

## Ensembles et Applications.

1. (★★★★★) Vérifier les *tautologies* (i.e. des assertions **vraies** quelque soient les valeurs de vérité des variables  $A$ ,  $B$  et  $C$ ) :
  - (i)  $\text{non}(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B)$  (première loi de DE MORGAN),
  - (ii)  $\text{non}(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B)$  (seconde loi de DE MORGAN),
  - (iii)  $(A \text{ et } (B \text{ ou } C)) \Leftrightarrow (A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C)$  (première distributivité),
  - (iv) (**Bonus**)  $(A \text{ ou } (B \text{ et } C)) \Leftrightarrow (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C)$  (seconde distributivité),
2. (★★★★★) Transformer les phrases suivantes en propositions mathématiques à l'aide de quantificateurs :
  - (i) Pour tout réel  $x$ , le carré de  $x$  est positif,
  - (ii) Si un nombre réel est négatif, alors on obtient un nombre positif en le multipliant par  $-2$ ,
  - (iii) Pour tout nombre complexe  $z$ , il existe un nombre complexe  $y$  tel que  $y^2 - 3y = z$ ,
  - (iv) (**Bonus**) Si un nombre réel admet une racine carrée, alors ce nombre est positif.
3. (★★★★★) Donner une relation entre les ensembles  $A$  et  $B$  dans chacun des cas suivants : (inclusion, égalité, ...) :
  - (i)  $A = \mathbb{R}$  et  $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 \leq 0\}$ ,
  - (ii)  $A = \mathbb{R}_+^*$  et  $B = \{x \in \mathbb{R} | 2x \geq x\}$ ,
  - (iii)  $A = \{2x | x \in C\}$  et  $B = \{20x | x \in \mathbb{R}\}$  avec  $C \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_+$ ,
  - (iv)  $A = \{2x | x \in C\}$  et  $B = \{20x | x \in \mathbb{R}\}$  avec  $C \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N}$ .
4. (★★★★★) Écrire la négation des propositions suivantes, et dire laquelle des deux versions est vraie :
  - (i)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$ ,
  - (ii)  $\exists y \in \mathbb{R}, (y \geq 0) \text{ et } (y \leq 0)$ ,
  - (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}_+^*, x = y^2))$ ,
  - (iv) (**Bonus, ★★★★★**)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \mu_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - 1| \leq \mu_\varepsilon \Rightarrow |x^2 - 1| \leq \varepsilon)$  (preuve délicate).
5. (★★★★★) Démontrer<sup>1</sup> les formules suivantes, valables pour  $n \in \mathbb{N}$  :
  - (i) 
$$\sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

---

1. On pourra raisonner par récurrence sur  $n \geq 0$ .

$$(ii) \sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(iii) \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$