

Module n° 3

En mathématiques, il existe différents types de moyennes, notamment la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique. On va définir ces moyennes, les comparer et en donner une illustration graphique.

1 Définitions

Définition 1.0.1. Soient a et b deux nombres réels positifs.

La *moyenne arithmétique* de a et b est le réel $\frac{a+b}{2}$.

La *moyenne géométrique* de a et b est le réel \sqrt{ab} .

Exemple. Vérifier que si a et b sont deux côtés d'un rectangle, alors $\frac{a+b}{2}$ est le côté d'un carré ayant le même périmètre que ce rectangle et \sqrt{ab} le côté d'un carré ayant même aire que ce rectangle.

2 Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique

1. En prenant $a = 2$ et $b = 8$, calculer les deux moyennes de ces nombres et comparer les résultats.
2. Refaire la même opération en prenant deux autres nombres positifs a et b tels que $a < b$.
3. À l'aide de la calculatrice, utiliser des listes pour comparer les moyennes arithmétique et géométrique de plusieurs valeurs pour les nombres a et b , toujours avec $a < b$, et a et b positifs.

Quelle conjecture peut-on faire concernant ces deux moyennes ?

4. Montrer que la différence $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ est égale à $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$.
5. En déduire la comparaison de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique.

3 Illustration graphique

On considère un demi-cercle de diamètre $[AB]$, C un point de ce demi-cercle, O le milieu de $[AB]$ et H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC .

On pose $a = AH$ et $b = HB$.

1. En utilisant la figure, exprimer la distance AB à l'aide de a et de b . En déduire la distance OC à l'aide de a et b .
2. Exprimer OH en fonction de a et b .
3. Dans le triangle OCH , exprimer la distance CH à l'aide de a et b .
4. En déduire la comparaison des moyennes arithmétique et géométrique de a et b .