01	0.5233 + 01	0.7809 - 01	0.2891 + 02	0.4199 + 00
0.4750 + 01	0.2616 + 02	0.4912 + 01	0.5325 + 01	0.7505 - 01	0.2952 + 02	0.4191 + 00
0.4800 + 01	0.2671 + 02	0.4930 + 01	0.5418 + 01	0.7214 - 01	0.3013 + 02	0.4183 + 00
0.4850 + 01	0.2728 + 02	0.4948 + 01	0.5512 + 01	0.6936 - 01	0.3075 + 02	0.4175 + 00
0.4900 + 01	0.2784 + 02	0.4966 + 01	0.5607 + 01	0.6670 - 01	0.3138 + 02	0.4167 + 00
0.4950 + 01	0.2842 + 02	0.4983 + 01	0.5703 + 01	0.6415 - 01	0.3201 + 02	0.4160 + 00
0.5000 + 01	0.2900 + 02	0.5000 + 01	0.5800 + 01	0.6172 - 01	0.3265 + 02	0.4152 + 00
0.5100 + 01	0.3018 + 02	0.5033 + 01	0.5997 + 01	0.5715 - 01	0.3328 + 02	0.4138 + 00
0.5200 + 01	0.3138 + 02	0.5064 + 01	0.6197 + 01	0.5297 - 01	0.3393 + 02	0.4125 + 00
0.5300 + 01	0.3260 + 02	0.5093 + 01	0.6401 + 01	0.4913 - 01	0.3463 + 02	0.4113 + 00
0.5400 + 01	0.3383 + 02	0.5122 + 01	0.6610 + 01	0.4560 - 01	0.3539 + 02	0.4101 + 00
0.5500 + 01	0.3512 + 02	0.5149 + 01	0.6822 + 01	0.4236 - 01	0.3621 + 02	0.4090 + 00
0.5600 + 01	0.3642 + 02	0.5175 + 01	0.7038 + 01	0.3938 - 01	0.3709 + 02	0.4079 + 00
0.5700 + 01	0.3774 + 02	0.5200 + 01	0.7258 + 01	0.3664 - 01	0.4230 + 02	0.4069 + 00
0.5800 + 01	0.3908 + 02	0.5224 + 01	0.7481 + 01	0.3412 - 01	0.4378 + 02	0.4059 + 00
0.5900 + 01	0.4044 + 02	0.5246 + 01	0.7709 + 01	0.3180 - 01	0.4528 + 02	0.4050 + 00
0.6000 + 01	0.4183 + 02	0.5268 + 01	0.7941 + 01	0.2965 - 01	0.4682 + 02	0.4042 + 00
0.6100 + 01	0.4324 + 02	0.5289 + 01	0.8176 + 01	0.2767 - 01	0.4837 + 02	0.4033 + 00
0.6200 + 01	0.4468 + 02	0.5309 + 01	0.8415 + 01	0.2584 - 01	0.4996 + 02	0.4025 + 00
0.6300 + 01	0.4614 + 02	0.5329 + 01	0.8658 + 01	0.2416 - 01	0.5157 + 02	0.4018 + 00
0.6400 + 01	0.4762 + 02	0.5347 + 01	0.8903 + 01	0.2259 - 01	0.5320 + 02	0.4011 + 00
0.6500 + 01	0.4912 + 02	0.5365 + 01	0.9156 + 01	0.2115 - 01	0.5486 + 02	0.4004 + 00
0.6600 + 01	0.5065 + 02	0.5382 + 01	0.9411 + 01	0.1981 - 01	0.5655 + 02	0.3997 + 00
0.6700 + 01	0.5220 + 02	0.5399 + 01	0.9670 + 01	0.1857 - 01	0.5826 + 02	0.3991 + 00
0.6800 + 01	0.5378 + 02	0.5415 + 01	0.9933 + 01	0.1741 - 01	0.6000 + 02	0.3985 + 00
0.6900 + 01	0.5538 + 02	0.5430 + 01	0.1020 + 02	0.1635 - 01	0.6176 + 02	0.3979 + 00
0.7000 + 01	0.5700 + 02	0.5444 + 01	0.1047 + 02	0.1535 - 01	0.6355 + 02	0.3974 + 00
0.7100 + 01	0.5864 + 02	0.5459 + 01	0.1074 + 02	0.1443 - 01	0.6537 + 02	0.3968 + 00
0.7200 + 01	0.6031 + 02	0.5472 + 01	0.1102 + 02	0.1357 - 01	0.6721 + 02	0.3963 + 00
0.7300 + 01	0.6200 + 02	0.5485 + 01	0.1130 + 02	0.1277 - 01	0.6908 + 02	0.3958 + 00
0.7400 + 01	0.6372 + 02	0.5498 + 01	0.1159 + 02	0.1202 - 01	0.7097 + 02	0.3954 + 00
0.7500 + 01	0.6546 + 02	0.5510 + 01	0.1188 + 02	0.1133 - 01	0.7289 + 02	0.3949 + 00
0.7600 + 01	0.6722 + 02	0.5522 + 01	0.1217 + 02	0.1068 - 01	0.7483 + 02	0.3945 + 00
0.7700 + 01	0.6900 + 02	0.5533 + 01	0.1247 + 02	0.1008 - 01	0.7680 + 02	0.3941 + 00
0.7800 + 01	0.7081 + 02	0.5544 + 01	0.1277 + 02	0.9510 - 02	0.7880 + 02	0.3937 + 00
0.7900 + 01	0.7264 + 02	0.5555 + 01	0.1308 + 02	0.8982 - 02	0.8082 + 02	0.3933 + 00
0.8000 + 01	0.7450 + 02	0.5565 + 01	0.1339 + 02	0.8488 - 02	0.8287 + 02	0.3929 + 00
0.9000 + 01	0.9433 + 02	0.5651 + 01	0.1669 + 02	0.4964 - 02	0.1048 + 03	0.3898 + 00
0.1000 + 02	0.1165 + 03	0.5714 + 01	0.2039 + 02	0.3045 - 02	0.1292 + 03	0.3876 + 00
0.1100 + 02	0.1410 + 03	0.5762 + 01	0.2447 + 02	0.1945 - 02	0.1563 + 03	0.3859 + 00
0.1200 + 02	0.1678 + 03	0.5799 + 01	0.2894 + 02	0.1287 - 02	0.1859 + 03	0.3839 + 00
0.1300 + 02	0.1970 + 03	0.5828 + 01	0.3380 + 02	0.8771 - 03	0.2181 + 03	0.3847 + 00
0.1400 + 02	0.2285 + 03	0.5881 + 01	0.3905 + 02	0.3905 - 03	0.2528 + 03	0.3829 + 00
0.1500 + 02	0.2623 + 03	0.5870 + 01	0.4495 + 02	0.4495 - 03	0.2992 + 03	0.3823 + 00
0.1600 + 02	0.2985 + 03	0.5885 + 01	0.5072 + 02	0.3212 - 03	0.3301 + 03	0.3817 + 00
0.1700 + 02	0.3370 + 03	0.5898 + 01	0.5714 + 02	0.2390 - 03	0.3726 + 03	0.3813 + 00

Table A.2.1 Continued

M	$\frac{D_2}{D_1}$	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}$	M_2
0.1800 + 02	0.3778 + 03	0.5909 + 01	0.6394 + 02	0.1807 - 03	0.4176 + 03	0.3810 + 00
0.1900 + 02	0.4210 + 03	0.5918 + 01	0.7114 + 02	0.1386 - 03	0.4653 + 03	0.3806 + 00
0.2000 + 02	0.4665 + 03	0.5926 + 01	0.7872 + 02	0.1078 - 03	0.5153 + 03	0.3804 + 00
0.2200 + 02	0.5645 + 03	0.5939 + 01	0.9506 + 02	0.6741 - 04	0.6236 + 03	0.3800 + 00
0.2400 + 02	0.6718 + 03	0.5948 + 01	0.1129 + 03	0.4388 - 04	0.7421 + 03	0.3796 + 00
0.2600 + 02	0.7885 + 03	0.5956 + 01	0.1324 + 03	0.2953 - 04	0.8709 + 03	0.3794 + 00
0.2800 + 02	0.9145 + 03	0.5962 + 01	0.1534 + 03	0.2046 - 04	0.1010 + 04	0.3792 + 00
0.3000 + 02	0.1050 + 04	0.5967 + 01	0.1759 + 03	0.1453 - 04	0.1159 + 04	0.3790 + 00
0.3200 + 02	0.1194 + 04	0.5971 + 01	0.2001 + 03	0.1055 - 04	0.1319 + 04	0.3789 + 00
0.3400 + 02	0.1348 + 04	0.5974 + 01	0.2257 + 03	0.7804 - 05	0.1489 + 04	0.3788 + 00
0.3600 + 02	0.1512 + 04	0.5977 + 01	0.2529 + 03	0.5874 - 05	0.1669 + 04	0.3787 + 00
0.3800 + 02	0.1684 + 04	0.5979 + 01	0.2817 + 03	0.4488 - 05	0.1860 + 04	0.3786 + 00
0.4000 + 02	0.1866 + 04	0.5981 + 01	0.3121 + 03	0.3477 - 05	0.2061 + 04	0.3786 + 00
0.4200 + 02	0.2058 + 04	0.5983 + 01	0.3439 + 03	0.2727 - 05	0.2272 + 04	0.3785 + 00
0.4400 + 02	0.2258 + 04	0.5985 + 01	0.3774 + 03	0.2163 - 05	0.2493 + 04	0.3785 + 00
0.4600 + 02	0.2468 + 04	0.5987 + 01	0.4124 + 03	0.1733 - 05	0.2725 + 04	0.3784 + 00
0.4800 + 02	0.2688 + 04	0.5987 + 01	0.4489 + 03	0.1402 - 05	0.2967 + 04	0.3784 + 00
0.5000 + 02	0.2916 + 04	0.5988 + 01	0.4871 + 03	0.1144 - 05	0.3219 + 04	0.3784 + 00

COURS OPTION MAE / BRANCHE AE ET MASTER MAS
ECOULEMENTS COMPRESSIBLES ET
SUPERSONIQUES

M. Massot
Professeur, Ecole Centrale Paris
Laboratoire EM2C - UPR CNRS 288
marc.massot@em2c.ecp.fr

Documents autorisés - On proposera des réponses aux exercices en essayant d'être concis, en s'efforçant de donner des réponses aussi complètes que possible et de montrer une compréhension des questions traitées. En particulier, pour les questions de cours, on ne demande pas de recopier les notes de cours mais de proposer une synthèse permettant de répondre à la question. Les quatre parties du contrôle sont indépendantes; par contre dans le problème, il est important de bien lire l'ensemble du problème et de progresser par étapes.

1 Modélisation du trafic routier (d'après Leveque 1992 noté sur 19)

On considère l'équation de conservation sur la densité de voiture $\rho(t, x)$:

$$\partial_t \rho + \partial_x (f(\rho)) = 0,$$

où $f(\rho)$ désigne le flux de voiture. En général, une modélisation standard montre que le flux s'écrit comme le produit de la densité locale par une vitesse u , qui va ici, pour ne pas complexifier le modèle, être donnée comme une fonction de ρ . Une possibilité permettant de modéliser l'arrêt du trafic quand la densité de voiture atteint un maximum ρ_{\max} ainsi que la limitation de vitesse u_{\max} quand la densité de voiture est faible, est donnée par

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

La vitesse u_{\max} représente donc la vitesse maximum autorisée et ρ_{\max} une densité maximum correspondant à un bouchon où les voitures sont pare-choc contre pare-choc, à l'arrêt. L'expression du flux de départ est donc :

$$f(\rho) = \rho u = \rho u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

La forme du flux est telle qu'il est concave (contrairement à Burgers où il est convexe) et les discontinuités admissibles sont telles que $\rho_G < \rho_D$. Pour simplifier la formulation du problème et les calculs, on se placera dans le cas où $\rho_{\max} = 1$ et $u_{\max} = 1$, ce qui revient à adimensionner les variables.

Exercice 1 : Résolution du problème de Riemann (6/19).

- I. Rappeler l'équation des courbes caractéristiques et expliquer quelle est la vitesse de propagation de l'information dans cette équation non-linéaire.
- II. Résoudre le problème de Riemann pour $\rho_G = \frac{1}{5}\rho_{\max} = \frac{1}{5}$, $\rho_D = \rho_{\max} = 1$, qui correspond au feu rouge. Expliquer ce qui se passe en traçant tant le diagramme des caractéristiques dans ce cas, que l'allure de la solution à deux instants successifs. Comparer la dynamique des solutions suivant la valeur de ρ_G en référence à la feuille d'exercice 1.
- III. Pour le problème de Riemann résolu, on représentera le diagramme dans le plan (x, t) des trajectoires des véhicules. Ces trajectoires seront notées $Y(t)$; elles sont telles que

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = u(\rho(t, Y(t))) = 1 - \rho(t, Y(t)) \\ Y(0) = x^0. \end{cases} \quad (1)$$

On montrera, en particulier que les trajectoires des véhicules, dans le cas de la présence d'une onde de choc, traversent cette onde.

Considérons le problème Cauchy pour la donnée initiale particulière que l'on appellera le petit "accordéon" du fait de la structure de sa donnée initiale par rapport au problème traité dans le cours :

$$\rho^0(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ 1 + x/2, & x \in]-1, 0], \\ 1 - x/2, & x \in [0, 1[, \end{cases} \quad (2)$$

et l'on veut construire la solution en tout temps de l'équation du trafic pour cette donnée initiale. Ce cas correspond physiquement à la présence d'une zone très localisée de petit "bouchon" dans un trafic régulier et on se propose de déterminer la dynamique qui en résulte.

Exercice 2 : Résolution par la méthode des caractéristiques sur $[0, T^*[$ (4/19).

- I. Effectuer la résolution de l'évolution de la solution par la méthode des caractéristiques et déterminer le temps d'existence d'une solution régulière T^* . On présentera la solution du problème sur cet intervalle $[0, T^*[$ en faisant un graphique de la solution $\rho(t, x)$ pour deux instants $T^*/2$ et T^* et on reliera ces solution au diagramme des caractéristiques.
- II. Que se passe-t-il à l'instant T^* ? Expliquer.

Exercice 3 : Résolution de la dynamique de la solution faible pour $t \geq T^*$ (9/19).

Après le temps T^* , un choc s'est formé qui se propage. Notons $\sigma(t)$ sa vitesse pour $t \geq T^*$ et $\varphi(t)$ sa position. Nous allons établir une équation différentielle ordinaire permettant de caractériser les deux fonctions du temps $\sigma(t)$ et $\varphi(t)$, pour $t > T^*$ et la dynamique qui en résulte.

- I. La vitesse de ce choc est donnée par

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \sigma(t, \varphi(t)) = 1 - (\rho^-(t, \varphi(t)) + \rho^+(t, \varphi(t))),$$

où ρ^- et ρ^+ sont les valeur de la solution de chaque coté de la discontinuité. Justifier cette relation qui provient de la relation de Rankine-Hugoniot appliquée à l'onde de choc qui permet de relier la vitesse propagation du choc à l'amplitude du saut de la variable.

- II. Quelles sont les valeurs de φ et de σ à l'instant T^* qui permettent de donner la condition initiale de l'équation différentielle ordinaire sur $\varphi(t)$?
- III. En utilisant l'équation des caractéristiques dans chacun des domaines à gauche et à droite de la discontinuité (localisée en $\varphi(t)$ à l'instant t), domaines où la solution est régulière, ainsi que la propriété que vérifie la solution le long des caractéristiques qui sont des droites, trouver les valeurs de $\rho^-(t, \varphi(t))$ et $\rho^+(t, \varphi(t))$ comme des fonctions simple de t (indication : on montrera que la caractéristique est forcément issue pour

l'état droit de ξ appartenant au segment $[0, 1]$ et, si elle passe par le point $(t, \varphi(t))$, alors on doit avoir $(\varphi(t) - \xi) = (-1 + \xi)t$ que l'on justifiera et qui permet de trouver le pied de la caractéristique ξ en fonction du point $(t, \varphi(t))$.

IV. Nous avons donc obtenu une équation différentielle ordinaire sur $\varphi(t)$ pour $t \in [T^*, +\infty]$ avec une donnée initiale en T^* ; résoudre cette équation différentielle en séparant les variables.

V. Présenter sur deux figures l'allure de la solution aux instants suivant le temps de formation du choc ainsi que le diagramme des caractéristiques. Que font les droites caractéristiques par rapport à la dynamique de l'onde de choc? Le choc est-il entropique? Expliquer le comportement qualitatif de la solution, en particulier on pourra évaluer l'évolution temporelle de l'amplitude du saut de la solution à travers la discontinuité et de sa vitesse.

2 Exercice : Discontinuité dans une tuyère de Laval (noté sur 9)

On considère l'écoulement dans une tuyère de Laval amorcée représenté sur la Figure 1 dans les cas où la pression de sortie est adaptée et vaut donc p_2 pour une pression génératrice de p_0 . Le but de cet exercice est de montrer ce qui se passe quand la pression de sortie décrit un intervalle $[p'_1, p_1]$ et génère l'apparition d'un choc dans le divergent tout en restant dans le contexte d'un écoulement quasi-monodimensionnel.

- I. Justifiez le fait que le choc stationnaire ne peut apparaître que dans le divergent.
- II. Donner une description précise de ce qui se passe physiquement quand on observe un choc dans le divergent. En particulier on indiquera le sens de variation des variables aérothermiques dans le divergent, d'une part avant le choc et d'autre après le choc en justifiant la réponse précisément.
- III. La présence d'un choc dans le divergent change-t-il le débit de la tuyère amorcée? L'enthalpie totale est-elle toujours conservée? Pourquoi? La température génératrice saute-t-elle à travers l'onde de choc? Expliquer.

Introduisons deux positions de choc x_1 et x_2 correspondant aux deux valeurs de la pression de sortie $p_{(s)}^1$ et $p_{(s)}^2$ respectivement. On veut montrer dans la suite de l'exercice que $x_2 > x_1$ implique $p_{(s)}^2 < p_{(s)}^1$.

- IV. Si l'on note $M_{(a)}^i$ le nombre de Mach amont du choc dans la position x_i , quelle est la relation d'ordre entre $M_{(a)}^1$ et $M_{(a)}^2$?
- V. Quelle relation d'ordre y a-t-il entre la pression génératrice après le choc p_0^1 et p_0^2 ? En déduire, en utilisant la forme du débit dans la tuyère la relation d'ordre entre les nombres de Mach en sortie dans les deux cas. Enfin en se rappelant que la la pression

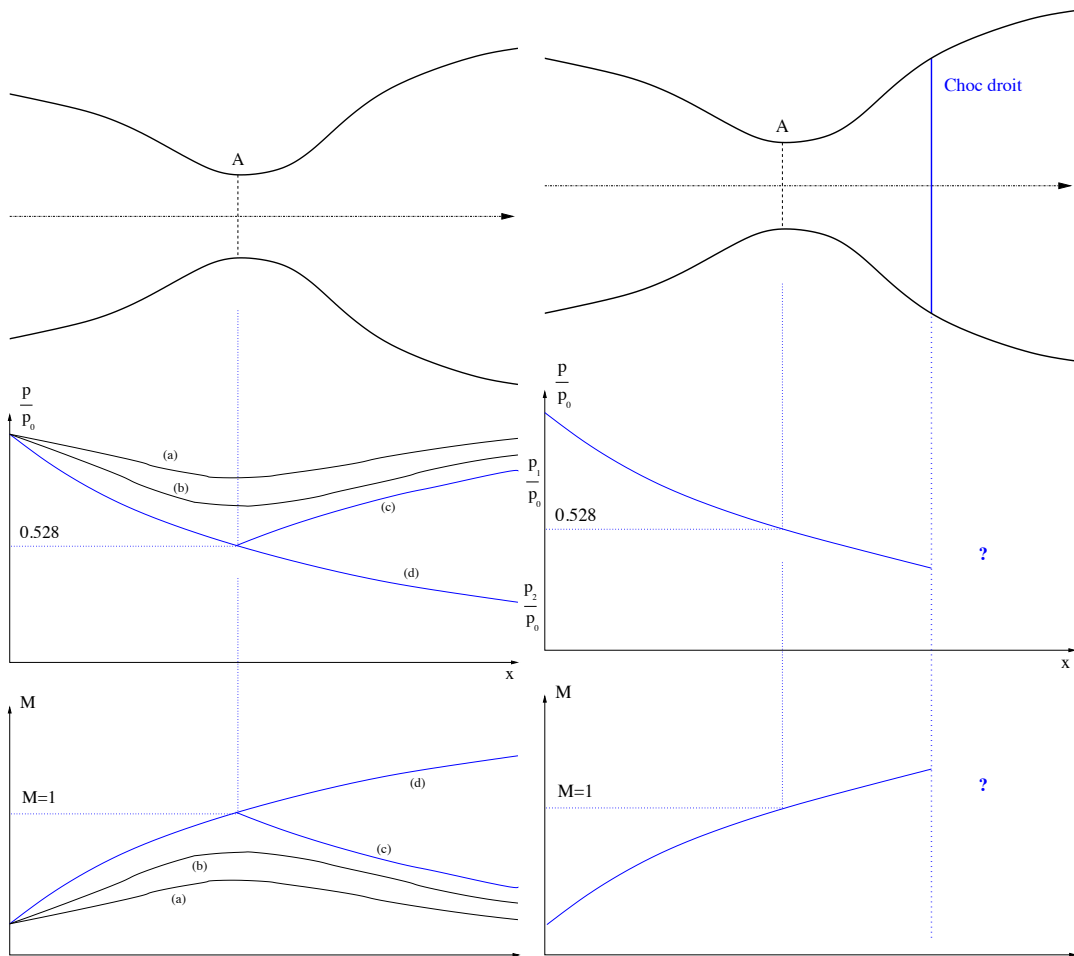


FIGURE 1 – Tuyère amorcée isentropique à gauche et choc dans le divergent à droite.

de sortie sur la pression génératrice est une fonction croissante du nombre de Mach en sortie, en déduire la relation d'ordre entre les deux pressions de sortie.

