

**Examen (première partie) - 11 avril 2014 - Durée : 30 minutes**

*Documents et calculatrices non autorisés.*

1. Donner l'expression de l'échelle de temps nucléaire d'une étoile, en définissant chaque terme. Quel est l'interprétation physique de cette échelle de temps ? Quel est l'ordre de grandeur pour le Soleil ? Comment varie-t-elle le long de la séquence principale ?
2. On observe une galaxie lointaine. Une supernova de type Ia, de magnitude absolue  $M = -18.5$ , y est détectée avec la magnitude apparente  $m = 16.5$ . Déterminer la distance de la galaxie. Citer la loi de Hubble et donner l'ordre de grandeur de  $H_0$  dans les unités usuelles. Déterminer à quelle longueur d'onde la raie  $H\alpha$  de l'hydrogène (longueur d'onde au repos : 656 nm) est observée dans le spectre de cette galaxie.
3. Décrire un exemple d'observation mettant en évidence la matière noire.
4. Rappeler la dépendance de la pression à la température et à la masse volumique dans les cas suivants : (i) pression d'un gaz de photon à l'équilibre thermique ; (ii) pression d'un gaz parfait non relativiste à l'équilibre thermique ; (iii) pression d'un gaz dégénéré d'électrons dans les limites non-relativiste et ultra-relativiste. Dans un diagramme log-log température-masse volumique, représenter schématiquement les régions où chacune de ces équations d'état domine : on ne cherchera pas à normaliser le diagramme, mais on précisera la valeur des pentes des droites séparant chaque région.
5. Représenter schématiquement le diagramme HR théorique : préciser les axes, les principales régions où se trouvent les étoiles, la place approximative du Soleil. Donner, en la justifiant, la pente des droites correspondant à des étoiles de même taille.
6. Donner la relation entre le flux et l'intensité spécifique.
7. Une supernova explose dans un milieu homogène de masse volumique  $\rho_{\text{ext}}$ . L'énergie libérée par l'explosion est  $E$ . Par analyse dimensionnelle, déterminer comment le rayon et la vitesse du reste de supernova évoluent avec le temps (on se contentera d'une loi d'échelle sans chercher à la normaliser). Expliquer comment on peut estimer l'âge d'un reste de supernova.

Examen (seconde partie) - 11 avril 2014 - Durée : 2h

Documents et calculatrice autorisés - Les données numériques nécessaires sont toutes en page 3 du polycopié. On s'attachera à justifier chaque réponse et à donner les résultats numériques dans des unités adaptées.

### 1 Un trou noir supermassif au centre de la Voie Lactée ?

Les mouvements de l'étoile S2 (magnitude apparente  $m_{S2} = 13.9$ ) dans la région du centre Galactique ont été étudiés à l'aide du *Very Large Telescope* (VLT). Plus proche de nous, l'étoile Alkaïd ( $\eta$  UMa, magnitude apparente  $m_A = 1.9$ ) à  $D_A = 31$  pc se situe exactement au même emplacement que S2 dans le diagramme HR.

1. Estimer la distance de l'étoile S2 (vérifier que votre résultat donne l'ordre de grandeur attendu sachant que S2 se trouve au voisinage du centre Galactique).
2. L'étoile S2 suit une orbite keplerienne, de demi-grand axe  $a = 960$  AU et de période  $T = 15.6$  yr, autour d'une source S, non détectée en lumière visible, que l'on soupçonne être un trou noir supermassif au centre de la Voie Lactée. Quelle est la masse de la source S ?
3. Que vaut la vitesse de libération  $v_{lib}(r)$  à la distance  $r$  d'un astre de masse  $M$  (démontrer ce résultat) ?
4. L'horizon d'un trou noir de masse  $M$  correspond à surface de rayon  $R_S$  autour de l'astre, tel que la vitesse de libération pour  $r < R_S$  soit supérieure à la vitesse de la lumière. Montrer que ce rayon vaut :

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \simeq 3 \text{ km} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)$$

5. L'observation multi-longueurs d'onde de l'intérieur de l'orbite de S2 donne une limite supérieure  $\theta_{max} = 0.004''$  sur la taille angulaire de la source S. Un astre de masse  $M$  est un trou noir si son rayon  $R$  est inférieur au rayon  $R_S$  ci-dessus. Peut-on conclure de la valeur de  $\theta_{max}$  que la source S est un trou noir ?
6. La magnitude apparente de l'intérieur de l'orbite de S2 est supérieure à  $m_{min} = 18$  (en corrigeant de l'absorption sur la ligne de visée). Montrer que le scénario théorique où la source S serait constituée d'un amas stellaire dense est complètement exclu (on prendra pour simplifier des étoiles identiques, de type solaire, de magnitude absolue  $M = 4.5$ ).

