

Examen MMP durée : 2H30

NB : Le poly et les notes de cours/TDs sont autorisés. Il est inutile de redémontrer des résultats vus en cours ou TDs. Mais donner une référence précise aux exercices, aux théorèmes ou propositions utilisés dans les démonstrations.
Sont interdits : les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1

Parmi les applications $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui suivent, déterminer celles qui sont des distributions sur \mathbb{R} . Expliquer.

- 1) $\langle u, \varphi \rangle = \varphi(0)^2$,
- 2) $\langle u, \varphi \rangle = \int_0^1 t^k \varphi^{(k)}(t) dt, k \in \mathbb{N}$,
- 3) $\langle u, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(k_0)$ où $k_0 \in \mathbb{Z}$ et $\langle u, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j)$.

Exercice 2

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on note $\tilde{\varphi}$ la fonction $\tilde{\varphi}(r, \theta) = \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour $r > 0$.

- 1) Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta}$.

En déduire que si $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ avec $r > 0$, on a

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x, y) = e^{i\theta} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right) (r, \theta).$$

- 2) Soit $f(x, y) = \frac{1}{x + iy}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.
- 3) Montrer que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x + iy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x, y) dx dy = -2\pi \varphi(0, 0).$$

- 4) En déduire une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\partial E}{\partial y} = \delta_0,$$

où δ_0 est la masse de Dirac en $(0, 0)$.

Exercice 3

On rappelle que la *classe de Schwartz* est l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, \forall m \in \mathbb{N} \text{ on a } |x^m \varphi^{(n)}(x)| \rightarrow 0, |x| \rightarrow +\infty \},$$

où $\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction régulière φ .
 Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\widehat{\varphi}$ sa transformée de Fourier. Enfin, $\|\cdot\|_2$ désigne la norme usuelle de l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

- 1) Quelle relation existe-t-il entre $\|\varphi'\|_2$ et $\|\widehat{\varphi}\|_2$?
- 2) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$2 \int_{\mathbb{R}} t\varphi(t)\varphi'(t)dt = - \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(t)dt.$$

- 3) Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, à valeurs réelles et telle que $\|\varphi\|_2 = 1$.
 Montrer que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq \|t\varphi\|_2 \|\xi\widehat{\varphi}\|_2.$$

Ce résultat est connu sous le nom "Principe d'incertitude d'Heisenberg".

Exercice 4

On rappelle que la famille

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

est une base hilbertienne de $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

On considère l'espace de Hilbert complexe $H = L^2([0, \pi]; \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel $(f, g) = \int_0^\pi \bar{f}g$ pour $f, g \in H$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$.

- 1) Montrer que $(\varphi_n)_n$ est une famille orthonormée dans H .
- 2) Pour $f \in H$, on note

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0, \\ -f(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Soit $f \in H$ telle que $(\varphi_n, f) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Vérifier que $\tilde{f} \in L^2([-\pi, \pi])$ et montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}|^2 = 0.$$

- 3) En déduire que la famille $(\varphi_n)_n$ est une base hilbertienne de H .

Exercice 5

Dans tout ce qui suit $*$ désigne le produit de convolution.

- 1) Donner un exemple de fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\xi) \neq 0$.
- 2) Montrer, en utilisant la transformée de Fourier, qu'il n'existe pas $e \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $e * f = f * e = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- 3) Résoudre l'équation $f * f = f$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $f(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. On pose, $\forall n \geq 1$,

$$T_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y^n)g(y)dy.$$

- 1) Vérifier que $T_n(f)(x)$ a bien un sens pour tout x dans \mathbb{R} et tout n .
- 2) Montrer que $T_n(f)$ est continue et bornée sur \mathbb{R} .
- 3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f)(x) = Cf(x)$ où C est une constante à déterminer.

Exercice 7

Dans tout cet exercice, on se placera dans le cadre **réel**.

Rappel : Soit H un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_n \subset H$ une suite. On dit que x_n converge faiblement vers x dans H si pour tout y dans H , $(x_n, y) \rightarrow (x, y)$. On dit que x_n converge fortement vers x dans H si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

- 1) Soit H un espace de Hilbert de dimension finie. Montrer que la convergence faible est équivalente à la convergence forte.
Est-ce encore vrai en dimension infinie ? Expliquer.
- 2) Soit I un intervalle ouvert quelconque $\subset \mathbb{R}$, vérifier que la convergence faible dans $L^2(I)$ implique la convergence au sens des distributions sur I .
Donner un exemple de suite $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ qui converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais pas faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$.
- 3) Déterminer la limite faible dans $L^2(0, \pi)$ de $f_n(x) = \frac{\sin^2 n^3 x}{x^3}$ et la limite faible dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite $u_n(x) = \frac{n^2 - 2nx}{(1+(x-n)^2)(1+x^2)}$?
Vérifier d'abord que ces fonctions sont dans L^2 .