- VI. En déduire les diverses formes du profil de pression et de Mach pour plusieurs lieu de l'onde de choc dans le divergent entre le col et la section de sortie. Quel intervalle de pression est compatible en sortie pour que l'hypothèse d'écoulement quasi-monodimensionnel reste adaptée?

3 Problème : Conception d'une tuyère supersonique par la méthode des caractéristiques (noté sur 22)

On se propose dans ce Problème d'utiliser la théorie des caractéristiques pour les écoulements bi-dimensionnels permanents homentropiques homoénergétiques afin de concevoir deux types de tuyères supersoniques dont l'écoulement en sortie de tuyère est quasi-1D à Mach 2.4. La première est utilisée dans le cadre des souffleries supersoniques, pour lesquelles on doit avoir un écoulement quasi-monodimensionnel d'excellente qualité et que l'on obtient en faisant varier très lentement la section sur une relative grande distance (plus longue que ne le montre la figure 2-haut). La seconde est une tuyère pour la propulsion spatiale pour laquelle on doit concevoir une tuyère de petite taille et pour laquelle la qualité de l'écoulement aval est moins importante; on se permet donc d'avoir une variation de section discontinue, même si la section varie de manière continue comme indiqué sur la Figure 2-bas.

Pour des raisons de symétrie, on ne va travailler que dans la demie-tuyère supérieure dans les deux cas. On note Θ_{max} dans le premier cas l'angle que fait la tuyère avec l'axe horizontal au point d'inflexion C , c'est-à-dire l'angle maximum de l'écoulement au bord par rapport à l'écoulement aligné avec l'axe de symétrie au centre. Pour la seconde tuyère, l'angle maximum est atteint au point A pour lequel il vaut Θ_{max-C} (C pour Court). En ce point, on observe une détente de Prandtl-Meyer au point A . Dans le second cas, dans le triangle ABC , les caractéristiques représentées ne sont pas rectilignes (même si elles peuvent le sembler sur la représentation), mais le sont ailleurs. Le second cas peut être vu comme la limite du premier quand la distance entre les points A et C du premier cas devient très petite.

Dans les deux premières sections, on suppose que la solution est connue, c'est-à-dire que l'on a la forme de la tuyère avec un écoulement sonique au col et supersonique uniforme en sortie à Mach 2.4. On va analyser ces écoulements puis concevoir graphiquement la tuyère courte.

3.1 Tuyère longue (8/22)

- I. Identifier les zones d'ondes simples et celles qui ne le sont pas (on se contentera de travailler sur la zone au dessus de la ligne de symétrie). Justifier votre réponse.
- II. En utilisant la conservation des invariants de Riemann et en suivant la ligne pleine dans le cas de la première tuyère (qui se trouve être alternativement une \mathcal{C}_- ou une

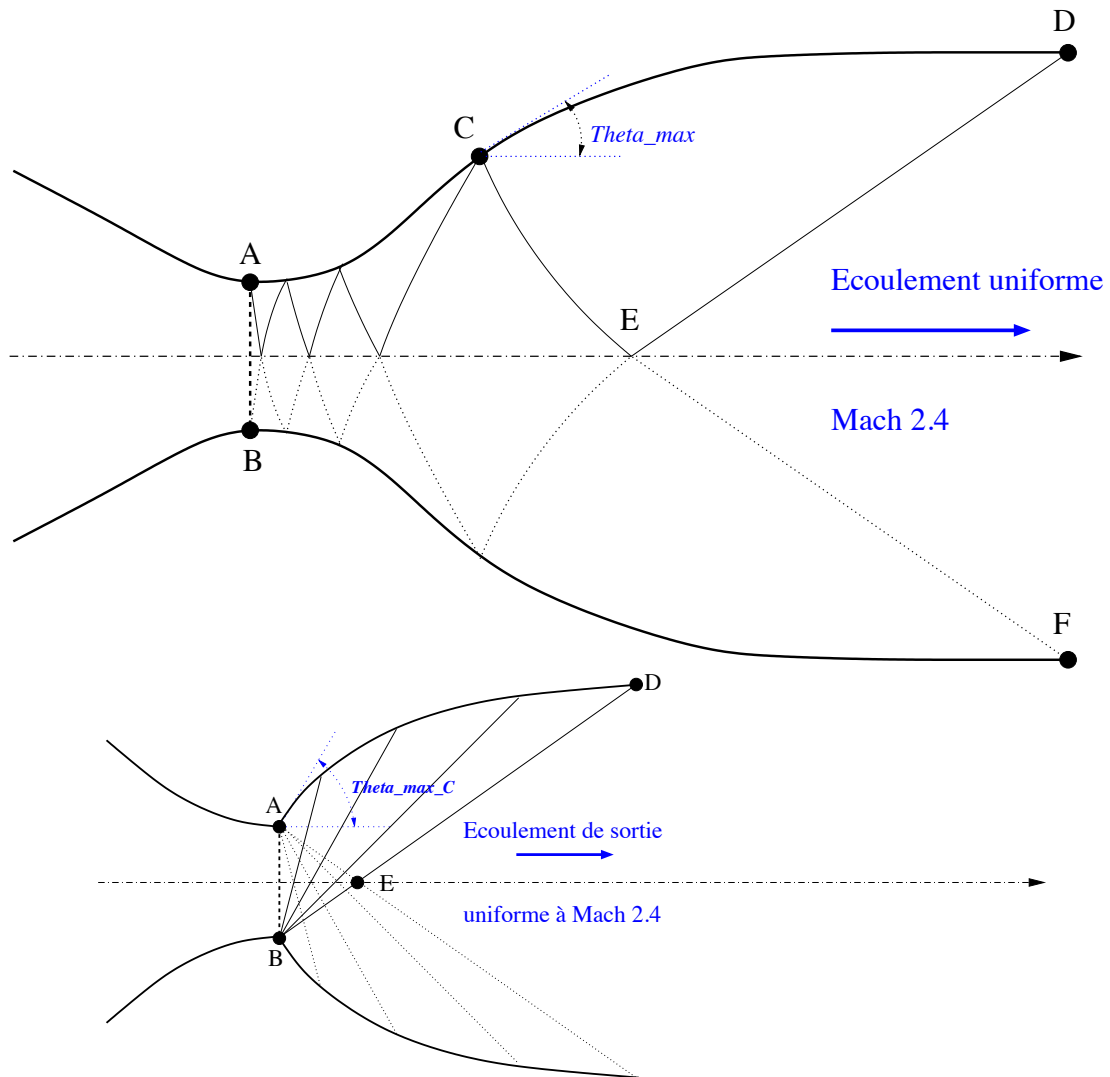


FIGURE 2 – Conception de tuyère longue à écoulement très contrôlé pour une soufflerie supersonique à gauche et de tuyère courte pour la propulsion spatiale à droite. Les lignes sont des \mathcal{C}_+ ou des \mathcal{C}_- ; dans la figure du bas, les \mathcal{C}_+ sont en trait plein et les \mathcal{C}_- en trait pointillé.

\mathcal{C}_+), évaluer l'évolution du nombre de Mach à chaque point de rebroussement, qu'il soit au centre ou sur le bord de la tuyère (indication : on commencera pas le point D , pour lequel l'écoulement est horizontal, puis on arrivera à E , puis à C et ainsi de suite en utilisant les invariants).

III. On suppose que la forme de la partie expansion AC pour la première tuyère est fixée. Expliquer comment on peut alors résoudre l'ensemble de l'écoulement dans la zone ACE .

IV. Représenter les \mathcal{C}_+ dans le triangle curviligne DEC et proposer une façon de construire le bord de la tuyère, l'écoulement étant connu sur la courbe $\mathcal{C}_- : CE$, par approximation successive en discrétisant la courbe CE .

3.2 Tuyère courte (6/22)

On travaille dans un voisinage du point A et on considère ici la détente de Prandtl-Meyer centrée au point A qui fait passer l'écoulement sonique de vitesse horizontale à un écoulement d'angle Θ_{max-C} positif.

I. En utilisant les invariants de Riemann, donner la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer juste en aval de la détente, c'est-à-dire pour un écoulement faisant un angle de Θ_{max-C} avec l'horizontale.

II. En supposant que la \mathcal{C}_- issue de A qui passe par E aboutit à un écoulement uniforme horizontal à Mach 2.4 en E et dans le dièdre DEF , déterminer l'angle Θ_{max-C} (la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer à Mach 2.4 est 36.75 degrés).

III. Identifier les zones d'onde simple dans cette nouvelle tuyère et indiquer précisément où sont les caractéristiques qui sont des droites et les caractéristiques qui sont des courbes.

3.3 Construction graphique de la tuyère courte (8/22)

On se propose de construire graphiquement la tuyère à partir d'une discrétisation de la détente de Prandtl-Meyer en 7 \mathcal{C}_- , une première correspondant à un angle d'écoulement de $\theta = 0.375$ degré, qui aboutit au point numéroté 1 sur la ligne de symétrie t pour laquelle on vérifiera que l'angle avec la verticale est de $-73,725$ degré, puis 6 autre faisant un sixième de l'angle restant pour arriver à l'angle Θ_{max-C} calculé ci-dessus.

I. Évaluer le nombre de Mach en ce point 1.

II. On prendra ensuite une discrétisation du reste de la détente de Prandtl-Meyer et on déterminera successivement les intersections de ces \mathcal{C}_- avec la \mathcal{C}_+ issue du point 1, donnant ainsi les point 2 à 7 sur la figure 3.

III. La \mathcal{C}_- partant de A et aboutissant au point 7 marque la fin de la détente de Prandtl-Meyer. Expliquer pourquoi l'écoulement au point 7 et 8 sont identiques.

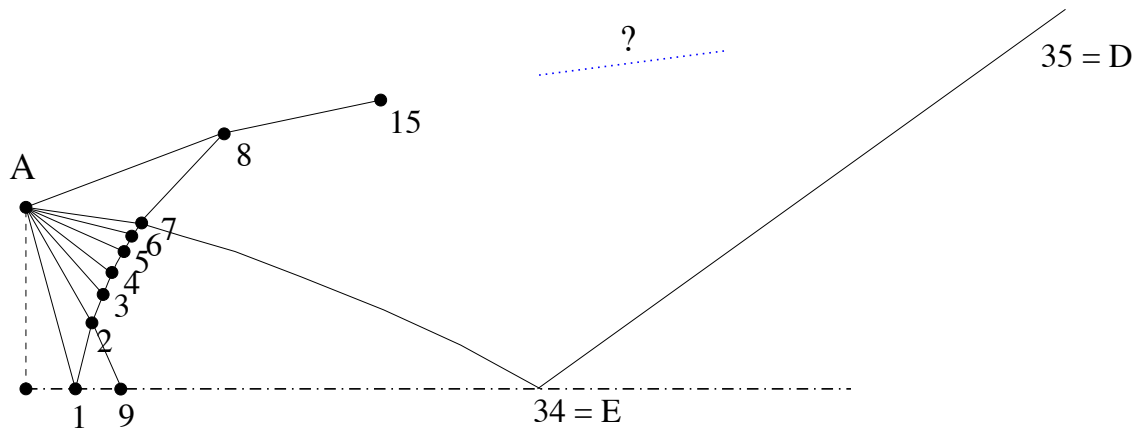


FIGURE 3 – Début de construction graphique de la tuyère courte.

Le point 8 est obtenu comme intersection de la \mathcal{C}_+ rectiligne issue de 7 et de la droite de pente $1/2(\Theta_{max-C} + \theta_8) = 1/2(\Theta_{max-C} + \theta_7)$ issue de A.

IV. On construit ainsi le bord de la tuyère. Expliquer comment on va itérer le processus et aboutir au point 34, qui correspond à une approximation du point E , puis au point 35, qui correspond à une approximation du point D .

V. En fait au point 1, il y a une légère inconsistance car on devrait avoir un angle de l'écoulement de zéro, alors que l'on a choisit 0.375 degrés dans le but de l'approximation de la solution. Proposer une explication pour justifier cette très légère inconsistance.

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

Contrôle de connaissance - 16 mars 2012

Adam LARAT

Durée 3 heures (*Tous les documents papier sont autorisés, ainsi que l'usage de calculatrices. Tous autres appareils électroniques sont interdits*).

Le contrôle de connaissance se compose de deux questions de cours, de deux exercices portant sur les ondes de choc normales et sur les chocs obliques et d'un problème long. Pour toutes les questions, le fluide considéré est un gaz idéal polytropique et $\gamma = 1.4$. Tous les angles sont donnés en degré, n'oubliez pas de changer le mode de calcul des fonctions trigonométriques de vos calculatrices.

1 Questions de Cours

1.1 Question 1 : le tube à choc

On s'intéresse à un tube à choc, dans l'approximation d'un écoulement instationnaire monodimensionnel. On considère un état initial, à l'instant $t=0$, constitué de deux gaz au repos de chaque coté d'une membrane que l'on retire à l'instant initial. Ces gaz sont des fluides parfaits idéaux polytropiques non miscibles notés "état W_G ", en ce qui concerne l'état à gauche de la membrane (de pression p_G , de température T_G , de vitesse $u_G = 0$, de masse molaire \mathcal{M}_G et de coefficient γ_G) et "état W_D ", à droite de la membrane (de pression $p_D \gg p_G$, de température $T_D = T_G$, de vitesse $u_D = 0$, de masse molaire $\mathcal{M}_D \gg \mathcal{M}_G$ et de coefficient γ_D). Cette donnée initiale correspond au problème de Riemann traité en cours.

- 1) *Rappeler la structure du diagramme des caractéristiques dans le plan (x, t) et justifier sa structure centrée. Rappeler par quels types d'ondes sont connectés les divers états constants obtenus dans la résolution de ce problème de Riemann. Dans quelle direction se déplace l'interface entre les deux fluides non-miscibles ?*

1.2 Question 2 : le Bell XS1

Le premier vol supersonique - officiellement reconnu comme tel - remonte au 14 octobre 1947. Ce jour-là, le Bell XS1 piloté par Chuck Yeager atteignait $M = 1.06$ et ouvrait la voie à un nouveau régime de vol, dans lequel les ondes de choc dominant l'écoulement. À $M = 1.06$, on a alors observé un arc de choc détaché du fuselage en amont du nez de l'avion profilé comme une balle de fusil. Un peu plus tard dans le courant de l'année suivante, le même pilote dans le même avion atteignait $M = 1.45$. Dans cette configuration de vol, un choc oblique attaché au nez de l'avion se formait (voir Figure 1).

- 2) *Expliquer la différence entre la position des ondes de chocs dans les deux régimes de vol.*

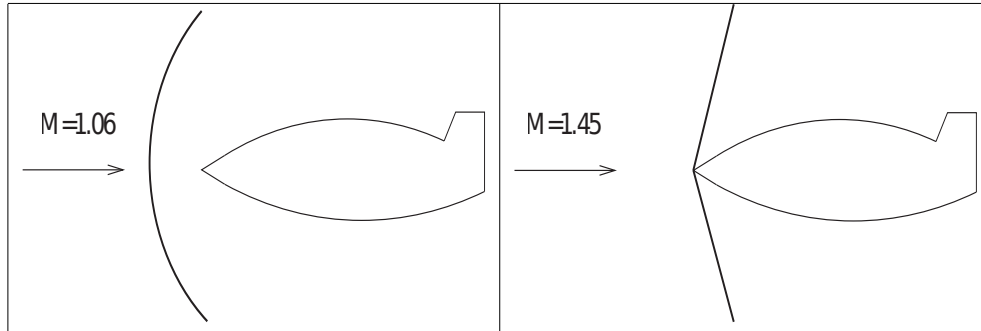


FIGURE 1 – Illustration des deux configurations de vol du même avion Bell XS1 entre son premier vol à Mach 1.06 (gauche) et un vol l'année suivante à Mach 1.45 (droite).

2 Exercice : Mesure de vitesse supersonique par un tube de Pitot

On considère une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique. L'écoulement autour de la navette est supersonique. Sur le nez de cette navette se trouve un tube de Pitot qui mesure la pression d'arrêt p_0^A au point A (voir Figure 2). On suppose en outre qu'un thermocouple permet de mesurer la température T_0^A en ce même point (température d'arrêt). En régime supersonique, un choc détaché se forme en amont du tube ; on approchera cet discontinuité en arc par un choc droit. Un capteur de pression situé en B permet de mesurer la pression statique p_B avant ce choc. Nous allons montrer que ce dispositif permet de connaître la vitesse de la navette en suivant la démarche suivante :

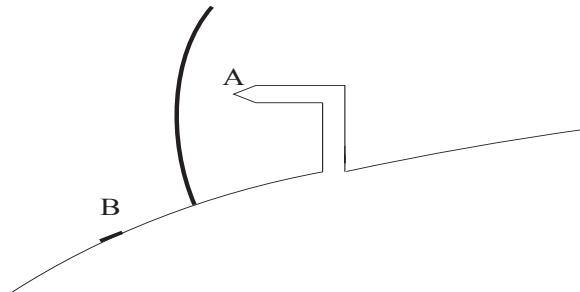


FIGURE 2 – Mesure de vitesse en régime supersonique par un tube de Pitot. La courbe de choc devant le tube de Pitot est assimilée à un choc droit.

- 1) En introduisant l'état B et l'état A respectivement en amont et en aval du choc, poser le problème en termes de grandeurs connues et inconnues.
- 2) On souhaite montrer que la vitesse de la navette peut s'exprimer en fonction du nombre de Mach amont M_B comme unique inconnue.
 - a) Justifier le fait que la température d'arrêt se conserve à travers le choc. Rappeler alors la relation entre la température d'arrêt et la température statique.

- b) En déduire la célérité du son c_B en amont du choc et exprimer la vitesse de la navette en fonction de M_B comme unique inconnue.
- 3) Montrer que le rapport entre la pression totale en aval du choc et de la pression statique en amont du choc peut être exprimé comme fonction du Mach amont uniquement. On mettra cette relation sous la forme suivante :

$$\frac{p_0^A}{p_B} = \frac{\gamma + 1}{2} M_B^2 \left[\frac{(\gamma + 1)^2 M_B^2}{2\gamma M_B^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Note : dans le cas où $M_B > 1$, on montre que la relation ci-dessus est inversible. La table 1 ci-dessous fournit des valeurs tabulées des nombres de Mach M_A et M_B en fonction du rapport (pression totale en aval du choc) / (pression statique en amont du choc).

- 4) Calculer la vitesse de la navette pour les données mesurées suivantes : pression statique en B égale à 2.83 Pa, pression d'arrêt en A égale à 92.42 Pa, température d'arrêt en A égale à 1200 K. À cet instant du vol, la constante r de l'air, définie comme le rapport de la constante universelle des gaz parfaits, R , et de la masse molaire de l'air dans les conditions considérées, est égale à $280 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

M_B	M_A	$\frac{p_0^A}{p_B}$
4.50	0.42355	26.539
4.60	0.42168	27.710
4.70	0.41992	28.907
4.80	0.41826	30.130
4.90	0.41670	31.379
5.00	0.41523	32.653
5.10	0.41384	33.954
5.20	0.41252	35.280
5.30	0.41127	36.631
5.40	0.41009	38.009
5.50	0.40897	39.412

TABLE 1 – Table de ratio entre la pression totale en aval et la pression statique en amont du choc pour $\gamma = 1.4$

3 Exercice : Optimisation d'une entrée d'air en écoulement supersonique

On peut montrer que la poussée d'un réacteur dépend fortement des pertes de pression génératrice p_0 occasionnées par le système de chocs présents dans l'entrée d'air. On introduit de ce fait un paramètre $\eta = p'_0/p_0$, rapport entre la pression génératrice à la fin de l'entrée d'air et la pression génératrice initiale. On souhaite maintenant maximiser la valeur de η . Dans les questions suivantes,

l'écoulement amont sera caractérisé par un nombre de Mach de $M = 2$ et l'écoulement à l'intérieur de la conduite sera toujours supposé subsonique.