L'hypothèse d'un trou noir supermassif pour la source S semble très probable, car tous les scénarios alternatifs sont éliminés comme dans l'exemple de la question 6.

7. On considère une autre étoile au voisinage de ce trou noir. Sachant que la magnitude absolue du Soleil est  $M_\odot = 4.5$ , quelle est la magnitude apparente  $m_1$  de cette étoile si sa luminosité est  $L = l_* L_\odot$ .
8. Il existe des trous noirs supermassifs près de 1000 fois plus massifs que celui de la Voie Lactée. L'un des plus proches est situé dans la Galaxie M87 : sa masse est  $M_2 \simeq 7 \times 10^9 M_\odot$  et sa distance  $D_2 \simeq 16$  Mpc. Quelle est la magnitude apparente  $m_2$  d'une étoile de luminosité  $L = l_* L_\odot$  au voisinage de ce trou noir.  $R_S = 1160$

Le futur instrument GRAVITY au VLT (interférométrie IR) aura une résolution spatiale  $\theta_G \simeq 10^{-5}''$ . L'un des objectifs scientifiques est de pouvoir distinguer le mouvement d'une étoile à une distance  $R \simeq 3R_S$  d'un trou noir, pour pouvoir mettre en évidence des effets prédits par la Relativité Générale (comme par exemple une précession très importantes des trajectoires), ce qui serait une preuve directe de l'existence des trous noirs astrophysiques.

9. Parmi les trois sources suivantes, laquelle devrait-on privilégier avec GRAVITY : (i) le trou noir supermassif au centre de la Voie Lactée ; (ii) celui au centre de la galaxie M87 ; (iii) un trou noir stellaire proche, comme Cygnus X1, de masse  $M_3 \simeq 10 M_\odot$  à une distance  $D_3 \simeq 2$  kpc ? Justifiez soigneusement votre réponse.

→ pas possible

### 2 Observation d'un amas d'étoiles

On modélise un amas d'étoiles comme une sphère de rayon  $R$  homogène, de densité volumique d'étoiles  $n_*$ . On considère que toutes les étoiles ont le même rayon  $R_*$  et la même luminosité  $L_*$ .

1. L'espace entre les étoiles est vide. Il n'y a aucune diffusion de la lumière. Le seul processus d'absorption est l'interception d'un photon par une étoile. Calculer le libre parcours moyen vis à vis de ce processus.
2. Montrer que l'équation du transfert radiatif pour l'intensité spécifique (intégrée en fréquence) le long d'un rayon lumineux est donnée par (la coordonnée  $s$  est mesurée le long du rayon) :

$$\frac{dI}{ds} = -n_* \pi R_*^2 I + \frac{n_* L_*}{4\pi}$$

3. En l'absence de source lumineuse derrière l'amas, expliquer pourquoi l'intensité  $I_{amas}(\theta)$  à la surface de l'amas, le long d'un rayon sortant, ne dépend que de l'angle  $\theta$  entre le rayon et la normale à la surface.

- Déterminer  $I_{\text{amas}}(\theta)$  (en considérant toujours qu'il n'y a pas de source lumineuse derrière l'amas).
- Montrer que pour une densité d'étoiles très faible, l'intensité spécifique sortante vaut approximativement

$$I_{\text{amas}}(\theta) \simeq \frac{n_* L_* R \cos \theta}{2\pi}$$

On précisera ce que l'on doit entendre par « densité d'étoiles très faible ».

- Déterminer l'expression approximative de l'intensité spécifique sortante pour un amas ayant une densité d'étoiles très élevée, en précisant si cette expression est valable pour tout angle  $\theta$ .
- Calculer la luminosité de l'amas globulaire dans les deux cas : densité d'étoiles très faible ou très élevée.

