

**NB :** cette fiche reprend quelques techniques nécessaires : elle ne constitue pas un objectif, mais un pré-requis!

## Quelques conseils de rédaction

Désormais, on va vous demander de construire pas à pas un raisonnement, vous devez donc accepter de commencer à rédiger votre solution (dans le bon ordre) même lorsque vous ne voyez pas comment conclure! Lorsque vous lisez la question posée, ne vous attachez pas d'abord aux hypothèses, mais plutôt à la conclusion : que vous est-il demandé de faire? Comment le faire (définition et méthodes)?

Vous ferez aussi attention à ce que toute variable utilisée dans vos raisonnements sont correctement introduite au préalable, et vous éviterez l'emploi abusif des quantificateurs existentiel et universel ( $\exists, \forall$ ). Ce sont des *symboles logiques*, à utiliser dans les formules, pas des raccourcis à utiliser dans des phrases.

## Stratégies générales pour démontrer une assertion

Soit une assertion  $P$  à démontrer. Trois méthodes principales :

- la preuve par déduction (montrer que pour un bon  $A$ , on a  $A \Rightarrow P$ , puis montrer  $A$ ),
- la preuve par disjonction de cas,
- la preuve par l'absurde (montrer que si  $\neg P$ , alors on aboutit à une absurdité).

## Stratégies pour démontrer une implication

Soit une implication  $P \Rightarrow Q$  à démontrer. Là encore, trois méthodes principales :

- la preuve directe : "Supposons que  $P$  est vraie. Montrons que  $Q$  est vraie.",
- la preuve par *contraposée*, qui revient à montrer que  $\text{Non}(Q) \Rightarrow \text{Non}(P)$ ,
- la preuve par l'absurde : "Supposons au contraire que  $P$  est vraie et  $Q$  est fausse. Montrons que l'on aboutit à une contradiction."

## Stratégies pour démontrer une équivalence

Soit une équivalence  $P \Leftrightarrow Q$  à démontrer. Trois méthodes principales :

- procéder par double implication :  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow P$ ,
- raisonner par équivalences :  $P \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P_n \Leftrightarrow P$  (avec un certain nombre d'intermédiaires),
- la preuve par disjonction de cas ( $P$  étant soit vrai soit faux) :  $P \Rightarrow Q$  et  $\text{Non}(P) \Rightarrow \text{Non}(Q)$ .

## Stratégies pour démontrer une propriété universelle ou existentielle

**Propriété universelle** Pour démontrer  $\forall x \in E, P(x)$  (où l'assertion  $P(x)$  dépend de la variable  $x$ ) :

- la preuve commence par : “Soit  $x \in E$ ”, **arbitraire, fixé**,
- puis vous montrez que  $P(x)$  est vraie.

**Remarque 1.** Dans le cas particulier où  $E = \mathbb{N}$ , on peut aussi procéder **par récurrence**.

**Propriété existentielle** Pour démontrer  $\exists x \in E, P(x)$ , on peut essayer de *construire* un élément  $x$  qui vérifie  $P$ , en résolvant une équation par exemple, mais ce n'est pas toujours facile ! Sinon, on déduit souvent cette propriété existentielle d'une autre propriété existentielle, donnée par le cours par exemple.

**Propriété d'existence et d'unicité** Pour démontrer  $\exists! x \in E, P(x)$ , vous pouvez procéder de deux façons différentes :

- vous prouvez dans l'ordre que vous préférez :
  - **Existence** à l'aide des méthodes précédentes,
  - **Unicité** “Soient  $x$  et  $x' \in E$  tels que  $P(x)$  et  $P(x')$ . Montrons que  $x = x'$ .”
- ou bien par *analyse-synthèse* :
  - **Analyse** “Supposons qu'il existe  $x \in E$  tel que  $P(x)$ .” Vous prouvez alors que  $x$  est nécessairement égal à un élément  $x_0$  bien déterminé,
  - **Synthèse** vous vérifiez enfin que  $x_0$  vérifie  $P$  (*i.e.*  $P(x_0)$  est vraie).