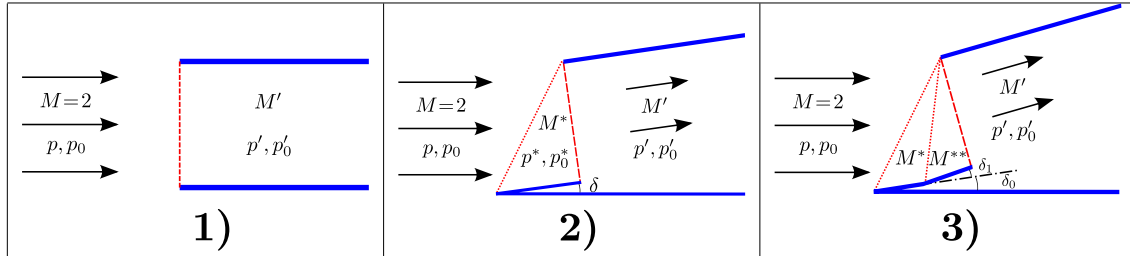


FIGURE 3 – Trois configurations pour une entrée d'air dans un écoulement supersonique. Sur chacune de ces figures, les lignes pleines bleues désignent la structure, les pointillés longs rouges les chocs normaux et les petits pointillés rouges les chocs obliques. À gauche, cas du choc droit. Au milieu, avec une rampe de pente δ de manière à obtenir un choc faible à l'avant de l'entrée. À droite, une proue à deux pentes δ_0 et δ_1 .

Questions :

1) On se place dans le cas d'une entrée d'air de type Pitot (cf. Figure 3, en haut), où l'on observe simplement un choc normal dans la section d'entrée du dispositif. Ce choc sépare deux états W et W' de pression statique, pression d'arrêt et nombre de Mach respectifs p, p_0, M et p', p'_0, M' .

a) Montrer que η s'exprime en fonction du Mach M uniquement. On mettra si possible cette relation sous la forme :

$$\eta(M) = \left(\frac{(\gamma + 1)^{\gamma+1} M^{2\gamma}}{(2 + (\gamma - 1)M^2)^\gamma (2\gamma M^2 - (\gamma - 1))} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (1)$$

b) Que vaut η dans le cas où $M = 2$?

2) On souhaite diminuer la violence du choc. Pour ce faire, on utilise un système à proue émergente défectant l'écoulement amont d'un angle δ , voir Figure 3 au milieu. On suppose que l'onde de choc oblique ainsi obtenue vient "taper" l'entrée d'air pile en son sommet, comme illustré sur la Figure 3.

a) En utilisant l'abaque de choc oblique donnée en annexe, lire l'angle σ du choc oblique obtenu pour des angles de déflexion $\delta = 10, 16$ et 20° (on se contentera d'une précision au degré près). Pourquoi avoir choisi cette valeur plutôt que l'autre valeur possible ?

b) Pour chacun de ces angles de déflexion, calculer M^* , le nombre de Mach de l'état intermédiaire compris entre le choc oblique et le choc normal d'entrée du dispositif.

c) Pour chacune de ces configurations calculer alors η . Conclure.

3) On souhaite améliorer encore le dispositif. On adopte une double proue émergente, avec $\delta_0 = 14^\circ$ et $\delta_1 = 8^\circ$, voir Figure 3, en bas. On obtient ainsi deux états intermédiaires W^* et W^{**} de nombres de Mach respectifs M^* et M^{**} séparés par un choc oblique. W^* est séparé de W par un premier choc oblique, tandis que W^{**} est séparé de W' par un choc normal.

- a) À nouveau en lisant sur l'abaque donnée en annexe, donner les angles des chocs obliques σ_0 et σ_1 , ainsi que les nombres de Mach M^* et M^{**} .
Note : Pour σ_1 on considérera une interpolation linéaire entre les valeurs obtenues pour les deux abaques les plus proches de celle de M^ .*
- b) Cette nouvelle configuration conduit-elle à un gain sur η ?
- 4) Comment pourrait-on améliorer encore le dispositif ? Quel point a-t-on négligé ? Qui peut réduire considérablement les gains de ce système ?

4 Problème : Optimisation d'un profil d'aile dans un écoulement supersonique

Considérons un profil en losange tel que celui défini par la figure 4 ci-dessous. Dans toute la suite du problème on supposera A_1 fixe en $(0, 0)$, A_2 fixe en $(c/2, t/2)$. On prendra A_3 mobile le long de (Δ_1) et A_4 fixe en $(c/2, -t/2)$.

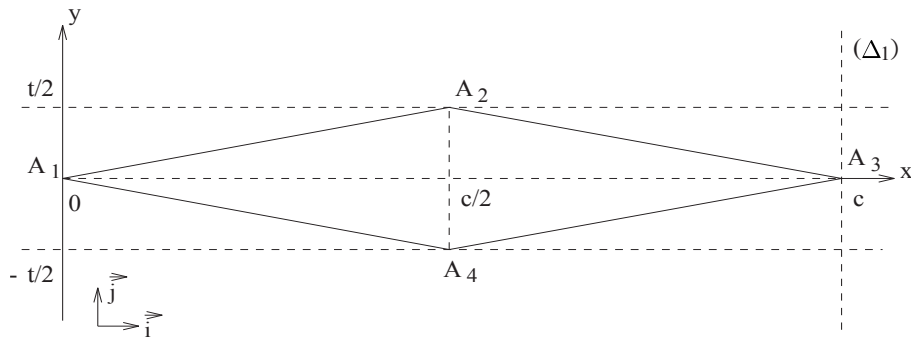


FIGURE 4 – Profil d'aile losangique.

Plongeons maintenant ce profil dans un écoulement supersonique de fluide parfait. Il se forme :

- un choc attaché au bord d'attaque A_1 du profil,
- une détente supersonique à partir du sommet A_2 et une autre à partir du sommet A_4 ,
- un choc attaché au bord de fuite A_3 .

Question 1 : Justifier la structure de l'écoulement décrit précédemment et illustré sur la Figure 5. Pourquoi de telles ondes se forment ?

On rappelle que la résultante des forces aérodynamiques exercées sur le profil est donnée par :

$$\vec{F} = \int_{\text{profil}} -p \cdot \vec{n} dl$$

où p désigne la pression, \vec{n} le vecteur unitaire normal au profil et pointant vers l'extérieur de celui-ci et dl est un élément de longueur infinitésimal. \vec{F} se décompose classiquement sur la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) en une composante de traînée D et une composante de portance L :

$$\vec{F} = D\vec{i} + L\vec{j}$$

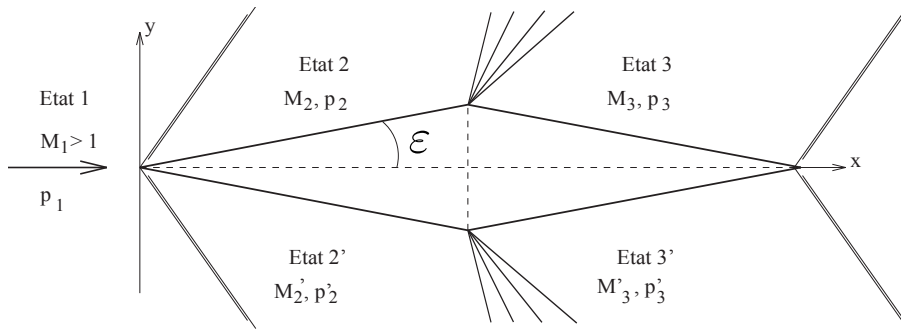


FIGURE 5 – Écoulement supersonique autour du profil.

Ces grandeurs sont généralement normalisées pour obtenir les coefficients de portance et de traînée sans dimension :

$$C_L = \frac{L}{q_1 c} \quad \text{et} \quad C_D = \frac{D}{q_1 c}$$

avec $q_1 = \gamma p M_1^2 / 2$ et $\gamma = 1.4$ désigne le rapport des chaleurs spécifiques. Optimiser les performances aérodynamiques du profil va alors consister à rendre le rapport C_D/C_L le plus proche possible de zéro, de façon à minimiser la résistance à l'avancement exprimée par la traînée, tout en maximisant la portance favorable au vol. Notons que dans le cadre du présent problème où les effets visqueux sont négligés (fluide parfait), la traînée du profil est réduite à la traînée d'onde.

Question 2 : Dans le cas où A_3 est en $(c, 0)$ et A_4 en $(c/2, -t/2)$, calculer l'expression exacte de C_D et C_L en fonction de p_2, p_3, q_1 et (t/c) . Compte tenu de la valeur de C_D/C_L , commenter les performances aérodynamiques de ce profil.

Question 3 : On cherche maintenant à modifier le profil de façon à améliorer le résultat précédent. On déplace le point A_3 le long de (δ_1) jusqu'à la position $(c, -\alpha t)$, où $\alpha \in [0; 1]$, comme indiqué sur la Figure 6 ci-dessous.

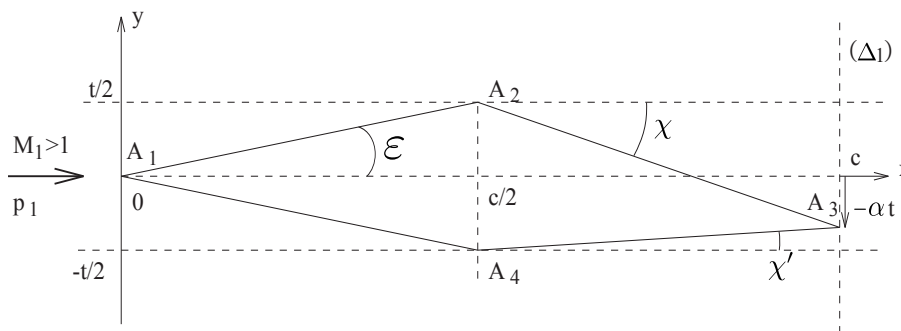


FIGURE 6 – Profil Modifié. A_3 peut descendre jusqu'à la coordonnée $(c, -t)$, c'est-à-dire qu' A_3 peut se retrouver plus bas qu' A_4 .

a) On définit les rapports de pression : $r = p_2/p_3$, $s = p'_3/p_2$. Montrer que :

$$\frac{C_D}{C_L} = \varphi(r, s, \alpha) \times \frac{t}{c}, \quad \text{avec } \varphi(r, s, \alpha) = \frac{2r - (2\alpha + 1) - rs(1 - 2\alpha)}{rs - 1}$$

b) Montrer que, dans le cas particulier où $\alpha = 1$, on a exactement : $\varphi(r, s, \alpha) = 3$.

c) Justifier le fait qu'à travers les deux détentes en A_2 et A_4 , on peut écrire les relations :

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}(M_2)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}(M_3)^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad s = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}(M'_2)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}(M'_3)^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2)$$

d) Décrire dans le cas général la procédure de calcul de r et s en supposant M_1 , p_1 , c , t et α connus. On donnera toutes les formules employées, même lorsque celles-ci sont implicites en la quantité cherchée. On détaillera successivement :

- l'obtention de p_2 , M_2 en fonction de l'état 1,
- l'obtention de M_3 en fonction de l'état 2, puis celle de r donc de p_3 ,
- l'obtention de M'_3 en fonction de l'état 2' puis celle de s donc de p'_3 .

Note : dans ce dernier cas, on fera bien attention à la nature des caractéristiques formant l'éventail de détente en A_4 .

e) On suppose maintenant : $M_1 = 1.7$, $p_1 = 1$, $c = 1$ et $t = 7/100$ (on considère des quantités adimensionnées). Calculer $\varphi(r, s, \alpha)$ pour ces conditions et $\alpha = 1/2$ puis $\alpha = 1/\sqrt{2}$. À chaque étape intermédiaire, on maintiendra une précision à 4 chiffres après la virgule.

Note : on utilisera l'abaque de choc oblique et la table de la fonction de Prandtl-Meyer pour $\gamma = 1.4$, fournies en annexe. Pour la tabulation de la fonction de Prandtl-Meyer, on n'hésitera pas à faire une interpolation linéaire autour des deux valeurs les plus proches de la valeur cherchée.

Compte tenu de b), que peut-on supposer quant à l'évolution du rapport C_D/C_L ?

Question 4 : On se place maintenant dans le cadre de la théorie des profils minces pour préciser le comportement de C_D/C_L en fonction de α . Cette théorie donne une approximation des coefficients de portance et de traînée quand l'épaisseur t du profil est très petite devant la corde c . Si $y_U(x)$ (resp. $y_L(x)$) désigne l'équation de la partie supérieure (resp. inférieure) du profil, c'est-à-dire de la ligne $A_1A_2A_3$ (resp. $A_1A_4A_3$), on a alors dans l'approximation des profils minces :

$$\begin{cases} C_L = \frac{-2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \frac{1}{c} \int_0^c \left(\frac{dy_U}{dx} + \frac{dy_L}{dx} \right) dx \\ C_D = \frac{-2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \frac{1}{c} \int_0^c \left(\left(\frac{dy_U}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy_L}{dx} \right)^2 \right) dx \end{cases} \quad (3)$$

a) On considère à nouveau le profil de la figure 6. Exprimer à l'aide des relations (3) ci-dessus, C_D/C_L en fonction de α et de (t/c) .

b) Montrer que, pour (t/c) fixé, C_D/C_L est minimal pour $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Comparer alors la valeur de C_D/C_L à celle obtenue en 2). Commenter.

OBLIQUE SHOCK PROPERTIES: $\gamma = 1.4$

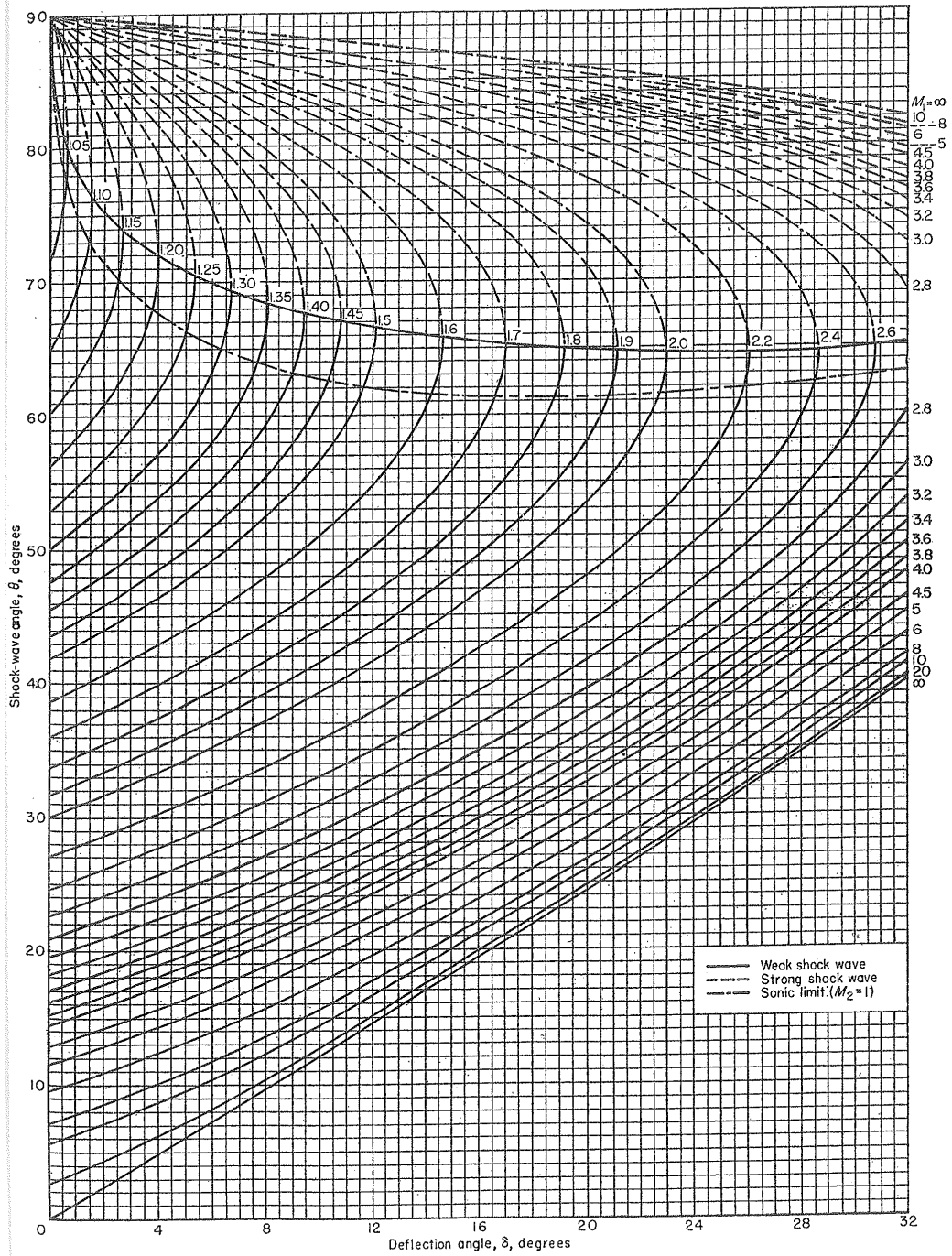


FIGURE 7 – Abaque de chocs oblique donnant l'angle de déflexion en fonction de l'angle du choc.

M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$
1.00	0.0000	1.30	6.1703	1.60	14.8604	1.90	23.5861	2.40	36.7465	3.00	49.7573
1.01	0.0447	1.31	6.4449	1.61	15.1561	1.91	23.8687	2.42	37.2289	3.02	50.1417
1.02	0.1257	1.32	6.7213	1.62	15.4518	1.92	24.1506	2.44	37.7077	3.04	50.5231
1.03	0.2294	1.33	6.9995	1.63	15.7473	1.93	24.4318	2.46	38.1831	3.06	50.9016
1.04	0.3510	1.34	7.2794	1.64	16.0427	1.94	24.7123	2.48	38.6551	3.08	51.2771
1.05	0.4874	1.35	7.5607	1.65	16.3379	1.95	24.9920	2.50	39.1236	3.10	51.6497
1.06	0.6367	1.36	7.8435	1.66	16.6328	1.96	25.2711	2.52	39.5886	3.12	52.0195
1.07	0.7973	1.37	8.1276	1.67	16.9276	1.97	25.5494	2.54	40.0503	3.14	52.3864
1.08	0.9680	1.38	8.4130	1.68	17.2220	1.98	25.8269	2.56	40.5085	3.16	52.7505
1.09	1.1479	1.39	8.6995	1.69	17.5161	1.99	26.1037	2.58	40.9633	3.18	53.1118
1.10	1.3362	1.40	8.9870	1.70	17.8099	2.00	26.3798	2.60	41.4147	3.20	53.4703
1.11	1.5321	1.41	9.2756	1.71	18.1034	2.02	26.9295	2.62	41.8628	3.22	53.8261
1.12	1.7350	1.42	9.5650	1.72	18.3964	2.04	27.4762	2.64	42.3074	3.24	54.1791
1.13	1.9445	1.43	9.8553	1.73	18.6891	2.06	28.0197	2.66	42.7488	3.26	54.5294
1.14	2.1600	1.44	10.1464	1.74	18.9814	2.08	28.5600	2.68	43.1868	3.28	54.8770
1.15	2.3810	1.45	10.4381	1.75	19.2732	2.10	29.0971	2.70	43.6215	3.30	55.2220
1.16	2.6073	1.46	10.7305	1.76	19.5646	2.12	29.6308	2.72	44.0529	3.32	55.5643
1.17	2.8385	1.47	11.0235	1.77	19.8554	2.14	30.1613	2.74	44.4810	3.34	55.9040
1.18	3.0743	1.48	11.3169	1.78	20.1458	2.16	30.6884	2.76	44.9059	3.36	56.2411
1.19	3.3142	1.49	11.6109	1.79	20.4357	2.18	31.2121	2.78	45.3275	3.38	56.5756
1.20	3.5582	1.50	11.9052	1.80	20.7251	2.20	31.7325	2.80	45.7459	3.40	56.9075
1.21	3.8060	1.51	12.1999	1.81	21.0139	2.22	32.2494	2.82	46.1611	3.42	57.2369
1.22	4.0572	1.52	12.4949	1.82	21.3021	2.24	32.7629	2.84	46.5731	3.44	57.5639
1.23	4.3117	1.53	12.7901	1.83	21.5898	2.26	33.2730	2.86	46.9820	3.46	57.8883
1.24	4.5694	1.54	13.0856	1.84	21.8768	2.28	33.7796	2.88	47.3877	3.48	58.2102
1.25	4.8299	1.55	13.3812	1.85	22.1633	2.30	34.2828	2.90	47.7903	3.50	58.5298
1.26	5.0931	1.56	13.6770	1.86	22.4492	2.32	34.7825	2.92	48.1898	3.52	58.8469
1.27	5.3590	1.57	13.9728	1.87	22.7344	2.34	35.2787	2.94	48.5863	3.54	59.1616
1.28	5.6272	1.58	14.2686	1.88	23.0190	2.36	35.7715	2.96	48.9796	3.56	59.4739
1.29	5.8977	1.59	14.5645	1.89	23.3029	2.38	36.2607	2.98	49.3700	3.58	59.7838

TABLE 2 – Tabulation de la fonction de Prandtl-Meyer, notée ici $\nu(M)$. Le résultat est donné en degré et non en radian.

Formulaire

Équations d'Euler :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{U})) = 0, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{\mathbf{u}} \\ \rho E \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mathcal{F}} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2), \text{ avec } \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i \vec{\mathbf{u}} + p \delta_i \\ (\rho E + p) u_i \end{pmatrix}$$

Équation d'état des Gaz Parfaits : $p = \rho r T$. **Gaz idéaux polytropiques :** $p = (\gamma - 1) \rho e$

Vitesse du son : $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T}$ **Nombre de Mach :** $M = u/c$.