### 3 Etoiles de la séquence principale.

On étudie les étoiles de la séquence principale entre  $2M_{\odot}$  et  $20M_{\odot}$  : la pression dominante dans ces étoiles est la pression thermique du gaz, le transport de l'énergie s'y effectue de manière radiative, l'opacité est dominée par l'opacité Thomson et la fusion nucléaire de l'hydrogène dans le cœur s'effectue majoritairement en suivant le cycle CNO. L'ensemble de l'exercice sera traité dans le cadre d'un modèle « à une zone ». Toute perte de masse de l'étoile à sa surface (vent stellaire) est négligée.

- Trouver la loi d'échelle entre le rayon  $R$ , la masse  $M$  et la température interne  $T_i$  de l'étoile.
- Obtenir la loi d'échelle entre la température de surface de l'étoile  $T_s$ , sa masse  $M$  et sa température interne  $T_i$ , puis entre la luminosité de l'étoile  $L$ , sa masse  $M$  et sa température interne  $T_i$ .
- Pourquoi la masse  $M$  diminue-t-elle un peu pendant la durée passée sur la séquence principale ?
- Pourquoi la puissance  $L_{\text{nuc}}$  produite par fusion nucléaire est-elle égale à la puissance rayonnée  $L$  à la surface ? En déduire le taux de perte de masse  $\dot{M}$  de l'étoile en fonction de  $L$ .
- Rappeler l'échelle de temps fixant la durée passée sur la séquence principale. En déduire la durée de vie sur la séquence principale en fonction de la masse  $M$ . Application numérique : en déduire l'ordre de grandeur de la durée de vie pour  $M = 20M_{\odot}$ .
- Donner l'expression de la variation relative de masse  $\Delta M/M$  pendant la totalité de la séquence principale.
- Estimer numériquement  $\Delta M/M$  et conclure.

Dans le cours, nous avons supposé que  $T_i$  était constante pour toutes les étoiles de la séquence principale. Un modèle plus précis peut être obtenu en abandonnant cette hypothèse simplificatrice, et en la remplaçant par une meilleure approximation : la fraction  $f$  de la masse où a lieu la fusion de l'hydrogène est la même pour toutes les étoiles de la séquence principale. Pour construire ce modèle, où la température  $T_i$  dépend de  $M$ , on donne l'expression de la puissance par unité de masse fournie par la fusion :  $\epsilon_{\text{CNO}} \simeq K\rho T^n$ , où  $\rho$  est la masse volumique,  $T$  la température, et  $K$  et  $n$  sont des constantes.

- Le diagramme HR observé montre que la relation entre la température de surface et la luminosité est  $L \propto T_s^{8.3}$  dans le domaine de masse considéré dans cet exercice. Que vaut l'exposant  $n$  ?  $\kappa$

### 4 Des planètes « habitables » dans l'Univers très jeune ?

On donne :  $H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ ,  $\Omega_{\text{m},0} = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$ ,  $\Omega_{\text{rel},0} = 9 \times 10^{-4}$  et  $\Omega_{\text{tot},0} = 1$  (Univers plat).

- Le rayonnement fossile est observé aujourd'hui avec une température  $T_0 \simeq 3 \text{ K}$ . On note  $a_0$  la valeur actuelle du paramètre d'échelle de l'Univers. Quelle était la température  $T(t)$  du rayonnement fossile lorsque le paramètre d'échelle valait  $a(t)$  ?
- Déterminer les valeurs limites du paramètre d'échelle  $a_{\text{min}}/a_0$  et  $a_{\text{max}}/a_0$  pour lesquelles la température du rayonnement fossile est comprise entre  $T_{\text{min}} = 0^\circ\text{C}$  et  $T_{\text{max}} = 30^\circ\text{C}$  (expression littérale et valeur numérique).
- Pour un observateur à l'époque actuelle, quelles sont les limites correspondantes  $z_{\text{min}}$  et  $z_{\text{max}}$  du décalage vers le rouge cosmologique (expression littérale et valeur numérique) ?
- Pour  $a_{\text{min}} \leq a(t) \leq a_{\text{max}}$ , déterminer quel est le terme dominant dans l'équation de Friedman.
- En ne conservant que le terme dominant dans l'équation de Friedman, montrer que la phase où le paramètre d'échelle augmente de  $a_{\text{min}}$  à  $a_{\text{max}}$  a une durée :

$$\Delta t \simeq \frac{2}{3} \frac{t_{\text{H},0}}{\sqrt{\Omega_{\text{m},0}}} \left( \left( \frac{a_{\text{max}}}{a_0} \right)^{3/2} - \left( \frac{a_{\text{min}}}{a_0} \right)^{3/2} \right)$$

- Estimer la valeur numérique de  $\Delta t$ .

