

## Révisions générales.

1. (★★★★★) Résoudre l'équation  $x^2 + 3x + 3 = 0$ .
2. (★★★★★) Trouver deux complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout complexe  $z$  différent de 0 et  $-1$ , on ait :  $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z+1}$  (exemple de décomposition en éléments simples).
3. (★★★★★) Résoudre l'équation différentielle  $y' - 3y = 0$ .
4. (★★★★★) Donner le domaine ainsi qu'une primitive des fonctions suivantes :
  - (i)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 3$ ,
  - (ii)  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) - 3$  (où  $\mathbb{R}_+^*$  est un raccourcis pour  $\mathbb{R} \cap ]0, +\infty[$ ),
  - (iii)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^x$ .
5. (★★★★★) Que pouvez-vous dire du comportement de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x}$ , pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ ? Même question pour la fonction  $g(x) = \frac{e^x}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  ( $\mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ).
6. (★★★★★) Quels sont les diviseurs (positifs) de 24? Même question pour 63, 125, et 2014.
7. (★★★★★) Calculer l'intégrale  $\int_0^\pi \sin(2x) dx$ .
8. (★★★★★) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 5u_n + 3$  pour tout entier  $n$ . Expliciter la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (i.e. expliciter la valeur du terme général  $u_n$ ).
9. (★★★★★) On appelle *nombre parfait* un nombre (entier) égal à la moitié de la somme de ses diviseurs positifs. Pouvez-vous en citer un? Et un second si vous en avez le temps?
10. (★★★★★) Que vaut<sup>1</sup> la somme :  $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$  pour un entier naturel  $n > 0$ ?
11. (★★★★★) Combien y a-t-il de nombres *premiers*<sup>2</sup>? Le démontrer **rigoureusement**.
12. (★★★★★) Calculer, en fonction de  $\theta \in \mathbb{R}$  et de  $n \in \mathbb{N}$ , la somme suivante :  $\sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta)$ .
13. (★★★★★) Calculer, en fonction de  $\theta \in \mathbb{R}$  et de  $n \in \mathbb{N}$ , le produit suivant :  $\prod_{k=0}^{k=n} 2 \cos(2^k \theta)$ .

---

1. La formule  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , valable pour  $k \neq 0$ , pourrait être utile...

2. On rappelle qu'un nombre entier  $p \geq 2$  est dit premier s'il n'a comme diviseurs positifs que 1 et  $p$ .

14. (★★★★★) On considère l'équation différentielle  $E : y'(x) + y(x) = x$  (d'inconnue  $y$ , fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ ). Quelles sont les solutions de  $E$ ? Pouvez-vous démontrer l'unicité d'une solution  $y_0$  valant 0 en 0 (i.e.  $y_0$  vérifiant  $E$  et  $y_0(0) = 0$ ). Pouvez-vous expliciter cette solution ?

---

**Remarque 1.** On rappelle que les symboles  $\sum$  et  $\prod$  servent à écrire de manière condensée les sommes et produits.

Autrement dit :  $\sum_{k=1}^{k=n} f(k)$  est une forme abrégée de la somme  $f(1) + f(2) + \dots +$

$f(n-1) + f(n)$  pour  $n \geq 1$ , et  $\prod_{k=1}^{k=n} g(k)$  est une forme abrégée du produit  $g(1) \times g(2) \times \dots \times g(n-1) \times g(n)$  pour  $n \geq 1$ .

**Remarque 2.** Souvent, l'indice  $k$  n'est précisé qu'une seule fois, pour la valeur initiale ( $k = 1$ ) :  $\sum_{k=1}^{k=n} f(k) = \sum_{k=1}^n f(k)$ . Et lorsque ce n'est pas ambigu, on peut même

ne pas préciser le nom de l'indice pour la première valeur :  $\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_1^n f(k)$ .