Variables soniques : $c_*^2 = \frac{2}{\gamma + 1} c^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u^2$; $M^2 = \frac{2M_*^2}{\gamma + 1 - (\gamma - 1)M_*^2}$; $M_*^2 = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}$

Relation de Prandtl : $(M_*)_1 = \frac{1}{(M_*)_2}$;

Grandeurs d'arrêt : $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$; $\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma$

Relation de saut dans un choc droit :

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}}; \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1); \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}; \quad s_2 - s_1 = C_V \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma; \quad s_2 > s_1$$

Équation de Hugoniot : $\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0$

Écoulement 1D instationnaires. Invariants de Riemann : $J_0 = s$, $J_\pm = v \pm \frac{2c}{\gamma - 1}$

1-Détente : $v_1 > v_G, p_1 < p_G, v_1 = v_G - \frac{2c_G}{\gamma_G - 1} \left(\left(\frac{p_1}{p_G} \right)^{\frac{\gamma_G - 1}{2\gamma_G}} - 1 \right)$

1-Choc : $v_1 < v_G, p_1 > p_G, v_1 = v_G - \frac{\sqrt{2}c_G}{\sqrt{\gamma p_G}} \frac{p_1 - p_G}{\sqrt{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_G}}$

3-Détente : $v_1 < v_D, p_1 < p_D, v_1 = v_D + \frac{2c_D}{\gamma_D - 1} \left(\left(\frac{p_1}{p_D} \right)^{\frac{\gamma_D - 1}{2\gamma_D}} - 1 \right)$

3-Choc : $v_1 > v_D, p_1 > p_D, v_1 = v_D + \frac{\sqrt{2}c_D}{\sqrt{\gamma p_D}} \frac{p_1 - p_D}{\sqrt{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_D}}$

2-Onde : $v_1 = v_2, p_1 = p_2$

Écoulement 2D permanents :

Chocs Obliques :

$$\frac{1}{\tan \varphi} = \tan \sigma \left[\frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin \sigma - 1} - 1 \right]; \quad M_2^2 \sin^2(\sigma - \varphi) = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma + 1 - \gamma}$$

Ondes de Mach : $\frac{p_2 - p_1}{p_1} \approx \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \varphi$; $\frac{v_2 - v_1}{v_1} \approx -\tan \alpha \varphi = \frac{-\varphi}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$

Angle de Mach : $\alpha(M) = \arcsin(1/M)$; **Pente des \mathcal{C}_\pm caractéristiques :** $\theta \pm \alpha(M)$.

Tableau Récapitulatif :

$$\left. \begin{array}{ll} \partial_{c_0} p + \rho U \partial_{c_0} U = 0 & \text{sur } \mathcal{C}_0 \text{ trajectoire} \\ \partial_{c_0} s = 0 & \text{sur } \mathcal{C}_0 \text{ trajectoire} \end{array} \right\} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{c_0} = \frac{v}{u}$$

$$\partial_{c_{\pm}} \theta \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} \partial_{c_{\pm}} p = 0$$

ou

$$\pm \tan(\alpha) \partial_{c_{\pm}} \theta - \frac{\partial_{c_{\pm}} U}{U} - \frac{T \partial_{c_{\pm}} s - \partial_{c_{\pm}} \mathcal{H}}{U^2} = 0,$$

sur les \mathcal{C}_{\pm} caractéristiques de pente locale a_{\pm} faisant un angle $\pm\alpha$ avec la direction de l'écoulement.

Écoulement homoentropique et homoénergétique :

$$J_{\pm} = \pm\theta - \chi(U) = \text{constante}, \Leftrightarrow R_{\pm} = \pm\theta - f(M) = \text{constante}, \quad \text{sur } \mathcal{C}_{\pm}$$

Fonction de Prandtl-Meyer :

$$\begin{aligned} f(M) &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right] - \arctan \left[\sqrt{M^2 - 1} \right] \\ &= \alpha(M) - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

Contrôle de connaissance

Marc MASSOT, Adam LARAT

Durée 3 heures (*Les notes de cours, y compris sur support informatique, et les documents distribués en cours sont autorisés ainsi que l'usage de calculatrices*).

Le contrôle de connaissance se compose de deux exercices et d'un problème; ces trois parties sont indépendantes. *Le contrôle est volontairement long et permet de couvrir l'ensemble des points traités en cours; il ne sera pas nécessaire de tout faire pour obtenir un très bon résultat. La qualité de la rédaction sera un point important pour l'évaluation.* Dans les exercices et le problème, on considère des écoulements de gaz parfait idéaux polytropiques (pas de phénomènes de dissipation, loi d'état de gaz idéal, $p = \rho r T$, $r = R/\mathcal{M}$ où \mathcal{M} est la masse molaire du gaz; c_p ainsi que γ sont des constantes données) sans force massique extérieure.

1 Exercice de cours : Piston en mouvement dans un tube rempli par deux gaz

Cet exercice est très proche des questions traitées en cours. On s'intéresse à un tube infini à symétrie de révolution autour de son axe ($x'Ox$) de section constante, dans l'approximation d'un écoulement instationnaire monodimensionnel. On considère un état initial, à l'instant $t=0$, constitué de deux gaz au repos de chaque côté d'un piston auquel on va imposer un mouvement à partir de l'instant initial $t = 0$. Ces gaz sont des fluides parfait idéaux polytropique notés "état 4" en ce qui concerne l'état à gauche du piston (de température T_4 , de pression p_4 , de vitesse $u_4 = 0$ de masse molaire \mathcal{M}_4 et de coefficient adiabatique γ_4) et "état 1" à droite du piston (de température $T_1 = T_4$, de pression p_1 , de vitesse $u_1 = 0$, de masse molaire \mathcal{M}_1 et de coefficient adiabatique γ_1).

Le mouvement imposé au piston est décrit par sa position $X(t)$ et le piston se trouve en $x = 0$ à l'instant $t = 0$ (on fait l'hypothèse simplificatrice que le piston est un piston d'épaisseur infiniment fine). L'expérimentateur applique pour tout instant $t > 0$ une force sur le piston de manière à lui imposer la trajectoire $X(t) = at^n$, avec $a > 0$ et n un entier supérieur ou égal à un ($n \geq 1$).

(1) Exprimer dans chaque gaz au repos les célérités du son c_{40} et c_{10} en fonction des grandeurs de l'énoncé.

(2) Dans le cas $n = 2$ à quoi est homogène la constante a ? Et dans le cas $n = 1$?

On considère dans un premier temps le cas où $n = 2$

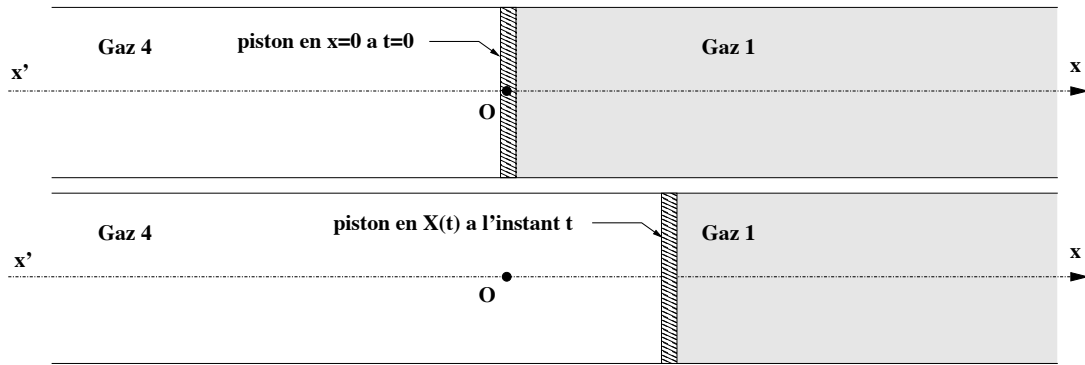


FIGURE 1 – Tube rempli de deux gaz séparés par un piston à deux instants successifs.

(3) Effectuer, comme dans le cours, la résolution des propriétés de l'écoulement pour les deux gaz, pour tout temps $t < T^*$, pour lequel l'écoulement reste homoentropique dans chaque gaz. Proposer une synthèse des principes de base permettant de trouver l'état des deux gaz. Sur quelles grandeurs effectue-t-on la résolution ? Jusqu'à quel temps ce type de résolution basé sur le caractère homoentropique des deux écoulements est-il valable ? Que se passe-t-il ensuite ?

(4) Tracer le diagramme des caractéristiques dans le plan (x, t) . On fera une représentation précise jusqu'au temps T^* puis une représentation qualitative pour les temps supérieurs. Identifier les diverses zones d'écoulement de manière précise dans le diagramme. Une figure *claire* sera appréciée. Proposer une représentation des solutions pour les deux gaz dans un diagramme de phase de type pression-vitesse. Sur quelles courbes se trouvent les deux solutions ? Justifier votre réponse.

(5) Donner les expressions de la vitesse dans la direction x , de la vitesse du son c , de la pression et de la température d'un côté et de l'autre au voisinage du piston. Quelle est la force totale appliquée sur le piston par le gaz ? Si le piston est de masse M , trouver quelle est la force instantanée $F(t)$ appliquée par l'expérimentateur en appliquant la loi fondamentale de la dynamique.

(6) Dans ce cas $n = 2$, préciser l'expression du temps et de la position de formation du choc. Montrer que cette position et ce temps correspondent à la première apparition d'une onde de choc et au premier point de croisement des caractéristiques avec la caractéristique issue de $(0, 0)$. Donner l'expression de la vitesse en tout (x, t) pour un temps inférieur au temps de formation du choc.

(7) On se place alors dans le cas $n = 1$. Effectuer une représentation précise et justifiée du diagramme des caractéristiques associé.

(8) Ce type de diagramme est proche de celui du tube à choc. Expliquer quelle est la différence fondamentale entre le cas étudié dans cet exercice et le cas du tube à choc. Dans quel cas les deux diagrammes sont-ils équivalents ? Représenter dans un diagramme de phase pression-vitesse les deux cas, afin d'expliquer la différence de manière claire quand elle est présente. Quand les deux cas sont équivalents, que dire la force appliquée par l'expérimentateur ?

2 Exercice : Optimisation d'un moteur et de sa poussée

On considère la tuyère convergente-divergente d'un moteur de type moteur de fusée. Cette tuyère est telle que sa section au col est $A_c = 1 \text{ cm}^2$. Les conditions en amont de la section d'entrée sont

les conditions d'arrêt : $p_0 = 100 \text{ atm}$, $T_0 = 2000 \text{ K}$. Le gaz de combustion est un gaz parfait tel que $r = 415.7 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\gamma = 1.25$. On supposera dans toute la suite que la tuyère est amorcée.

(1) Calculer $\dot{m} = \rho u A$, le débit-masse de la tuyère.

La poussée du moteur fusée est donnée par la formule :

$$P = \dot{m}u_e + A_e(p_e - p_a)$$

où u_e désigne la vitesse dans la section d'éjection, p_e est la pression dans la section d'éjection et p_a la pression ambiante. On admettra ici que la poussée est maximale quand la tuyère est adaptée à la pression ambiante, c'est-à-dire quand la pression dans la section d'éjection est égale à la pression ambiante, avec un écoulement isentropique dans toute la tuyère, y compris dans la section d'éjection. Au cours d'un vol, la pression ambiante va naturellement varier avec l'altitude et il n'est donc pas possible d'avoir une tuyère adaptée à tout moment. On se pose ici la question de savoir s'il est préférable d'adapter la tuyère aux conditions au sol ou à grande altitude.

Supposons la pression ambiante connue et la tuyère adaptée.

(2) Donner les relations qui permettent de calculer le Mach M_e , la température T_e et la vitesse u_e dans la section d'éjection. Préciser également la relation permettant de calculer l'aire de la section d'éjection.

(3) On considère tout d'abord le cas d'une tuyère adaptée à la pression ambiante au sol : $p_a = 1 \text{ atm}$.

3-(a) Déterminer l'aire de la section d'éjection d'une telle tuyère.

3-(b) Calculer la poussée développée au sol et à une altitude de 23.5 km, à laquelle la pression ambiante vaut $p_a = 0.03 \text{ atm}$.

(4) On considère maintenant le cas d'une tuyère adaptée à la pression ambiante à l'altitude de 23.5 km : $p_a = 0.03 \text{ atm}$.

4-(a) Déterminer l'aire de la section d'éjection d'une telle tuyère.

4-(b) Calculer la poussée développée au sol et à une altitude de 23.5 km, à laquelle la pression ambiante vaut $p_a = 0.03 \text{ atm}$.

4-(c) Montrer que pour une valeur de la pression ambiante très proche de 1 atm , un choc droit apparaît dans la section d'éjection de la tuyère.

4-(d) Calculer la poussée développée dans ces conditions (on assimilera le résultat obtenu à la valeur de la poussée exactement au sol).

(5) Comparer les résultats obtenus en **3)** et **4)** - que l'on pourra regrouper dans un tableau du type ci-dessous - et tirer une conclusion argumentée quant au choix de telle ou telle tuyère (tenant compte des poussées prévues et de la dimension de la tuyère).

Tuyère	Poussée au sol (N)	Poussée à $h = 23.5 \text{ km}$ (N)	Aire de A_e (cm^2)
Adaptée au sol			
Adaptée à $h = 23.5 \text{ km}$			

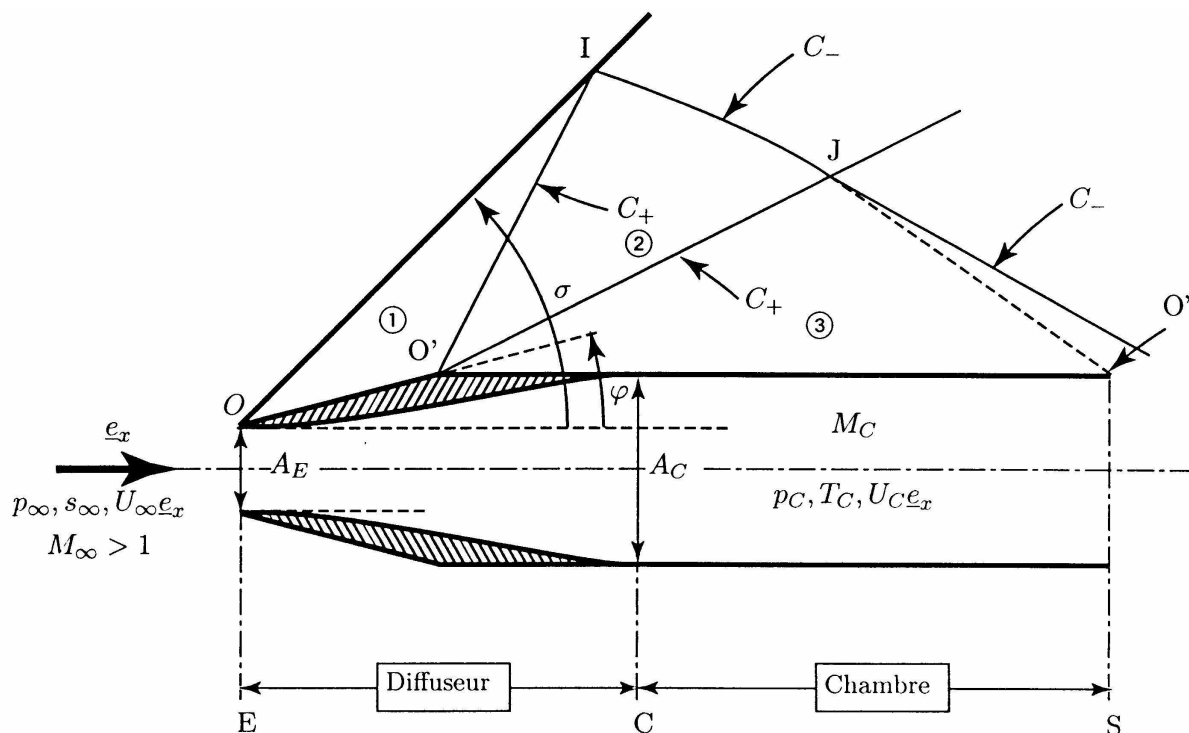


FIGURE 2 – Dispositif de statoréacteur (par raison de symétrie, on ne présente que la moitié des lignes caractéristiques de l'écoulement extérieur au dispositif).

3 Problème : Le statoréacteur

On considère un écoulement plan permanent dans un statoréacteur selon le dispositif présenté sur la Figure 2.

A l'amont du dispositif, l'écoulement est supersonique, de nombre de Mach M_∞ , de vitesse $U_\infty e_x$ parallèle à l'axe de symétrie du dispositif.

La partie interne du dispositif débute par une tuyère lentement divergente, que l'on appelle aussi diffuseur. Sa forme a été calculée à l'aide de la méthode des caractéristiques pour qu'elle fournisse en régime supersonique un écoulement parfaitement plan uniforme dans une section (de la section d'entrée E à la section interne C à partir de laquelle la chambre est de section constante A_C). L'épaisseur des parois de la chambre sera négligée dans toute l'étude.

3.1 Partie 1 : Ecoulement externe

Dans cette question, l'écoulement est supposé partout supersonique, et pour les applications numériques, on prendra $\gamma = 1.4$ et $M_\infty = 2$. On va analyser les principales lignes caractéristiques de l'écoulement **extérieur** autour du dispositif. Compte tenu de la symétrie, on raisonne dans le demi-plan supérieur.

(a) L'angle ϕ vaut 15° . Le graphe de la polaire de choc donne pour la déviation de l'écoulement σ derrière l'onde de choc oblique attachée en O une valeur de $\sigma = 45,34^\circ$. Le nombre de Mach M_1

et la pression p_1 dans la région 1 valent $M_1 = 1.446$ et $\frac{p_1}{p_\infty} = 2,196$. Détailler les équations qui permettent d'obtenir ces valeurs.

(b) Expliquer comment on détermine la valeur de M_3 dans la région 3, à l'aval du faisceau de détente de Prandtl-Meyer (domaine 2) centré sur la point O' et qui est schématisé par le secteur ($O'IJ$) sur la Figure 2 (on donnera sans application numérique les équations nécessaires).

(c) Le calcul donne $M_3 = 1,962$. Exprimer alors le rapport $\frac{p_3}{p_\infty}$ où p_3 désigne la pression dans la région 3, en fonction de $\frac{p_1}{p_\infty}$, M_1 et M_3 . Calculer ce rapport et vérifier qu'il est légèrement supérieur à 1.

(d) Calculer le rapport $\frac{p_{03}}{p_{0\infty}}$ entre la pression génératrice p_{03} de la région 3 et la pression génératrice amont $p_{0\infty}$, en fonction de $\frac{p_3}{p_\infty}$, M_3 et M_∞ . On vérifiera que ce rapport est légèrement inférieur à 1 et on expliquera pour quelle raison.

(e) On veut démontrer que l'écoulement dans la région 3 est partout uniforme dans le triangle $O'JO''$. Par construction on a placé l'extrémité O'' du dispositif de manière à ce qu'elle se trouve à l'amont de la caractéristique C_- issue du point I, intersection de la caractéristique montante initiale du faisceau 2 avec le choc oblique issue de O. Montrer alors à l'aide des invariants de Riemann que ce principe garantit bien que l'écoulement est effectivement uniforme dans la région délimitée par le triangle $O'JO''$. Pour cela on montrera d'abord que l'écoulement est uniforme le long du segment $O'O''$. On montrera ensuite qu'il est uniforme dans le triangle $O'JO''$.

3.2 Partie 2 : Ecoulement interne

Dans cette partie, on supposera que dans la section S indiquée sur la Figure 2 (plan de sortie du dispositif) l'écoulement extérieur est le même qu'à l'infini amont : Mach $M_\infty = 2$, vitesse $U_\infty e_x$, pression p_∞ , pression et température génératrice $p_{0\infty}$ et $T_{0\infty}$. Ces mêmes conditions s'appliquent aussi à la section d'entrée E du dispositif. On prendra finalement pour les applications numériques $\gamma = 1.4$.

(a) Donner l'expression du débit massique dans une section du diffuseur en fonction de l'aire de la section, des conditions génératrices et du nombre de Mach M_∞ dans la section d'entrée E du diffuseur de la Figure 2 et le nombre de Mach M_C dans la section d'entrée C de la chambre. Justifier que $M_C > M_\infty$.

(b) La tuyère a été conçue de manière à obtenir un nombre de Mach $M_C = 2.77$ à l'entrée de la chambre. Donner l'expression du rapport de pression $\frac{p_C}{p_\infty}$ où p_C désigne la pression dans la chambre. On vérifiera que ce rapport est inférieur à 1.

(c) Pour qu'à l'aval de la section S et à proximité de l'orifice de sortie du dispositif de la Figure 2, l'écoulement extérieur ($U_\infty e_x, p_\infty$) et l'écoulement issu de la chambre ($U_C e_x, p_C$) s'équilibrent, il faut qu'ils vérifient deux conditions : il faut qu'ils soient parallèles et il faut que leurs pressions soient identiques. D'après la question précédente, il n'y a pas identité des pressions dans le plan de sortie.

c-(i) Montrer que dans la région proche de l'orifice de sortie, l'équilibre des deux écoulements ne peut pas être assuré par la seule présence d'un choc droit attaché en O'' .

c-(ii) Montrer que la présence seule d'un choc oblique attaché en O'' n'est pas non plus suffisante.

c-(iii) On admet que l'équilibre des deux écoulements dans la région aval proche de l'orifice de sortie nécessite la présence de trois familles de lignes caractéristiques issues de O'' : un choc oblique attaché, une ligne de glissement et un faisceau de détente de Prandtl-Meyer. Faire un schéma qualitatif indiquant la position de ces trois phénomènes autour de O'' .