Si des planètes rocheuses existent dans cet Univers très jeune, le rayonnement fossile entre  $T_{\text{min}}$  et  $T_{\text{max}}$  fournit un processus de chauffage permettant d'avoir de l'eau liquide à la surface, quelles que soient par ailleurs les

caractéristiques de la planète et de son étoile. A condition que de l'eau soit effectivement présente, les planètes rocheuses de cet Univers très jeune sont donc "habitables" pour une vie comparable à celle connue sur Terre. La présence d'étoiles et de systèmes planétaires est envisageable, car l'intervalle  $a_{\min} \leq a(t) \leq a_{\max}$  obtenu à la question (b) correspond également à la période où l'on pense que sont apparues les toutes premières étoiles dans l'Univers. Cependant, pour que des planètes rocheuses (et de l'eau) existent, il faut qu'elles soient autour d'étoiles formées à partir de gaz enrichi en métaux, ce qui implique que des étoiles massives aient déjà eu le temps de se former puis d'exploser.

7. La masse maximum  $M_{\max}$  des étoiles est donnée par la limite d'Eddington. Les étoiles les plus massives rayonnent donc avec une luminosité

$$L(M_{\max}) = K_{\text{Edd}} M_{\max},$$

avec  $K_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G m_p c}{\sigma_T}$ . En supposant que la durée de vie des étoiles est donnée approximativement par la durée de la séquence principale et que la fraction de la masse d'une étoile où l'hydrogène est en fusion est universelle et vaut  $f \simeq 0.1$ , expliquer pourquoi la durée de vie de ces étoiles très massives ne dépend pas de la valeur précise de la masse  $M_{\max}$  et calculer cette durée de vie (expression littérale et valeur numérique). Conclure sur la possibilité de disposer de gaz enrichi en métaux pour former des planètes rocheuses dans l'Univers très jeune correspond à  $a_{\min} \leq a(t) \leq a_{\max}$ .

8. En ne gardant que les termes dominants dans l'équation de Friedman, estimer l'âge de l'Univers au moment de cette brève phase pendant laquelle des planètes « habitables » ont pu exister (expression littérale et valeur numérique).

