

- Ex.1) Calculer le développement limité à l'ordre 4 de  $x \mapsto e^x - 1 - \sin(x)$  en 0.
- Ex.2) Calculer le développement limité à l'ordre 5 de  $\tan$  en 0, d'abord en l'écrivant comme  $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , et ensuite en utilisant la formule de TAYLOR-LAGRANGE, et le fait que  $\tan' = 1 + \tan^2$  et en procédant par récurrence.
- Ex.3) La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  admet-elle un développement limité d'ordre  $n \geq 1$  en 0? Et en  $a > 0$  quelconque?
- Ex.4) Calculer le développement limité (souvent abrégé DL) de  $x \mapsto \ln(1+x)$  à l'ordre 6 en 0, à l'aide de la formule de TAYLOR-YOUNG.
- Ex.5) Quelques DLs (où  $DL_n(a)$  signifie un développement limité d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  en  $a \in \text{Dom}(f)$ ) :

$$(a) \quad DL_4(0) \text{ de } x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}, \quad (c) \quad DL_4(0) \text{ de } x \mapsto \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right),$$

$$(b) \quad DL_4(0) \text{ de } x \mapsto (\ln(1+x))^2, \quad (d) \quad DL_3(0) \text{ de } x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

- Ex.6) Trouver les limites suivantes :

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}, \quad (d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}_+^*,$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}, \quad (e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - b^x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}, \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(x) - \sin(x)} - 1}{x \cos(x) - \ln(1+x) - x^2/2},$$

- Ex.7) Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 de  $x \mapsto \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{3}{x^2}}$ .

- Ex.8) Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 de  $x \mapsto (\cos(x))^{1+\sin(x)}$ .

- Ex.9) Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 de  $x \mapsto \frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))}$ .

- Ex.10) Étudier le prolongement en 0 de la fonction définie sur  $]0, 1[$  par  $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)}$ .

- Ex.11) Déterminer les limites suivantes :

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3},$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cosh\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x^2},$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}.$$

- Ex.12) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : x \mapsto |x|^n$  admet-elle un développement limité d'ordre  $n$  en 0?