3.3 Partie 3 : Propulsion

Comme dans la partie précédente, on supposera que dans la section S indiquée sur la Figure 2 (plan de sortie du dispositif) l'écoulement extérieur est le même qu'à l'infini amont : Mach $M_\infty = 2$, vitesse $U_\infty e_x$, pression p_∞ , pression et température génératrice $p_{0\infty}$ et $T_{0\infty}$. Ces mêmes conditions s'appliquent aussi à la section d'entrée E du dispositif.

On réalise maintenant dans la chambre du dispositif une combustion grâce au mélange avec l'air et à l'ignition d'un carburant introduit par des injecteurs (non montrés sur la Figure). Le débit d'injection du carburant est supposé négligeable devant le débit du dispositif. On va étudier l'effet de cette combustion sur le fonctionnement du dispositif.

On va montrer que le réchauffement du fluide consécutif aux réactions de combustion exothermiques est équivalent à l'effet d'un changement de section du conduit interne du dispositif. Le processus de combustion est une source d'entropie le long des lignes de courant et doit être modélisé.

(a) Rappeler les équations de Hugoniot établies dans le cours dans le cas d'un écoulement quasi-monodimensionnel homoentropique et dans le cas de la présence d'une source de chaleur.

(b) Quel est l'effet d'un apport de chaleur sur la vitesse de l'écoulement dans la chambre du dispositif de la Figure 2 si l'écoulement est supersonique et continu ? Comment peut-on simuler cet effet sans apport de chaleur.

(c) On s'intéresse au bilan des efforts sur les parois du dispositif en l'absence d'apport de chaleur par la combustion. En considérant d'une part la pression qui règne sur la rampe extérieure OO' du diffuseur, derrière le choc oblique attaché en O et d'autre part, la pression sur la paroi interne du diffuseur où l'écoulement est supposé continu, expliquer sans équation dans quelle direction s'exerce la force résultante qui agit sur le dispositif en l'absence d'apport de chaleur par la combustion.

(d) Expliquer comment une combustion dans la chambre du dispositif peut changer la conclusion de la question (c).

3.4 Partie 4 : Analogie avec un système à deux cols soniques

On considère maintenant le dispositif de la Figure 3 où la chambre de la section constante de la Figure 2 a été remplacée par un bloc convergent de section variable, dont l'aire de la section est comprise entre A_C et A_S . On fera les applications numériques avec $\gamma = 1.4$, $M_\infty = 2$ et $M_C = 2.77$.

Remarque : Comme schématisé sur la Figure 3, le bloc convergent est non solidaire du dispositif et ne transmet donc par les efforts qu'il subit.

(a) Quand on ferme progressivement la section aval A_S , l'expérience montre que, pour un taux de contraction $\frac{A_S}{A_E}$ inférieur à une certaine valeur, un choc droit permanent s'établit dans le diffuseur. On note $p'_{0\infty}$ la pression d'arrêt à l'aval de ce choc. Déterminer l'expression de $\frac{A_S}{A_E}$ en fonction de M_∞ , de γ et du rapport $\frac{p'_{0\infty}}{p_{0\infty}}(M^2, \gamma)$, avec M le nombre de Mach devant le choc droit, dans le cas où la section aval S de section A_S est sonique et joue le rôle d'un "second col" dans le dispositif.

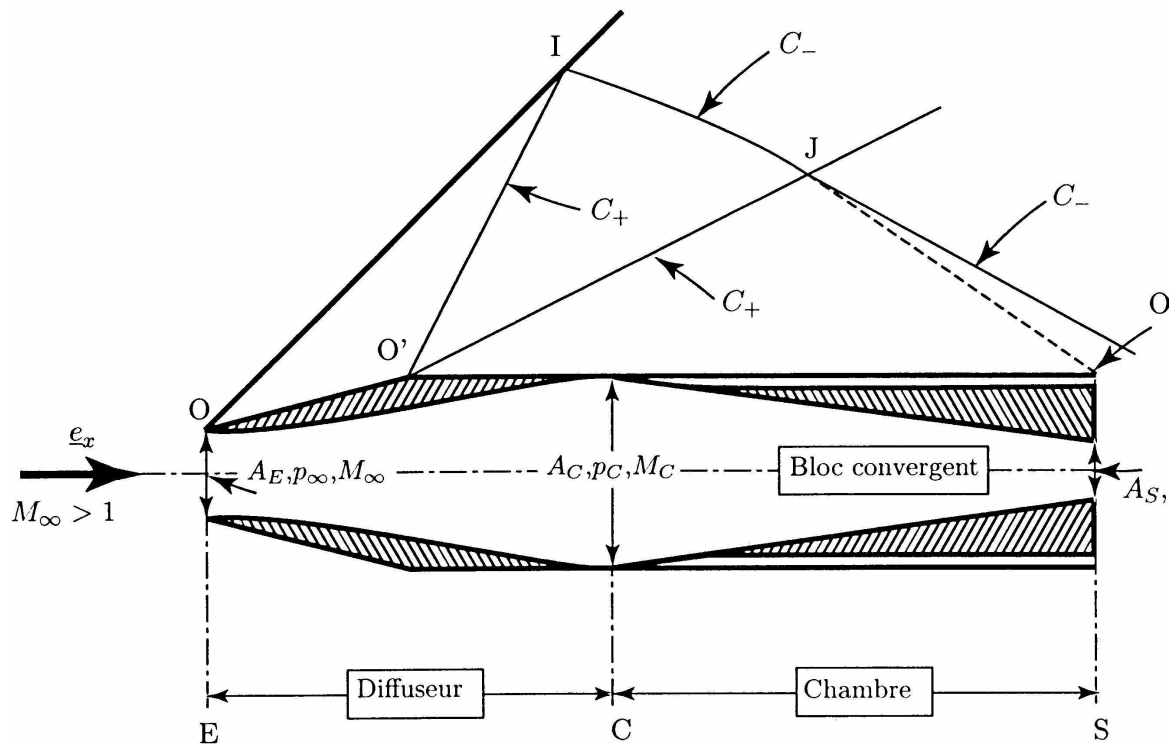


FIGURE 3 – Dispositif analogue à celui de la Figure 2 simulant l'effet d'une combustion dans la chambre (par raison de symétrie, on ne présente que la moitié des lignes caractéristiques de l'écoulement extérieur au dispositif).

(b) Le rapport $\frac{p'_0}{p_0}(M^2, \gamma)$ est une fonction monotone décroissante du nombre de Mach M devant le choc. En déduire comment se déplace le choc droit dans le dispositif quand on ferme progressivement la section A_S à partir de la valeur considérée dans la question précédente.

(c) A partir des conclusions de la question (b), décrire comment évolue, qualitativement, le bilan des efforts (établi dans la partie précédente sans bloc convergent) en présence du bloc convergent quand on ferme progressivement la section A_S à partir de la valeur considérée dans la question (a).

(d) Dans quelle condition la résultante des efforts de pression qui s'appliquent sur la paroi interne du diffuseur de la Figure 3 est-elle maximale? Pourquoi peut-on affirmer que dans ce cas le bilan des efforts est propulsif, c'est-à-dire dirigé vers l'amont?

(e) Que se passe-t-il si on diminue encore A_S ?

M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$	M	$\nu(M)$
1.00	0.0000	1.40	8.9870	1.80	20.7251	2.40	36.7465	3.20	53.4703	4.00	65.7848
1.01	0.0447	1.41	9.2756	1.81	21.0139	2.42	37.2289	3.22	53.8261	4.05	66.4393
1.02	0.1257	1.42	9.5650	1.82	21.3021	2.44	37.7077	3.24	54.1791	4.10	67.0820
1.03	0.2294	1.43	9.8553	1.83	21.5898	2.46	38.1831	3.26	54.5294	4.15	67.7132
1.04	0.3510	1.44	10.1464	1.84	21.8768	2.48	38.6551	3.28	54.8770	4.20	68.3332
1.05	0.4874	1.45	10.4381	1.85	22.1633	2.50	39.1236	3.30	55.2220	4.25	68.9423
1.06	0.6367	1.46	10.7305	1.86	22.4492	2.52	39.5886	3.32	55.5643	4.30	69.5406
1.07	0.7973	1.47	11.0235	1.87	22.7344	2.54	40.0503	3.34	55.9040	4.35	70.1285
1.08	0.9680	1.48	11.3169	1.88	23.0190	2.56	40.5085	3.36	56.2411	4.40	70.7062
1.09	1.1479	1.49	11.6109	1.89	23.3029	2.58	40.9633	3.38	56.5756	4.45	71.2738
1.10	1.3362	1.50	11.9052	1.90	23.5861	2.60	41.4147	3.40	56.9075	4.50	71.8317
1.11	1.5321	1.51	12.1999	1.91	23.8687	2.62	41.8628	3.42	57.2369	4.55	72.3801
1.12	1.7350	1.52	12.4949	1.92	24.1506	2.64	42.3074	3.44	57.5639	4.60	72.9192
1.13	1.9445	1.53	12.7901	1.93	24.4318	2.66	42.7488	3.46	57.8883	4.65	73.4491
1.14	2.1600	1.54	13.0856	1.94	24.7123	2.68	43.1868	3.48	58.2102	4.70	73.9701
1.15	2.3810	1.55	13.3812	1.95	24.9920	2.70	43.6215	3.50	58.5298	4.75	74.4824
1.16	2.6073	1.56	13.6770	1.96	25.2711	2.72	44.0529	3.52	58.8469	4.80	74.9863
1.17	2.8385	1.57	13.9728	1.97	25.5494	2.74	44.4810	3.54	59.1616	4.85	75.4818
1.18	3.0743	1.58	14.2686	1.98	25.8269	2.76	44.9059	3.56	59.4739	4.90	75.9691
1.19	3.3142	1.59	14.5645	1.99	26.1037	2.78	45.3275	3.58	59.7838	4.95	76.4486
1.20	3.5582	1.60	14.8604	2.00	26.3798	2.80	45.7459	3.60	60.0915	5.00	76.9202
1.21	3.8060	1.61	15.1561	2.02	26.9295	2.82	46.1611	3.62	60.3968	5.05	77.3843
1.22	4.0572	1.62	15.4518	2.04	27.4762	2.84	46.5731	3.64	60.6998	5.10	77.8409
1.23	4.3117	1.63	15.7473	2.06	28.0197	2.86	46.9820	3.66	61.0005	5.15	78.2902
1.24	4.5694	1.64	16.0427	2.08	28.5600	2.88	47.3877	3.68	61.2990	5.20	78.7324
1.25	4.8299	1.65	16.3379	2.10	29.0971	2.90	47.7903	3.70	61.5953	5.25	79.1677
1.26	5.0931	1.66	16.6328	2.12	29.6308	2.92	48.1898	3.72	61.8893	5.30	79.5962
1.27	5.3590	1.67	16.9276	2.14	30.1613	2.94	48.5863	3.74	62.1812	5.35	80.0180
1.28	5.6272	1.68	17.2220	2.16	30.6884	2.96	48.9796	3.76	62.4709	5.40	80.4332
1.29	5.8977	1.69	17.5161	2.18	31.2121	2.98	49.3700	3.78	62.7584	5.45	80.8421
1.30	6.1703	1.70	17.8099	2.20	31.7325	3.00	49.7573	3.80	63.0438	5.50	81.2448
1.31	6.4449	1.71	18.1034	2.22	32.2494	3.02	50.1417	3.82	63.3271	5.55	81.6413
1.32	6.7213	1.72	18.3964	2.24	32.7629	3.04	50.5231	3.84	63.6083	5.60	82.0319
1.33	6.9995	1.73	18.6891	2.26	33.2730	3.06	50.9016	3.86	63.8874	5.65	82.4166
1.34	7.2794	1.74	18.9814	2.28	33.7796	3.08	51.2771	3.88	64.1645	5.70	82.7956
1.35	7.5607	1.75	19.2732	2.30	34.2828	3.10	51.6497	3.90	64.4395	5.75	83.1689
1.36	7.8435	1.76	19.5646	2.32	34.7825	3.12	52.0195	3.92	64.7125	5.80	83.5368
1.37	8.1276	1.77	19.8554	2.34	35.2787	3.14	52.3864	3.94	64.9836	5.85	83.8993
1.38	8.4130	1.78	20.1458	2.36	35.7715	3.16	52.7505	3.96	65.2526	5.90	84.2565
1.39	8.6995	1.79	20.4357	2.38	36.2607	3.18	53.1118	3.98	65.5197	5.95	84.6085

TABLE 1 – Tabulation de la fonction de Prandtl-Meyer, notée ici $\nu(M)$. Le résultat est donné en degré et non en radian.

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

Contrôle de connaissance

Marc MASSOT

Durée 3 heures (*Les notes de cours et les documents distribués en cours sont autorisés ainsi que l'usage de calculatrices*).

Le contrôle de connaissance se compose d'un exercice et d'un problème. L'exercice se compose de quatre sous-parties (les parties 1.1 et 1.2 peuvent être traitées de manière indépendante). Dans l'exercice et le problème, on considère des écoulements de gaz parfait idéaux polytropiques (pas de phénomènes de dissipation, loi d'état de gaz idéal, $p = \rho r T$, $r = R/\mathcal{M}$ où \mathcal{M} est la masse molaire du gaz ; c_p ainsi que γ sont des constantes données).

1 Exercice : Piston en mouvement dans un tube

Cet exercice est très proche des questions traitées en cours. On s'intéresse à un tube infini à symétrie de révolution autour de son axe ($x'Ox$) de section constante, dans l'approximation d'un écoulement instationnaire monodimensionnel. On considère un état initial, à l'instant $t=0$, constitué de deux gaz au repos de chaque côté d'un piston auquel on va imposer un mouvement à partir de l'instant initial $t = 0$ (Voir Figure 1). Ces gaz sont des fluides parfait idéaux polytropique notés "état 4" en ce qui concerne l'état à gauche du piston (de température T_4 , de vitesse $u_4 = 0$ de masse molaire \mathcal{M}_4 et de coefficient γ_4) et "état 1" à droite du piston (de température $T_1 = T_4$, de vitesse $u_1 = 0$, de masse molaire \mathcal{M}_1 et de coefficient γ_1). Le mouvement imposé au piston est décrit par sa position $X(t)$ et le piston se trouve en $x = 0$ à l'instant $t = 0$ (on fait l'hypothèse simplificatrice que le piston est un piston d'épaisseur infiniment fine). L'expérimentateur applique à l'instant $t > 0$ une force sur le piston de manière à lui imposer la trajectoire $X(t) = at^n$, avec $a < 0$ et n un entier supérieur ou égal à un ($n \geq 1$).

1.1 Cas des deux gaz dans un tube infini avec accélération progressive

(1) Exprimer dans chaque gaz au repos les célérités du son c_{40} et c_{10} en fonction des grandeurs de l'énoncé.

On considère dans un premier temps le cas où $n \geq 2$

(2) Effectuer, comme dans le cours, la résolution des propriétés de l'écoulement pour les deux gaz, pour tout temps $t < T^*$, pour lequel l'écoulement reste homoentropique dans chaque gaz. Proposer une synthèse des principes de base permettant de trouver l'état des deux gaz. Sur quelles grandeurs effectue-t-on la résolution ? Jusqu'à quel temps ce type de résolution basé sur le caractère homoentropique des deux écoulements est-il valable ? Que se passe-t-il ensuite ?

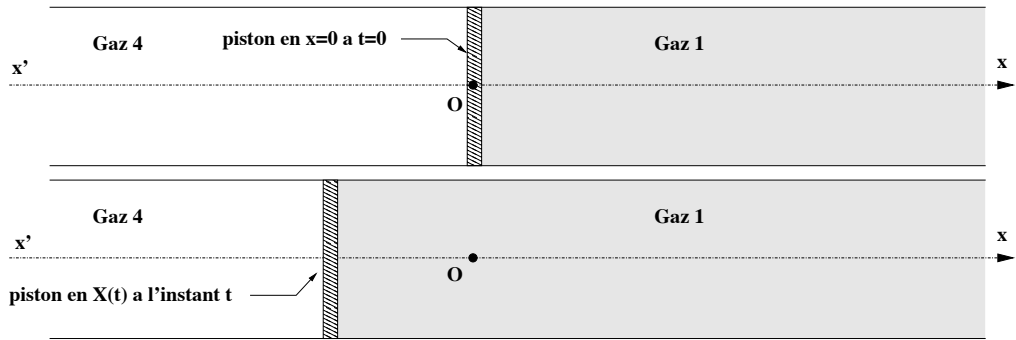


FIGURE 1 – Tube rempli de deux gaz séparés par un piston à deux instants successifs.

(3) Tracer le diagramme des caractéristiques dans le plan (x, t) . On fera une représentation précise jusqu'au temps T^* puis une représentation qualitative pour les temps supérieurs. Identifier les diverses zones d'écoulement de manière précise dans le diagramme. Une figure *claire* sera appréciée.

(4) Donner les expressions de la vitesse dans la direction x , de la vitesse du son c , de la pression et de la température de chaque côté du piston. Quelle est la force totale appliquée sur le piston par le gaz ? Si le piston est de masse M , trouver quelle est la force instantanée $F(t)$ appliquée par l'expérimentateur en appliquant la loi fondamentale de la dynamique.

(5) Dans le cas $n = 2$, préciser l'expression du temps et de la position de formation du choc et donner l'expression de la vitesse en tout point (x, t) pour tout temps inférieur au temps de formation du choc.

1.2 Cas de la détente dans une partie semi-infinie avec accélération immédiate

On se place alors dans le cas $n = 1$ et l'on se focalise uniquement sur le gaz 1 dans cette sous-partie. Comme dans le cas de l'onde simple de détente traité en cours, on considère une vitesse négative $u_f > -2c_0/(\gamma - 1)$ et l'on considère le cas limite où l'accélération du piston est infinie en $t = 0$ de telle manière que le piston se met immédiatement à la vitesse u_f pour tout $t > 0$.

(1) Montrer que l'écoulement dans le gaz 1, sous les hypothèses données, est homoentropique pour tout temps $t > 0$.

Dans la suite, on admet que le diagramme des caractéristiques a la forme donnée sur la Figure 2 de manière cohérente avec les propriétés d'invariance des équations d'Euler. Les domaines 1 et 3 sont des zones d'écoulement uniforme et les droites OA et OI les droites frontières de la région 2.

(2) Donner les propriétés de la région 2. En déduire les équations des deux droites OA et OI .

(3) Donner $(u, c/c_0, p/p_0)$ dans les domaines 1 et 3.

(4) Soit $M(t, x)$ un point de la région 2. Déterminer (u, c) en ce point en fonction de (t, x) .

(5) Pour un point $P(\tau, X)$ dans la région 2, vérifier que la \mathcal{C}_- de cette région qui passe par P admet pour équation :

$$x = -\frac{2c_0 t}{\gamma - 1} + \left[X + \frac{2c_0 \tau}{\gamma - 1} \right] \left[\frac{t}{\tau} \right]^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}. \quad (1)$$

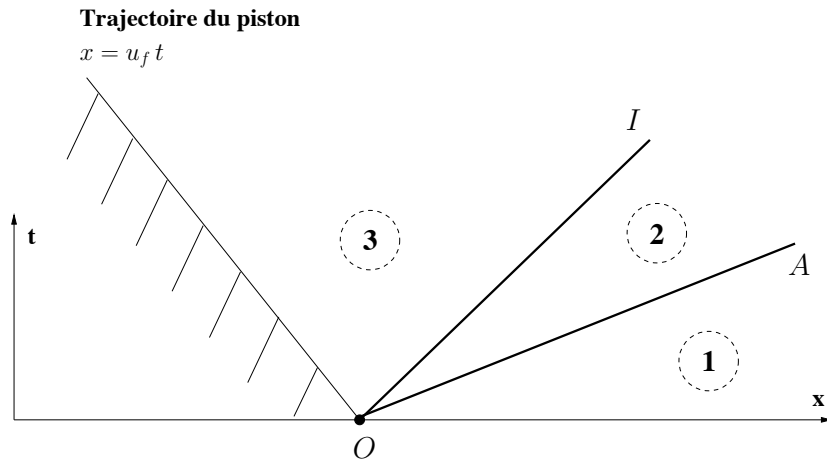


FIGURE 2 – Onde de détente centré au point O .

(Indice : pour cela on cherchera une équation sur la nouvelle variable $f = x/t$ comme une fonction du temps t et on écrira une équation différentielle sur cette variable. On montrera alors que la forme proposée est bien solution de cette équation différentielle du premier ordre.)

1.3 Bilan sur la présence des deux gaz (*Cette sous-partie aura un poids significatif dans le barême*)

On revient sur l'étude de la présence des deux gaz 1 et 4 de chaque côté du piston dans le cas où $n = 1$ d'une accélération immédiate du piston.

(1) Expliquer ce qui se passe dans le gaz 4 et effectuer une représentation précise et justifiée du diagramme des caractéristiques associé pour les deux gaz à partir des résultats de la sous-partie précédente.