## 1 Le trou noir supermassif au centre de la Voie Lactée

- S2 et Alkaïd sont des étoiles de luminosités identiques (même emplacement dans le diagramme HR) : leur différence de magnitude est reliée uniquement à leur différence de distance :  $m_{S2} - m_A = 5 \log \frac{D_{S2}}{D_A}$  soit  $D_{S2} = D_A \times 10^{\frac{m_{S2} - m_A}{5}} \simeq 8 \text{ kpc}$ . Cela correspond à l'ordre de grandeur attendu (rayon du disque Galactique  $\sim 10 \text{ kpc}$  et Soleil plutôt en périphérie).
- On peut utiliser la 3ème loi de Kepler, dans la limite (vérifiée a posteriori) où la masse de S2 est négligeable devant celle de S. On obtient  $M_S/M_\odot = a_{AU}^3/T_{yr}^2 \simeq 3.6 \times 10^6$ . Cela représente plusieurs millions de fois la masse d'une étoile, l'hypothèse  $M_{S2} \ll M_S$  est parfaitement justifiée.
- Conservation de l'énergie mécanique par unité de masse :  $E = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = \text{cst}$ . Pour se « libérer », il faut atteindre l'infini avec au minimum une vitesse nulle, soit  $E = 0$ , d'où  $v_{\text{lib}}(r) = \sqrt{2GM/r}$ .
- $v_{\text{lib}}(r) = c$  pour  $R_S = 2GM/c^2$ .
- Si S est un trou noir, le rayon de son horizon S vaut  $R_{H,S} = 2GM_S/c^2 = (M_S/M_\odot) \times 3 \text{ km} \simeq 9.9 \times 10^6 \text{ km} \simeq 6.6 \times 10^{-2} \text{ AU}$ . A la distance  $D \simeq D_{S2} \simeq 8 \text{ kpc}$ , cela représente une taille angulaire de  $\simeq 8 \times 10^{-6}''$ , très inférieure à  $\theta_{\text{max}}$ . On est donc encore très loin de pouvoir prouver de manière directe que S est un trou noir.
- Pour reproduire la masse de S, il faut un nombre d'étoiles dans l'amas de l'ordre de  $N_* \simeq M_S/M_\odot \simeq 3.6 \times 10^6$ . La luminosité correspondante serait  $L_{\text{amas}} \simeq N_* L_\odot$ , soit une magnitude absolue  $M_{\text{amas}} = 4.5 - 2.5 \log \frac{L_{\text{amas}}}{L_\odot} \simeq 4.5 - 2.5 \log N_* \simeq -12$ . A la distance  $D \simeq D_{S2} \simeq 8 \text{ kpc}$ , on obtient une magnitude apparente  $m_{\text{amas}} = M_{\text{amas}} + 5 \log \frac{D_{S2}}{10 \text{ pc}} \simeq 2.6$ . L'amas serait beaucoup plus brillant que la limite  $m_{\text{min}} = 18$ . Le scénario est donc facilement exclu.
- La magnitude absolue de l'étoile vaut  $M = M_\odot - 2.5 \log (L/L_\odot) = 4.5 - 2.5 \log l_*$ . Sa magnitude apparente à la distance  $D_1$  vaut donc  $m_1 = M + 5 \log (D_1/10 \text{ pc}) = 19 - 2.5 \log l_*$ .
- $m_2 = M + 5 \log (D_2/10 \text{ pc}) = 36 - 2.5 \log l_*$ .
- Comparons d'abord la taille angulaire de la région recherchée, soit  $\theta = R_S/D$ . (si  $R_S$  est en A.U. et  $D$  en pc, on obtient directement le résultat en secondes d'arc) :
  - Trou noir supermassif de la Voie Lactée :  $R_{S,1} \simeq 0.07 \text{ A.U.}$ , soit  $\theta_1 \simeq 2 \times 10^{-5}''$ .
  - Trou noir supermassif de M87 :  $R_{S,2} = (M_2/M_1)R_{S,1} \simeq 140 \text{ A.U.}$ , soit  $\theta_2 \simeq \theta_1 \simeq 1 \times 10^{-5}''$ .
  - Trou noir stellaire Cygnus X1 :  $R_{S,3} = (M_3/M_1)R_{S,1} \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ A.U.}$ , soit  $\theta_3 \simeq 10^{-10}''$ .

Le trou noir stellaire est exclu, la région recherchée est beaucoup trop petite pour GRAVITY. Même un trou noir équivalent à 100 pc (distance vraiment proche) ne conviendrait absolument pas :  $\theta \simeq 2 \times 10^{-9}''$ .

Les deux trous noirs supermassifs (Voie Lactée et M87) semblent convenir du point de vue de la résolution spatiale, mais le calcul des questions précédentes montre qu'une étoile au voisinage du premier sera beaucoup plus lumineuse qu'au voisinage du second, donc plus facile à observer : il faut privilégier le trou noir supermassif au centre de la Voie Lactée (ce sera fait, à partir de 2014-2015...).

## 2 Observation d'un amas d'étoiles

- La section efficace d'absorption est ici  $\pi R_*^2$ . Le libre parcours moyen est donc  $\ell = 1/(n_* \pi R_*^2)$ .
- Les étoiles rayonnent de manière isotrope. L'émissivité est donc  $j = n_* L_*/(4\pi)$ , soit un coefficient d'absorption  $\alpha = 1/\ell = n_* \pi R_*^2$ . L'équation de transfert  $\frac{dI}{ds} = -\alpha I + j$  donne directement le résultat demandé.
- Comme l'amas est homogène à symétrie sphérique, l'intensité sortante ne dépend pas de la position à la surface de l'amas mais uniquement de l'angle entre le rayon sortant et la normale à la surface.
- En posant  $s = 0$  à l'entrée du rayon lumineux dans l'amas (avec  $I(0) = 0$  : absence de source derrière l'amas) et en notant que la distance parcourue dans l'amas est  $s = 2R \cos \theta$ , la solution est

$$I(s) = \frac{n_* L_*}{4\pi} \frac{1}{n_* \pi R_*^2} \left( 1 - e^{-n_* \pi R_*^2 s} \right) \quad \text{soit} \quad I_{\text{amas}}(\theta) = \frac{L_*}{4\pi^2 R_*^2} \left( 1 - e^{-n_* \pi R_*^2 (2R \cos \theta)} \right).$$