(2) Ce type de diagramme est proche de celui du tube à choc. Expliquer quelle est la différence fondamentale entre le cas étudié dans cet exercice et le cas du tube à choc. Dans quel cas les deux diagrammes sont-ils équivalents ? Représenter dans un diagramme de phase pression-vitesse les deux cas, afin d'expliquer la différence de manière claire quand elle est présente. Quand les deux cas sont équivalents, que dire la force appliquée par l'expérimentateur ?

1.4 Cas d'un tube de longueur fini L dans le gaz 1

On considère une zone de gaz 1 dans un tube de longueur L représenté sur la Figure 3. On veut alors résoudre la question de la propagation et de la réflexion sur le bout du tube de l'onde de détente initiée par le mouvement du piston.

Ayant résolu le problème associé à l'onde simple de détente avant toute interaction, on se propose maintenant de considérer le problème de la réflexion de l'onde au bout du tube. Pour des temps relativement faibles, on suppose que le diagramme des caractéristiques prend la forme donnée sur la Figure 4.

(a) Donner les propriétés de la région 5 de l'écoulement, quelle est la nature des courbes représentées dans cette zone de l'écoulement ? Donner leurs propriétés. Quelle est la nature des courbes

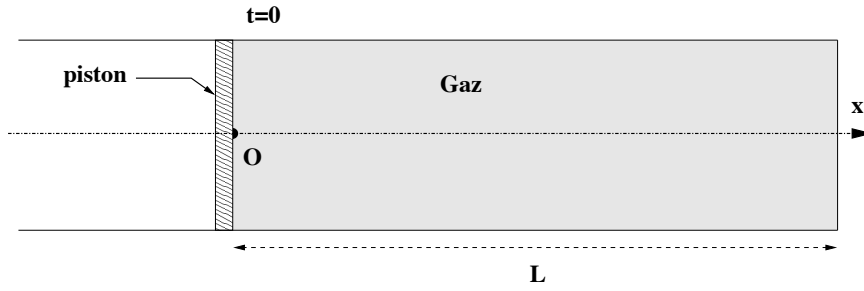


FIGURE 3 – Piston et gaz immobiles à l'instant $t = 0$ dans un tube de longueur L .

AI et IB .

(b) En admettant éventuellement la relation (1), donner les coordonnées (x_I, t_I) du point I .

(c) Donner la valeur de la vitesse sur les demi-droites BB' et BB'' . En remarquant que deux courbes caractéristiques d'une même famille ne peuvent pas se couper, démontrer que le domaine 6 est une zone d'écoulement uniforme. Donner dans cette zone les grandeurs (u, c, p, T) en fonction des grandeurs de l'énoncé.

(d) On souhaite à présent donner l'évolution de la pression le long de la paroi au cours du temps. Si h désigne l'enthalpie spécifique du fluide et $\phi(t, x)$ un potentiel des vitesses de l'écoulement, on peut toujours introduire une fonction auxiliaire g , définie tout comme ϕ à une constante additive près, telle que

$$g(u, h) = \phi - ux + t \left(h + \frac{u^2}{2} \right), \quad (2)$$

ce qui permet d'obtenir les relations importantes :

$$t = \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)_u, \quad x = u \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)_u - \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)_h. \quad (3)$$

Montrer que dans le domaine 2, la fonction g est constante ; elle sera alors choisie nulle. Donner les conditions vérifiées dans le domaine 4 par g sur le tronçon AB et la courbe frontière AI . Le domaine 4 est-il un domaine d'onde simple ?

(e) Nous cherchons dans ce domaine 4 la fonction g . Nous admettons, juste pour cette dernière question que $\gamma = 5/3$ (gaz monoatomique) et que la fonction g prend, sous cette hypothèse, la forme générale suivante :

$$g(u, h) = \frac{1}{c} \left\{ F \left(u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) + G \left(u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) \right\}. \quad (4)$$

En utilisant la question précédente, montrer que :

$$g(u, h) = g(u, c) = \frac{L}{(\gamma-1)c} \left\{ \left(\frac{\gamma-1}{2} u - c \right)^2 - c_0^2 \right\}, \quad (5)$$

dans le domaine 4. En déduire sur le tronçon AB l'équation reliant t/t_A à c/c_0 . Donner alors les coordonnées du point B et expliquer comment trouver $p(t)/p_0$ en $x = L$ au cours du temps t .

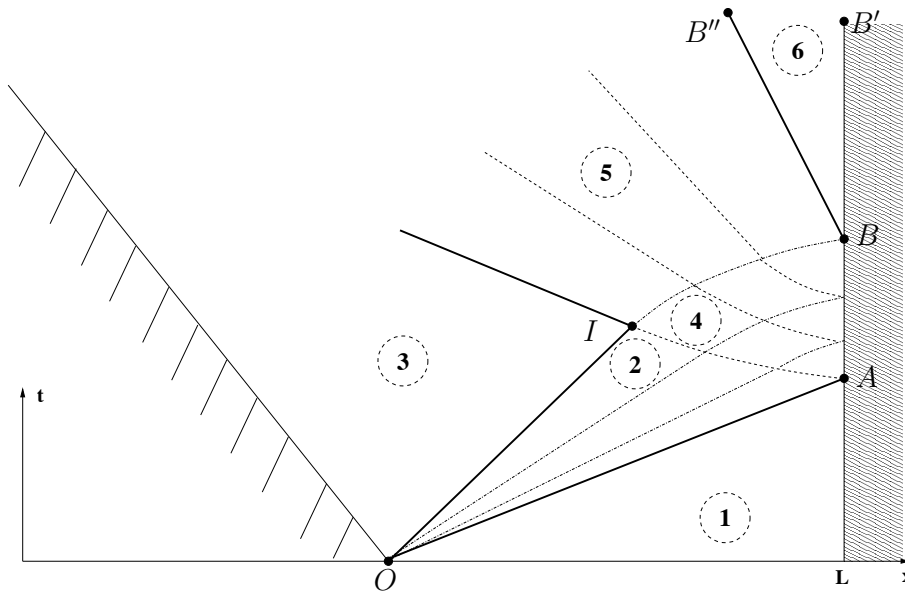


FIGURE 4 – Structure des caractéristiques dans le cas de la réflexion de l’onde de détente.

2 Problème : Evaluation du Mach amont par Tube de Pitot

On considère un écoulement plan permanent autour d’une dièdre symétrique d’angle de déflexion $\varphi = 15$ degrés, représenté sur la Figure 5. Au bord d’attaque, on trouve un choc oblique d’angle σ par rapport à l’écoulement amont de nombre de Mach M_1 , de vitesse $V_1 = U_1 e_x$. La zone en amont du choc oblique est notée 1 et les grandeurs qui s’y réfèrent possèdent un indice 1.

La pression mesurée par le Tube de Pitot est de 2.596 atm. Un capteur positionné au point A, dans la zone 3, derrière l’onde détente, détecte une pression de 0.1 atm. Le but du problème est la détermination du nombre de Mach amont M_1 .

2.1 Onde de choc oblique

(a) Rappeler la structure d’une onde de choc oblique ainsi que la relation qui relie l’angle de déflexion φ , l’angle du choc et la donnée de l’écoulement amont. Combien de solutions de cette relation sont envisageables, l’angle de déflexion φ étant donné? Qu’observe-t-on physiquement?

(b) Donner, vu l’angle de déflexion proposé, la gamme de nombre de Mach amont permettant l’existence d’un choc oblique. Préciser comment obtenir dans ce cas la valeur de σ , le nombre de Mach amont étant donné.

(c) Dans le cas du dièdre étudié, préciser le domaine spatial dans lequel cette solution est valable.

(d) Pour un nombre de Mach amont fixé, donner l’expression de M_2 en fonction de M_1 , et des angles de l’onde de choc oblique σ et de déflexion φ .

2.2 Onde de détente de Prandtl-Meyer

(a) Rappeler brièvement comment s’effectue la résolution de la détente centrée de Prandtl-Meyer

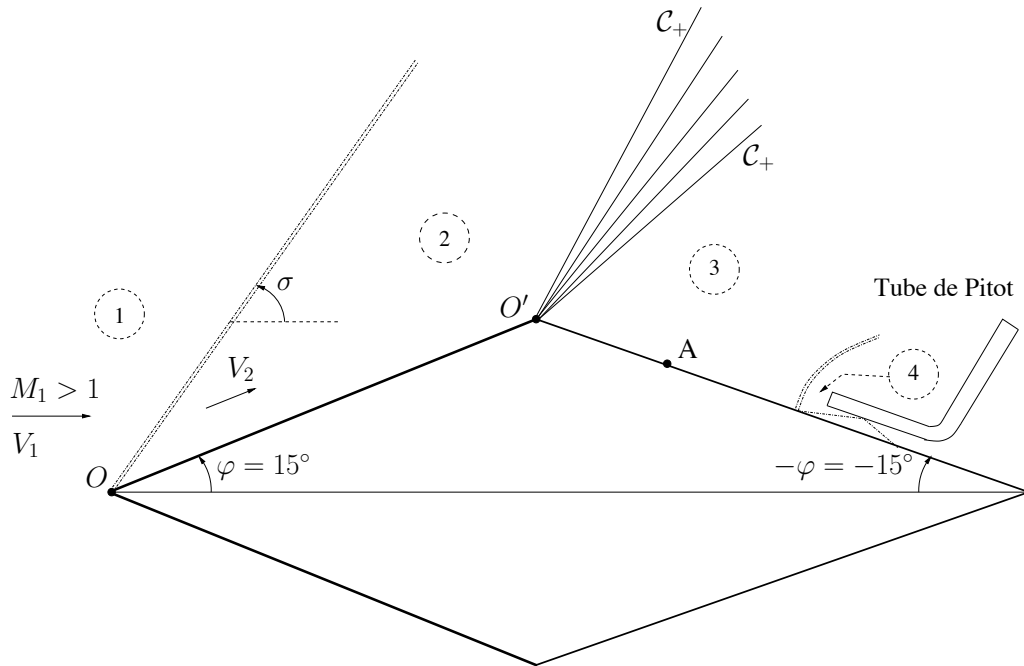


FIGURE 5 – Schéma de principe de la mesure de vitesse amont par utilisation d'un Tube de Pitot.

à l'aide de la fonction du même nom.

(b) Présenter précisément la structure de la détente centrée de Prandtl Meyer et donner l'étendue spatiale de validité de l'onde centrée dans le cas du dièdre considéré.

(c) Si l'on suppose connu le nombre de Mach M_3 , comment trouve-t-on ν_3 , angle de Mach de la dernière \mathcal{C}_+ caractéristique qui délimite l'éventail de détente centrée ?

(d) Par conservation de l'invariant de Riemann, quel est l'angle de Mach ν_2 , angle de Mach de la première \mathcal{C}_+ caractéristique qui délimite l'éventail de détente centrée en amont.

2.3 Onde de choc devant le Tube de Pitot

L'écoulement dans la zone 3 doit être supersonique, et par conséquent il se forme une onde de choc normale devant le tube de Pitot ; l'écoulement juste derrière l'onde de choc est noté avec l'indice 4 comme indiqué sur la Figure 5. Le tube de Pitot permet la mesure de la pression génératrice $p_{04} = 2.596 \text{ atm}$.

(a) Justifier pourquoi l'écoulement dans la zone 3 doit être supersonique dans la configuration choisie (indépendamment de la présence du Tube de Pitot).

(b) En utilisant les tables de choc normal, et connaissant la pression p_3 au point A ainsi que la pression d'arrêt ci-dessus, donner la valeur du nombre de Mach M_3 (interpoler au besoin pour être précis).

(c) Expliciter les relations de saut impliquées pour tabuler p_{04}/p_3 en fonction de M_3 dans les tables de choc normal que vous venez d'utiliser. On donnera une formule finale.

2.4 Résolution du problème de départ

(a) Calculer les valeurs successives de ν_3 , ν_2 et finalement M_2 en utilisant les questions précédentes.

(b) En déduite l'équation qui lie M_1 , M_2 et l'angle de l'onde de choc oblique σ en utilisant les valeurs numériques évaluées.

(c) Démontrer que cela définit une solution unique pour le nombre de Mach amont.

(d) Résoudre l'équation implicite en M_1 en faisant des itérations successives à partir de $M_1 = 4$, et expliquer comment vous faites varier M_1 et pourquoi.

(e) Que conclure sur l'existence d'un choc oblique attaché en O ?

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

Contrôle de connaissance

Durée 3 heures (*Les notes de cours et les documents distribués en cours sont autorisés ainsi que l'usage de calculatrices*).

Le contrôle de connaissance se compose d'un exercice et d'un problème. Dans l'exercice et le problème, on considère des écoulements de gaz parfaits idéaux polytropiques (pas de phénomènes de dissipation, loi d'état de gaz idéal, $p = \rho r T$, $r = R/M$ où M est la masse molaire du gaz ; c_p ainsi que γ sont des constantes données) sans force massique extérieure.

1 Exercice : Onde simple de détente, courbes intégrales et réflexion

Cet exercice est très proche des questions traitées en cours. On s'intéresse au mouvement d'un piston dans un tube où la dynamique du gaz peut être supposée monodimensionnelle et modélisée par les équations d'Euler de la dynamique des gaz (Figure 1. On considère un état initial, à l'instant $t = 0$, constitué d'un gaz au repos sur la demie-droite infinie $] -\infty, 0]$, le piston se trouvant en $x = 0$ à l'instant $t = 0$. Le mouvement du piston est décrit par la fonction $X(\tau)$, pour $\tau \in [0, +\infty[$ vérifiant $X'(\tau) > 0$ et $X''(\tau) > 0$ pour $\tau \in]0, \tau_{\text{acc}}[$, où τ_{acc} est le temps d'accélération du piston et où le piston possède sa vitesse finale u_f à partir de $t = \tau_{\text{acc}}$. Le point P dans le diagramme caractéristique est de coordonnées $(X(\tau), \tau)$ sur la Figure 2).

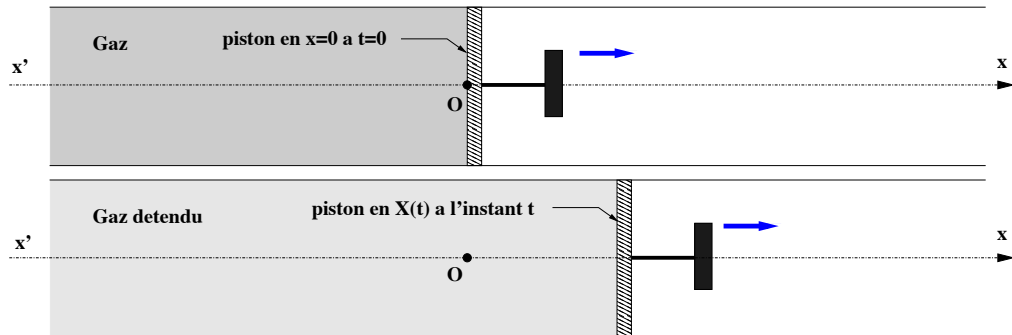


FIG. 1 – Tube rempli d'un gaz limité par un piston à deux instants successifs. Le mouvement du piston provoque la détente du gaz situé à sa gauche.

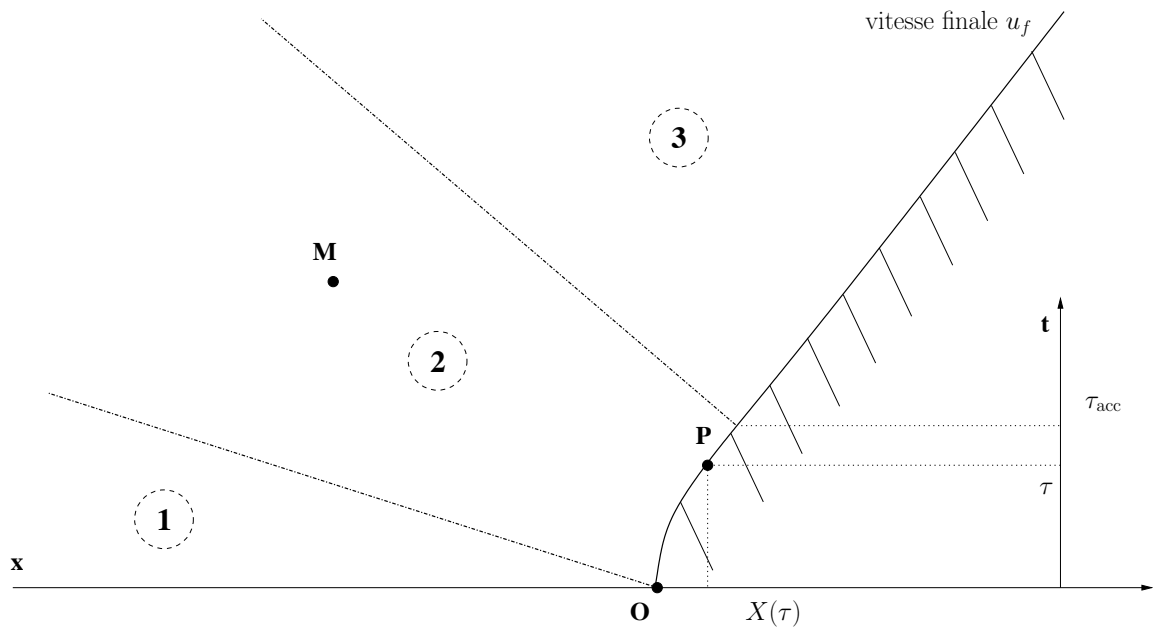


FIG. 2 – Mouvement du piston et trois régions de l'écoulement dans le plan caractéristique (x, t) .

1.1 Hypothèse du tube semi-infini

(1) Montrer que, dans le contexte où aucun croisement de caractéristique n'a lieu, que l'écoulement est homoentropique.

(2) Rappeler la structure du diagramme des caractéristiques dans le plan (x, t) . Pour cela on se basera de manière précise sur les propriétés démontrées en cours et on justifiera la résolution dans les variables vitesse $u(t, x)$ et vitesse du son $c(t, x)$ en tout point M (Figure 2). On expliquera précisément pourquoi cette résolution suffit et en quoi elle permet de caractériser l'ensemble de l'écoulement. On justifiera en particulier la nature des courbes séparant les diverses zones d'écoulement 1, 2 et 3 dans le plan caractéristique de la Figure 2.

(3) Rappeler par quels types d'ondes sont connectés les divers états constants 1 et 3 obtenus dans la résolution de ce problème. Montrer que l'ensemble des valeurs de l'écoulement dans la configuration proposée vérifie " J_+ est une constante". En déduire que l'ensemble des états du gaz sont situés sur une courbe intégrale en utilisant la conservation de l'invariant J_+ le long d'une C_+ . A quelle valeur propre et quel champ caractéristique est associée cette courbe que l'on représentera de manière qualitative dans le plan de phase (p, u) ?

(4) Expliquer de manière convaincante pourquoi on va parler d'une onde de détente et représenter une trajectoire typique d'une particule fluide située à l'instant $t = 0$ au point $x_1 < 0$.

(5) Pour ce point, on considère l'ensemble des états parcourus par cette particule fluide le long de sa trajectoire $X_1(t)$, $X_1(0) = x_1$, paramétrée par le temps; il s'agit donc de $W(t) = (p(t, X_1(t)), u(t, X_1(t)), s(t, X_1(t)))^t$. Evaluer la dérivée par rapport au temps du vecteur W ; que peut-on en dire par rapport à r_1 ? Que peut-on en déduire? Faire le lien avec la question 3.

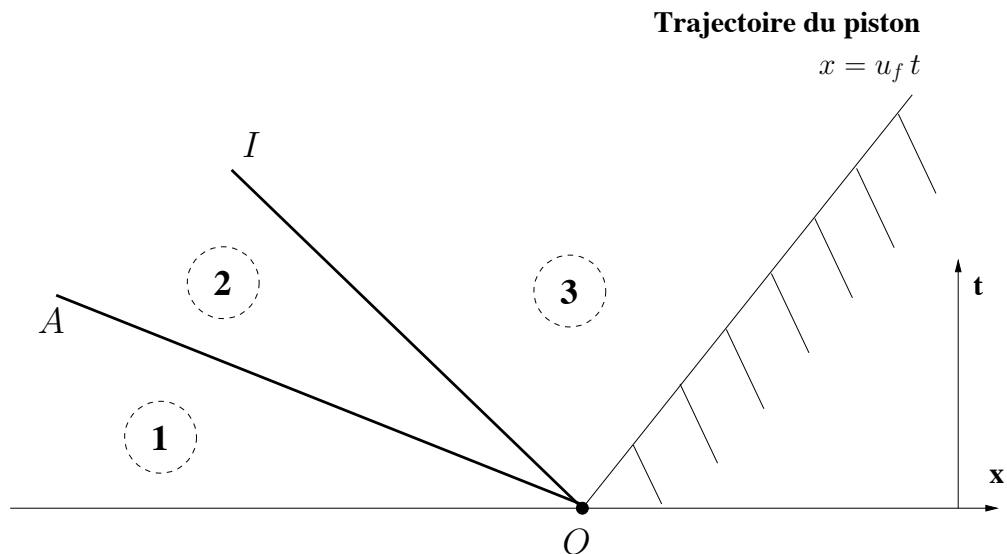


FIG. 3 – Onde de détente centrée au point O .