- On définit la densité d'étoiles critique  $n_{*,\text{cr}} = 1/(2\pi R R_*^2)$ . Pour  $n_* \ll n_{*,\text{cr}}$  (soit  $\ell \gg 2R$  : l'amas est transparent), on a  $2\pi R R_*^2 n_* \cos \theta \ll 1$  quelque soit  $\theta$  et le d.l. au premier ordre donne  $I_{\text{amas}}(\theta) \simeq \frac{L_*}{4\pi^2 R_*^2} n_* \pi R_*^2 (2R \cos \theta) = \frac{n_* R L_*}{2\pi} \cos \theta$ .
- Pour  $\theta \ll \pi/2$  et  $n_* \gg n_{*,\text{cr}}$  (soit  $\ell \ll 2R$  : l'amas est opaque), l'exponentielle est négligeable, ce qui donne :  $I_{\text{amas}}(\theta) \simeq L_*/(4\pi^2 R_*^2)$ . Elle est indépendante de  $\theta$  mais n'est bien sûr pas valide au bord ( $\theta \rightarrow \pi/2$ ).
- La luminosité de l'amas s'obtient à partir du flux sortant à la surface de l'amas :

$$L_{\text{amas}} = (4\pi R^2) F_{\text{amas}} = 4\pi R^2 \int_0^{\pi/2} I(\theta) \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta = 8\pi^2 R^2 \int_0^1 I(\mu = \cos \theta) \mu d\mu.$$

- A faible densité  $n_* \ll n_{*,\text{cr}}$ , on obtient  $L_{\text{amas}} \simeq 8\pi^2 R^2 \int_0^1 \frac{n_* R L_*}{2\pi} \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{3} R^3 n_* L_* = N_* L_*$ , où  $N_* = (4\pi R^3/3) n_*$  est le nombre total d'étoiles dans l'amas.
- A haute densité  $n_* \gg n_{*,\text{cr}}$ , on obtient  $L_{\text{amas}} \simeq 8\pi^2 R^2 \int_0^1 \frac{L_*}{4\pi^2 R_*^2} \mu d\mu \simeq \left(\frac{R}{R_*}\right)^2 L_* = \frac{1}{4} \Delta N_* L_*$ , où  $\Delta N_*$  est le nombre d'étoiles dans une couche d'épaisseur  $\ell$  à la surface de l'amas :  $\Delta N_* = 4\pi R^2 \ell n_* = \frac{4\pi R^2 n_*}{n_* \pi R_*^2} = 4 \left(\frac{R}{R_*}\right)^2$ . L'expression de  $I(\mu)$  utilisée n'est pas strictement valide pour  $\mu \rightarrow 0$  ( $\theta \rightarrow \pi/2$ ) mais l'intégrale est dominée par la contribution autour de  $\mu = 1$  ( $\theta = 0$ ) ce qui justifie ce calcul approché.