1.2 Onde centrée

(1) Comme d'habitude, on fait l'hypothèse que l'accélération du piston pour arriver à la vitesse finale u_f est infinie pendant un instant quasi-nul et on suppose que la vitesse finale du piston est obtenue pour tout $t > 0$. Comparer la position des points pris dans le plan (p, u) par rapport au cas précédent et justifier les conclusions auxquelles vous arrivez.

(2) Par quelle transformation le problème est-il invariant (on justifiera)? Que peut-on en déduire sur la solution du problème? Donner l'expression de u et c en fonction de la variable x/t .

(3) Pour un point $P(X, \tau)$ dans la région 2 de l'écoulement, vérifier que la \mathcal{C}_- de cette région qui passe par P admet pour équation :

$$x = \frac{2c_0 t}{\gamma - 1} + \left[X - \frac{2c_0 \tau}{\gamma - 1} \right] \left[\frac{t}{\tau} \right]^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}. \quad (1)$$

(Indice : pour cela on passera de l'équation de la \mathcal{C}_+ habituelle impliquant sa pente $u + c$ et on utilisera les valeurs de u et c en fonction de x/t . En utilisant $t \frac{d(x/t)}{dt} + x/t = \frac{dx}{dt}$, on cherchera une équation sur la nouvelle variable $f = x/t$ comme une fonction du temps t et on écrira une équation différentielle sur cette variable. On montrera alors que la forme proposée est bien solution de cette équation différentielle du premier ordre.)

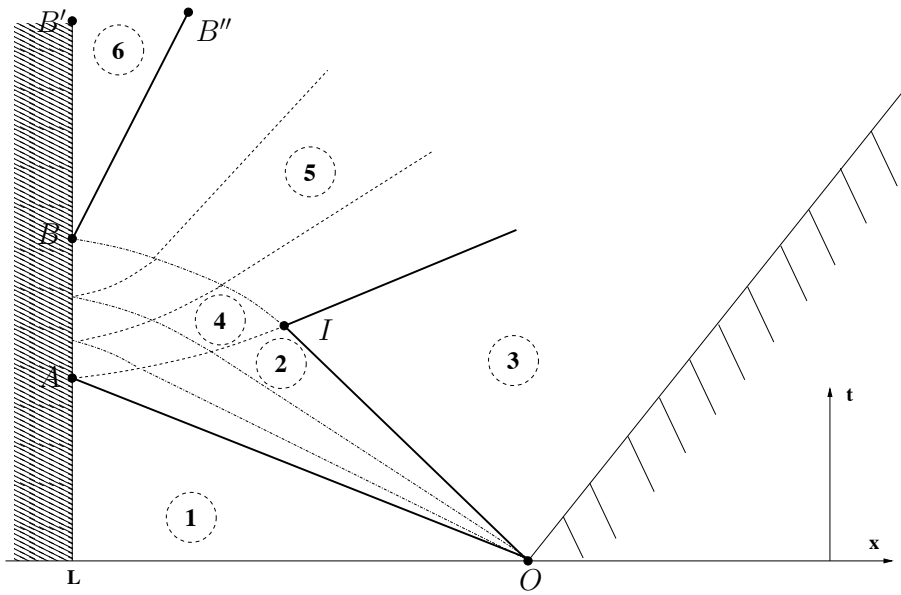


FIG. 4 – Structure des caractéristiques dans le cas de la réflexion de l'onde de détente.

1.3 Réflexion de l'onde de détente

Ayant résolu le problème associé à l'onde simple de détente avant toute interaction, on se propose maintenant de considérer le problème de la réflexion de l'onde au bout du tube. Pour des temps relativement faibles, on suppose que le diagramme des caractéristiques prend la forme donnée sur la Figure 4.

(1) Donner les propriétés de la région 5 de l'écoulement, quelle est la nature des courbes représentées dans cette zone de l'écoulement? Donner leurs propriétés. Quelle est la nature des courbes AI et IB .

(2) En admettant éventuellement la relation (1), donner les coordonnées (x_I, t_I) du point I .

(3) Donner la valeur de la vitesse sur les demi-droites BB' et BB'' . En remarquant que deux courbes caractéristiques d'une même famille ne peuvent pas se couper, démontrer que le domaine 6 est une zone d'écoulement uniforme. Donner dans cette zone les grandeurs (u, c, p, T) en fonction des grandeurs de l'énoncé.

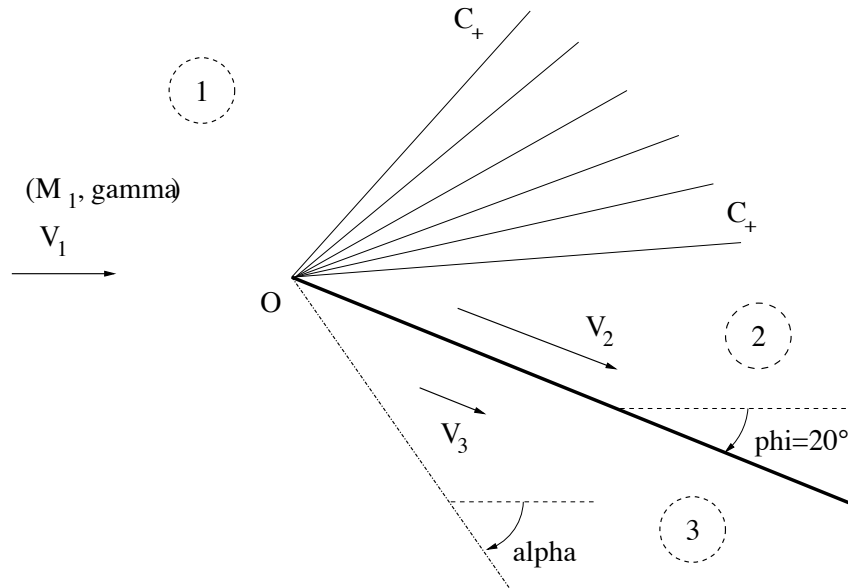


FIG. 5 – Onde de choc oblique et détente de Prandtl-Meyer sur une plaque de longueur infinie et d'épaisseur nulle faisant un angle de 20 degrés avec l'écoulement amont.

2 Problème : Plaque infiniment fine dans un écoulement supersonique amont

On considère un écoulement plan permanent autour d'une plaque plane dans la limite d'une épaisseur infiniment faible. Cet écoulement est représenté sur la Figure 5. Le problème se subdivise en deux parties qui correspondent aux deux cas d'une plaque de longueur infinie et d'une plaque de longueur finie. Au bord d'attaque, la plaque engendre deux écoulements classiques, une détente de Prandtl-Meyer et une onde de choc oblique, que nous avons étudiés en cours. Lorsque la plaque est de longueur finie, la structure de l'écoulement engendre une force sur la plaque induisant portance et traînée, qui font l'objet de la première sous-partie. Le but de la seconde sous-partie est le raccord des écoulements au bord de fuite et celui de la troisième, l'interaction des ondes provenant des bords d'attaque et de fuite.

2.1 Plaque de longueur infinie

A l'amont du dispositif, l'écoulement est supersonique, de nombre de Mach M_1 , de vitesse $V_1 = U_1 e_x$. Dans cette question, l'écoulement est supposé partout supersonique, et pour les applications numériques, on prendra $\gamma = 1.4$ et $M_1 = 3$. On va analyser les principales lignes caractéristiques de l'écoulement autour de cette plaque infinie.

2.1.1 Détente de Prandtl-Meyer

(a) Rappeler brièvement comment s'effectue la résolution de la détente centrée de Prandtl-Meyer à l'aide de la fonction du même nom.

(b) L'angle φ vaut 20° . En utilisant la tabulation de la fonction de Prandtl-Meyer donnée en annexe et issue du livre de Anderson, calculer le nombre de Mach aval M_2 .

(c) En déduire le rapport de pression p_2/p_1 en utilisant le caractère homoentropique de l'écoulement, la pression génératrice et les tableaux d'écoulements isentropiques issus de Anderson à la fin de ce document (p/p_i en fonction du nombre de Mach).

(d) Evaluer les angles que font les deux C_+ caractéristiques, qui délimitent la structure d'onde simple de détente, avec la direction de l'écoulement amont.

2.1.2 Onde choc oblique

(a) En utilisant les abaques de choc oblique (Courbes correspondant à un nombre de Mach amont donné dans le diagramme $\varphi - \alpha$) donnés en annexe, évaluer l'angle de l'onde de choc oblique α correspondant à l'angle de déflexion φ .

(b) Expliquer comment vous choisissez entre les deux valeurs de α possibles ; à quelles configurations respectives font-elle référence en terme de l'intensité du choc ? Expliquez.

(c) Exprimer le nombre de Mach normal amont et en déduire le rapport de pression p_3/p_2 .

(d) Représenter qualitativement les points correspondant aux zones 2 et 3 sur un diagramme $(\varphi, \log(p/p_1))$ en traçant la polaire de choc oblique et la courbe correspondant à la détente de Prandtl-Meyer.

2.2 Plaque de longueur finie L

La structure d'ondes centrées que nous avons observée dans tout l'espace dans le cas de la plaque de longueur infinie, est limitée à une certaine région de l'espace dans le cas où la plaque est de longueur finie. Outre le calcul de la portance et de la trainée dites d'onde, se posent deux problèmes, le premier du raccord des écoulements au point O' dit bord de fuite et le second, des interactions entre les ondes provenant du bord d'attaque que nous avons étudiées dans la première partie avec celles induites par le bord de fuite.

2.2.1 Trainée et portance d'onde ("wave drag and lift")

(a) Donner la force de trainée \mathcal{T} et de portance \mathcal{P} par unité d'envergure de la plaque (c'est-à-dire par unité de longueur dans la direction orthogonale au plan de la Figure 6) issue du différentiel de pression entre p_2 et p_3 sur la plaque de longueur L .

(b) Calculer les coefficients de trainée $c_{\mathcal{T}}$ et de portance $c_{\mathcal{P}}$ définis par

$$c_{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{T}}{L q_1}, \quad c_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}}{L q_1}, \quad (2)$$

où la pression dynamique q_1 vaut $\frac{\gamma}{2} p_1 M_1^2$.

(c) Dans un écoulement de fluide parfait, à faibles vitesses, le paradoxe de d'Alembert donne une force de trainée nulle. On peut résoudre ce paradoxe en introduisant les effets visqueux dans l'écoulement, ces effets induisant une trainée dite visqueuse. La trainée obtenue dans la question précédente est-elle en contradiction avec l'idée d'une trainée visqueuse ? Expliquez et commentez.

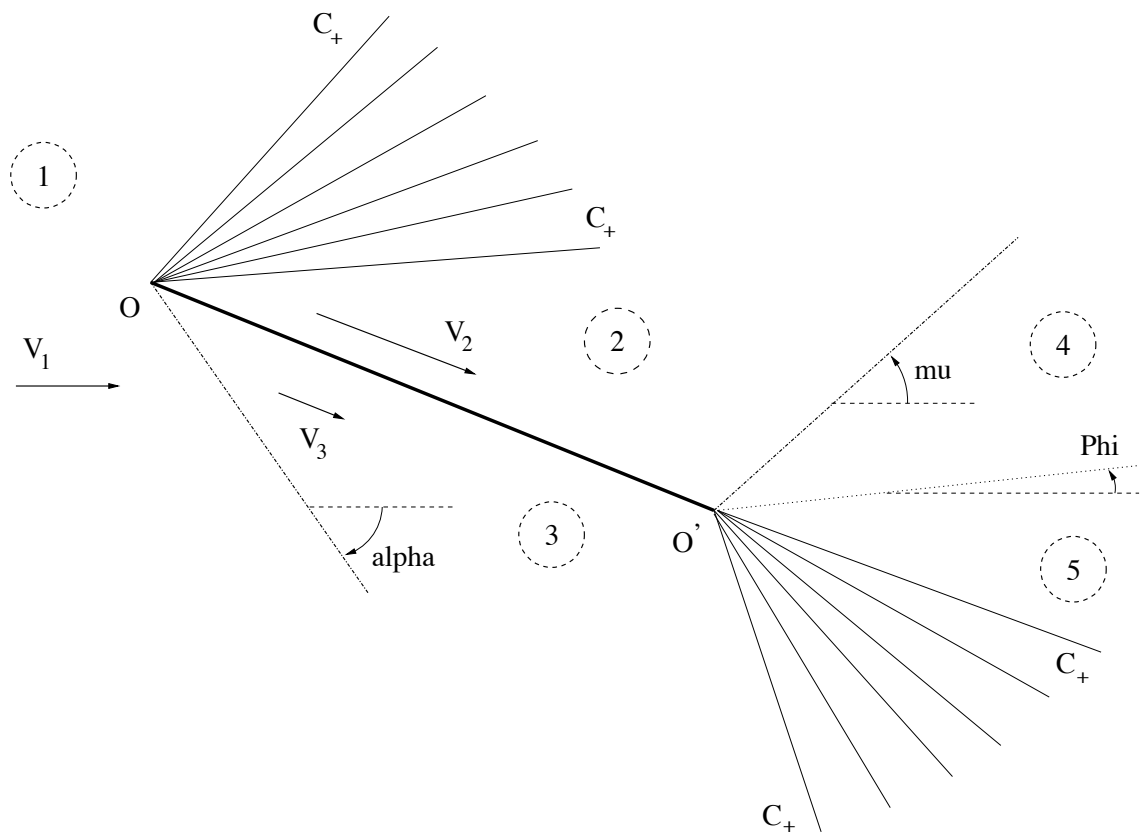


FIG. 6 – Ondes de choc obliques et détentes de Prandtl-Meyer sur une plaque de longueur finie et d'épaisseur nulle faisant un angle de 20 degrés avec l'écoulement amont.

2.2.2 Raccords des écoulements en O'

On fait l'hypothèse qu'en O' , la structure de l'écoulement est de type centrée.

(a) Expliquez pourquoi, dans la mesure où l'écoulement est centré, il est nécessaire d'avoir la présence d'une onde de choc oblique et d'une onde de détente de Prandtl-Meyer qui relient les états 2 et 3 aux états 4 et 5 respectivement.

(b) Dans la mesure où l'on se donne la direction de l'écoulement aval via l'angle Φ , par exemple $\Phi = 0$, donnez la valeur du champ de pression dans les zones 4 et 5.

(c) Quelle doit être la structure de l'écoulement dans les zones 4 et 5 ainsi que les conditions de saut à l'interface entre ces deux zones ? Quelle est la nature de cette interface ?

(d) L'angle Φ est-il un degré de liberté du problème ou bien est-il déterminé par l'écoulement amont ? Dans le second cas, expliquez comment il doit être obtenu.

(e) Calculer une approximation de Φ . On procédera par approximation successive en partant de $\Phi = 0$, on expliquera si l'on doit augmenter ou diminuer Φ pour converger vers la bonne solution. On calculera en particulier la solution pour laquelle la valeur absolue de Φ vaut 1 degré et on en déduira par interpolations successives une valeur raisonnablement précise de Φ . Commentez le résultat obtenu.

(f) Calculer les rapports de pressions p_4/p_1 et p_5/p_1 dans les zones 4 et 5, puis donner l'angle μ que fait la seconde onde de choc oblique issue de O' avec l'écoulement amont, ainsi que les nombres de Mach dans ces zones.

(g) Tracer la structure des différentes ondes obtenues dans un diagramme $(\varphi, \log(p/p_1))$ de polaire de choc et situer en particulier les zones 4 et 5 sur ce diagramme.

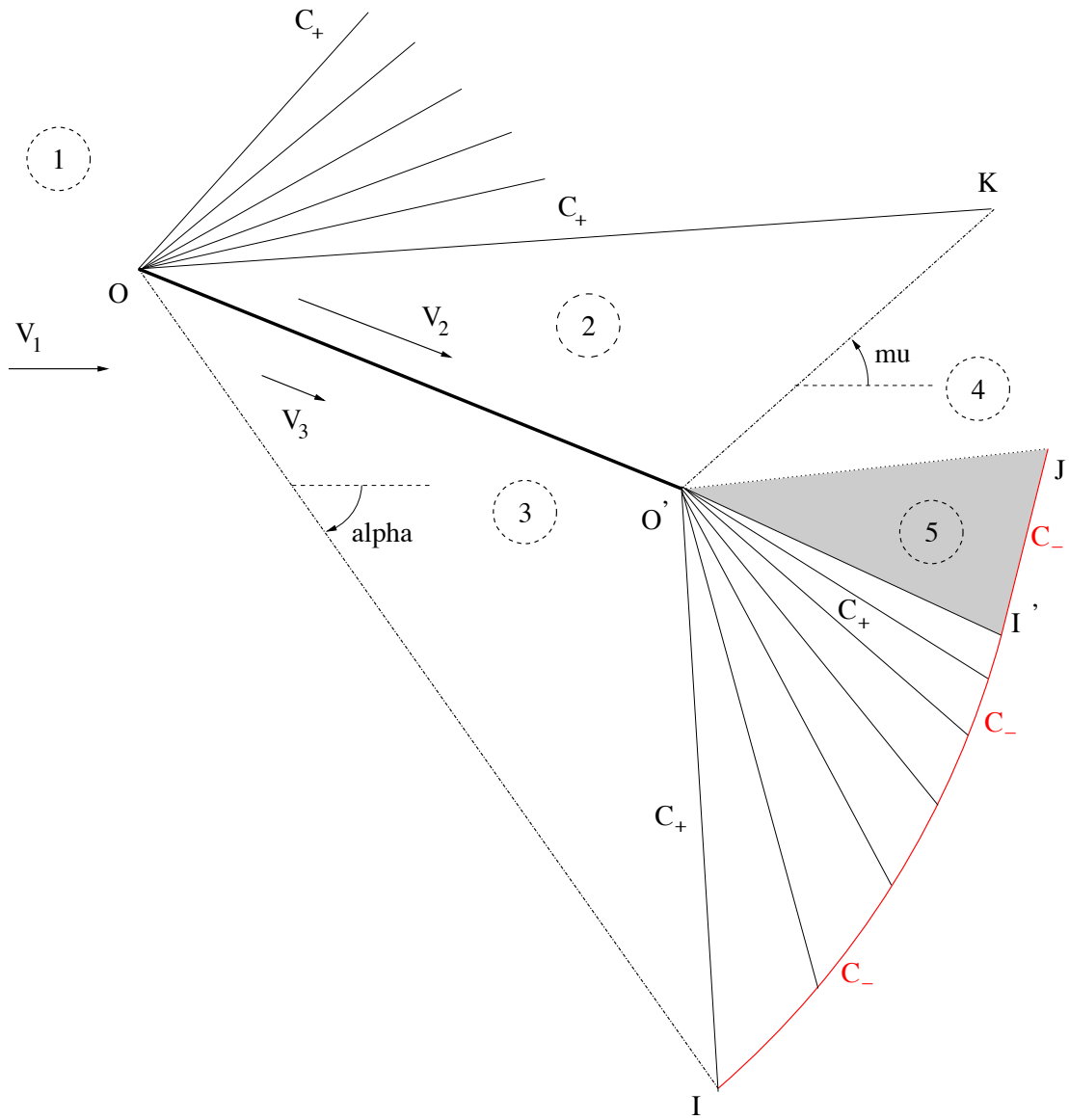


FIG. 7 – Interaction des ondes de choc oblique et détente de Prandtl-Meyer sur une plaque de longueur finie et d'épaisseur nulle faisant un angle de 20 degrés avec l'écoulement amont.

2.2.3 Interaction des ondes

On considère maintenant la Figure 7 et l'on se propose de déterminer l'allure de l'ensemble des structures de type ondes de choc et ondes de détente présentes dans l'écoulement, y compris dans des zones plus éloignées des bords d'attaque et de fuite.

(a) Démontrez que l'écoulement dans la zone triangulaire $O'I'J$ grisée sur la Figure 7 est uniforme à l'aide des courbes caractéristiques ; I , I' et J se trouve sur la C_- caractéristique issue de I , lui-même intersection de la C_+ caractéristique issue de O' avec l'onde de choc oblique issue de O .

(b) Que se passe-t-il pour l'onde de choc oblique issue de O à partir de I ? Dans quelle direction l'onde est-elle infléchie ? Expliquez.

(c) Même question pour l'onde de choc oblique issue de O' . Identifier K le point à partir duquel l'onde de choc issue de O' n'est plus rectiligne.

(d) Faire un schéma général de la structure de l'écoulement, y compris dans des zones hors des ondes simples et ondes de choc obliques rectilignes. Expliquer où l'écoulement est homoentropique et/ou homoénergétique ainsi que les zones d'onde simple.

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET SUPERSONIQUES

Contrôle de connaissance

Marc MASSOT

Durée 3 Heures (*Les notes de cours et les documents distribués en cours sont autorisés ainsi que l'usage de calculatrices*).

Le contrôle de connaissance se compose d'un exercice court et d'un problème conséquent. Le problème se compose de quatre parties indépendantes. Dans l'exercice et le problème, on considère un écoulement de gaz parfait idéal polytropique (pas de phénomènes de dissipation, loi d'état de gaz idéal, $p = \rho r T$, et c_p ainsi que γ sont des constantes données) sans force massique extérieure.