### 3 Etoiles de la séquence principale.

- Cours : à partir du théorème du Viriel et de l'équation d'état du gaz parfait, on trouve  $R \propto M.T_i^{-1}$ .
- Cours : l'opacité Thomson est une constante, donc la loi d'échelle pour le libre parcours moyen est  $\ell \propto \rho^{-1} \propto R^3.M^{-1}$ .  
Le transport radiatif entraîne  $T_s \propto (\ell/R)^{1/4} T_i \propto (R^2.M^{-1})^{1/4} T_i \propto (M.T_i^{-2})^{1/4} T_i \propto M^{1/4}.T_i^{1/2}$ .  
Loi de Stefan :  $L \propto R^2 T_s^4 \propto (M.T_i^{-1})^2 (M^{1/4}.T_i^{1/2})^4 \propto M^3$  (la luminosité ne dépend que de  $M$ ).
- La fusion nucléaire dans le cœur de l'étoile convertit une fraction de la masse en énergie.
- L'étoile est en régime stationnaire, la puissance produite dans le cœur par fusion nucléaire équilibre exactement la puissance rayonnée à la surface :  $L_{\text{nuc}} = L$  pour que l'énergie totale  $E$  soit constante (sinon, le rayon de l'étoile varierait). Par ailleurs, la fusion convertissant de la masse en énergie,  $L_{\text{nuc}} = \dot{M}c^2$ . On déduit  $\dot{M} = L/c^2$ .
- La durée de la séquence principale est donnée par l'échelle de temps nucléaire  $t_{\text{nuc}} = \frac{f\epsilon_{\text{nuc}}Mc^2}{L}$ , où  $f$  est la fraction de la masse de l'étoile qui est en fusion, et  $\epsilon_{\text{nuc}}$  l'efficacité de la fusion nucléaire de l'hydrogène en hélium. On trouve  $t_{\text{nuc}} \propto M/L \propto M^{-2}$ . Pour le Soleil, la durée de vie est de l'ordre de 10 Gyr, donc pour une étoile de  $20M_{\odot}$ , on obtient  $10 \text{ Gyr} \times (20/1)^{-2} \simeq 30 \text{ Myr}$ .
- On déduit  $\frac{\Delta M}{M} \simeq \frac{\dot{M}t_{\text{nuc}}}{M} \simeq \frac{L t_{\text{nuc}}}{Mc^2} \simeq f\epsilon_{\text{nuc}}$ .
- Pour  $f \simeq 0.1$  et  $\epsilon_{\text{nuc}} = 0.7\%$ , on trouve  $\Delta M/M \simeq 7 \times 10^{-4}$  : la diminution de la masse durant la totalité de la séquence principale est extrêmement faible et on peut considérer la masse constante en bonne approximation.
- La loi d'échelle pour la puissance nucléaire est  $L_{\text{nuc}} \propto fM\epsilon_{\text{CNO}} \propto M\rho T_i^n \propto M^2 R^{-3} T_i^n \propto M^{-1} T_i^{n+3}$ . En égalant à la luminosité  $L \propto M^3$ , on trouve  $M^3 \propto M^{-1} T_i^{n+3}$ , soit  $T_i \propto M^{\frac{4}{n+3}}$ . Avec la loi d'échelle pour la température interne, on obtient  $T_s \propto M^{1/4}.T_i^{1/2} \propto M^{\frac{n+11}{4(n+3)}}$ . Comme  $L \propto M^3$ , on obtient  $L \propto T_s^{\frac{12(n+3)}{n+11}}$ . D'après les observations  $\frac{12(n+3)}{n+11} \simeq 8.3$ , soit  $n \simeq 15$  (valeur très élevée en accord avec la forte dépendance de la fusion à la température).

### 4 Des planètes « habitables » dans l'Univers très jeune ?

- Le rayonnement fossile est décalé vers le rouge d'un facteur  $1+z = \frac{a_0}{a(t)}$  donc  $T(t) = T_0 \frac{a_0}{a(t)}$ .
- $a_{\text{min}}/a_0 = T_0/T_{\text{max}}$  et  $a_{\text{max}}/a_0 = T_0/T_{\text{min}}$ . Valeurs numériques :  $a/a_{\text{min}} \simeq 3/(273.15 + 30) = 9.9 \times 10^{-3}$  et  $a/a_{\text{max}} \simeq 3/(273.15 + 0) = 1.1 \times 10^{-2}$ .
- $z_{\text{min}} = (a_{\text{max}}/a_0)^{-1} - 1$  et  $z_{\text{max}} = (a_{\text{min}}/a_0)^{-1} - 1$ . Valeurs numériques :  $z_{\text{min}} = 90$  et  $z_{\text{max}} = 100$ .
- Il faut comparer le terme lié à la matière non relativiste,  $\Omega_{\text{m},0}(a/a_0)^{-3}$ , le terme lié à l'énergie (ou la matière ultra-relativiste),  $\Omega_{\text{rel},0}(a/a_0)^{-4}$  et le terme lié à l'énergie noire,  $\Omega_{\Lambda,0}$ . Pour  $a/a_0 \simeq 10^{-2}$ , on obtient respectivement  $3 \times 10^5$ ,  $9 \times 10^4$  et 0.7. C'est donc clairement le terme de matière qui est dominant.
- La durée s'écrit

$$\Delta t = \int_{a_{\text{min}}}^{a_{\text{max}}} \frac{dt}{da} da = \int_{a_{\text{min}}}^{a_{\text{max}}} \frac{da}{\dot{a}}$$

En ne gardant que le terme dominant dans l'équation de Friedman, on obtient  $\dot{a}/a = H_0 \sqrt{\Omega_{\text{m},0}} (a/a_0)^{-3/2}$ , soit

$$\Delta t = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{\text{m},0}}} \int_{a_{\text{min}}}^{a_{\text{max}}} \frac{a^{1/2} da}{a_0^{3/2}} = \frac{2}{3} \frac{t_{\text{H},0}}{\sqrt{\Omega_{\text{m},0}}} \left( \left( \frac{a_{\text{max}}}{a_0} \right)^{3/2} - \left( \frac{a_{\text{min}}}{a_0} \right)^{3/2} \right)$$