1 Exercice : le tube à choc

Cet exercice est très proche des questions traitées en cours. On s'intéresse à un tube à choc, dans l'approximation d'un écoulement instationnaire monodimensionnel. On considère un état initial, à l'instant $t=0$, constitué de deux gaz au repos de chaque côté d'une membrane que l'on retire à l'instant initial. Ces gaz sont des fluides parfaits idéaux polytropiques non miscibles notés "état 4" en ce qui concerne l'état à gauche de la membrane (de pression p_4 , de température T_4 , de vitesse $u_4 = 0$ de masse molaire \mathcal{M}_4 et de coefficient γ_4) et "état 1" à droite de la membrane (de pression $p_1 \ll p_4$, de température $T_1 = T_4$, de vitesse $u_1 = 0$, de masse molaire $\mathcal{M}_1 \gg \mathcal{M}_4$ et de coefficient γ_1). Cette donnée initiale correspond au problème de Riemann traité en cours.

(1) rappeler la structure du diagramme des caractéristiques dans le plan (x, t) ; justifier la structure centrée du diagramme et par conséquent la structure de la solution.

(2) Rappeler par quels types d'ondes sont connectés les divers états constants obtenus dans la résolution de ce problème de Riemann.

(3) Tracer dans le plan de phase (p, u) , de manière qualitative, les demis-courbes qui connectent l'état 1 à un état 2 par une onde de choc (1-choc entropique) et l'état 4 à l'état 3 par une onde de raréfaction (3-onde de raréfaction).

(4) Expliquer de manière convaincante pourquoi la situation inverse, où l'état 2 est connecté à l'état 1 par une onde de raréfaction **et** l'état 3, connecté à l'état 4 par une onde de choc, n'est pas observable physiquement (raisonner sur la pression).

(5) Expliquer de manière convaincante pourquoi on ne peut pas observer la situation où l'état 2 est connecté à l'état 1 par une onde de choc **et** l'état 3, connecté à l'état 4 par une onde de choc (raisonner sur la vitesse de glissement $u_2 = u_3$).

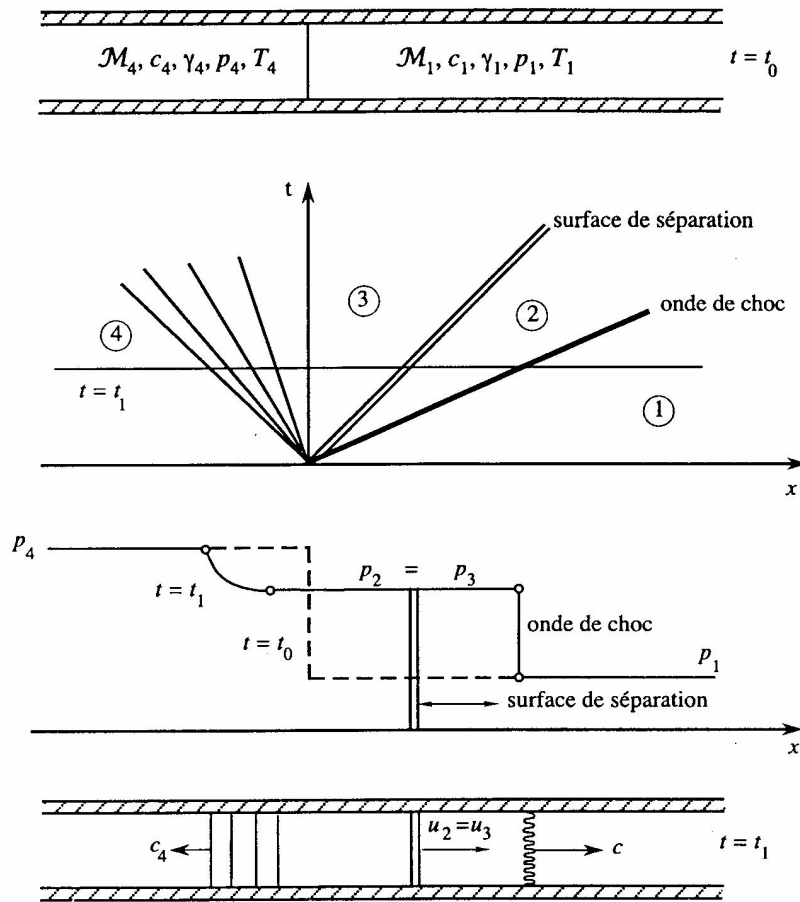


FIG. 1 – Dispositif analogue à celui de la Figure 2 simulant l’effet d’une combustion dans la chambre (par raison de symétrie, on ne présente que la moitié des lignes caractéristiques de l’écoulement extérieur au dispositif).

(6) Expliquer de manière convaincante pourquoi on ne peut pas observer la situation où l’état 2 est connecté à l’état 1 par une onde de raréfaction et l’état 3, connecté à l’état 4 par une onde de raréfaction (raisonner sur la vitesse de glissement $u_2 = u_3$).

(7) Donner l’allure du diagramme des caractéristiques et du diagramme dans le plan de phase de la question (3) dans le cas où les positions des états 4 et 1 sont inversées (état 1 à gauche et état 2 à droite; on ne recalculera pas tout mais on justifiera seulement l’allure qualitative des choix faits pour ces deux diagramme).

(8) On rappelle alors l’équation

$$1 - \frac{c_1(\gamma_4 - 1)(M_1^2 - 1)}{c_4(\gamma_1 + 1)M_1} = \left[\frac{p_1}{p_4} \left(1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1}(M_1^2 - 1) \right) \right]^{\frac{\gamma_4 - 1}{2\gamma_4}}.$$

En faisant intervenir l’expression des vitesses du son $c_1 = \sqrt{\gamma_1 RT_1/M_1}$ et $c_4 = \sqrt{\gamma_4 RT_4/M_4}$, en supposant $\gamma_1 = \gamma_4 = 1.4$ et dans la limite $p_4/p_1 \gg 1$, donner l’expression de $(M_1^2 - 1)/M_1$ en

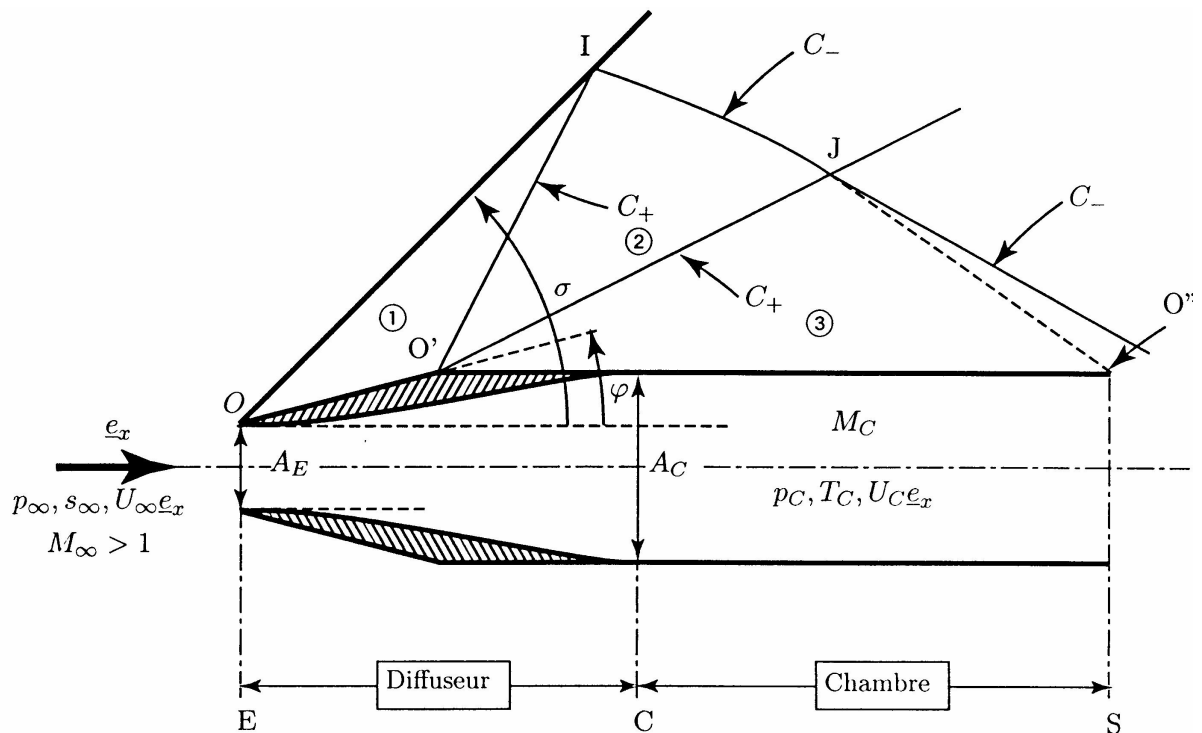


FIG. 2 – Dispositif de statoréacteur (par raison de symétrie, on ne présente que la moitié des lignes caractéristiques de l'écoulement extérieur au dispositif).

fonction du rapport de masse molaire $\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_4$. Dans le cas où ce rapport vaut 9, donner la valeur du nombre de Mach M_1 ainsi que la température T_2 derrière le choc. Conclure.

2 Problème : Le statoréacteur

On considère un écoulement plan permanent dans un statoréacteur selon le dispositif présenté sur la Figure 2.

A l'amont du dispositif, l'écoulement est supersonique, de nombre de Mach M_∞ , de vitesse $U_\infty e_x$ parallèle à l'axe de symétrie du dispositif.

La partie interne du dispositif débute par une tuyère lentement divergente, que l'on appelle aussi diffuseur. Sa forme a été calculée à l'aide de la méthode des caractéristiques pour qu'elle fournisse en régime supersonique un écoulement parfaitement plan uniforme dans une section (de la section d'entrée E à la section interne C à partir de laquelle la chambre est de section constante A_C). L'épaisseur des parois de la chambre sera négligée dans toute l'étude.

2.1 Question 1 : Ecoulement externe

Dans cette question, l'écoulement est supposé partout supersonique, et pour les applications numériques, on prendra $\gamma = 1.4$ et $M_\infty = 2$. On va analyser les principales lignes caractéristiques

de l'écoulement **extérieur** autour du dispositif. Compte tenu de la symétrie, on raisonne dans le demi-plan supérieur.

(a) L'angle ϕ vaut 15° . Le graphe de la polaire de choc donne pour la déviation de l'écoulement σ derrière l'onde de choc oblique attachée en O une valeur de $\sigma = 45,34^\circ$. Le nombre de Mach M_1 et la pression p_1 dans la région 1 valent $M_1 = 1,446$ et $\frac{p_1}{p_\infty} = 2,196$. Donner les équations qui permettent d'obtenir ces valeurs.

(b) Expliquer comment on détermine la valeur de M_3 dans la région 3, à l'aval du faisceau de détente de Prandtl-Meyer (domaine 2) centré sur la point O' et qui est schématisé par le secteur $(O'IJ)$ sur la Figure 2 (on donnera sans application numérique les équations nécessaires).

(c) Le calcul donne $M_3 = 1,962$. Exprimer alors le rapport $\frac{p_3}{p_\infty}$ où p_3 désigne la pression dans la région 3, en fonction de $\frac{p_1}{p_\infty}$, M_1 et M_3 . Calculer ce rapport et vérifier qu'il est légèrement supérieure à 1.

(d) Calculer le rapport $\frac{p_{03}}{p_{0\infty}}$ entre la pression génératrice p_{03} de la région 3 et la pression génératrice amont $p_{0\infty}$, en fonction de $\frac{p_3}{p_\infty}$, M_3 et M_∞ . On vérifiera que ce rapport est légèrement inférieur à 1 et on expliquera pour quelle raison.

(e) On veut démontrer que l'écoulement dans la région 3 est partout uniforme dans le triangle $O'JO''$.

Par construction on a placé l'extrémité O'' du dispositif de manière à ce qu'elle se trouve à l'amont de la caractéristique C_- issue du point I, intersection de la caractéristique montante initiale du faisceau 2 avec le choc oblique issue de O . Montrer alors à l'aide des invariants de Riemann que ce principe garantit bien que l'écoulement est effectivement uniforme dans la région délimitée par le triangle $O'JO''$. Pour cela on montrera d'abord que l'écoulement est uniforme le long du segment $O'O''$. On montrera ensuite qu'il est uniforme dans le triangle $O'JO''$.

2.2 Question 2 : Ecoulement interne

Dans cette partie, on supposera que dans la section S indiquée sur la Figure 2 (plan de sortie du dispositif) l'écoulement extérieur est le même qu'à l'infini amont : Mach $M_\infty = 2$, vitesse $U_\infty e_x$, pression p_∞ , pression et température génératrice $p_{0\infty}$ et $T_{0\infty}$. Ces même conditions s'appliquent aussi à la section d'entrée E du dispositif. On prendra finalement pour les applications numériques $\gamma = 1,4$.

(a) Donner l'expression du débit massique dans une section du diffuseur en fonction de l'aire de la section, des conditions génératrices et du nombre de Mach M_∞ dans la section d'entrée E du diffuseur de la Figure 2 et le nombre de Mach M_C dans la section d'entrée C de la chambre. Vérifier que $M_C > M_\infty$.

(b) La tuyère a été conçue de manière à obtenir un nombre de Mach $M_C = 2,77$ à l'entrée de la chambre. Donner l'expression du rapport de pression $\frac{p_C}{p_\infty}$ où p_C désigne la pression dans la chambre. On vérifiera que ce rapport est inférieur à 1.

(c) Pour qu'à l'aval de la section S et à proximité de l'orifice de sortie du dispositif de la Figure 2, l'écoulement extérieur $(U_\infty e_x, p_\infty)$ et l'écoulement issu de la chambre $(U_C e_x, p_C)$ séquilibrent, il faut qu'ils vérifient deux conditions : il faut qu'ils soient parallèles et il faut que leurs pressions

soient identiques. D'après la question précédente, il n'y a pas identité des pressions dans le plan de sortie.

- c(i) Montrer que dans la région proche de l'orifice de sortie, l'équilibre des deux écoulements ne peut pas être assuré par la seule présence d'un choc droit attaché en O'' .
- c(ii) Montrer que la présence seul d'un choc oblique attaché en O'' n'est pas non plus suffisante.
- c(iii) On admet que l'équilibre des deux écoulements dans la région aval proche de l'orifice se sortie nécessite la présence de trois familles de lignes caractéristiques issues de O'' : un choc oblique attaché, une ligne de glissement et un faisceau de détente de Prandtl-Meyer. Faire un schéma qualitatif indiquant la position de ces trois phénomènes autour de O'' .

2.3 Question 3 : Propulsion

Comme dans la partie précédente, on supposera que dans la section S indiquée sur la Figure 2 (plan de sortie du dispositif) l'écoulement extérieur est le même qu'à l'infini amont : Mach $M_\infty = 2$, vitesse $U_\infty e_x$, pression p_∞ , pression et température génératrice $p_{0\infty}$ et $T_{0\infty}$. Ces mêmes conditions s'appliquent aussi à la section d'entrée E du dispositif.

On réalise maintenant dans la chambre du dispositif une combustion grâce au mélange avec l'air et à l'ignition d'un carburant introduit par des injecteurs (non montrés sur la Figure). Le débit d'injection du carburant est supposé négligeable devant le débit du dispositif. On va étudier l'effet de cette combustion sur le fonctionnement du dispositif.

On va montrer que le réchauffement du fluide consécutif aux réactions de combustion exothermiques est équivalent à l'effet d'un changement de section du conduit interne du dispositif. Le processus de combustion est une source d'entropie le long des lignes de courant et doit être modélisé.

(a) Rappeler les équations de Hugoniot établies dans le cours dans le cas d'un écoulement quasi-monodimensionnel homoentropique et dans le cas d'une de la présence d'une source de chaleur.

(b) Quel est l'effet d'un apport de chaleur sur la vitesse de l'écoulement dans la chambre du dispositif de la Figure 2 si l'écoulement est supersonique et continu ? Comment peut-on simuler cet effet sans apport de chaleur.

(c) On s'intéresse au bilan des efforts sur les parois du dispositif en l'absence d'apport de chaleur par la combustion. En considérant d'une part la pression qui règne sur la ramp extérieure OO' du diffuseur, derrière le choc oblique attaché en O et d'autre part, la pression sur la paroi interne du diffuseur où l'écoulement est supposé continu, expliquer sans équation dans quelle direction s'exerce la force résultante qui agit sur le dispositif en l'absence d'apport de chaleur par la combustion.

(d) Expliquer comment une combustion dans la chambre du dispositif peut changer la conclusion de la question (c).

2.4 Question 4 : Analogie avec un système à deux cols soniques

On considère maintenant le dispositif de la Figure 3 où la chambre de la section constante de la Figure 2 a été remplacée par un bloc convergent de section variable, dont l'aire de la section est comprise entre A_C et A_S . On fera les applications numériques avec $\gamma = 1.4$, $M_\infty = 2$ et $M_C = 2.77$.

Remarque : Comme schématisé sur la Figure 3, le bloc convergent est non solidaire du dispositif et ne transmet donc par les efforts qu'il subit.

(a) Quand on ferme progressivement la section aval A_S , l'expérience montre que, pour un taux de contraction $\frac{A_S}{A_E}$ inférieur à une certaine valeur, un choc droit permanent s'établit dans le diffuseur. On note $p'_{0\infty}$ la pression d'arrêt à l'aval de ce choc. Déterminer l'expression de $\frac{A_S}{A_E}$ en fonction de M_∞ , de γ et du rapport $\frac{p'_{0\infty}}{p_{0\infty}}(M^2, \gamma)$, avec M le nombre de Mach devant le choc droit, dans le cas où la section aval S de section A_S est sonique et joue le rôle d'un "second col" dans le dispositif.

(b) Le rapport $\frac{p'_{0\infty}}{p_{0\infty}}(M^2, \gamma)$ est une fonction monotone décroissante du nombre de Mach M devant le choc. En déduire comment se déplace le choc droit dans le dispositif quand on ferme progressivement la section A_S à partir de la valeur considérée dans la question précédente.

(c) A partir des conclusions de la question **(b)**, décrire comment {evolue, qualitativement, le bilan des efforts (établi dans la partie précédente sans bloc convergent) en présence du bloc convergent quand on ferme progressivement la section A_S à partir de la valeur considérée dans la question **(a)**.

(d) Dans quelle condition la résultante des efforts de pression qui s'appliquent sur la paroi interne du diffuseur de la Figure 3 est-elle maximale? Pourquoi peut-on affirmer que dans ce cas le bilan des efforts est propulsif, c'est-à-dire dirigé vers l'amont?

(e) Que se passe-t-il si on diminue encore A_S ?

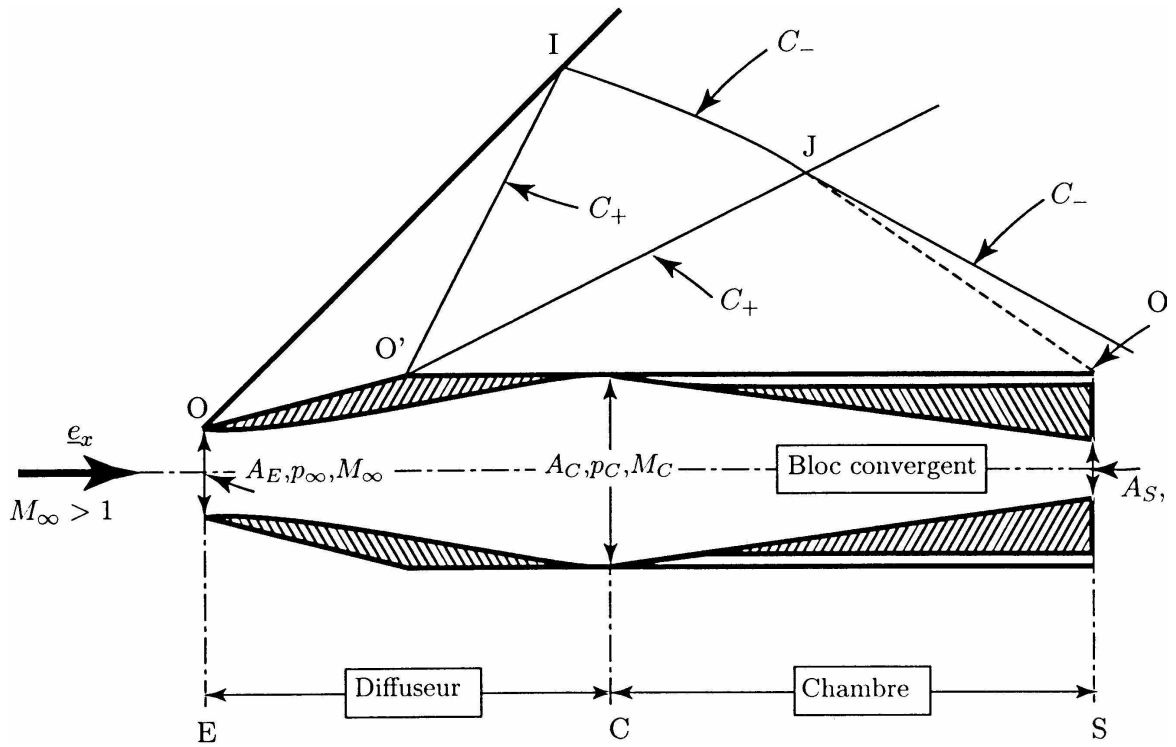


FIG. 3 – Dispositif analogue à celui de la Figure 2 simulant l'effet d'une combustion dans la chambre (par raison de symétrie, on ne présente que la moitié des lignes caractéristiques de l'écoulement extérieur au dispositif).