- Pour  $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ ,  $t_{\text{H},0} = 14 \text{ Gyr}$ , ce qui donne  $\Delta t \simeq 2 \times 10^{-4} t_{\text{H},0} \simeq 3 \text{ Myr}$ . Estimer la valeur numérique de  $\Delta t$ .
- La durée de vie dépend du réservoir d'énergie, qui dans le cas de la séquence principale est proportionnel à la masse d'hydrogène du cœur, donc à  $M$ , et de la puissance à laquelle cette énergie est rayonnée. Pour une étoile à la limite d'Eddington,  $L$  est aussi proportionnel à  $M$ . Le rapport réservoir sur puissance est donc une constante qui ne dépend pas de  $M$ . La durée de vie est donnée par l'échelle de temps nucléaire :  $t_{\text{nuc}}(M_{\text{max}}) = f\epsilon_{\text{nuc}} \frac{M_{\text{max}} c^2}{L} = \frac{f\epsilon_{\text{nuc}} c^2}{K_{\text{Edd}}} = \frac{f\epsilon_{\text{nuc}} \sigma_{\text{T}} c}{4\pi G m_{\text{p}}}$ , où  $\epsilon_{\text{nuc}} = 7 \times 10^{-3}$  est l'efficacité de la fusion nucléaire de l'hydrogène. Valeur numérique :  $t_{\text{nuc}}(M_{\text{max}}) \simeq 0.3 \text{ Myr}$ . Cette durée est petite devant  $\Delta t$ , ce qui laisse la possibilité de disposer de gaz enrichi en métaux pour former des planètes rocheuses dans cet Univers très jeune.
- En partant du Big Bang, on passe par deux ères : celle dominée par l'énergie, avec  $\dot{a}/a \simeq H_0 \sqrt{\Omega_{\text{rel},0}} (a/a_0)^{-2}$ , puis celle dominée par la matière, avec  $\dot{a}/a \simeq H_0 \sqrt{\Omega_{\text{m},0}} (a/a_0)^{-3/2}$ . La transition se fait pour l'équivalence entre les deux termes, soit  $\sqrt{\Omega_{\text{m},0}} (a/a_0)^{-3/2} \simeq \sqrt{\Omega_{\text{rel},0}} (a/a_0)^{-2}$ , ce qui donne  $a_{\text{eq}}/a_0 \simeq \Omega_{\text{rel},0}/\Omega_{\text{m},0}$ . On obtient :

$$t = \int_0^a \frac{da}{\dot{a}} \simeq t_{\text{H},0} \left( \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\text{rel},0}}} \int_0^{a_{\text{eq}}} \frac{ada}{a_0^2} + \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\text{m},0}}} \int_{a_{\text{eq}}}^a \frac{a^{1/2} da}{a_0^{3/2}} \right)$$

$$\simeq t_{\text{H},0} \left( \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{\text{rel},0}}} \left( \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} \right)^2 + \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\text{m},0}}} \left( \left( \frac{a}{a_0} \right)^{3/2} - \left( \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} \right)^{3/2} \right) \right) \simeq t_{\text{H},0} \left( \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\text{m},0}}} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{3/2} - \frac{\Omega_{\text{rel},0}^{3/2}}{6\Omega_{\text{m},0}^2} \right)$$

Pour  $a/a_0 \simeq 10^{-2}$  (cf. question (b)), on obtient  $t \simeq 1 \times 10^{-3} t_{\text{H},0} \simeq 14 \text{ Myr}$ .

La conclusion de cet exercice est donc qu'il a pu exister des planètes "habitables" pendant une brève période de 3 Myr ayant lieu 14 Myr après le Big Bang... Naturellement, le calcul est trop naïf : il faudrait par exemple étudier la durée nécessaire pour la formation des planétésimaux puis des planètes. Dans le système solaire, cette durée est estimée à 10-100 Myr. Dans un Univers très jeune, avec moins de métaux et de poussière, cette durée peut être différente mais est sans doute supérieure supérieure à 3 Myr, la durée "habitable" estimée ci-dessus...